

# НАЧАЛА ЕВКЛИДА.

# НАЧАЛА ЕВКЛИДА

СЪ ПОЯСНИТЕЛЬНЫМЪ ВВЕДЕНІЕМЪ

И

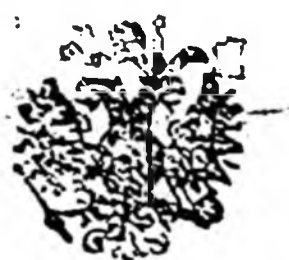
## ТОЛКОВАНІЯМИ.

Μηδείς ἀγεωμέτρητος εἰσὶτω  
μοῦ τὴν στέγην.

Platon.

Обыкновеннаго Профессора Императорскаго Университета Св. Владимира

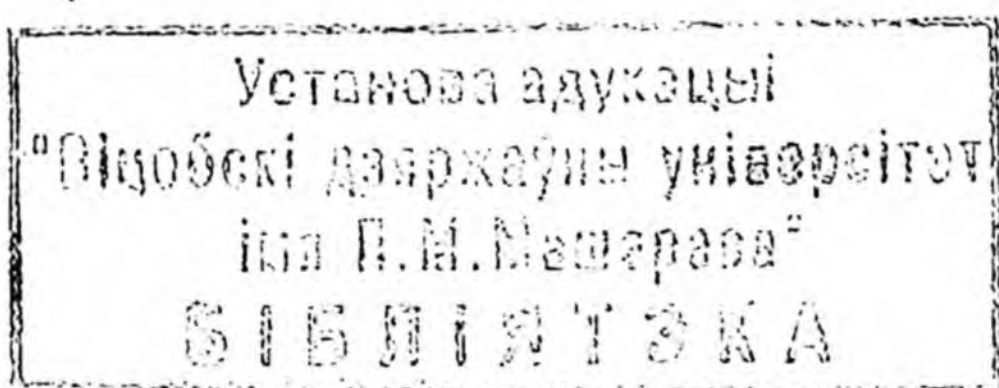
**М. Е. Ващенко-Захарченко.**



КІЕВЪ.

Въ типографіи Императорскаго Университета Св. Владимира.

1880.





Печатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Университета Св.  
Владимира.

Ректоръ *Н. Х. Бунге.*

## ПРЕДИСЛОВІЕ.

---

Les grands génies ont leur empire; ils  
sont vus, non des yeux, mais des esprits;  
c'est assez.

*Pascal.*

Нельзя было не обратить вниманія на усилія геометровъ послѣд-  
няго времени разъяснить начала Геометріи и критически разобрать  
„Начала“ Евклида. Такимъ образомъ создалась громадная математи-  
ческая литература въ этомъ направленіи. Французскіе, германскіе,  
итальянскіе, англійскіе, русскіе и американскіе геометры принесли  
дань направленію времени. Философы съ своей стороны принимали  
горячее участіе въ этой дѣятельности, такъ какъ происхожденіе началъ  
Геометріи, и вообще всѣхъ понятій, есть одна изъ важныхъ задачъ  
философіи.

Результатомъ такой усиленной дѣятельности было ближайшее  
разъясненіе значенія началъ Геометріи, полное признаніе превосход-  
ства „Началъ“ Евклида и стараніе ввести ихъ какъ руководство въ  
школахъ. Гуель во Франціи, Бальцеръ въ Германіи, Бріоски и Бетти  
въ Италіи стараются провести эту мысль и издали руководства для  
этой цѣли. Въ Англійи „Начала“ Евклида всегда были школьнымъ  
руководствомъ по Геометріи. Такое введеніе важно не вслѣдствіе од-  
ного превосходства „Началъ“ Евклида, но и въ педагогическомъ  
отношеніи. Преподаваніе математики въ гимназіяхъ имѣетъ двоякую  
цѣль: во первыхъ, правильное развитіе способовъ мышленія—это цѣль пе-  
дагогическая, одинаковая для всѣхъ, она есть предметъ общаго образо-  
ванія; во вторыхъ—положить твердыя начала математики для дальнѣйшаго  
изученія ея какъ науки во всѣхъ ея отрасляхъ.

Въ педагогическомъ отношеніи Геометрія имѣетъ преимущество передъ Алгеброй; Алгебра относительно Геометріи тоже, что письмо относительно литературы. Алгебра есть символическое письмо, съ помощью котораго выражается количественная зависимость между величинами, слѣдовательно наука скорѣе механическая, нежели мыслительная. Геометрія-же есть наука постояннаго мышленія, часто съ усиленной дѣятельностью воображенія. Вслѣдствіе этого преподаватель долженъ, алгебраическія тождества, для уясненія и удержанія въ памяти, сопровождать *всегда* геометрическими представленіями и поясненіями, — что принесетъ несомнѣнную пользу.

Введеніе опредѣленнаго руководства по Геометріи и вообще по всѣмъ предметамъ, имѣетъ весьма важное педагогическое значеніе: этимъ, во первыхъ, облегчается дѣятельность преподавателя, часто неопытнаго и не на столько знакомаго съ дѣломъ, чтобы правильно употребить въ дѣло первое попавшееся подъ руку руководство, а во вторыхъ, этимъ достигается однообразіе подготовки. Безъ сомнѣнія введеніе одного опредѣленнаго руководства во всѣ школы есть дѣло весьма трудное, но этому можно помочь толковой программой, въ которой было-бы подробно указано, что и какъ?

Въ продолженіи десяти лѣтъ, я былъ преподавателемъ элементарной математики въ Кіевскомъ кадетскомъ корпусѣ (нынѣ Военная гимназія), слѣдовательно имѣлъ достаточно времени, чтобы выработать мнѣніе, имѣющее извѣстное значеніе. Кромѣ этого я часто бывалъ экзаменаторомъ при поступленіи воспитанниковъ гимназій въ университетъ и депутатомъ отъ Округа въ различныхъ гимназіяхъ и реальныхъ училищахъ. Изъ такой долгой практики я вынесъ твердое убѣжденіе, что ничто не вліяетъ такъ вредно на правильное математическое развитіе воспитанниковъ, какъ большое разнообразіе руководствъ, отъ чего происходитъ не знаніе Геометріи, какъ строгой логической системы, а знаніе какой-то смѣси теоремъ, часто весьма бойкое, но безъ всякаго логическаго порядка.

Не въ знаніи большаго числа теоремъ, не въ быстромъ рѣшеніи геометрическихъ задачъ, а въ пониманіи строго-логической послѣдовательности самыхъ необходимыхъ теоремъ, заключается вся важность педагогическаго значенія Геометріи въ общемъ образованіи юношества.

Преподаваніе Геометріи должно быть такъ ведено, чтобы воспитанникъ сознавалъ, что такая-то теорема не можетъ быть доказана

прежде такой-то, а если и можетъ, то почему поставлена въ такомъ-то мѣстѣ? Такимъ образомъ, при преподаваніи, въ геометрическую систему войдетъ небольшое число самыхъ необходимыхъ теоремъ, остальные-же, относящіяся къ извѣстному отдѣлу, должны войти въ видѣ упражненій въ классѣ или внѣ класса. При такомъ способѣ изложенія Геометріи, преподаватель будетъ въ состояніи настоять на томъ, чтобы воспитанники не только твердо знали теоремы курса, но и помнили бы ихъ порядокъ.

Тщательное вниманіе должно быть обращено на *аксіомы, опредѣленія и допущенія* и выяснены, постепенно, ихъ смыслъ и значеніе. Эта часть у насъ почти ускользаетъ отъ вниманія воспитанниковъ.

Далѣе необходимо выяснить:

1) Что такое теорема и проблема? какая между ними разница? изъ какихъ частей состоитъ теорема? что такое обратная теорема? всегда-ли она возможна? примѣры случаевъ возможности и невозможности.

2) Что такое доказательство? какія бываютъ роды доказательствъ? постоянное выясненіе *синтеза, анализа и приведенія къ нелѣпости* или *аналогическаго способа*. Для такого выясненія преподаватель долженъ пользоваться теоремами наиболѣе къ тому удобными.

На эти пункты должно быть сосредоточено особенно вниманіе преподавателя въ продолженіи всего курса—они составляютъ логическую основу Геометріи и всей вообще математики. Ни въ какой наукѣ не могутъ быть такъ осязательно выяснены три метода доказательствъ, упомянутые выше, какъ въ Геометріи.

Я часто встрѣчалъ на экзаменахъ воспитанниковъ, прекрасно доказывающихъ теоремы, но которые смутно понимали значеніе аксіомъ и не имѣли никакого понятія о допущеніи (*postulatum*) Евклида, на которомъ основана вся геометрическая система. Это происходитъ отъ того, что болѣе обращается вниманія на умѣніе доказывать теоремы, нежели на содержаніе доказательства и на логическое теченіе теоремъ. Требовать вполнѣ зрѣлаго знанія и пониманія Геометріи, какъ науки, отъ воспитанниковъ, только что окончившихъ гимназическій курсъ, не возможно; это знаніе должно быть таково, чтобы, при дальнѣйшемъ изученіи математики, могло созрѣть и обратиться въ отчетливое пониманіе геометрической системы. Такая зрѣлость приходитъ постепенно, поэтому имѣло бы громадное значеніе, въ этомъ отношеніи, повтореніе



Геометріи въ педагогическомъ классѣ, не въ смыслѣ передѣлки теоремъ, какъ у насъ часто выражаются, а въ смыслѣ ихъ логической послѣдовательности и историческаго происхожденія. Ничто такъ не помогаетъ твердо удерживать въ памяти извѣстныя истины, какъ исторія ихъ происхожденія. Геометрія, освѣщенная историческими данными, дѣлается живѣе и занимательнѣе. Къ сожалѣнію это у насъ вовсе не практикуется, и едва нѣкоторые изъ воспитанниковъ знаютъ имя Архимеда. Скажу болѣе: громадное значеніе и несомнѣнную пользу имѣло бы открытіе въ университетахъ кафедры „исторіи математическихъ наукъ“, цѣлью которой были-бы изложеніе исторіи развитія математическихъ наукъ у всѣхъ народовъ, съ указаніемъ характера каждой націи въ этомъ отношеніи, и критическій разборъ всѣхъ методовъ изслѣдованій отъ самыхъ древнихъ временъ до настоящаго.

Въ этомъ отношеніи классики послѣдовательнѣе геометровъ: у нихъ тщательно анализируется каждая фраза, въ извѣстномъ сочиненіи, разбирается почему употреблена такая-то форма, а не другая, для выраженія извѣстной мысли и т. д.

Воспитанникъ, окончившій гимназическій курсъ поступаетъ въ университетъ не съ логическимъ отчетливымъ знаніемъ Геометріи, а съ механическимъ, т. е. знаетъ, какъ говорятъ, передѣлать теоремы. Онъ знаетъ, напримѣръ, что сумма внутреннихъ угловъ въ треугольникѣ равна двумъ прямымъ угламъ, но эта истина остается для него случайнымъ фактомъ, при которомъ не является цѣлая картина предъ-  
идущихъ неразрывныхъ истинъ. Онъ даже не знаетъ, что эта истина и постулатъ Евклида одно и то-же.

Таковы были мотивы, побудившіе меня предпринять предлагаемый обширный трудъ и присоединить къ нему „Краткій историческій очеркъ развитія Геометріи“ отъ самыхъ древнихъ временъ до настоящаго времени.

Какое изъ сочиненій имѣло столько изданій? По какому сочиненію училось столько людей? Какое сочиненіе образовало столько знаменитыхъ геометровъ, каковы: Декартъ, Ньютонъ, Лейбницъ, Эйлеръ, Лагранжъ и многіе другіе. Наконецъ, какое сочиненіе выдержало серьезную критику своихъ учениковъ, глубоко изучившихъ его, и все таки вышло побѣдителемъ? По „Началамъ“ Евклида учились: Дантъ, Петрарка, Тассо, Микель-Анджело, Леонардо-да-Винчи, Бокаччіо и др. знаменитые писатели. „Начала“ Евклида принадлежатъ къ числу тѣхъ замѣчатель-

ныхъ твореній древняго міра, которыя всегда останутся образцами въ своемъ родѣ, которымъ тѣмъ больше удивляешься, чѣмъ болѣе ихъ читаешь, и которыя обыкновенно приписываются не одному лицу. Если съ перваго раза, нѣкоторыя части его и кажутся утомительными, то это происходитъ вслѣдствіе того отличительнаго характера новыхъ методовъ изслѣдованій, къ которымъ мы привыкли; но по мѣрѣ того, какъ мы углубляемся въ изученіе этого замѣчательнаго сочиненія, такое впечатлѣніе исчезаетъ, а является сознаніе необыкновенной строгости доказательствъ и логической послѣдовательности въ порядкѣ истинъ. Такое, на примѣръ, впечатлѣніе производитъ съ перваго раза десятая книга „Началъ“, но вмѣстѣ съ этимъ ни одна изъ книгъ не поражаетъ насъ такою глубиною изслѣдованій. Таковъ характеръ настоящаго сочиненія. Преподаватель найдетъ въ немъ неизчерпаемый источникъ матеріала для своихъ лекцій, которымъ онъ долженъ только съ умѣніемъ пользоваться. Новые геометры, Ньютонъ и другіе, были такъ поражены глубокимъ синтезомъ древнихъ математиковъ, что свои открытія, сдѣланныя съ помощью новаго анализа, передѣлывали на древній синтезъ.

Чтобы выяснить значеніе *опредѣленій, аксіомъ и допущеній*, я, во Введеніи изложилъ изслѣдованія Лежандра, относительно суммы угловъ въ треугольникѣ, связь этой теоремы съ *допущеніемъ* Евклида и *систему Лобачевского*, носящую названіе *Неевклидовой Геометріи*, въ которой допущеніе Евклида измѣнено въ извѣстномъ смыслѣ. Изученіе такой системы бросаетъ яркій свѣтъ на начала Геометріи и даетъ болѣе правильный взглядъ на *допущеніе*, которое было предметомъ многихъ недоразумѣній, споровъ и изслѣдованій.

За Введеніемъ слѣдуетъ переводъ „Началъ“ Евклида съ замѣчаніями и дополненіями. Замѣчанія относятся къ теоремамъ и касаются вопросовъ о ихъ мѣстѣ и способахъ доказательствъ. Въ дополненіяхъ изложены тѣ части, которыхъ недостаетъ въ „Началахъ“. Въ концѣ сочиненія приложены задачи къ каждой книгѣ, съ указаніемъ, какія именно теоремы каждой книги должны быть взяты въ соображеніе при рѣшеніи указанныхъ задачъ.

Скажемъ теперь нѣсколько словъ о каждой книгѣ, о примѣчаніяхъ и дополненіяхъ.

„Начала“ Евклида состоятъ изъ 15-ти книгъ, двѣ послѣднія приписываютъ Гипсиклу. Изъ тринадцати остальныхъ 5, 7, 8, 9 и 10-я

составляютъ ариѣметику древнихъ, 5, 7, 8 и 9-я раціональную, а 10-я ирраціональную. Изъ ариѣметическихъ книгъ я перевелъ только 5-ю и 10-ю, которыя имѣютъ болѣе геометрическій характеръ, въ особенности 10-я. Остальныя же я нашелъ излишнимъ переводить.

*Книга I.* Книга первая состоитъ изъ 48-ми предложеній, которыя заключаютъ двѣ группы предложеній. Первую группу составляютъ 28 предложеній, вытекающихъ изъ количественныхъ аксіомъ и двухъ геометрическихъ—опредѣленія прямой и совмѣстимости частей плоскости какъ прямо, такъ и обратно. Эта группа теоремъ составляетъ основу Геометріи, онѣ размѣщены въ такомъ логическомъ порядкѣ, что, за исключеніемъ весьма ничтожныхъ перемѣщеній, другаго порядка имъ дать невозможно. Вторая группа теоремъ вытекаетъ изъ *допущенія* Евклида или его знаменитаго *постулата*. Эти теоремы составляютъ основу теоріи параллельныхъ линій и теоріи пропорціональности. Чтобы выяснить значеніе и смыслъ *допущенія* Евклида преподаватель, послѣ 28-го предложенія, долженъ изложить первыя шесть предложеній Введенія и отчетливо показать связь между *допущеніемъ* Евклида и суммою внутреннихъ угловъ въ треугольникѣ. Изложеніе этой связи можетъ быть сдѣлано только въ педагогическомъ классѣ или въ послѣднемъ, при повтореніи, такъ какъ такое изложеніе для начинающихъ невозможно. Изъ теоріи параллельныхъ линій вытекаетъ группа теоремъ отъ 35-й до 48-й, относящихся къ преобразованію одной фигуры въ другую. Эта книга заканчивается знаменитой теоремой Пифагора, доказанной на основаніи преобразованія фигуръ.

*Книга II.* Вторая книга составлена изъ предложеній, представляющихъ геометрически алгебраическія тождества, вытекающія изъ трехъ основныхъ законовъ количествъ:

1) Закона *перестановительнаго*, выраженного двумя тождествами:

$$a + b = b + a \quad ab = ba$$

изъ которыхъ, первое выражаетъ сложеніе линій, а второе построеніе прямоугольника, коего стороны суть  $a$  и  $b$  (см. примѣч. 1, кн. 2).

2) Закона *распределительнаго*, выраженного тождествомъ (кн. 2, пред. 1)

$$a(b \pm c) = ab \pm ac$$

3) Закона *повторительнаго*, выраженного тождествомъ

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$



въ Планиметрїи это тождество только втораго измѣренія, т. е.  $a \cdot a = a^2$ , а въ Стереометрїи третьяго, т. е.  $a \cdot a \cdot a = a^2 a = a^3$ .

Предложенія 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10-е суть алгебраическія тождества, которыя написаны въ концѣ книги въ примѣчаніи 5. Съ помощью предложеній 4, 5, 6 и 7-го можно рѣшить геометрически уравненія второй степени формы

$$x^2 \pm px = q^2 \text{ и } px - x^2 = q^2$$

а какимъ образомъ будетъ показано въ „Историческомъ очеркѣ“.

Предложеніе 11-е было названо древними *золотымъ дѣленіемъ* прямой.

Большая часть предложеній этой книги исчезла изъ нашихъ руководствъ, между тѣмъ какъ эти предложенія весьма важны для конкретнаго представленія алгебраическихъ тождествъ и для проведенія параллели между алгебраическими преобразованіями и геометрическими построеніями. Вторая книга есть Алгебра древнихъ: съ помощью изложенныхъ въ ней предложеній, древніе геометры дѣлали геометрическія преобразованія, соотвѣтствующія нашимъ алгебраическимъ. Въ педагогическомъ отношеніи эта книга имѣетъ большое значеніе: преподаватель долженъ воспользоваться ею для выясненія тѣсной связи между Алгеброй и Геометріей.

*Книга III.* Въ третьей книгѣ изложены всѣ основныя свойства круга, между этими предложеніями находятся 7 и 8-е, которыя должны служить къ объясненію, что такое *наибольшая*—максимум и *наименьшая*—минимум величины. Предложенія: 35, 36 и 37-е у насъ обыкновенно излагаются въ отдѣлѣ *подобія* фигуръ и *пропорціональности* линій, но изложеніе ихъ въ томъ смыслѣ, въ какомъ они изложены въ третьей книгѣ „Началь“, даетъ болѣе ясное конкретное представленіе.

*Книга IV.* Въ четвертой книгѣ излагаются предложенія: какъ вписать въ кругъ и какъ описать около него правильный треугольникъ, квадратъ, пятиугольникъ, шестиугольникъ и пятинадцатиугольникъ. Особенное вниманіе должно обратить на 10-е предложеніе, такъ какъ оно имѣетъ много слѣдствій, которыя указаны въ задачахъ, относящихся къ этой книгѣ.

*Книга V,*—это раціональная ариметика древнихъ. Такъ какъ нѣкоторыя опредѣленія этой книги были предметомъ многихъ споровъ,



недоразумѣній и изслѣдованій, то я въ примѣчаніяхъ къ ней изложилъ нынѣшнее воззрѣніе на отношенія и пропорціи и показалъ, что пятое опредѣленіе Евклида, которое и было предметомъ недоразумѣній, тождественно съ нашимъ самымъ общимъ, относящимся къ несоизмѣримымъ величинамъ. Пятое опредѣленіе тѣмъ болѣе казалось непонятнымъ, что за нимъ слѣдуетъ шестое, въ которомъ опредѣляется пропорціональность весьма просто, но это опредѣленіе, по своему смыслу, относится только къ величинамъ соизмѣримымъ. Затѣмъ слѣдуетъ еще одно опредѣленіе пропорціональности—8-е. Эти три опредѣленія и сбивали геометровъ.

Я замѣтилъ, что эта часть у насъ въ школахъ весьма слаба, а потому я въ примѣчаніяхъ 3 и 5-мъ изложилъ все, что касается отношеній и пропорцій.

*Книга VI.* Въ шестой книгѣ изложены: отношеніе площадей фигуръ и всѣ теоремы пропорціональности и подобія. Въ этой книгѣ преподаватель долженъ обратить особенное вниманіе на тѣ предложенія, 8, 9, 10, 11, 12 и 13, которыя служатъ къ построенію алгебраическихъ выраженій, каковы:

$$\frac{ab}{c}, \frac{a^2}{c}, \frac{a^2bc}{efc}, \frac{a^3}{bc}, \sqrt{ab}, \sqrt{a^2 \pm b^2}, \text{ и т. д.}$$

Должно обратить вниманіе на предложенія 24, 25, 26, 27 28 и 29, которыя исчезли изъ нашихъ руководствъ, но которыя весьма важны въ томъ отношеніи, что могутъ служить къ рѣшенію квадратныхъ уравненій. Предложеніе 30-е есть золотое дѣленіе прямой, которое было уже, только въ другой формѣ, дано во второй книгѣ.

Въ примѣчанія 23-мъ прибавлены теоремы, которыя не находятся у Евклида.

Шестой книгой заканчивается Планиметрия. Слѣдовательно недостаетъ отдѣла объ измѣреніи круга, т. е. изслѣдованій объ опредѣленіи отношенія между окружностью и діаметромъ. Поэтому въ прибавленіи I я изложилъ, все то, чего у Евклида недостаетъ, именно: о многоугольникахъ вообще и о звѣздныхъ въ особенности, всѣ предложенія, служащія къ опредѣленію отношенія окружности къ діаметру, исторію этихъ розысканій и перевелъ книгу Архимеда „Объ измѣреніи круга“ (*Kύκλου μέτρησις*), о которой часто говорятъ, но которая мало кому известна. Въ примѣчаніяхъ къ ней сдѣланы необходимыя поясненія;

наконецъ, изложенъ методъ предѣловъ и новѣйшіе методы для опредѣленія  $\pi$ .

*Книга X*, это ирраціональная ариметика или алгебра древнихъ, образецъ глубокомыслія древнихъ геометровъ. Въ примѣчаніи 14-мъ къ этой книгѣ—всѣ изслѣдованія, изложенныя въ ней, переведены на нашъ алгебраическій языкъ. Читатель долженъ обратить особенное вниманіе на первыя восемнадцать предложеній, въ которыхъ изложены основныя свойства несоизмѣримыхъ величинъ по способу древнихъ, но который не излишне прочесть и новымъ геометрамъ. Кромѣ того, заслуживаетъ вниманія предложеніе 29-е съ его слѣдствіями и предложеніе 117-е. Впрочемъ не безполезно прочесть внимательно всю книгу.

*Книги XI, XII и XIII* составляютъ Стереометрію; послѣднія двѣ книги, *XIV* и *XV*, нѣкоторые приписываютъ математику Гипсиклу, жившему во второмъ вѣкѣ по Р. Х. Въ примѣчаніяхъ и въ текстѣ, я пояснилъ то, что считается въ „Началахъ“ темнымъ или недосказаннымъ, и прибавилъ то, чего у Евклида недостаетъ. Особеннаго вниманія заслуживаетъ примѣчаніе 1-е къ тринадцатой книгѣ „Началь“, въ которой Евклидъ опредѣляетъ кратко, что такое *анализъ* и *синтезъ* и приводитъ примѣры для обоихъ способовъ. Къ этому мѣсту я прибавилъ примѣчаніе, въ которомъ подробно разобралъ оба способа и привелъ примѣры, какъ того, такъ и другаго.

Въ книгахъ *XIV*-й и *XV*-й изложены свойства правильныхъ многогранниковъ, а въ прибавленіи *VIII*-мъ „О многогранникахъ“ мною изложены всѣ новѣйшія изслѣдованія объ этихъ тѣлахъ.

Наконецъ, такъ какъ въ „Началахъ“ Евклида не изложено измѣреніе объемовъ и поверхностей тѣлъ какъ ограниченныхъ плоскими поверхностями, такъ и круглыхъ тѣлъ, то я въ *IX* прибавленіи помѣстилъ все, что касается этихъ предметовъ.

Въ концѣ сочиненія я прибавилъ собраніе задачъ къ каждой книгѣ съ указаніемъ, къ какому отдѣлу каждой книги онѣ принадлежатъ, и какія предложенія должны употребляться при ихъ рѣшеніи. Въ концѣ же помѣщено еще нѣсколько замѣчательныхъ задачъ съ ихъ рѣшеніями.

Сочиненіе заканчивается двумя прибавленіями *XI*-мъ и *XII*-мъ; въ первомъ изъ нихъ изложено о *наибольшихъ* и *наименьшихъ* величинахъ въ Геометріи, а во второмъ объ *отрицательныхъ количествахъ*. Въ обоихъ прибавленіяхъ выбраны примѣры, которые могли-бы слу-

жить наилучшимъ поясненіемъ изложеннаго. Преподаватель, въ продолженіи всего курса, долженъ указывать на существованіе *наибольшей* или *наименьшей* величины въ извѣстномъ предложеніи и указывать связь этихъ величинъ съ возможностью и невозможностью рѣшенія квадратныхъ уравненій, т. е. когда квадратное уравненіе имѣетъ корни дѣйствительные и когда мнимые. Точно также преподаватель долженъ разяснить при каждомъ удобномъ предложеніи значеніе отрицательныхъ величинъ въ Геометріи. Такимъ образомъ воспитанникъ составитъ себѣ ясное понятіе о тѣхъ геометрическихъ представленіяхъ, которыя многимъ кажутся, съ перваго раза, неясными и запутанными.

Закончу настоящее предисловіе словами Боссю, сказанными имъ въ его „Исторіи математики“: *Jamais livre de science n'a eu un succès comparable à celui des Éléments d'Euclide. Ils ont été enseignés exclusivement, pendant plusieurs siècles, dans toutes les écoles de mathématiques, traduits et commentés dans toutes les langues: preuve certaine de leur excellence.*

Живой свидѣтель подтверждающій слова, сказанныя Боссю, есть списокъ, приложенный въ концѣ сочиненія, всѣхъ изданій „Началъ“ Евклида, которыя намъ удалось собрать, вышедшихъ съ 1482 г. по 1880 годъ на различныхъ языкахъ. Изданія, обозначенныя звѣздочкой (\*) были въ моемъ распоряженіи. Изъ этого списка видно, что всѣхъ изданій было до 460; изъ нихъ 155 на латинскомъ и греческомъ языкахъ, 142—на англійскомъ, 48—на нѣмецкомъ, 38—на французскомъ, 27—на итальянскомъ, 14—на голландскомъ, 5—на русскомъ, 2—на польскомъ и 26 на различныхъ другихъ языкахъ, какъ то: шведскомъ, финскомъ, португальскомъ, испанскомъ, датскомъ, китайскомъ, арабскомъ и др. Настоящее изданіе есть *пятое* на русскомъ языкѣ.

Къ означенному списку я прибавилъ списокъ сочиненій по Неевклидовой Геометріи, расположенныхъ въ алфавитномъ порядкѣ. Изъ него видно, какая громадная литература возникла по этому предмету, въ особенности въ послѣднее десятилѣтіе. Во многихъ изъ этихъ сочиненій обобщаются основныя геометрическія понятія на которыхъ строится геометрическая система. Сочиненія, обозначенныя звѣздочкой (\*), служили мнѣ при составленіи Введенія. Наконецъ, въ концѣ книги, помѣщенъ списокъ различныхъ сочиненій, которыми я пользовался при составленіи настоящаго труда.



Въ заключеніи позволяю себѣ обратиться съ истинною благодарностью къ Совѣту Императорскаго Университета св. Владиміра, который всегда, съ такою готовностью, даетъ возможность, по мѣрѣ своихъ средствъ, принести пользу обществу изданіемъ полезныхъ сочиненій, напечатаніе которыхъ у насъ, на свой счетъ, для частнаго лица почти невысказуемо.

**М. Е. Ващенко-Захарченко.**

Г. Кіевъ.

Въ мартѣ 1880 года.

---



## ОГЛАВЛЕНІЕ.

---

	Стран.
Предисловіе . . . . .	I
Оглавленіе . . . . .	XIII
<b>Введеніе . . . . .</b>	<b>1</b>
Система Лобачевскаго—Неевклидовская . . . . .	16
Предѣльная поверхность . . . . .	26
Предѣльная кривая . . . . .	27
Свойства предѣльной поверхности . . . . .	28
Зависимость между дугами двухъ предѣльныхъ линій . . .	32
Зависимость между разстояніемъ и угломъ параллельности .	34
Линіи и поверхности равнаго разстоянія . . . . .	36
Окружность круга . . . . .	38
Зависимость между суммою угловъ треугольника и его пло- щадью . . . . .	43
Плоская тригонометрія . . . . .	47
Безконечно малыя фигуры . . . . .	50
Площадь треугольника . . . . .	52
Площадь многоугольника . . . . .	53
Заключеніе . . . . .	54
Кривизна поверхностей . . . . .	56
Поверхности съ кривизною нуль . . . . .	62
Поверхности съ положительной кривизной . . . . .	63
Поверхности съ постоянной отрицательной кривизной . . .	64
Лобачевскій . . . . .	75
Евклидъ . . . . .	77
 <b>Начала Евклида.</b>	
Книга I . . . . .	83
Книга II . . . . .	119
Книга III . . . . .	133

Книга IV . . . . .	165
Книга V . . . . .	181
Книга VI . . . . .	213

**Прибавленія.**

I. О многоугольниках . . . . .	271
II. Правильные многоугольники . . . . .	278
III. Числовыя выраженія для правильныхъ многоугольниковъ трехъ, четырехъ, пяти, шести, десяти сторонъ, вписан- ныхъ въ кругъ . . . . .	284
IV. Измѣреніе круга . . . . .	294
V. О вычисленіи $\pi$ . . . . .	309
VI. Объ измѣреніи круга соч. Архимеда . . . . .	299
VII. Методъ предѣловъ . . . . .	315
Книга X . . . . .	341
Книга XI . . . . .	471
Книга XII . . . . .	511
Книга XIII . . . . .	537
Книга XIV . . . . .	579
Книга XV . . . . .	589

**Прибавленія.**

VIII. О многогранникахъ . . . . .	599
Условія равенства тетраэдровъ . . . . .	599
Подобіе многогранниковъ . . . . .	601
Выпуклые многогранники . . . . .	603
Равенство и подобіе выпуклыхъ многогранниковъ . . . . .	610
IX. Измѣреніе объемовъ и поверхностей тѣлъ . . . . .	613
Цилиндръ и конусъ . . . . .	622
Шаръ . . . . .	629
Объемъ шара . . . . .	632
Задачи . . . . .	639
Рѣшеніе нѣкоторыхъ, заслуживающихъ особеннаго вниманія, задачъ . . . . .	679

**Прибавленія.**

X. О величинахъ наибольшихъ (maximum) и наименьшихъ (minimum) . . . . .	693
XI. Отрицательныя количества въ Геометріи . . . . .	709
XII. Удвоеніе куба и трисекція угла . . . . .	714
Прибавленіе къ страницѣ 50-й . . . . .	716
Списокъ „Началъ“ Евклида вышедшихъ съ 1482 по 1880 годъ . . . . .	717

Указатель сочинений по „Неевклидовой Геометрии“ вышед-	
шихъ по 1880 годъ . . . . .	731
Указатель сочинений, которыми авторъ пользовался при соста-	
вленіи настоящаго сочиненія . . . . .	743
Опечатки. . . . .	

---





## ВВЕДЕНИЕ.

Исслѣдованія геометровъ конца прошлаго и настоящаго столѣтій: Гаусса, Лежандра, Лобачевского, Болэя, Риммана, Бельтрами, Гельмгольца и другихъ, относительно началъ на которыхъ воздвигнуть геометрический строй нашего пространства, пролили яркій свѣтъ на эти начала, разорвавъ завѣсу, покрывавшую глубокой тайной ихъ происхожденіе, значеніе и взаимную связь.

Начала эти суть первообразныя, очевидныя, простѣйшія свойства пространства, недопускающія доказательства. Они опредѣляютъ пространство, изъ нихъ логически выводятся всѣ геометрическія построенія отъ самыхъ простыхъ до самыхъ сложныхъ. Это геометрический строй—система, въ которой, по мѣрѣ возведенія зданія, мы, сравнивая факты съ данными науки, можемъ провѣрять на сколько тверды начала, положенныя въ основаніе зданія.

Казалось бы съ перваго взгляда, что такая взаимная провѣрка должна была устранить сомнѣніе въ истинѣ геометрическихъ началъ, но и здѣсь, какъ и вездѣ, пытливый умъ человѣка задаетъ себѣ вопросы: Начала эти суть-ли простѣйшія? Существуетъ ли между ними какая либо связь? Какъ они явились въ нашемъ умѣ, т. е. врожденныя-ли они—апріорическія или почерпнуты нами изъ наблюденій—эмпирическія? Эти и имъ подобныя вопросы, какъ видно, близко касаются и математиковъ и философовъ, а потому и были обширной ареной споровъ между ними. Споры эти продолжаются и въ настоящее время.

Систематически изложилъ, въ первый разъ, геометрическіе элементы Евклидъ за 270 лѣтъ до Р. Х. Они извѣстны подъ названіемъ *Εὐκλείδου στοιχείων* прѣтоу.

Они содержатъ:

*Опредѣленія* ὁροί, *definitiones*. Числомъ 34.

*Требованія* Αἰτήματα, *postulata*. Числомъ три.

Это суть три элементарныя построенія съ помощью которыхъ Евклидъ дѣлаетъ всѣ построенія въ своихъ элементахъ.

Аксиомы ( $\alpha\chi\iota\omega\mu\alpha$ ,  $\alpha\chi\iota\omega\mu\acute{\alpha}$ , утверждать, что либо достоверное, несомнѣнное положеніе). У Евклида онѣ названы  $\kappa\alpha\iota\nu\omicron\iota$   $\epsilon\upsilon\nu\omicron\iota\alpha\iota$ , communes notiones, общія понятія—числомъ двѣнадцать.

Теоремы ( $\theta\epsilon\omega\rho\epsilon\iota\nu$ , созерцать, разсматривать). У Евклида онѣ названы  $\Pi\rho\omicron\tau\alpha\sigma\iota\varsigma$  безъ различія будетъ-ли это то, что мы называемъ теоремой—*Propositio*, или то, что называемъ задачей—*Problema*.

Въ этомъ введеніи я исключительно займусь аксіомами, изложу всѣ новѣйшія изслѣдованія и постараюсь, такимъ образомъ, установить правильное пониманіе основныхъ геометрическихъ началъ, на которыя, у насъ въ особенности, обращается такъ мало вниманія.

Евклидъ даетъ слѣдующія двѣнадцать аксіомъ:

1. Величины равныя одной и той же величинѣ равны между собою.
2. Если къ величинамъ равнымъ придадимъ величины равныя, то суммы получимъ равныя.
3. Если отъ величинъ равныхъ отнимемъ величины равныя, то остатки получимъ равные.
4. Если къ величинамъ неравнымъ придадимъ величины равныя, то суммы получимъ неравныя.
5. Если отъ величинъ неравныхъ отнимемъ величины равныя, то остатки получимъ неравные.
6. Величины двойныя одной и той же величины равны между собою.
7. Половины одной и той же величины равны между собою.
8. Величины, которыя по наложеніи совмѣщаются, равны между собою.
9. Цѣлое болѣе своей части.
10. Всѣ прямые углы равны между собою.
11. Если двѣ прямые линіи встрѣчаются третьей такъ, что сумма внутреннихъ угловъ, лежащихъ по одну сторону третьей, меньше двухъ прямыхъ угловъ, то двѣ первыя прямые, по достаточномъ продолженіи, встрѣтятся по ту сторону третьей прямой, на которой сумма внутреннихъ угловъ меньше двухъ прямыхъ.

12. Двѣ прямые линіи не могутъ заключать пространства.

Эти двѣнадцать положеній, которыя уже неявно содержатся въ опредѣленіяхъ, раздѣляются на два класса: къ первому классу принадлежатъ положенія 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9; они выражаютъ равенство общее величинамъ и составляютъ часть основанія всѣхъ математическихъ наукъ; ко второму классу принадлежатъ положенія 8, 10, 11, 12. Это суть геометрическія аксіомы, онѣ опредѣляютъ пространство.

Всѣ аксіомы перваго класса сводятся только къ тремъ: 1, 2 и 4.

1. Величины равныя одной и той же величинѣ равны между собою.

2. Если къ величинамъ равнымъ прибавимъ величины равныя, то суммы получимъ равныя.

4. Если къ величинамъ неравнымъ прибавимъ величины равныя, то суммы получимъ неравныя.

Въ самомъ дѣлѣ, аксіома 3-я есть слѣдствіе 2-ой, такъ какъ вычитаніе есть дѣйствіе обратное сложенію.

Аксіома 5-я есть слѣдствіе 4-ой по той же причинѣ.

Аксіомы 6 и 7 суть частный случай аксіомы 1-й.

Аксіома 9-я есть слѣдствіе 2-й и 4-й, такъ какъ эта аксіома содержитъ опредѣленіе, что цѣлое есть сумма частей и что всякая величина всегда равна самой себѣ.

Слѣдовательно аксіомъ перваго класса, т. е. общихъ всѣмъ ученіямъ о величинѣ, есть только три.

Геометрическія аксіомы составляютъ положенія 8, 10, 11 и 12. Въ нѣкоторыхъ манускриптахъ аксіома 12-я стоитъ 11-й, а 11-я стоитъ двѣнадцатой: этотъ порядокъ находится поэтому и во многихъ переводахъ Евклида. Если принять въ соображеніе, что прямая линія уже опредѣлена въ опредѣленіяхъ (ὁρᾶι), то первый порядокъ можетъ быть принятъ, но если аксіомы суть основанія геометрической системы, то нужно принять второй порядокъ, т. е. сначала опредѣлить прямую (акс. 12-я), а потомъ дать одно изъ ея свойствъ на плоскости (акс. 11-я). Такъ какъ опредѣленіе прямой въ *опредѣленіяхъ*: *прямая линія есть та, которая лежитъ одинаково относительно всѣхъ своихъ точекъ* не есть геометрическое, не можетъ служить для геометрическихъ построеній, а даетъ ея наглядную форму, то Евклидъ далъ 12-ю аксіому, которую онъ, вѣроятно, и помѣстилъ одиннадцатою.

Евклидъ строитъ геометрическую систему на поверхности, которую онъ называетъ *плоскостью*, слѣдовательно геометрическія аксіомы должны давать самыя общія, необходимыя свойства *плоскости*, изъ которыхъ логически вытекалъ бы цѣлый строй *плоской геометріи*. Что геометрическія аксіомы опредѣляютъ плоскость, выдѣляютъ ее, если не изъ всѣхъ возможныхъ поверхностей, то по крайней мѣрѣ изъ безчисленнаго множества существующихъ въ пространствѣ, въ этомъ мы убѣдимся послѣдовательнымъ выясненіемъ значенія и характера аксіомъ.

Разсмотримъ каждую изъ четырехъ геометрическихъ аксіомъ. Здѣсь мы можемъ сдѣлать анализъ каждой аксіомы только элементарный, въ концѣ же этого введенія мы изложимъ все то, что было сдѣлано геометрами по настоящее время.

Аксіома 8. Евклидъ, употребивъ способъ наложенія для доказательства равенства треугольниковъ, тѣмъ самымъ присвоилъ плоскости свой-



ство, которое мы будемъ называть, свойствомъ *совмѣстимости*. Оно состоитъ въ томъ, что фигуры могутъ перемѣщаться по плоскости изъ одного мѣста въ другое безъ складокъ и разрыва, т. е. фигура совпадая всѣми своими точками съ плоскостью, въ одномъ мѣстѣ, совпадетъ всѣми своими точками съ плоскостью и въ какомъ нибудь другомъ. Разстояніе двухъ какихъ нибудь точекъ фигуры неизмѣняется при перемѣщеніи ея по плоскости. Это свойство *совмѣстимости* выражаютъ такъ: форма фигуры независитъ отъ положенія ея мѣста на плоскости. Слѣдовательно одно изъ основныхъ свойствъ плоскости есть *совмѣстимость*, это одно изъ самыхъ важныхъ ея свойствъ, такъ какъ только это свойство позволяетъ сравненіе мѣровыхъ отношеній фигуръ на плоскости. Не одна впрочемъ плоскость обладаетъ этимъ свойствомъ, но есть множество поверхностей, которыя имѣютъ его, между ними я назову *сферу*, на которой, какъ и на плоскости, фигуры могутъ свободно передвигаться, безъ складокъ и разрывовъ, съ одного мѣста въ другое. Изъ этого уже видимъ, что первая геометрическая аксіома принадлежитъ многимъ поверхностямъ; мы увидимъ ниже, что эта аксіома такъ важна, что по ней дѣлятся поверхности на классы. Евклидъ не выразилъ эту аксіому такъ какъ мы ее выражаемъ теперь, а далъ ее въ видѣ опредѣленія равенства геометрическихъ величинъ. Эта аксіома и въ настоящее время упускается изъ виду въ элементарныхъ курсахъ, и допускается неявно въ доказательствахъ равенства фигуръ чрезъ наложеніе.

Есть поверхности, на которыхъ эта аксіома не имѣетъ мѣста: такова, напримѣръ, поверхность эллипсоида, на немъ фигура безъ складокъ или разрыва перемѣщена быть не можетъ, слѣдовательно способъ наложенія, для сравненія мѣровыхъ свойствъ фигуръ, на ней непримѣнимъ. Еще могу указать на яйцеобразную поверхность, на которой фигура съ острого конца неможетъ быть передвинута безъ складокъ или разрыва на тупой и обратно.

Итакъ за первую геометрическую аксіому мы будемъ принимать восьмую аксіому Евклида, которую мы будемъ называть аксіомой *совмѣстимости* и которая, какъ мы видѣли, принадлежитъ не только плоскости, но и многимъ другимъ поверхностямъ.

*Аксіома 10.* Всѣ прямые углы равны, какъ увидимъ ниже, можетъ быть доказана и внесена въ число теоремъ.

*Аксіома 12.* Я ее помѣщаю въ томъ порядкѣ на какой указалъ выше, т. е. прежде одиннадцатой.

Двѣ прямыя линіи не могутъ заключать пространства, т. е. чрезъ двѣ данныя точки можно провести только одну прямую линію, или еще, двѣ прямыя линіи могутъ пересѣчься только въ одной точкѣ. Въ такихъ формахъ, очевидно, можетъ быть выражена двѣнадцатая аксіома Евклида.

Очевидно это не есть собственно аксіома, это есть опредѣленіе, которое даетъ геометрической масштабъ для построеній. Это опредѣленіе не даетъ никакого понятія о формѣ прямой линіи. Оно указываетъ на ту изъ безчисленнаго множества линій, проходящихъ чрезъ двѣ данныя точки, которая вполнѣ ими опредѣляется. Такъ какъ двѣ данныя точки на плоскости вполнѣ опредѣляютъ кратчайшее разстояніе между ними, то говорятъ также, что *прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками*. Это опредѣленіе прямой принялъ въ первый разъ Архимедъ въ своемъ сочиненіи: περί Σφαίρας καὶ Κυλίνδρου.

Эта аксіома имѣетъ мѣсто и на другихъ поверхностяхъ, на которыя можно навить плоскость: таковы всѣ развертывающіяся поверхности, между которыми мы укажемъ на прямой цилиндръ и конусъ. Если навьемъ плоскость, на которой проведена прямая линія между двумя точками, то она и на цилиндрѣ останется кратчайшимъ разстояніемъ, хотя можетъ принять весьма различныя формы, смотря по тому, въ какомъ направленіи навивается плоскость на цилиндръ: она можетъ имѣть форму *прямой* на плоскости, она можетъ быть *кругомъ* и можетъ быть *гелисомъ*. Во всѣхъ этихъ формахъ она есть *прямая* линія, проведенная между двумя точками, на цилиндрѣ—кратчайшее разстояніе между двумя точками, считая по цилиндру.

Хотя кратчайшее разстояніе, на всякой поверхности, опредѣляется двумя данными точками, но есть поверхности, которыя допускаютъ нѣкоторыя исключенія, напримѣръ, на сферѣ кратчайшее разстояніе между двумя точками есть дуга большаго круга и хотя вообще опредѣляется двумя данными точками на сферѣ, но эти точки могутъ имѣть такое положеніе, что кратчайшихъ разстояній между ними есть безчисленное множество, таковы: двѣ діаметрально противоположныя точки, чрезъ нихъ проходитъ безчисленное множество дугъ большихъ круговъ, которыя всѣ равны и суть всѣ кратчайшія разстоянія между такими точками. Изъ этого также видимъ, что на сферѣ всѣ прямыя пересѣкаются въ двухъ точкахъ и всегда заключаютъ пространство, т. е. часть сферы. Евклидъ въ 12-й аксіомѣ недопускаетъ исключеній, а поэтому она принадлежитъ только такого рода поверхностямъ, на которыхъ двѣ точки вполнѣ опредѣляютъ прямую линію безъ всякихъ исключеній.

Итакъ, вторая геометрическая аксіома есть опредѣленіе прямой линіи: *Прямая линія есть та, которая вполнѣ опредѣляется двумя точками, или прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками*. Эта аксіома, также какъ и первая, принадлежитъ многимъ поверхностямъ.

Первыя двадцать восемь положеній Евклида доказаны имъ на основаніи только двухъ первыхъ геометрическихъ аксіомъ и только для дальнѣйшаго развитія системы потребовалась еще одна аксіома *одиннадцатая*.



*Аксиома 11.* Аксиома 11-я можетъ быть выражена еще въ слѣдующихъ двухъ формахъ:

Перпендикуляръ и косвенная по нѣкоторомъ продолженіи встрѣтятся.

Черезъ данную точку, внѣ данной прямой, можно провести *только одну* прямую, не встрѣчающую данной.

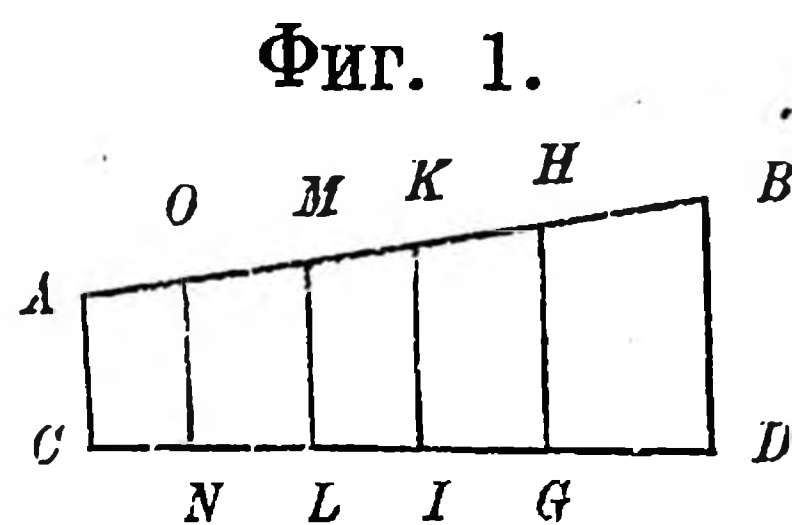
Легкое доказательство первыхъ двадцати восьми положеній съ помощью только двухъ первыхъ аксіомъ, неочевидность одиннадцатой аксіомы—были причиной многихъ изслѣдованій, какъ въ древности, такъ и въ наше время, которыя были направлены къ тому, чтобы доказать одиннадцатую аксіому на основаніи двухъ первыхъ и внести ее въ число теоремъ, или замѣстить ее другою болѣе очевидною. Изслѣдованія эти не дали положительныхъ результатовъ, но выяснили смыслъ и значеніе аксіомъ.

Я уже сказалъ, что аксіомы опредѣляютъ то пространство—поверхность, на которой строится система. Первые двѣ аксіомы, какъ я пояснилъ выше, принадлежатъ многимъ поверхностямъ, слѣдовательно доказать одиннадцатую аксіому на основаніи двухъ первыхъ, это значитъ показать, что свойство, выраженное этой аксіомой, принадлежитъ всѣмъ тѣмъ поверхностямъ, на которыхъ первые двѣ аксіомы имѣютъ мѣсто безъ всякихъ исключеній и что онѣ достаточны для построения геометрической системы Евклида, которая, такимъ образомъ, будетъ принадлежать не только плоскости, но и многимъ другимъ поверхностямъ.

Я исторически изложу важнѣйшія изслѣдованія относительно одиннадцатой аксіомы, такъ какъ этимъ путемъ всего легче показать, какъ постепенно развивалось пониманіе смысла и значенія геометрическихъ аксіомъ.

Уже комментаторъ Прокль жившій въ V вѣкѣ по Р. Х., зная, что одиннадцатая аксіома есть обратное предложеніе семнадцатому предложенію Евклида, вводитъ новую аксіому: *что разстояніе между сторонами угла, продолженными неопредѣленно, дѣлается болѣе всякой данной величины*, и на основаніи ея доказываетъ одиннадцатую аксіому. Это одно изъ древнѣйшихъ доказательствъ, дошедшихъ до насъ.

Затѣмъ только въ XIII в. Нассиръ-Эддинъ Ат-Туси, персидскій математикъ, доказалъ, что сумма угловъ въ треугольникѣ равна двумъ прямымъ, на основаніи двухъ предложеній изъ коихъ одно онъ принялъ за аксіому по его очевидности, вотъ она: положимъ, что двѣ прямыя  $AB$  и



$CD$  пересѣченны другими прямыми  $NO$ ,  $LM$ ,  $IK$ ,  $GH$ , перпендикулярными

къ  $CD$  и составляющими съ прямою  $AB$  два угла, острый и тупой, допустимъ, что острые углы обращены въ сторону  $A$ , а тупые въ сторону  $B$ . Утверждается, что прямыя  $AB$  и  $CD$  приближаются со стороны  $AC$  и удаляются со стороны  $BD$ , т. е. что перпендикуляры  $AC < NO < LM$ .....

Въ 1507 году Клавій въ своемъ изданіи Евклида даетъ доказательство одиннадцатой аксіомы, допуская положеніе: *что геометрическое мѣсто точекъ, равно отстоящихъ отъ данной прямой на плоскости, есть прямая линія.*

Симсонъ, въ своемъ изданіи Евклида въ 1781 году *The elements of Euclid*, повторилъ доказательство Нассиръ-Эддина.

Бертранъ изъ Женевы въ 1778 году далъ въ сочиненіи: *Développement nouveau de la partie élémentaire des Mathématiques* новое доказательство одиннадцатой аксіомы, основанное на началѣ: *что изъ двухъ неопредѣленныхъ пространствъ объемлемое меньше объемлющаго.*

Всѣ предъидущія доказательства имѣютъ тотъ общій характеръ, что въ нихъ вводится новое начало, которое считается авторами проще и на основаніи его доказывается одиннадцатая аксіома. Всѣ эти изслѣдованія собраны въ разсужденіи В. Я. Буняковского *о параллельныхъ линіяхъ* и указаны недостатки каждаго изъ нихъ.

*Изслѣдованія Лежандра.* Болѣе всѣхъ въ этомъ направленіи сдѣлалъ французскій геометръ Лежандръ, который въ продолженіи своей математической карьеры принимался нѣсколько разъ за эту задачу. Первая его попытка изложена въ его первомъ изданіи *Éléments de géométrie* въ 1794 году. Онъ не вводитъ новаго начала, но старается доказать, на основаніи первыхъ двухъ аксіомъ, что перпендикуляръ и косвенная, по нѣкоторомъ продолженіи, встрѣтятся. Доказательство это онъ самъ находитъ неудовлетворительнымъ, говоря, что опредѣленіе прямой должно быть таково, чтобы исключало всякое сходство ея съ гиперболой, тогда только наше доказательство было бы строго.

Въ третьемъ изданіи того же сочиненія въ 1800 году онъ даетъ другой оборотъ задачѣ и въ этомъ направленіи изслѣдованія его имѣютъ важное значеніе, хотя онъ желаемого результата не достигъ.

Если одиннадцатая аксіома имѣетъ мѣсто на плоскости, то сумма угловъ въ плоскомъ треугольникѣ равна двумъ прямымъ и обратно, если сумма угловъ въ плоскомъ треугольникѣ равна двумъ прямымъ, то на плоскости одиннадцатая аксіома имѣетъ мѣсто. Зная это, Лежандръ хотѣлъ доказать, на основаніи первыхъ двухъ геометрическихъ аксіомъ, что сумма угловъ въ плоскомъ треугольникѣ равна двумъ прямымъ.

Приемъ его состоитъ въ слѣдующемъ: такъ какъ относительно суммы угловъ въ треугольникѣ можно сдѣлать три предположенія: что она *больше*,



равна или меньше двухъ прямыхъ, то слѣдуетъ только показать, что она не можетъ быть ни больше, ни меньше двухъ прямыхъ.

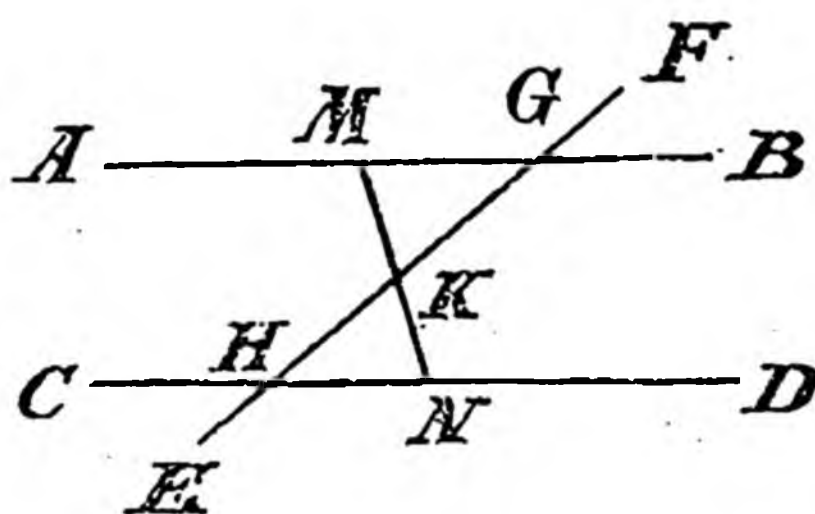
Первое предположеніе, т. е. что сумма угловъ въ треугольникѣ не можетъ быть больше двухъ прямыхъ, онъ доказалъ строго, а что она не можетъ быть меньше двухъ прямыхъ онъ могъ доказать строго только введя новое положеніе, которое въ сущности есть ничто иное какъ одиннадцатая аксіома. Именно: *что чрезъ данную точку внутри угла можно всегда провести такъ прямую, что она встрѣтитъ обѣ стороны угла.*

Во первыхъ докажемъ, что на поверхностяхъ, допускающихъ первыя двѣ геометрическія аксіомы, и слѣдовательно и на плоскости, существуютъ прямыя не встрѣчающіяся.

*Предложеніе 1.* Если сумма внутреннихъ угловъ, составленныхъ двумя прямыми  $AB$  и  $CD$  съ третьею  $EF$ , равна двумъ прямымъ, то прямыя не встрѣтятся.

*Доказат.* По условію мы имѣемъ:

Фиг. 2.



$BGE + DHF = 2d$ , а чрезъ  $d$  мы будемъ всегда означать прямой уголъ. Но мы имѣемъ также:

$$CHF + DHF = 2d$$

слѣдовательно  $BGE = CHF$ . Такимъ же образомъ найдемъ, что  $AGE = DHF$ . Изъ равенства этихъ угловъ слѣдуетъ равенство открытыхъ фигуръ  $DHGB$  и  $AGHC$ , которыя очевидно совмѣстятся, если фигуру  $AGHC$  наложимъ на фигуру  $DHGB$ , такъ чтобы точка  $H$  упала въ точку  $G$  и точка  $G$  въ точку  $H$ , то по равенству выше показанныхъ угловъ  $GA$  пойдетъ по  $HD$ , а  $HC$  пойдетъ по  $GB$ . Если  $AG$  и  $CH$  встрѣчаются, то, очевидно, встрѣтятся линіи  $BG$  и  $DH$ ; слѣдовательно прямыя  $AB$  и  $CD$  будутъ имѣть двѣ общія точки и будутъ совпадать.

*Слѣдствіе.* Пусть  $K$  будетъ середина отрезка  $GH$  и  $NM$  прямая проведенная чрезъ точку  $K$ , въ произвольномъ направленіи, но только такъ, чтобы она пересѣкла прямыя  $AB$  и  $CD$ . Я говорю, что сумма угловъ, лежащихъ по одну сторону прямой  $NM$  будетъ также равна двумъ прямымъ угламъ. Легко видѣть что треугольники  $KMG$  и  $KNH$  равны, такъ какъ въ нихъ стороны  $NK$  и  $KG$  равны и углы, прилежащіе къ этимъ сторонамъ, также равны.

Откуда слѣдуетъ, что:

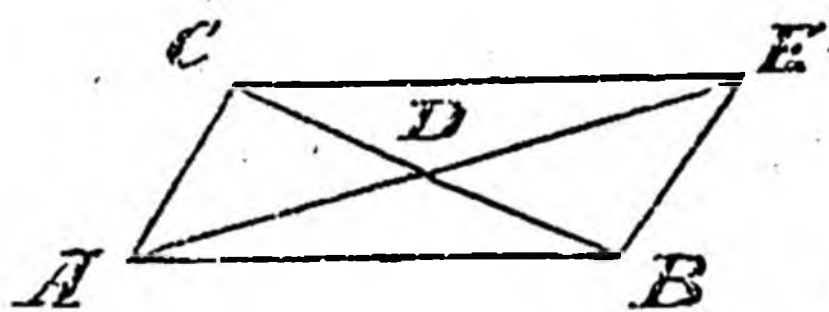
$$CNM + AMN = CNM + (2d - CNM) = 2d.$$

Изъ этого видимъ, что плоскость есть такая поверхность, на которой, чрезъ данную точку внѣ данной прямой, можно провести *по крайней мѣрѣ* одну прямую, которая не встрѣтитъ данной.

*Предложеніе 2.* Сумма угловъ въ треугольникѣ на поверхности, допускающей первыя двѣ аксіомы, не можетъ быть болѣе двухъ прямыхъ угловъ.

*Доказат.* Если въ треугольникѣ  $ABC$  чрезъ середину  $D$  стороны  $BC$  проведемъ прямую  $AE = 2AD$ , то получимъ двѣ пары равныхъ треугольниковъ  $CDE = BDA$  и  $EDB = ADC$ . Эти треугольники равны вслѣдствіе равенства сторонъ.

Фиг. 3.



Изъ равенства этихъ треугольниковъ имѣемъ равенство слѣдующихъ угловъ  $CEA = BAD$  и  $ACE = ACB + CBA$ ;  $AEB = EAC$  и  $EBA = ACB + CBA$ .

Изъ треугольника  $ABC$  образовался треугольникъ  $AEB$  равной съ нимъ площади и имѣющій углы  $BAD = A_1$ ,  $ABE = B_1$  и  $AEB = C_1$ . Если уголъ  $A_1$  будетъ меньшій изъ угловъ  $BAD$  и  $DAC$ , то, соображаясь съ предыдущимъ, найдемъ:

$$A_1 \leq \frac{1}{2} A, \quad A_1 + C_1 = A, \quad B_1 = B + C$$

откуда:

$$A_1 + B_1 + C_1 = A + B + C$$

Изъ треугольника  $AEB$ , полученнаго такимъ образомъ, можно точно также образовать треугольникъ съ углами  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  въ которомъ площадь будетъ равна площади треугольника  $ABC$  и

$$A_2 \leq \frac{1}{2} A_1 \leq \frac{1}{4} A, \quad A_2 + C_2 = A_1, \quad B_2 = B_1 + C_1$$

откуда:

$$A_2 + B_2 + C_2 = A_1 + B_1 + C_1 = A + B + C.$$

Продолжая подобнымъ образомъ построения, мы получимъ треугольникъ площади равной треугольнику  $ABC$  съ углами  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  въ которомъ:

$$A_n \leq \frac{1}{2^n} A, \quad A_n + B_n + C_n = A + B + C$$

Въ слѣдующемъ за этимъ треугольникъ мы будемъ имѣть:

$$A_{n+1} + C_{n+1} \leq \frac{1}{2^n} A$$

Изъ этого видимъ, что изъ треугольника  $ABC$  можно построить, указаннымъ способомъ, такой треугольникъ, въ которомъ площадь будетъ равна площади треугольника  $ABC$ , сумма угловъ будетъ равна суммѣ угловъ того же треугольника, и въ которомъ, наконецъ, сумма двухъ угловъ можетъ быть сдѣлана какою угодно малою.

Послѣ этого легко доказать наше предложеніе. Положимъ, что сумма угловъ въ треугольникѣ  $ABC$  больше двухъ прямыхъ, т. е. пусть:

$$A + B + C = 2d + \alpha$$

Изъ треугольника  $ABC$  мы можемъ построить такой треугольникъ съ углами  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ , въ которомъ:

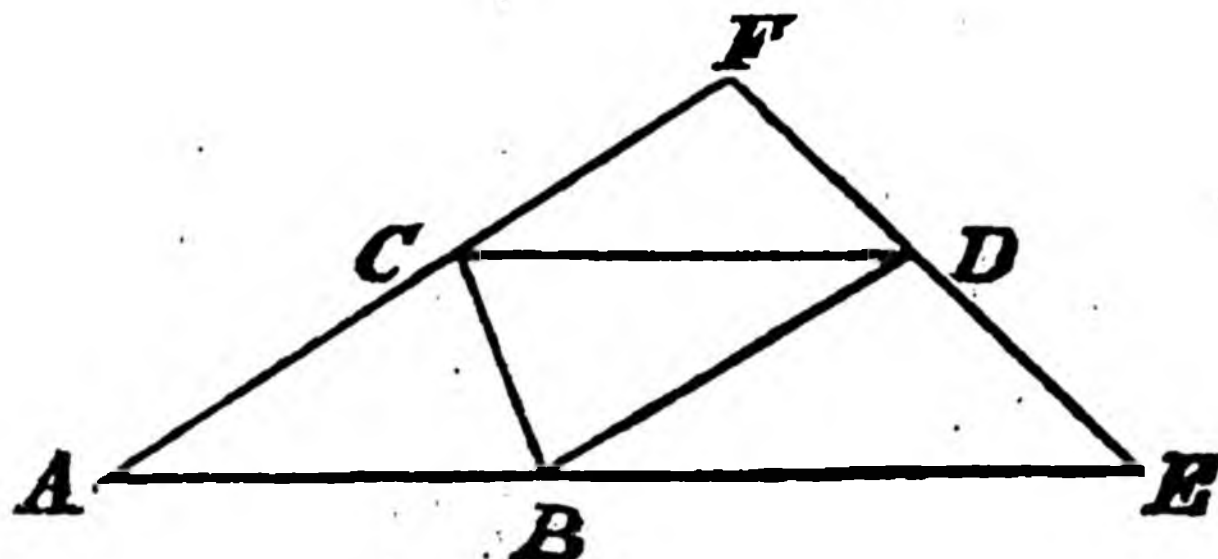
$$A_n + B_n + C_n = A + B + C = 2d + \alpha, \quad A_n + C_n < \alpha$$

слѣдовательно третій уголъ  $B_n$  долженъ быть больше двухъ прямыхъ угловъ, т. е.  $B_n > 2d$ , что невозможно.

*Предложеніе 3.* Сумма угловъ въ треугольникѣ не можетъ быть меньше двухъ прямыхъ угловъ.

*Доказат.* Къ треугольнику  $ABC$  прибавимъ равный ему треугольникъ  $CBD$ .

Фиг. 4.



Черезъ точку  $D$  проведемъ прямую  $EF$  такъ, чтобы она встрѣтила стороны  $AF$  и  $AE$  въ точкахъ  $F$  и  $E$ . Положимъ, что сумма угловъ въ



треугольникъ  $ABC$  будетъ  $2d - \alpha$ , въ треугольникъ  $BED$  эта сумма пусть будетъ  $2d - \alpha_1$ , въ треугольникъ  $CDF$  пусть она будетъ  $2d - \alpha_2$ , то сумма угловъ въ треугольникъ  $AEF$ , очевидно будетъ:

$$2d - \alpha + 2d - \alpha + 2d - \alpha_1 + 2d - \alpha_2 - 6d = 2d - 2\alpha - \alpha_1 - \alpha_2 < 2d - 2\alpha$$

Изъ построеннаго, такимъ же образомъ, треугольника  $AEF$  мы можемъ построить еще треугольникъ, въ которомъ сумма угловъ будетъ меньше  $2d - 4\alpha$ . Продолжая, подобнымъ образомъ, мы можемъ построить такой треугольникъ, въ которомъ сумма угловъ можетъ быть сдѣлана меньше какой угодно данной величины, но этого быть не можетъ, такъ какъ всѣ построенные треугольники имѣютъ общій уголъ  $A$ .

Въ приведенномъ выше доказательствѣ я подчеркнулъ слова, которыя составляютъ положеніе Лежандра: *черезъ данную точку внутри угла можно всегда провести прямую, которая встрѣтитъ обѣ стороны угла*. Это положеніе равносильно одиннадцатой аксіомѣ. Лежандръ это признавалъ, и поэтому старался пояснить его сравненіемъ безконечныхъ частей плоскости, но дѣла этимъ не уяснилъ. Онъ хотеть показать, что *непримично* прямой по ея свойству всей заключаться въ углѣ: *il repugne à la nature de la ligne droite qu'une telle ligne, indéfiniment prolongée puisse être renfermée dans un angle*. Въ этомъ-то Лежандръ и ошибся, такъ какъ мы увидимъ ниже, что есть поверхность, на которой первыя двѣ геометрическія аксіомы имѣютъ мѣсто, а прямая вся можетъ заключаться въ углѣ.

Изъ этого видимъ, что на поверхности, допускающей двѣ первыя аксіомы безъ исключеній, сумма угловъ въ треугольникѣ не можетъ быть больше двухъ прямыхъ.

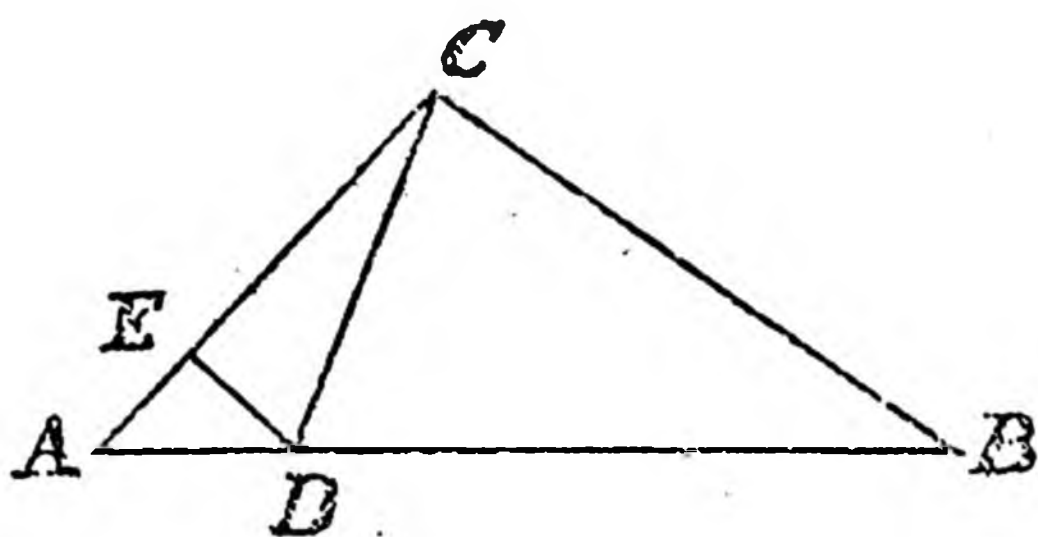
Слѣдовательно, относительно суммы угловъ въ треугольникѣ, можно сдѣлать двѣ *гипотезы*: что эта сумма равна двумъ прямымъ и что она меньше двухъ прямыхъ. Какая изъ этихъ двухъ гипотезъ имѣетъ мѣсто на плоскости, доказать нѣтъ возможности, почему? мы увидимъ ниже.

Я теперь покажу, что если бы мы нашли на плоскости хоть одинъ треугольникъ, въ которомъ сумма угловъ была бы равна двумъ прямымъ, то всевозможные треугольники, построенные на плоскости, будутъ имѣть тоже свойство. Изъ этого будетъ слѣдовать, что сумма угловъ во *всѣхъ* треугольникахъ, построенныхъ на плоскости, или равна двумъ прямымъ или меньше.

*Предложеніе 4.* Если сумма угловъ въ одномъ треугольникѣ равна двумъ прямымъ, то она равна двумъ прямымъ и во всякомъ другомъ.

*Доказат.* 1) Если сумма угловъ въ треугольникѣ  $ABC$  равна двумъ прямымъ, то она равна двумъ прямымъ и въ каждомъ изъ треугольниковъ

Фиг. 5.

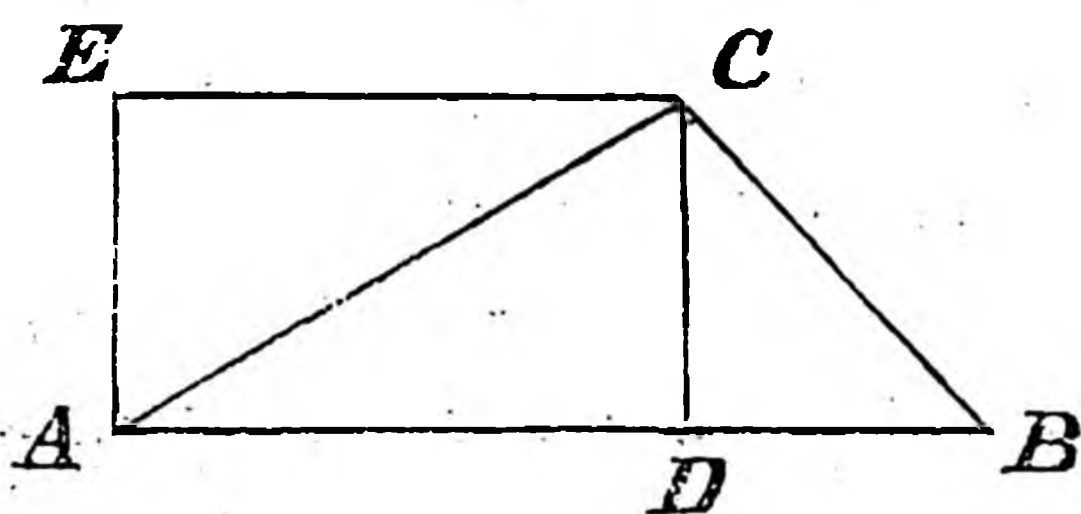


$ADC$ ,  $DCB$ ,  $AED$ , отрѣзанныхъ отъ треугольника  $ABC$ .

Въ самомъ дѣлѣ, если-бы въ треугольникѣ  $ADC$  и  $DBC$  суммы угловъ были  $2d-x$  и  $2d-y$ , то сумма угловъ въ треугольникѣ  $ABC$  была-бы не два прямыхъ, а  $2d-x-y$ . Тоже самое относится и къ треугольнику  $ADE$ .

2) Раздѣлимъ треугольникъ  $ABC$  высотой  $CD$  на два прямоугольные треугольника  $ADC$  и  $DBC$ .

Фиг. 6.



Одинъ изъ этихъ треугольниковъ, напримѣръ,  $ADC$ , можно дополнить равнымъ ему треугольникомъ  $AEC$ , до четырехугольника  $ADCE$ , въ которомъ каждый изъ угловъ прямой.

Изъ четырехугольника  $ADCE$ , прибавляя къ нему равные ему четырехугольники, мы составимъ четырехугольникъ, въ которомъ каждый изъ угловъ будетъ прямой, а стороны, заключающія какой нибудь изъ этихъ прямыхъ угловъ, будутъ  $m.AE$  и  $EC$ . Изъ этого послѣдняго четырехугольника, точно такимъ же образомъ, можно построить четырехугольникъ, въ которомъ каждый изъ угловъ есть прямой, а стороны, заключающія уголь, будутъ  $m.AE$  и  $n.EC$ , гдѣ  $m$  и  $n$  суть цѣлыя произвольныя числа.

Этотъ послѣдній четырехугольникъ раздѣляется діагональю на два равные прямоугольные треугольника, въ которыхъ, очевидно, сумма угловъ будетъ равна двумъ прямымъ. Отъ такого треугольника можно отдѣлить произвольный треугольникъ, въ которомъ сумма угловъ будетъ равна двумъ прямымъ. Слѣдовательно сумма угловъ въ произвольно взятомъ треугольникѣ равна двумъ прямымъ.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ:

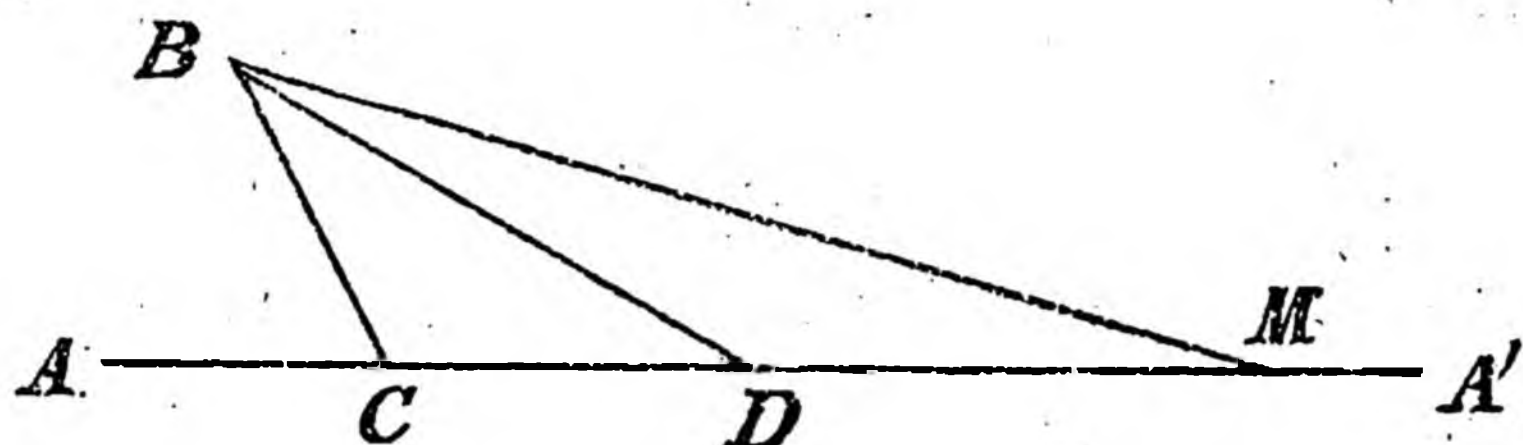
1) Что сумма угловъ во всякомъ треугольникѣ или равна двумъ прямымъ, или меньше двухъ прямыхъ.

2) Внешний угол во всякомъ треугольникѣ или равенъ суммѣ внутреннихъ съ нимъ не смежныхъ угловъ, или больше этой суммы.

3) Чрезъ данную точку  $B$ , внѣ данной прямой  $AA'$ , можно всегда провести такъ прямую  $BM$ , что уголъ  $BMA$  можетъ быть произвольно малымъ.

Для этого проведемъ прямую  $BC$ , такъ чтобы она съ прямою  $AA'$

Фиг. 7.



составляла острый уголъ  $ACB$  и сдѣлаемъ  $BC=CD$ , то уголъ  $D \leq \frac{1}{2} ACB$ .

Продолжая подобное построение, мы найдемъ такую прямую  $BM$ , что уголъ  $DMB$  будетъ менѣ какого нибудь даннаго угла.

Резюмируя все выше сказанное, мы приходимъ къ заключеніямъ, что на поверхности, допускающей двѣ первыя аксіомы:

1) Чрезъ данную точку внѣ данной прямой на плоскости можно всегда провести прямую, не встрѣчающую данной, но единственная ли это прямая не встрѣчающая, на основаніи первыхъ двухъ аксіомъ, мы рѣшить не имѣемъ возможности.

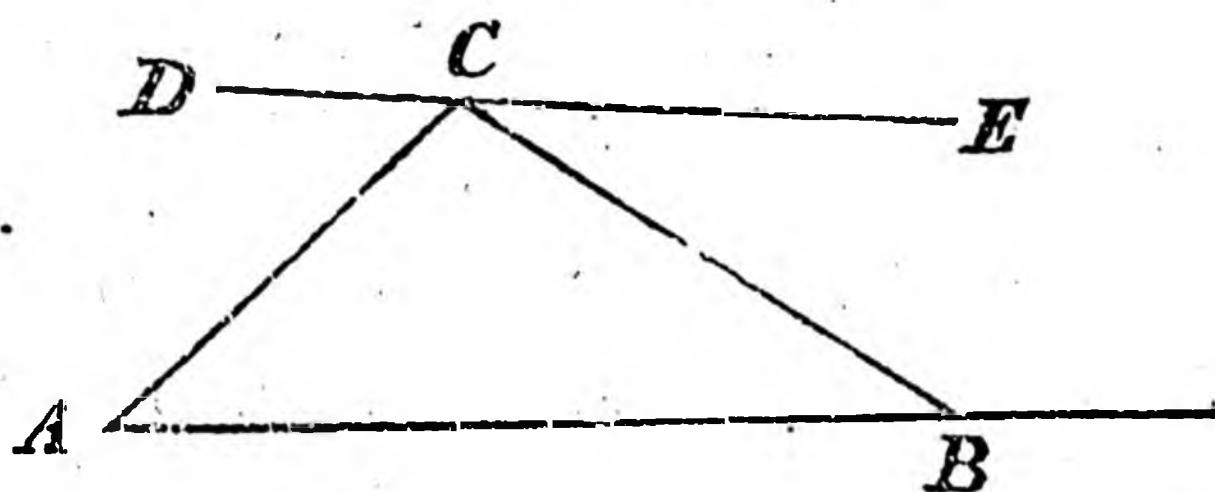
2) Что сумма угловъ во всякомъ треугольникѣ или равна двумъ прямымъ, или меньше двухъ прямыхъ. Какое изъ этихъ положеній имѣетъ мѣсто на плоскости, т. е. на поверхности, допускающей первыя двѣ аксіомы, мы рѣшить, на основаніи первыхъ двухъ аксіомъ, также не можемъ.

Я теперь покажу связь двухъ предыдущихъ заключеній.

*Предложеніе 5.* Если чрезъ данную точку внѣ данной прямой можно провести только одну прямую, не встрѣчающую данной, которая въ такомъ случаѣ называется параллельною данной прямой, то сумма внутреннихъ угловъ въ треугольникѣ равна двумъ прямымъ.

*Доказат.* Чрезъ вершину  $C$  треугольника  $ABC$  проведемъ параллельную  $DE$  противоположащей сторонѣ  $AB$ .

Фиг. 8.



Такъ какъ  $DE$  есть единственная прямая, проходящая чрезъ точку



$C$  и не встрѣчающія основанія  $AB$ , то (см. пр. 1) уголъ  $A = ACD$ , уголъ  $B = BCE$ , слѣдовательно:

$$A + B + C = 2d.$$

**Предложеніе 6.** Обратнo, если сумма угловъ въ треугольникѣ равна двумъ прямымъ, то, чрезъ данную точку внѣ данной прямой, можно провести *только одну* линію не встрѣчающую (параллельную) данной.

**Доказат.** Пусть  $DE$  (см. чер. 8) будетъ параллельная прямой  $AB$ , проведенную чрезъ точку  $C$ , а  $AC$  сѣкущая. Положимъ, что сумма угловъ  $BAC$  и  $ACE$  не равна  $2d$ , т. е. пусть:

$$BAC + ACE = 2d - \alpha.$$

Чрезъ точку  $C$  проведемъ прямую  $CB$  такъ, чтобы уголъ  $CBA$  былъ  $< \alpha$ . По гипотезѣ сумма угловъ въ треугольникѣ  $ABC$  равна двумъ прямымъ, т. е.:

$$BAC + ACB + CBA = 2d$$

подставивъ вмѣсто  $2d$  эту величину въ предыдущее выраженіе, найдемъ:

$$BAC + ACE = BAC + ACB + CBA - \alpha$$

или

$$ACE = ACB + CBA - \alpha$$

откуда:

$$ACE < ACB$$

чего быть не можетъ, такъ какъ прямая  $CB$  лежитъ внутри угла  $ACE$ .

Изъ всего сказаннаго видимъ, что всѣ усилія геометровъ доказать прямо одиннадцатую аксіому Евклида, на основаніи двухъ первыхъ аксіомъ, не имѣли успѣха. Оставалось одно предположить, что одиннадцатая аксіома на плоскости не имѣетъ мѣста и построить геометрическую систему въ этомъ предположеніи. Если одиннадцатую аксіому можно доказать, т. е. если она можетъ быть сведена на двѣ первыя аксіомы, то построенная система должна привести къ абсурду; въ противномъ случаѣ, т. е. если система всегда остается логична во всѣхъ своихъ частяхъ, мы должны заключить, что одиннадцатая аксіома доказана быть не можетъ.

Построеніе такой системы предпринялъ въ 1829 году русскій геометръ, профессоръ Казанскаго университета, Н. И. Лобачевскій.

Въ этомъ году Лобачевскій напечаталъ въ Казанскомъ Вѣстникѣ сочиненіе: О началахъ геометріи. Въ 1835, 1836 и 1838 гг. онъ напечаталъ въ Ученыхъ Запискахъ Казанскаго Университета: „Новыя начала геометріи съ полной теоріей параллельныхъ“. Это сочиненіе было напечатано въ журналѣ Крелля подъ заглавіемъ: *Géométrie imaginaire* и въ 1874 году переведено на итальянскій языкъ.

Сочиненія эти, съ начала, не обратили на себя особеннаго вниманія геометровъ, которые, какъ видно изъ ихъ мнѣній, считали эти работы болѣе любопытными, нежели имѣющими научное значеніе. Можетъ быть это произошло и отъ того, что русскія математическія сочиненія были мало извѣстны въ западной Европѣ. Одинъ Гауссъ, въ то время, понималъ важное значеніе мысли Лобачевского и указывалъ, въ перепискѣ своей съ Шумахеромъ, по поводу теоріи параллельныхъ линій, на значеніе работъ Лобачевского. Вотъ что онъ пишетъ Шумахеру: „Недавно я имѣлъ случай снова прочесть записку Лобачевского подъ заглавіемъ: *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*. Эта записка содержитъ элементы геометріи, которая должна была-бы существовать и коей развитіе составляло бы строгую систему, если бы геометріа Евклида не была истинна. Нѣкто Швейкартъ назвалъ эту геометрію звѣздную, Лобачевскій назвалъ ее воображаемою. Вы знаете, что уже пятьдесятъ четыре года я раздѣляю тѣже убѣжденія, не говоря о нѣкоторыхъ развитіяхъ, которыя, съ тѣхъ поръ, получили мои идеи объ этомъ предметѣ. Въ запискѣ Лобачевского я не нашелъ для себя ничего новаго, но его изложеніе отлично отъ того, которое я предполагалъ, притомъ авторъ изложилъ предметъ какъ истинный геометръ. Я совѣтую вамъ обратить ваше вниманіе на это сочиненіе, чтеніе котораго доставитъ вамъ живое удовольствіе. Ноября 28, 1846 г. Такъ говоритъ о сочиненіи Лобачевского одинъ изъ величайшихъ геометровъ нашего времени; но, не смотря на это, только въ 1868 году, послѣ работъ итальянскаго геометра Бельтрами, было обращено должное вниманіе на идею Лобачевского и окончательно разрѣшенъ вопросъ о теоріи параллельныхъ линій.



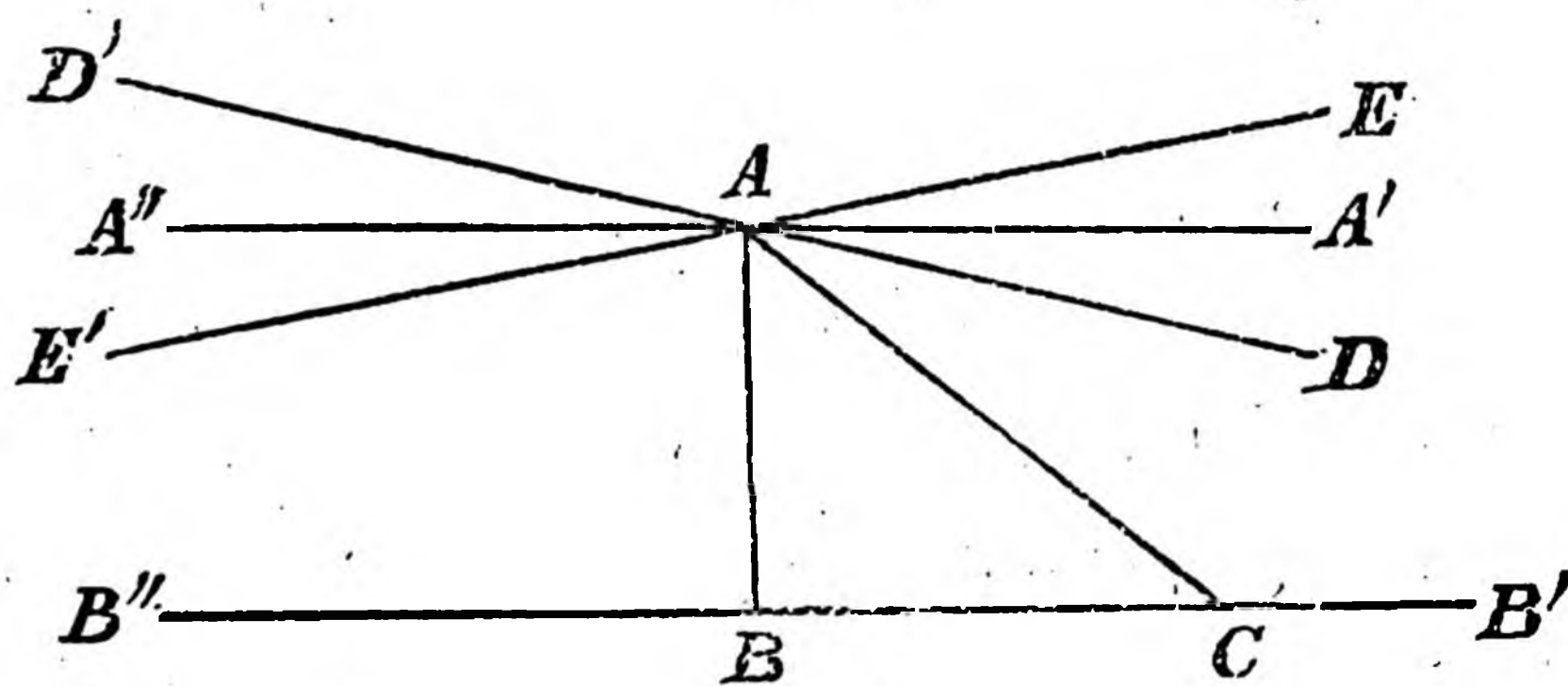
## Система Лобачевского

### Неевклидовская.

Мы выше видѣли (см. пр. 1), что чрезъ данную точку, внѣ данной прямой, можно провести по крайней мѣрѣ одну прямую, не встрѣчающую данной. Если эта прямая единственная, то мы будемъ имѣть систему Евклида—плоскую геометрію, если чрезъ данную точку можно провести нѣсколько прямыхъ, не встрѣчающихъ данную, то мы получимъ систему Лобачевского; которую Гауссъ назвалъ *Неевклидовскою*.

Пусть данная прямая будетъ  $B'B''$ , и данная точка  $A$ .

Фиг. 9.



Если изъ точки  $A$  опустимъ на  $B'B''$  перпендикуляръ  $AB$  и возставимъ къ  $AB$  перпендикулярную линію  $A'A''$ , то (см. пр. 1),  $A'A''$  не встрѣтитъ  $B'B''$ . Если  $A'A''$  есть единственная прямая, не встрѣчающая прямой  $B'B''$ , то всѣ прямая, лежащая въ углу  $A'AB$ , и проходящая чрезъ точку  $A$ , встрѣтятъ  $B'B''$  по направленію  $BB'$ , а всѣ прямая, проходящая чрезъ ту же точку  $A$  и лежащая въ углу  $A''AB$ , встрѣтятъ прямую  $B'B''$  по направленію  $BB''$ . Въ этомъ случаѣ  $A'A''$  называется прямою *параллельною* прямой  $B'B''$ .

Положимъ теперь, что чрезъ точку  $A$  можно провести не одну прямую, не встрѣчающую данной, тогда между этими прямыми будетъ находиться одна, на примѣръ  $AD$ , которая будетъ отдѣлять прямая, встрѣчающія прямую  $B'B''$ , отъ невстрѣчающихъ ее, т. е. всѣ прямая, лежащая въ углу

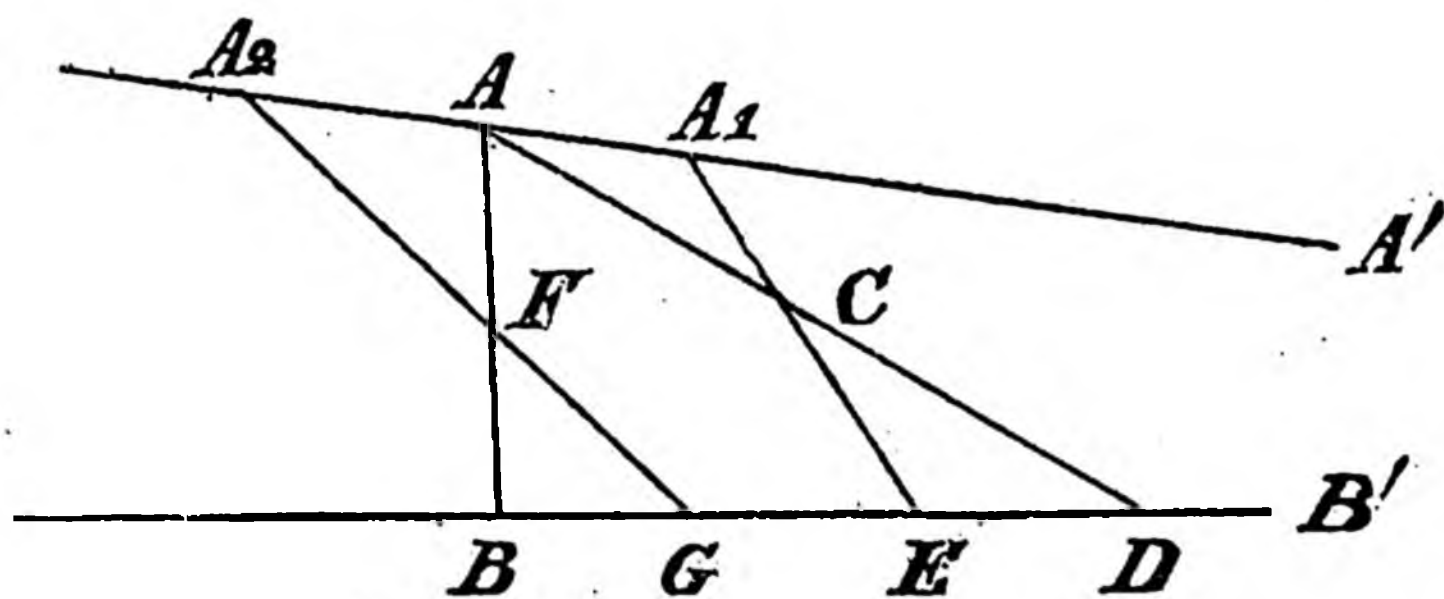
$DAV$  будутъ встрѣчать  $B'B''$  по направленію  $BB'$ , а лежащая въ углѣ  $A'AD$  не встрѣтитъ  $B'B''$ . Эта *предѣльная прямая*, не встрѣчающая прямой  $BB'$ , называется *параллельною  $B'B''$  по направленію  $BB'$* . Если полосу  $A'ABV'$  перегнемъ по линіи  $AB$ , то она совмѣстится съ полосой  $A''ABV''$  (см. пр. 1) и прямая  $AD$  приметъ направленіе  $AE'$  и будетъ, очевидно, *параллельною  $BB''$*  въ томъ же смыслѣ, въ какомъ мы называемъ  $AD$  параллельною  $BB'$ , т. е. она будетъ отдѣлять прямые, пересѣкающія  $BB''$  отъ прямыхъ, не пересѣкающихъ ее. Уголъ  $A'AD = A''AE'$ . Изъ этого видимъ, что въ этой геометрической системѣ чрезъ данную точку  $A$ , внѣ данной прямой  $B'B''$ , можно провести двѣ параллельныя  $AD$  и  $AE'$ : одна параллельна  $B'B''$  въ направленіи  $BB'$ , а другая параллельна въ направленіи  $BB''$ . Всѣ прямые, проходящія чрезъ точку  $A$  и лежащія въ углѣ  $DAE'$ , будутъ встрѣчать прямую  $B'B''$ , а лежащія въ углѣ  $EAD$  не встрѣчаютъ ее.

Итакъ, всѣ прямые, проходящія чрезъ данную точку внѣ данной прямой на плоскости, раздѣляются на три класса: 1) встрѣчающія данную прямую, 2) двѣ параллельныя ей и 3) не встрѣчающія ее. Одна  $AD$  будетъ параллельна направленію  $BB'$ , а другая  $AE'$  параллельна направленію  $BB''$ . Такой смыслъ параллельности мы будемъ означать символомъ  $AD \parallel BB'$ ,  $AE' \parallel BB''$ .

*Предложеніе 7.* Прямая  $AA'$  параллельна прямой  $BB'$  во всѣхъ своихъ точкахъ, т. е. если  $AA' \parallel BB'$ , то  $A_1A' \parallel BB'$ ,  $A_2A' \parallel BB'$ , . . . гдѣ  $A_1$ ,  $A_2$ , . . . суть произвольно взятые точки въ обоихъ направленіяхъ на прямой  $AA'$ .

*Доказат.* Пусть  $AA'$  будетъ прямая параллельная  $BB'$ ,  $AB$  перпендикуляръ къ  $BB'$ .

Фиг. 10.



1) Возьмемъ какую нибудь точку  $A_1$  на  $AA'$ , чрезъ эту точку проведемъ прямую  $A_1C$  подъ произвольнымъ угломъ  $A'A_1C$ . Прямая  $AC$ , проведенная чрезъ точки  $A$  и  $C$ , очевидно, встрѣтитъ  $BB'$  въ какой нибудь точкѣ  $D$ . Въ прямоугольный треугольникъ  $ABD$  въ точкѣ  $C$  входитъ неопредѣленная прямая  $A_1C$ , слѣдовательно, она должна выйти изъ треугольника, а для этого она должна встрѣтить прямую  $BB'$  въ точкѣ  $E$  на примѣръ.

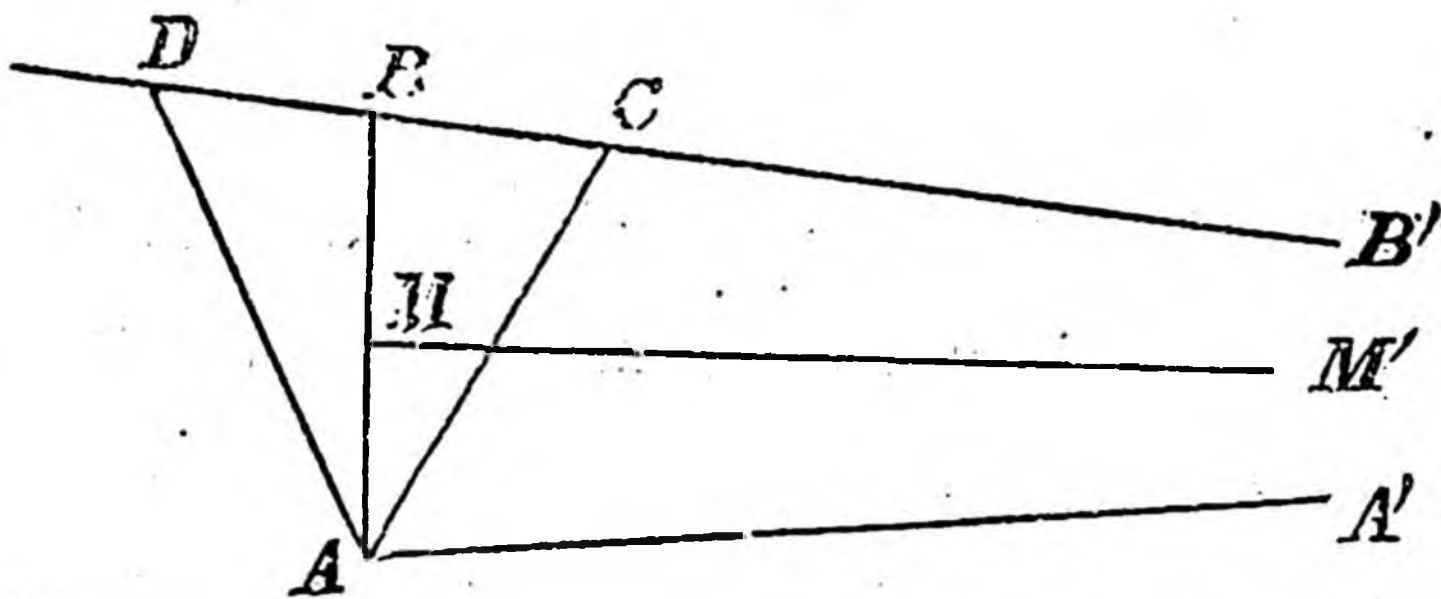
2) Возьмемъ еще точку  $A_2$ , лежащую по другую сторону перпендикуляра  $AB$ . Проведемъ прямую  $A_2F$  подъ такимъ угломъ, чтобы она встрѣтила  $AB$  въ точкѣ  $F$ , уголъ этотъ можетъ быть бесконечно малъ. Чрезъ точку  $A$  проведемъ прямую  $AD$  такъ, чтобы уголъ  $A'AD = A'A_2F$ , прямая  $A_2F$  не встрѣтитъ прямой  $AD$ , входитъ въ треугольникъ  $ABD$ , слѣдовательно выйдетъ изъ него не иначе, какъ встрѣтивъ прямую  $AB$  въ известной точкѣ  $G$ .

*Предложеніе 8.* Двѣ прямыя взаимно параллельны, т. е. если  $AA' \parallel BB'$ , то  $BB' \parallel AA'$ .

*Доказат.* Пусть прямая  $AA' \parallel BB'$ . Для произвольно взятой точки  $A$  на прямой  $AA'$  можно найти на прямой  $BB'$  такую точку  $B$ , чтобы уголъ  $A'AB = B'BA$ .

Соображаясь съ пр. 4, слѣд. 3 можно провести прямую  $AC$  такъ,

Фиг. 11.



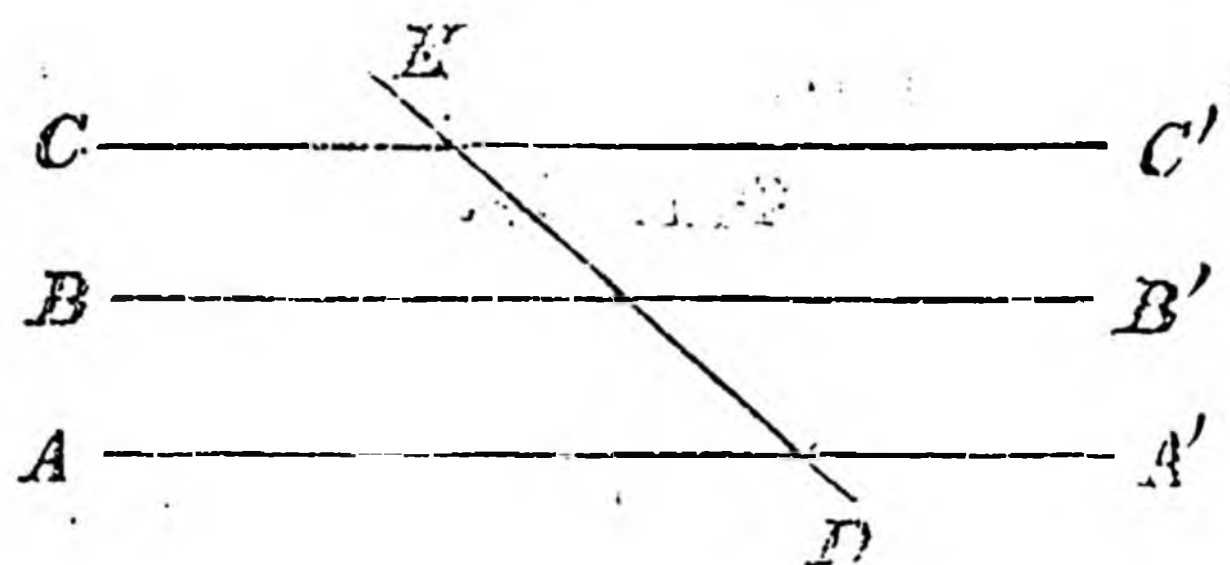
чтобы уголъ  $A'AC < ACB'$ . Продолжимъ прямую  $CB$  такъ, чтобы  $CD = AC$ , то уголъ  $B'DA = DAC < DAA'$ . Подвигая точку  $C$  къ  $D$  и соединяя каждое ея положеніе съ точкою  $A$  мы, очевидно, найдемъ между  $C$  и  $D$  такую точку  $B$ , для которой будемъ имѣть уголъ  $A'AB = B'BA$ . Откуда непосредственно слѣдуетъ, что  $BB' \parallel AA'$ . Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ точку  $M$  на серединѣ  $AB$  и возставимъ перпендикуляръ  $MM'$  къ  $AB$ , то  $MM'$  будетъ параллельна какъ къ  $AA'$ , такъ и къ  $BB'$ , ибо въ противномъ случаѣ  $AA'$  и  $BB'$  пересѣкутъ  $MM'$  въ одной точкѣ и сами не будутъ параллельны. Теперь, если подъ произвольнымъ угломъ къ  $AA'$  проведемъ прямую  $AC$ , то она встрѣтитъ  $MM'$ , а слѣдовательно встрѣтитъ и  $BB'$ .

*Предложеніе 9.* Двѣ прямыя  $BB'$  и  $CC'$  параллельныя третьей  $AA'$ , по одному направленію, будутъ параллельны и между собою.

*Доказат.* 1) Три прямыя лежатъ въ одной плоскости. Если прямыя лежатъ въ порядкѣ  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , то  $BB'$  и  $CC'$  не могутъ пересѣкаться, такъ какъ, въ противномъ случаѣ, изъ точки ихъ пересѣченія было бы проведено двѣ прямыя, параллельныя прямой  $AA'$  въ одномъ и томъ же направленіи, что невозможно. Это слѣдуетъ еще и изъ того, что прямая  $ED$ , проведенная подъ произвольнымъ угломъ къ  $AA'$ , встрѣтитъ ее, а слѣдовательно встрѣтитъ и прямую  $BB'$ .



Фиг. 12.

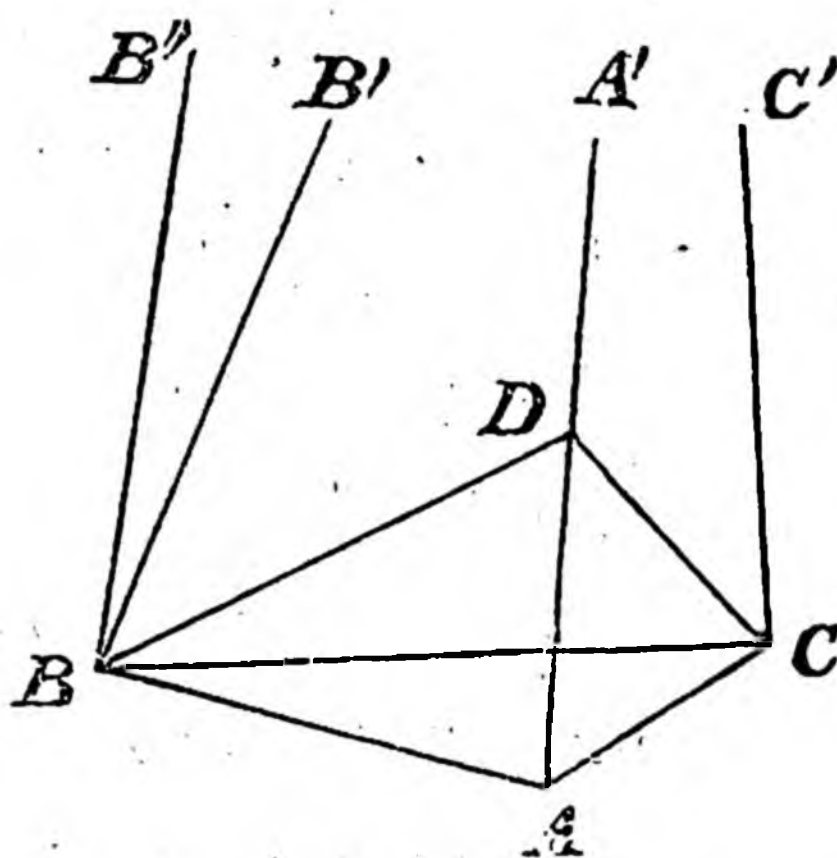


Если данныя прямыя расположены въ порядкѣ  $BB'$ ,  $AA'$ ,  $CC'$ , то очевидно  $BB'$  и  $CC'$  не встрѣтятся, такъ какъ одна изъ нихъ должна прежде встрѣтить  $AA'$ , что невозможно, потому что  $AA' \parallel BB'$ . Что  $BB'$  не только не встрѣчаетъ  $CC'$ , но что онѣ параллельны, слѣдуетъ изъ того, что всякая прямая, проведенная чрезъ какую нибудь точку на  $BB'$ , подѣ произвольно малымъ угломъ къ ней, встрѣтитъ  $AA'$ , а слѣдовательно встрѣтитъ и  $CC'$ .

2) Плоскость параллельныхъ  $BB'$  и  $AA'$  съ плоскостью параллельныхъ  $CC'$  и  $AA'$  составляетъ уголъ.

Во первыхъ докажемъ, что прямыя  $BB'$  и  $CC'$  лежатъ въ одной плоскости

Фиг. 13.



Пусть  $BD$  будетъ какая нибудь прямая въ плоскости параллельныхъ  $AA'$  и  $BB'$ , пусть она встрѣтитъ  $AA'$  въ точкѣ  $D$ . Плоскость  $CBD$  встрѣтитъ плоскость параллельныхъ  $AA'$  и  $CC'$  по прямой  $CD$ . Будемъ теперь двигать плоскость  $CBD$  около  $BC$  такъ, чтобы точка  $D$  ушла въ безконечность; это будетъ тогда, когда прямая  $BD$  совпадетъ съ прямою  $BB'$ , слѣдовательно, плоскость  $CBD$  совпадаетъ съ плоскостью  $CBV'$ . Точно также плоскость  $BSCD$  совпадетъ съ плоскостью  $BCC'$ . Слѣдовательно, прямыя  $BB'$  и  $CC'$  лежатъ въ этомъ послѣднемъ положеніи плоскости  $CBD$ .

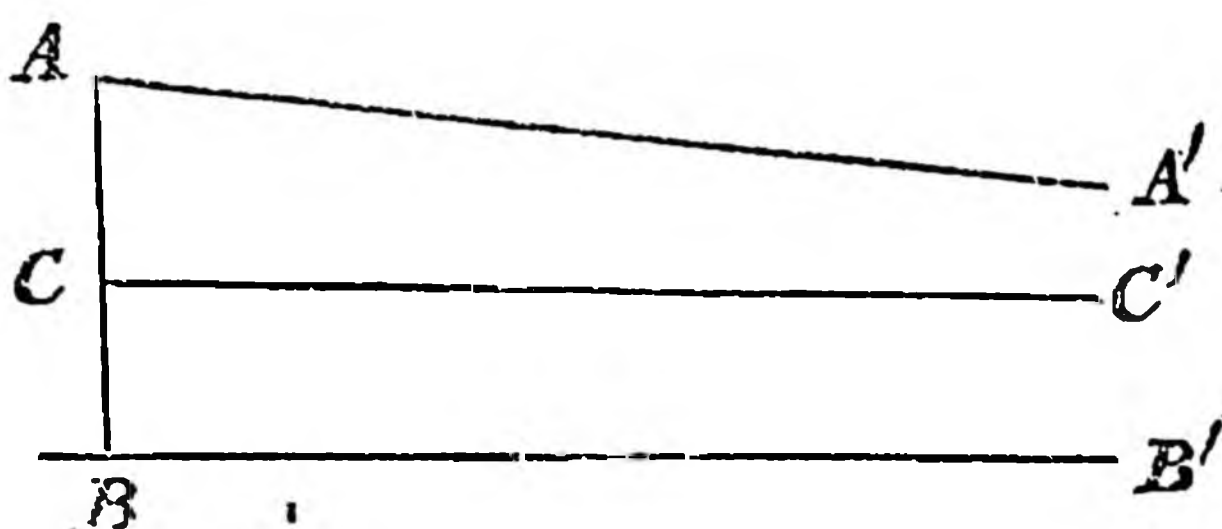
Теперь легко доказать что  $BB' \parallel CC'$ .

Въ самомъ дѣлѣ, если  $BB'$  не параллельна  $CC'$ , то есть другая  $BB''$  ей параллельная въ той же плоскости.  $AA' \parallel CC'$  и  $BB'' \parallel CC'$ , слѣдовательно, по доказанному выше,  $BB''$  и  $AA'$  находятся въ одной плоскости. Слѣдовательно, плоскость  $A'AB$  пересѣкается съ плоскостью  $C'SB$  по линиямъ  $BB'$  и  $BB''$ , что невозможно.



*Свойства параллельныхъ.* Пусть  $A$  будетъ точка внѣ прямой  $BB'$ . Изъ точки  $A$  опустимъ перпендикуляръ  $AB$  на  $BB'$ .

**Фиг. 14.**



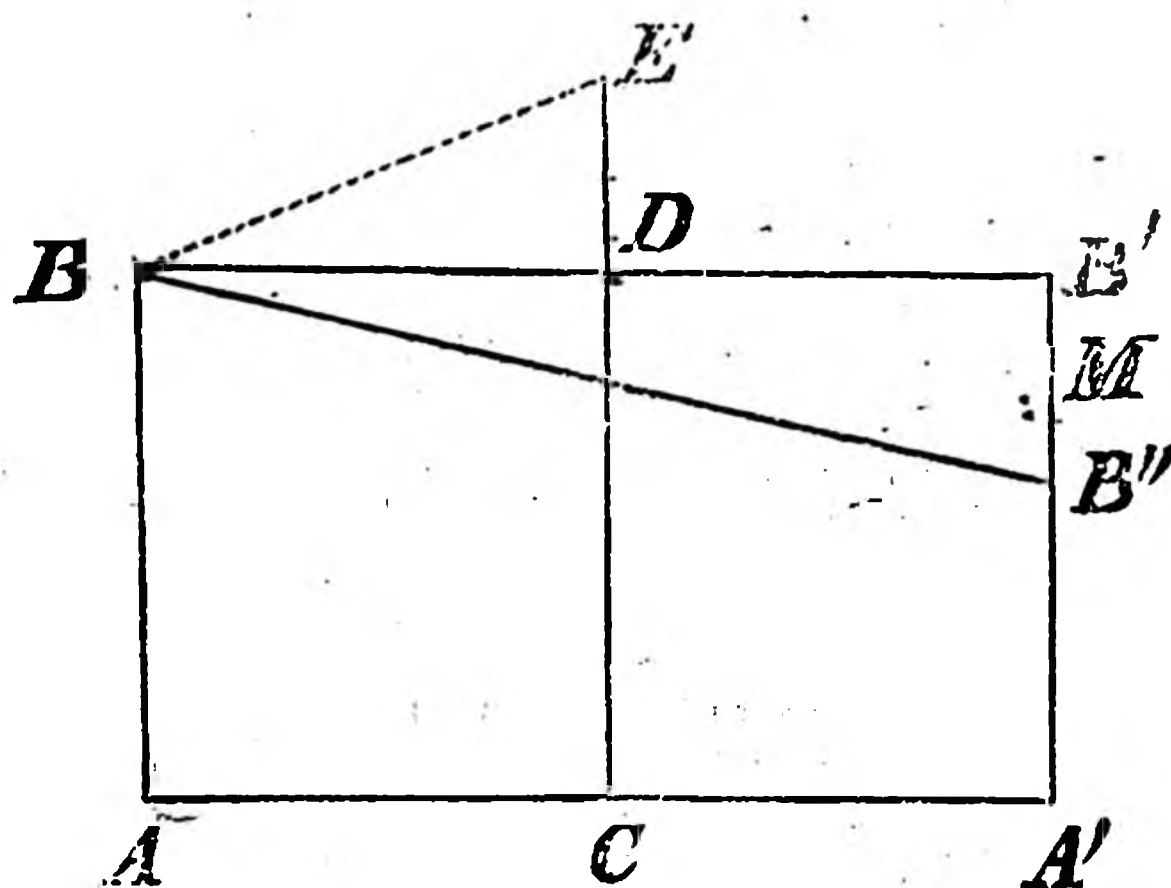
Черезъ точку  $A$  проведемъ  $AA' \parallel BB'$ . Уголъ  $A'AB$  между перпендикуляромъ  $AB$  и параллельною  $AA'$  называется угломъ *параллельности*.

Если разстояніе  $AB$  точки  $A$  отъ прямой  $BB'$  увеличивается или уменьшается, то уголь параллельности уменьшается или увеличивается. Пусть, напримѣръ  $CB < AB$ , то для  $CC' \parallel BB'$  уголь  $C'SB > A'AB$ . Въ самомъ дѣлѣ, если бы было  $C'SB = A'AB$ , или  $C'SB < A'AB$ , то для параллельныхъ  $AA'$  и  $CC'$  сумма внутреннихъ угловъ  $A$  и  $C$  была бы равна или больше двухъ прямыхъ. Для всякаго разстоянія  $p$  точки  $A$  отъ прямой  $BB'$  существуетъ опредѣленный уголь *параллельности*, и обратно, для всякаго угла  $A'AB$  существуетъ опредѣленное разстояніе  $AB = p$ , изъ конца котораго перпендикуляръ  $BB'$  будетъ линіей параллельной  $AA'$ . Этотъ уголь параллельности обозначаютъ символомъ  $\Pi(p)$ , т. е. уголь  $A'AB$  есть функція разстоянія  $AB = p$ . Эта функція имѣетъ слѣдующія свойства: для  $p = 0$   $\Pi(0) = d$ , такъ какъ въ этомъ случаѣ  $A'A$  совпадаетъ съ  $BB'$ . Если  $p$  увеличивается, то  $\Pi(p)$  уменьшается и когда  $p = \infty$ ,  $\Pi(\infty) = 0$ .

*Предложеніе 10.* Параллельныя прямы сближаются неопредѣленно по направленію ихъ параллельности.

*Доказат.* Изъ точекъ  $A$  и  $A'$  прямой  $AA'$  возставимъ равные перпендикуляры  $AB$  и  $A'B'$  и точки  $B$  и  $B'$  соединимъ прямою  $BB'$ . Прямая  $BB'$  не встрѣтитъ прямую  $AA'$ . Въ самомъ дѣлѣ, если возставимъ изъ середины  $C$  прямой  $AA'$  перпендикуляръ  $CD$ , то, очевидно, четырехугольникъ  $CDB'A'$ ,

Фиг. 15.



перегнутый по линии  $CD$ , совмѣстится съ четырехугольникомъ  $CDBA$ , слѣ-

довательно прямая  $BB'$  перпендикулярна къ прямой  $CD$ , но къ ней перпендикулярна и прямая  $AA'$ , слѣдовательно  $AA'$  и  $BB'$  не встрѣтятся. Но, по опредѣленію параллельныхъ, прямая  $BB''$  лежитъ ближе къ прямой  $AA'$ , слѣдовательно она встрѣтитъ  $A'B'$  въ такой точкѣ  $B''$ , для которой  $A'B'' < A'B'$ .

Изъ этого видимъ, что разстояніе точекъ прямой отъ ея параллельной, въ направленіи параллельности, будетъ убывать, а уголъ параллельности слѣдовательно будетъ возрастать; поэтому говорятъ, что двѣ параллельныя прямыя пересѣкаются на бесконечности. Безграничная часть плоскости, заключающаяся между двумя параллельными прямыми, называется *полосой*. Двѣ полосы могутъ совмѣститься.

*Предложеніе 11.* Геометрическое мѣсто равно отстоящихъ точекъ отъ данной прямой есть кривая линія.

*Доказат.* Въ четырехугольникѣ  $ACDB$  уголъ  $B$  острый. Если отложимъ (фиг. 15) на  $CD$  отрѣзокъ  $CE = AB = A'B'$ , то точка  $E$  упадетъ на продолженіи  $CD$ . Четырехугольникъ  $ACEB$  совмѣстится съ четырехугольникомъ  $CABE$ , слѣдовательно уголъ  $B = E$ . Изъ этого слѣдуетъ, что линія, коей точки  $B, E, B', \dots$  равно отстоятъ отъ прямой  $AA'$ , не есть прямая. Равнымъ отрѣзкамъ  $AC$  и  $CA'$  прямой  $AA'$  соотвѣтствуютъ равныя части  $BE$  и  $EB'$  этой кривой. Если разстояніе точекъ кривой отъ прямой будетъ равно нулю, то кривая совпадаетъ съ прямою, по мѣрѣ же того, какъ это разстояніе увеличивается, углы хорды  $BE$  съ перпендикулярами  $AB$  и  $CE$  уменьшаются, такъ какъ изъ двухъ многоугольниковъ, имѣющихъ одинаковое число сторонъ и лежащихъ одинъ внутри другаго, въ меньшемъ изъ нихъ сумма угловъ будетъ больше суммы угловъ большаго [см. пред. 4. 1)].

*Предложеніе 12.* Двѣ не пересѣкающіяся прямыя имѣютъ наименьшее (minimum) разстояніе.

*Доказат.* Каждая прямая, соединяющая точку  $B$  (фиг. 15) съ какою нибудь точкою  $M$ , лежащей между  $B'$  и  $B''$ , не пересѣкаетъ прямую  $AA'$ . Разстояніе точекъ прямой  $BM$  отъ прямой  $AA'$  уменьшается, но это уменьшеніе не можетъ быть неопредѣленно, такъ какъ въ противномъ случаѣ прямая  $BM$  или будетъ сама параллельная  $AA'$ , или пересѣчетъ ее, что по положенію прямой  $BM$  невозможно. Кромѣ того, не можетъ быть никакой части прямой  $BM$ , которой бы точки находились въ равномъ разстояніи отъ  $AA'$ , какъ мы видѣли выше. Слѣдовательно на прямой  $BM$  должна находиться одна такая точка, которой разстояніе отъ прямой  $AA'$  будетъ наименьшее—minimum.

Прямая линія, не лежащая въ плоскости, встрѣчаетъ ее только въ одной точкѣ, называемой *основаніемъ*. Если прямая перпендикулярна къ

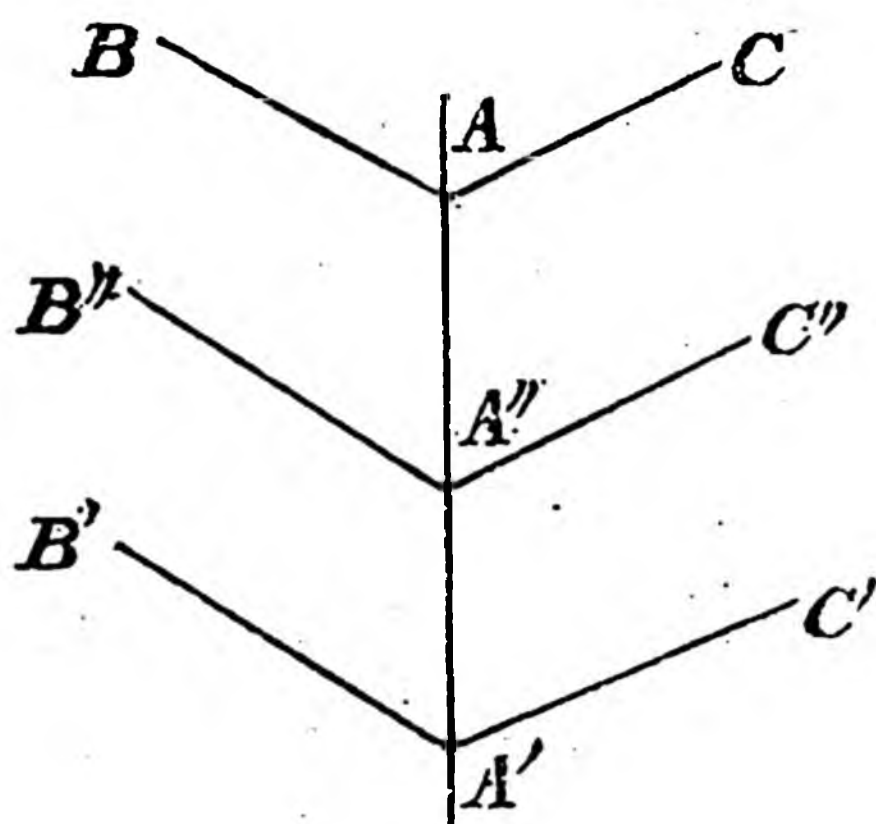
двумъ прямымъ, проходящимъ чрезъ ея основаніе по плоскости, то она перпендикулярна и ко всякой прямой, проходящей чрезъ ея основаніе въ той же плоскости. Въ этомъ случаѣ прямую называютъ перпендикуляромъ къ плоскости. Обратно, прямая перпендикулярная, въ различныхъ плоскостяхъ, къ данной прямой въ одной ея точкѣ, всѣ лежатъ въ одной плоскости.

Двѣ плоскости, проходящія чрезъ одну и ту же прямую, образуютъ двугранный уголъ. Прямая, чрезъ которую проходятъ плоскости, называется *ребромъ* угла, а плоскости называются *гранями*.

*Предложеніе 13.* Если изъ произвольно взятой точки  $A$  на ребрѣ двуграннаго угла возставимъ перпендикуляры  $AB$  и  $AC$  къ ребру въ обѣихъ граняхъ, то величина угла  $BAC$  не измѣняется съ измѣненіемъ положенія точки  $A$  на ребрѣ. Этотъ уголъ принимается за мѣру двуграннаго угла.

*Доказат.* Пусть  $A'$  будетъ другая, произвольно взятая точка на ребрѣ.  $A'B'$ ,  $A'C'$  пусть будутъ перпендикуляры къ ребру въ граняхъ. Если  $A''$  будетъ середина  $AA'$ , а  $A''B''$ ,  $A''C''$  перпендикуляры къ ребру

Фиг. 16.



въ граняхъ, то фигуру  $B''A''C''B'A'C'$  можно такъ совмѣстить съ фигурой  $C''A''B''CAB$ , что прямыя:

$$A''B'', A''C'', A''A$$

первой фигуры, совпадутъ съ прямыми:

$$A''C'', A''B'', A''A'$$

второй фигуры, вслѣдствіе чего вершина и стороны угла  $BAC$  совпадутъ съ вершиною и сторонами угла  $C'A'B'$ .

Слѣдующія предложенія легко доказываются, соображаясь съ предъидущимъ и съ теоремой, что изъ точки на прямой, лежащей въ плоскости, можно возставить *только одинъ* перпендикуляръ къ этой прямой.



**Предложение 14.** Двѣ прямыя, перпендикулярныя къ плоскости, лежатъ обѣ въ плоскости, перпендикулярной къ первой.

**Предложение 15.** Плоскость, проходящая чрезъ прямую, перпендикулярную къ другой плоскости, перпендикулярна сама къ этой плоскости.

**Предложение 16.** Прямая, пересѣченіе двухъ перпендикулярныхъ плоскостей къ третьей, перпендикулярна къ этой послѣдней.

**Предложение 17.** Если прямая  $MA$  перпендикулярна къ плоскости, а  $BC$  произвольно проведенная прямая на плоскости, то:

а)  $MD$  будетъ перпендикулярна къ  $BC$ , если  $AD$  перпендикулярна къ  $BC$ .

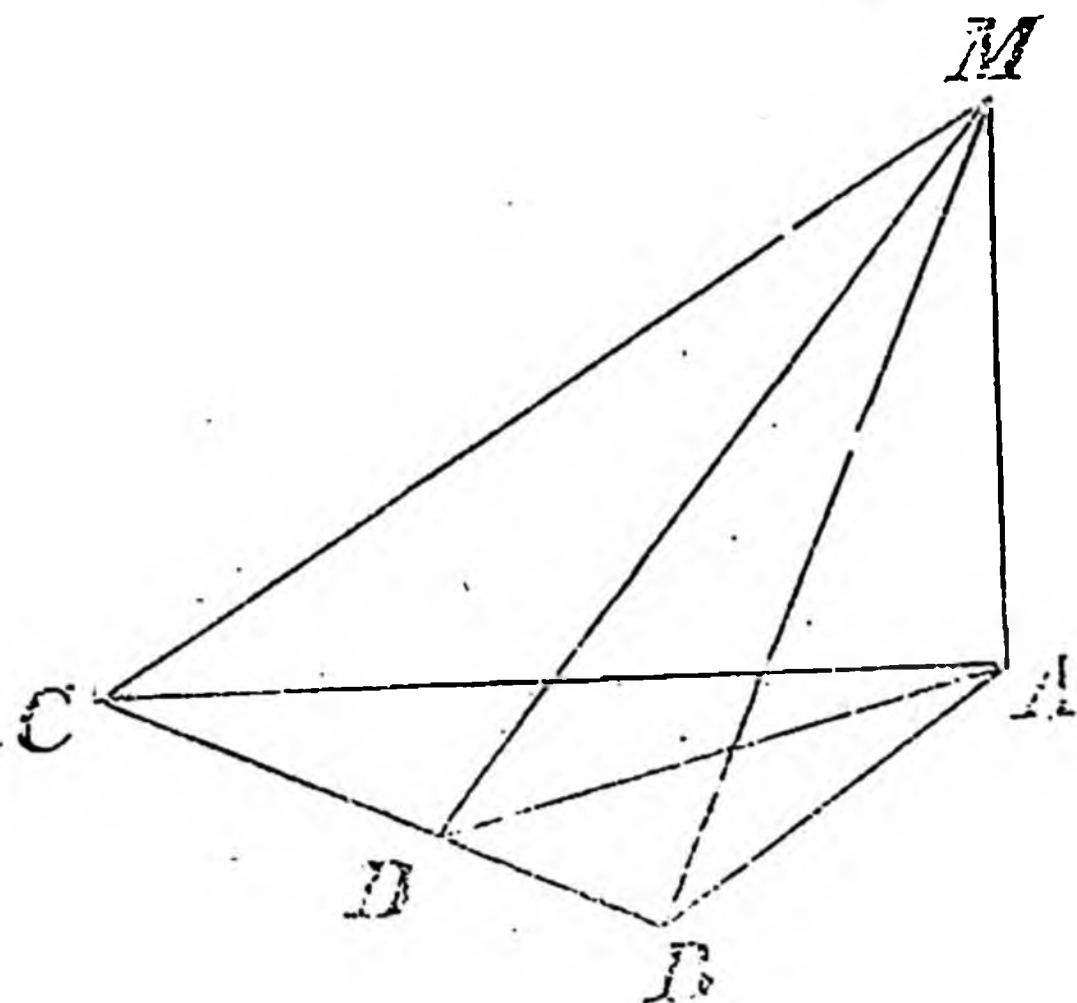
б)  $AD$  будетъ перпендикулярна къ  $BC$ , если  $MD$  перпендикулярна къ  $BC$ .

**Доказат.** Отложимъ  $DB=DC$ , то получимъ:

а) Изъ равенства треугольниковъ  $ADB$  и  $ADC$ , равенство треугольниковъ  $MAD$  и  $MAC$ .

б) Изъ равенства треугольниковъ  $MDV$  и  $MDC$ , получимъ равенство треугольниковъ  $MAV$  и  $MAC$ .

Фиг. 17.



**Задача.** 1) Изъ данной точки  $M$  опустить перпендикуляръ на данную плоскость?

**Рѣшеніе.** Проведемъ произвольную прямую  $BC$  на плоскости, изъ точки  $M$  опустимъ перпендикуляръ  $MD$  на эту прямую (фиг. 17) и изъ точки  $D$  возставимъ перпендикуляръ  $DA$  къ  $BC$  въ плоскости. Перпендикуляръ  $MA$ , опущенный на прямую  $DA$ , и будетъ искомымъ.

**Задача.** 2) Изъ данной точки  $A$  на плоскости возставить перпендикуляръ къ плоскости?

**Рѣшеніе.** Изъ произвольно взятой точки  $M$  внѣ плоскости опустимъ на нее перпендикуляръ  $MN$ ; въ плоскости  $MNA$  проведемъ  $AB$  перпендикулярно къ  $NA$ , то по предъидущему (пред. 17)  $AB$  и будетъ искомымъ перпендикуляръ.

**Задача.** 3) Найти линію пересѣченія двухъ плоскостей?



*Рѣшеніе.* Изъ произвольно взятой точки  $M$  внѣ плоскостей опустимъ перпендикуляры  $MA$  и  $MA_1$  на плоскости, которые будутъ лежать въ плоскости, перпендикулярной къ линіи пересѣченія данныхъ плоскостей, возставимъ въ этой послѣдней плоскости перпендикуляры къ  $MA$  и  $MA_1$ , то эти перпендикуляры пересѣкутся въ точкѣ, лежащей на линіи пересѣченія двухъ данныхъ плоскостей. Перпендикуляръ, возставленный изъ этой послѣдней точки къ плоскости перпендикуляровъ  $MA$  и  $MA_1$  и будетъ искомая линія.

Если перпендикуляры, возставленные изъ точекъ  $A$  и  $A_1$  въ плоскости перпендикуляровъ  $MA$  и  $MA_1$ , не пересѣкутся, то не пересѣкутся и данныя плоскости.

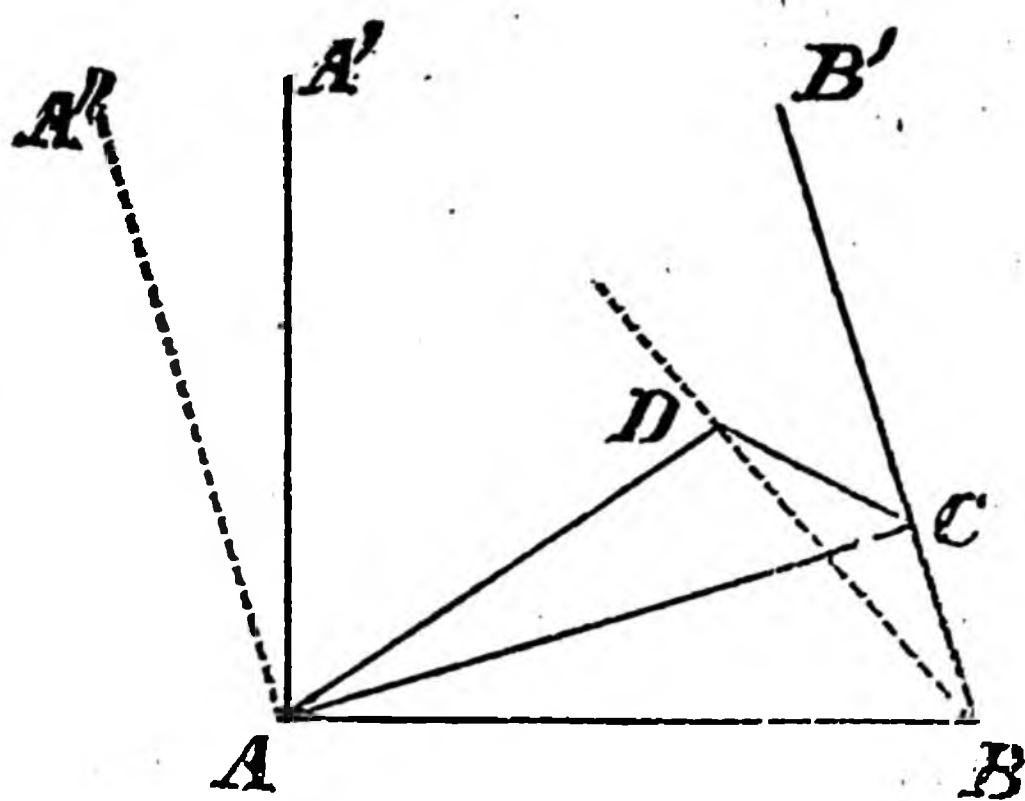
*Предложеніе 18.* Если три плоскости пересѣкаются по параллельнымъ прямымъ, то сумма внутреннихъ двугранныхъ угловъ не больше двухъ прямыхъ.

*Доказат.* Пусть  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  будутъ параллельныя линіи, пересѣченіе данныхъ плоскостей. Пусть  $A$ ,  $B$ ,  $C$  будутъ двугранные углы реберъ  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ . Чрезъ прямую  $AA'$  и линію  $DD'$ , дѣлящую полосу между параллельными  $BB'$  и  $CC'$  пополамъ, проведемъ плоскость. Въ этой плоскости проведемъ линію  $EE'$ , параллельную  $AA'$  такъ, чтобы линія  $DD'$  была середина линій  $AA'$  и  $EE'$ . На плоскости, проведенной чрезъ произвольную точку, перпендикулярно къ  $DD'$  образуется фигура, подобная фигурѣ (чер. 3), къ которой можно приложить тѣже разсужденія, замѣнивъ слова: уголъ, сторона, и треугольникъ, словами: двугранный уголъ, полоса...

*Предложеніе 19.* Если двѣ плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ , проходящія по параллельнымъ прямымъ  $AA'$  и  $BB'$ , составляютъ съ плоскостью  $A'ABB'$  двугранные углы такъ, что сумма двухъ внутреннихъ двугранныхъ угловъ, лежащихъ по одну сторону плоскости  $A'ABB'$ , меньше двухъ прямыхъ, то плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  встрѣтятся.

*Доказат.* 1) Пусть одинъ изъ двугранныхъ угловъ, на примѣръ плоскости  $\alpha$  съ плоскостью  $A'ABB'$ , будетъ прямой, то уголъ плоскости  $\beta$  съ плоскостью  $A'ABB'$  будетъ острый.

Фиг. 18.



Изъ точки  $A$  возставимъ перпендикуляръ  $AB$  къ  $AA'$  въ плоскости

$A'ABB'$  и опустимъ перпендикуляръ  $AC$  на  $BB'$ . Изъ точки  $C$  возставимъ перпендикуляръ  $CD$  къ  $BB'$  въ плоскости  $\beta$ , полученный уголъ  $ACD$  будетъ измѣрять наклоненіе плоскостей  $\beta$  и  $A'ABB'$ , слѣдовательно, будетъ острый. Изъ точки  $A$  опустимъ перпендикуляръ  $AD$  на  $CD$ , то, очевидно,  $AD < AC < AB$ . Чрезъ точки  $A, B, D$  проведемъ плоскость  $\gamma$ , она встрѣтитъ плоскость  $\alpha$  по линіи  $AA''$ , а плоскость  $\beta$  по линіи  $BD$ . Будемъ вращать плоскость  $\gamma$  около  $AB$ , то въ этомъ вращеніи линія  $AA''$  опишетъ плоскость  $\alpha$ , и когда  $AA''$  совпадетъ съ  $AA'$ , тогда  $BD$  упадетъ въ плоскость  $A'ABB'$ , а точка  $D$  упадетъ между  $AA'$  и  $BB'$ . Прямая  $BD$ , въ этомъ послѣднемъ положеніи, встрѣчаетъ прямую  $AA'$ , слѣдовательно, прямая  $BD$  пересѣкаетъ прямую  $AA''$  въ своемъ первоначальномъ положеніи. Такъ какъ эта точка пересѣченія лежитъ и въ плоскости  $\alpha$  и въ плоскости  $\beta$ , то эти плоскости встрѣчаются.

2) Пусть двугранные углы плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  съ плоскостью  $A'ABB'$  будутъ острые или

3) Одинъ уголъ, напримѣръ, плоскости  $\alpha$  съ  $A'ABB'$  тупой, а другой острый.

Проведемъ чрезъ прямую  $BB'$  плоскость  $\gamma \perp \alpha$ , которая встрѣтитъ плоскость  $\alpha$  по линіи  $A_1A_1' \parallel AA' \parallel BB'$ .

Въ случаѣ 2), двугранные углы плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  съ  $\gamma$  будутъ первый прямой, а второй острый, слѣдовательно, по 1) случаю плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересѣкнутся. Въ случаѣ 3) углы плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  съ  $\gamma$ , первый будетъ прямой, а второй также острый, слѣдовательно, во всякомъ случаѣ, плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  встрѣтятся.

*Слѣдствіе.* Изъ предъидущаго выводимъ, что сумма внутреннихъ двугранныхъ угловъ, трехъ пересѣкающихся по параллельнымъ линіямъ плоскостей, равна двумъ прямымъ.

*Предложеніе 20.* Если на параллельныхъ  $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ , для данной точки  $A$  на прямой  $AA'$ , опредѣлимъ на прямыхъ  $BB'$  и  $CC'$  точки  $B$  и  $C$  такъ, чтобы углы:

$$A'AB = B'BA, \quad A'AC = C'CA$$

то мы будемъ имѣть и уголъ (фиг. 19):

$$B'BC = C'CB.$$

*Доказат.* 1) Прямые  $AA', BB', CC'$  не находятся въ одной плоскости.

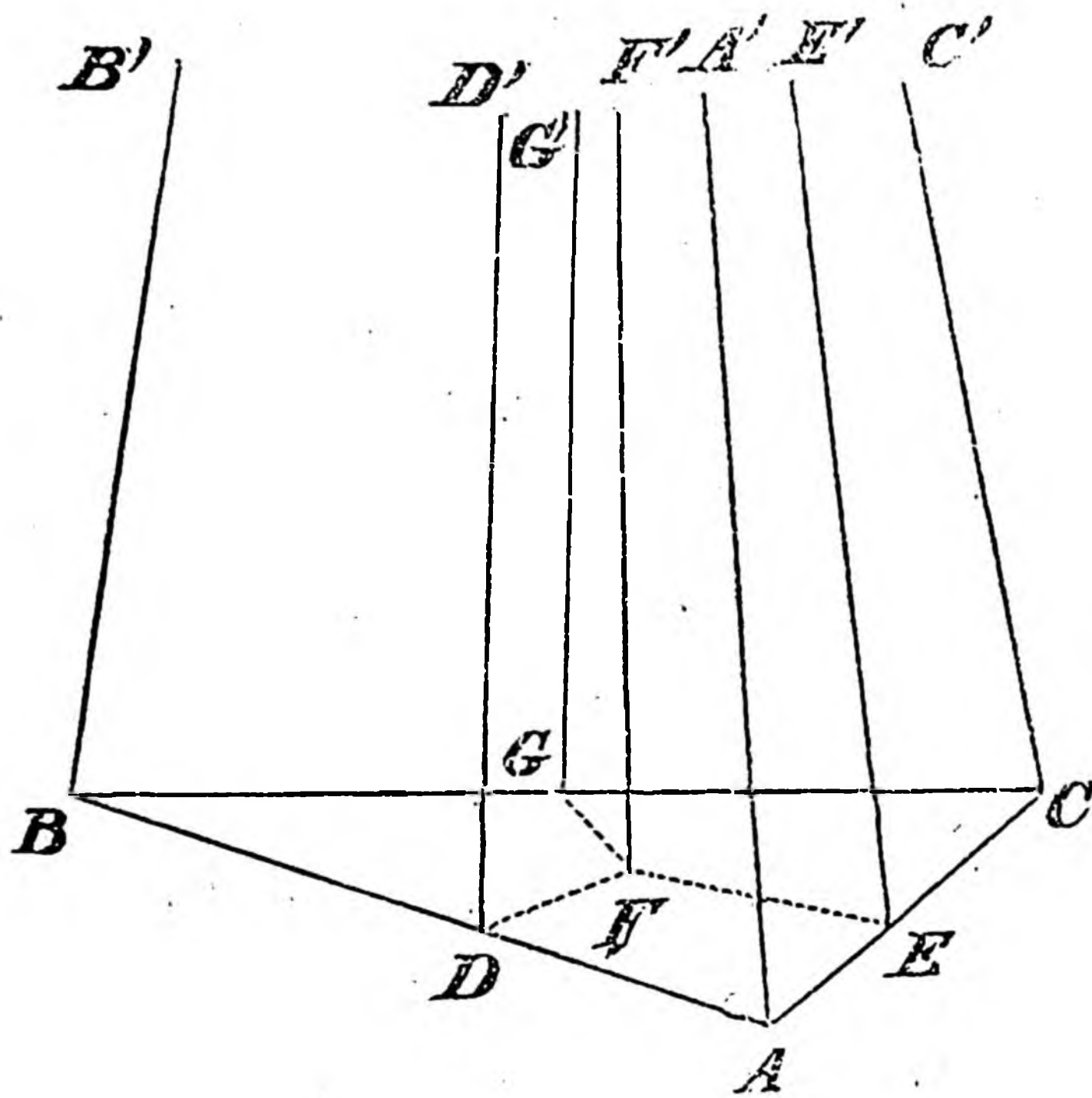
Проведемъ по линіямъ  $DD'$  и  $EE'$ , дѣлящимъ полосы  $BB'AA'$  и  $A'ACC'$  пополамъ, плоскости перпендикулярныя къ плоскостямъ

$B'BA A'$  и  $A'AC C'$ . Эти плоскости пересѣкутся по линіи  $FF' \parallel DD' \parallel EE'$ . Если  $F$  будетъ точка встрѣчи прямой  $FF'$  съ плоскостью  $ABC$ , то мы будемъ имѣть:

$$BF=AF=CF$$

Линіи  $BF$ ,  $AF$ ,  $CF$  на чертежѣ не показаны.

Фиг. 19.



Проведемъ  $FG \perp BC$ , то  $BG=GC$  и прямая  $BC$  будетъ перпендикулярна къ плоскости  $F'FG$ , слѣдовательно, будетъ перпендикулярна и къ прямымъ  $GG' \parallel FF'$ . Прямая  $BB'$  и  $CC'$  параллельны прямой  $GG'$ , слѣдовательно,  $GG'$  будетъ перпендикуляръ въ серединѣ  $G$  къ прямой  $BC$ , откуда мы имѣемъ  $B'BC=C'CB$ .

*Слѣдствіе.* Точка  $F$  есть центръ круга, проходящаго чрезъ три точки  $A, B, C$ . Одна изъ этихъ трехъ точекъ, на примѣръ  $A$ , на прямой  $AA'$ , можетъ быть взята произвольно, остальные  $B$  и  $C$ , на прямыхъ  $BB'$  и  $CC'$ , опредѣляются затѣмъ вполне.

2) Прямая  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  находятся въ одной плоскости.

Проведемъ прямую  $DD' \parallel AA'$  внѣ плоскости прямыхъ  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  и опредѣлимъ точку  $D$  такъ, чтобы уголъ  $D'DA=A'AD$ . Изъ равенства угловъ  $D'DB=B'BD$  и  $D'DC=C'CD$ , слѣдуетъ равенство угловъ  $B'BC=C'CB$ .

Замѣтимъ, что предложенія 17, 18, 19 имѣютъ мѣсто независимо отъ аксіомы параллельныхъ линій.

#### Предѣльная поверхность.

Возьмемъ произвольно прямую  $AA'$  и на каждой прямой  $MM'$ , параллельной  $AA'$ , опредѣлимъ точку  $M$  соотвѣтственно данной точкѣ  $A$  на прямой  $AA'$  такъ, чтобы углы:



$$M'MA = A'AM$$

Геометрическое мѣсто точекъ  $M$ , опредѣленныхъ такимъ образомъ, относительно данной точки  $A$ , есть поверхность, которую называютъ *предѣльной*. Прямая  $AA'$  называется *осью* предѣльной поверхности и обратно, такимъ образомъ полученная поверхность называется *предѣльной поверхностью* оси  $AA'$ .

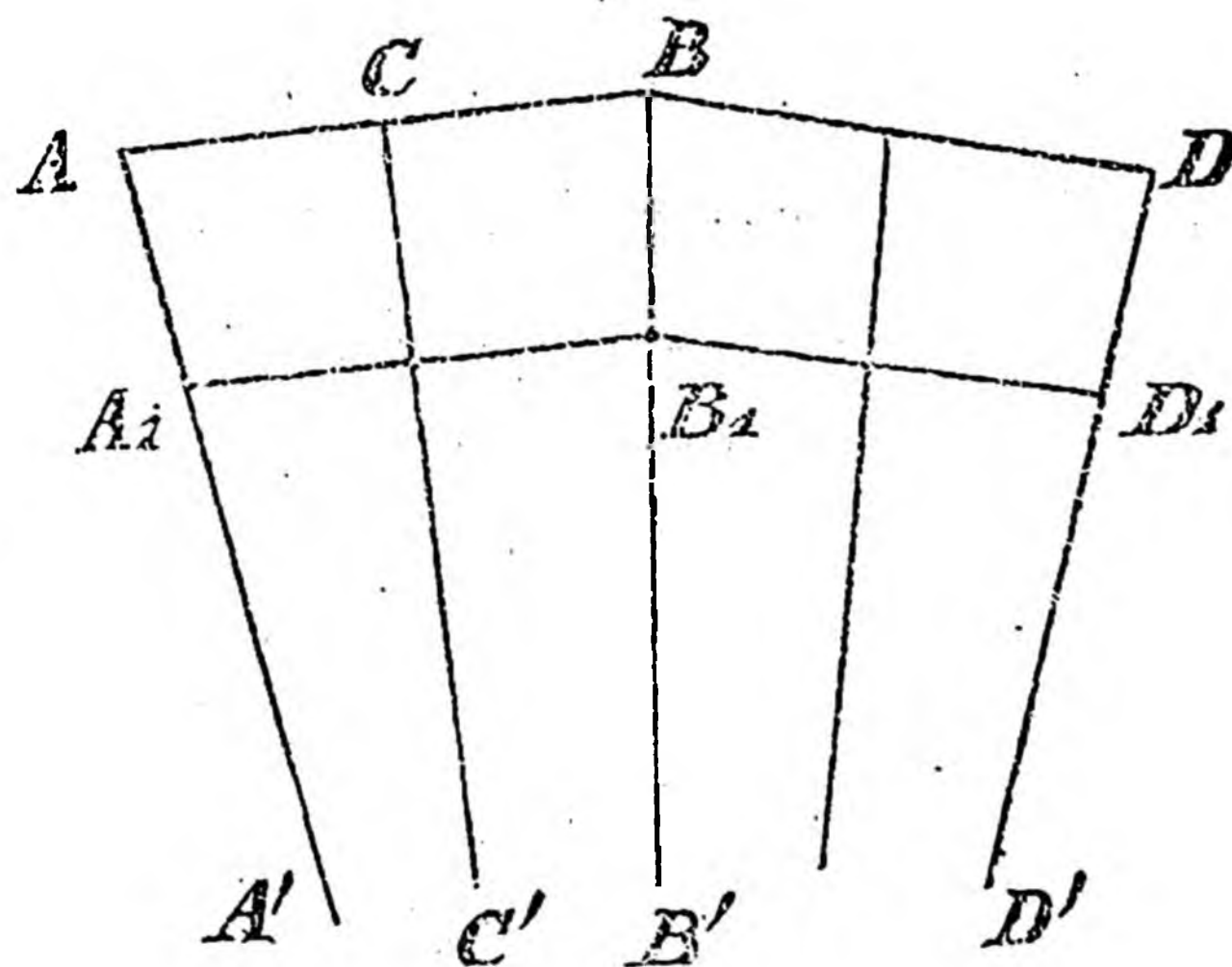
Пусть  $B$  и  $C$  будутъ двѣ, произвольно взятые, точки на предѣльной поверхности, проведемъ  $BB'$  и  $CC' \parallel AA'$ , то (пред. 20) углы  $B'BC = C'CB$ , т. е. каждую изъ параллельныхъ  $BB'$ ,  $CC'$ , . . . , оси  $AA'$  можно рассматривать какъ ось той же предѣльной поверхности.

#### Предѣльная кривая.

Сѣченіе предѣльной поверхности плоскостью, проходящею по оси, есть кривая, которую называютъ *предѣльной линіею*.

Каждая предѣльная линія имѣетъ слѣдующее свойство: перпендикуляры, возставленные изъ срединъ хордъ, параллельны осямъ. На этомъ свойствѣ легко построить предѣльную линію на плоскости. Возьмемъ произвольную прямую  $AA'$  на плоскости и чрезъ данную точку  $A$  проведемъ прямую  $AB$  подъ произвольнымъ угломъ  $A'AB$ . На прямой  $AB$  возьмемъ

Фиг. 20.



отрѣзокъ  $AC$  такъ, чтобы перпендикуляръ  $CC'$  къ  $CB$  былъ параллеленъ  $AA'$ , сдѣлаемъ  $CB = AC$ . Геометрическое мѣсто точекъ  $B$ , такимъ образомъ полученныхъ, будетъ предѣльная линія.

1) Если уголъ  $A'AB$  будетъ прямой, то очевидно  $AB = 0$ , т. е. касательная къ предѣльной линіи, въ какойнибудь точкѣ  $A$ , будетъ перпендикулярна къ оси въ этой точкѣ. Каждая прямая не перпендикулярная къ оси въ точкѣ  $A$ , какъ напримѣръ  $AB$ , пересѣкаетъ предѣльную кривую въ двухъ точкахъ  $A$  и  $B$ .

2) Предѣльная кривая состоитъ изъ тождественныхъ частей, т. е.



каждая часть предѣльной линіи можетъ совмѣститься всѣми своими точками, и, въ угодно, на остальной ея части. Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ  $BD$  такъ, чтобы уголъ  $DBB' = BAA'$  и  $BD = AB$ , то точка  $D$  будетъ также на предѣльной кривой.

Предѣльная линія расположена симметрично по обѣ стороны каждой оси.

Всѣ предѣльныя линіи тождественны, т. е. двѣ предѣльныя линіи совмѣщаются, если точка и ось въ этой точкѣ, одной изъ линій, совмѣстятся съ точкой и осью другой.

3) Если отъ осей  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $DD'$  отложимъ равныя отрѣзки  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $DD_1$ , ..., то точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ , ... лежатъ также на предѣльной линіи. Въ самомъ дѣлѣ, фигуру  $A'ABV'$  можно совмѣстить съ фигурой  $B'BA A'$ , отрѣзокъ  $A_1B_1$  совмѣстится съ  $B_1A_1$ . Слѣдовательно, точка  $B_1$  принадлежитъ предѣльной линіи оси  $A_1A'$ .

4) Кругъ, коего радіусъ возрастаетъ неопредѣленно, переходитъ въ предѣльную прямую.

*Предложеніе 21.* Сѣченіе предѣльной поверхности, съ какою нибудь плоскостью, не проходящею чрезъ ось, есть кругъ.

*Доказат.* Возьмемъ на линіи сѣченія три произвольныя точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Въ плоскости  $ABC$  мы найдемъ (см. пред. 20) такую точку  $F$ , что  $FA = FB = FC$  и что перпендикуляръ  $FF'$  въ точкѣ  $F$  къ плоскости  $ABC$  будетъ параллеленъ  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , слѣдовательно, точка  $F$  будетъ центръ круга, проходящаго чрезъ точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Будемъ, теперь, вращать плоскость  $F'FA$  около прямой  $F'F$ , прямая  $FA$  опишетъ плоскость  $ABC$ , а точка  $A$  опишетъ кругъ, проходящій чрезъ точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и коего всѣ точки, очевидно, лежатъ на предѣльной поверхности, такъ какъ прямая  $AA'$  остается всегда параллельною  $FF'$ ; кромѣ этихъ точекъ ни одна изъ точекъ плоскости не лежитъ на предѣльной поверхности (см. стр. 20).

Слѣдовательно предѣльная поверхность есть поверхность вращенія, которую можно еще получить, вращая предѣльную линію около одной изъ ея осей.

Сфера, коей радіусъ возрастаетъ неопредѣленно, переходитъ въ предѣльную поверхность.

#### Свойства предѣльной поверхности.

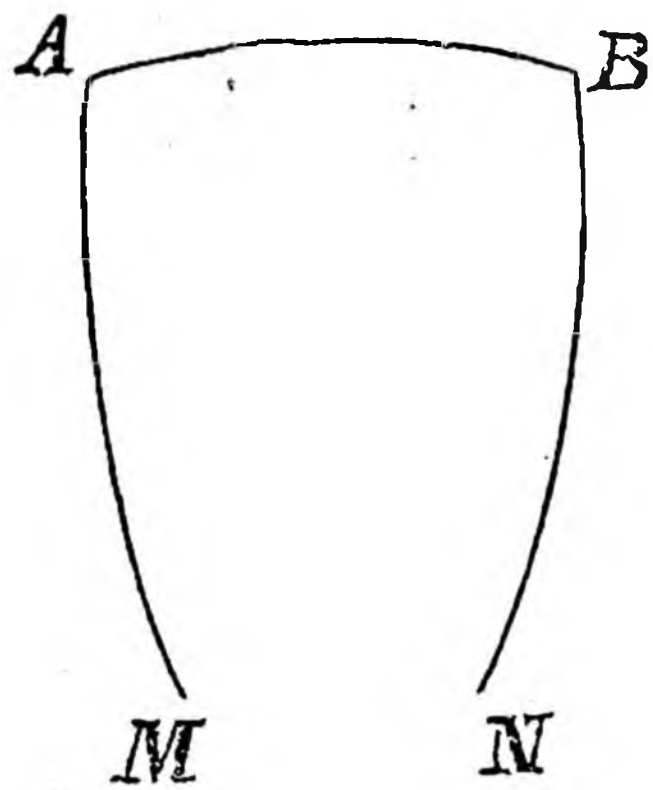
*Предложеніе 22.* Двѣ точки на предѣльной поверхности вполне опредѣляютъ предѣльную линію.

*Предложеніе 23.* Если сумма внутреннихъ угловъ, двухъ предѣльныхъ

линій, пересѣченныхъ третьей, меньше двухъ прямыхъ угловъ, то такіа предѣльныя линіи встрѣтятся.

*Доказат.* Плоскости предѣльныхъ линій  $AM$  и  $BN$  съ плоскостью предѣльной линіи  $AB$ , составляютъ углы, коихъ сумма меньше двухъ прямыхъ, обѣ плоскости (см. пред. 19) предѣльныхъ линій  $AM$  и  $BN$  пересѣкаются по прямой, слѣдовательно, предѣльныя линіи также пересѣкаются.

Фиг. 21.



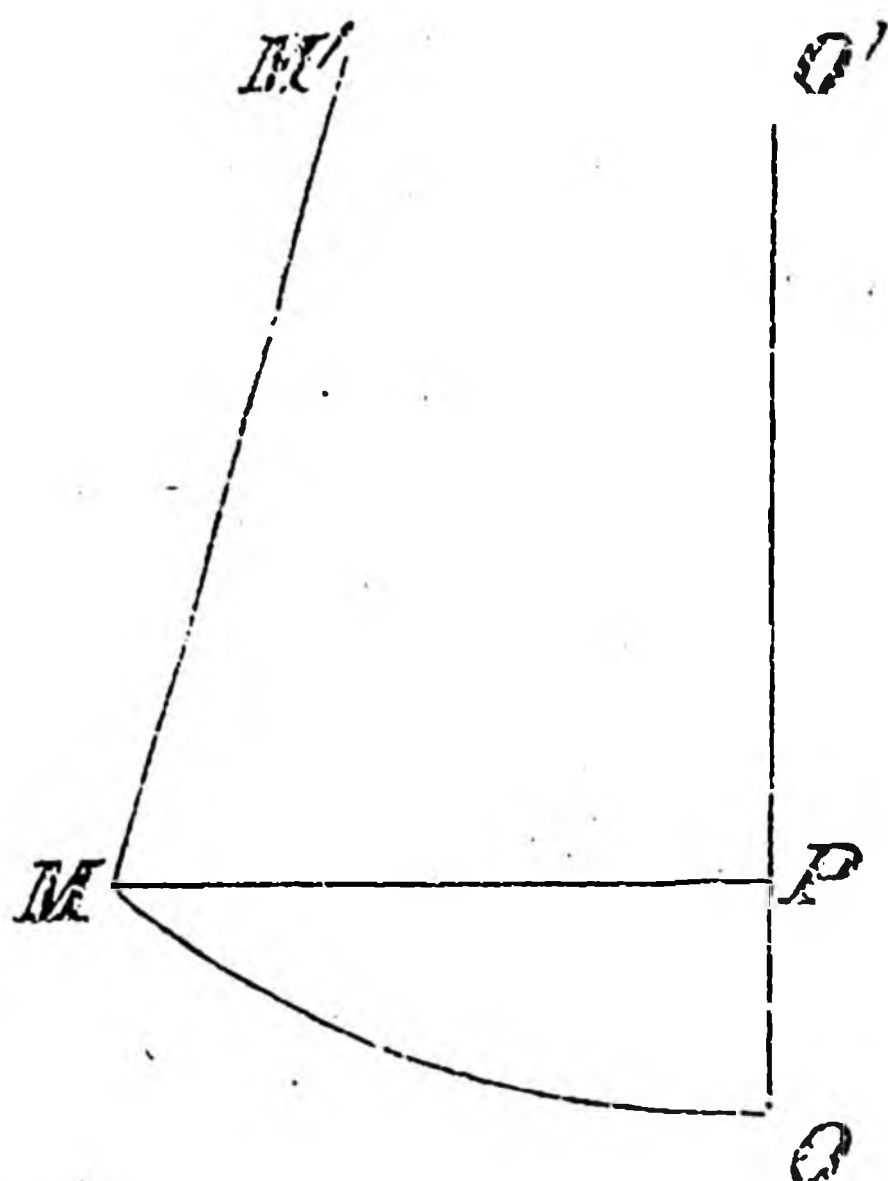
Изъ тождества частей предѣльной поверхности и предложеній 22 и 23, которыя суть Евклидовскія аксіомы на плоскости, слѣдуетъ, что геометрическая система на предѣльной поверхности есть система Евклидовская, на ней имѣютъ мѣсто слѣдующія предложенія:

1) Сумма угловъ въ треугольникѣ, коего стороны суть предѣльныя линіи, равна двумъ прямымъ.

2) Окружность круга, коего радіусъ  $r$  есть часть предѣльной линіи, равна  $2\pi r$ , гдѣ  $\pi = 3,14159\dots$

Пусть  $O$  будетъ центръ круга на предѣльной поверхности,  $M$  произвольная точка окружности круга и  $MM' \parallel OO'$ .

Фиг. 22.



Вращая предѣльную кривую  $MO=r$  около оси  $OO'$ , получимъ окружность. Опустимъ изъ точки  $M$  перпендикуляръ на ось  $OO'$ ,  $MP=y$ , этотъ

перпендикуляръ опишетъ окружность ту-же самую. Если означимъ эту окружность символомъ  $Ок.у$ , то получимъ:

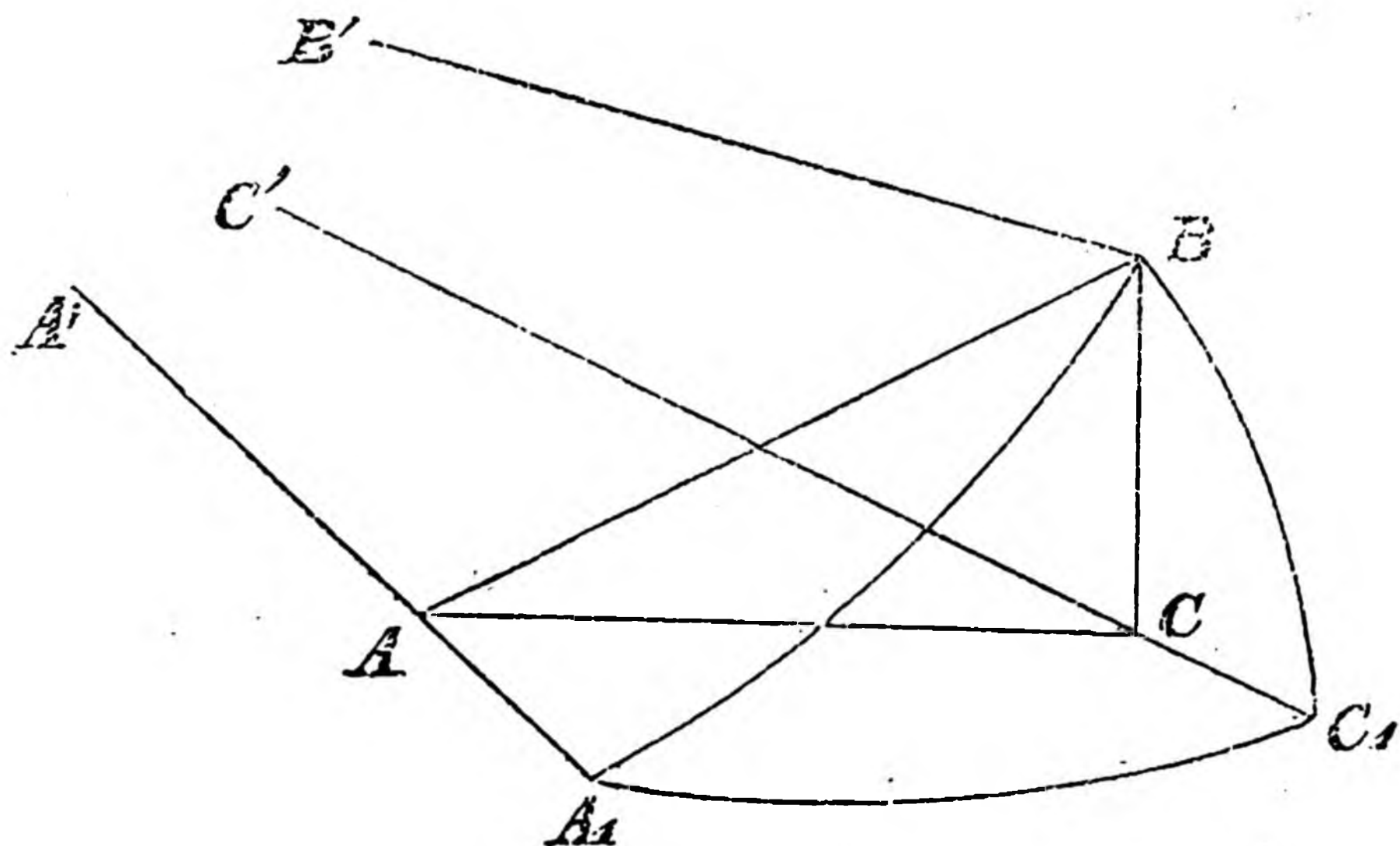
$$Ок.у=2\pi r.$$

Изъ этого видимъ, что въ Неевклидовой геометрической системѣ существуетъ поверхность, на которой имѣетъ мѣсто Евклидовская плоская геометрія и тригонометрія безъ исключеній.

*Предложеніе 24.* Во всякомъ треугольникѣ окружности круговъ, коихъ радіусы суть стороны треугольника, относятся между собою какъ синусы противолежащихъ угловъ.

*Доказат.* Пусть  $ABC$  будетъ прямоугольный треугольникъ. Уголъ  $C$  прямой. Проведемъ въ точкѣ  $A$  или  $B$ , на примѣръ въ точкѣ  $A$ , перпендикуляръ  $AA'$  къ плоскости  $ABC$ , изъ точекъ  $B$  и  $C$  проведемъ прямыя  $BB'$ ,  $CC'$  параллельныя  $A'A$ .

Фиг. 23.



Черезъ точку  $B$ , принимая прямую  $BB'$  за ось, проведемъ предѣльную поверхность, которая пересѣчетъ прямыя  $AA'$  и  $CC'$  въ точкахъ  $A_1$  и  $C_1$ . Такимъ образомъ, на предѣльной поверхности, получимъ треугольникъ  $A_1BC_1$ , въ которомъ уголъ  $A_1=A$ . Слѣдовательно:

$$BC_1=A_1B \sin A$$

откуда:

$$2\pi BC_1=2\pi A_1B \sin A$$

Но окружности круговъ  $2\pi BC_1$  и  $2\pi A_1B$  на предѣльной поверхности равны окружностямъ круговъ  $Ок. BC$ ,  $Ок. AB$  плоскихъ круговъ, коихъ радіусы суть  $BC$  и  $AB$ . Слѣдовательно:

$$Ок. BC=Ок. AB \sin A$$

Возьмемъ теперь какой нибудь треугольникъ  $ABC$ , коего стороны суть  $a, b, c$ , а противуположные сторонамъ углы  $A, B, C$ ; поступая, какъ въ плоской тригонометріи, получимъ слѣдующую зависимость:

$$Ок.а : Ок.б : Ок.с = \sin A : \sin B : \sin C$$

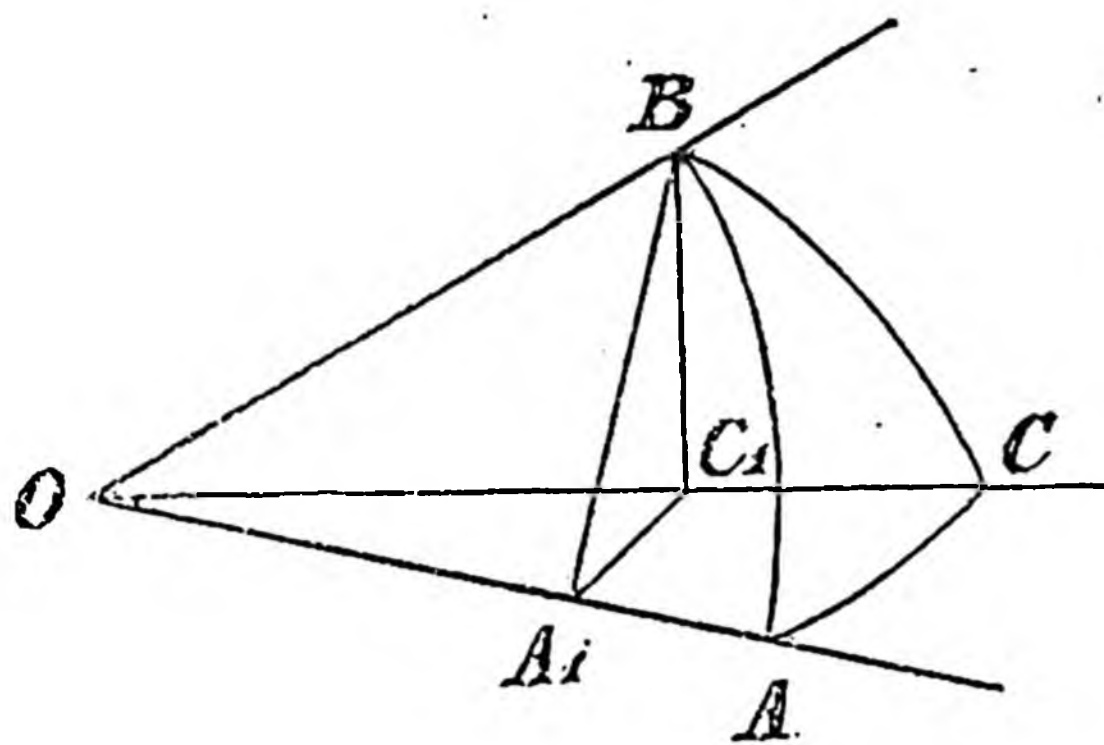
гдѣ  $Ок.а, Ок.б, Ок.с$  суть окружности плоскихъ круговъ, коихъ радіусы суть  $a, b, c$ .

*Предложеніе 25.* Въ сферическомъ прямоугольномъ треугольникѣ  $ABC$ , въ которомъ уголъ  $C$  прямой, а стороны суть  $a, b, c$  мы имѣемъ:

$$\sin a = \sin c \sin A.$$

*Доказат.* Чрезъ одну изъ точекъ  $A$  или  $B$ , наримѣръ  $B$ , проведемъ прямую  $BA_1 \perp OA$  и прямую  $BC_1 \perp OC$ ; соединимъ точки  $A_1$  и  $C_1$ , полу-

Фиг. 24.



чимъ, такимъ образомъ, прямоугольный треугольникъ  $A_1BC_1$ , въ которомъ уголъ  $C_1$  прямой, а уголъ  $A_1 = A$ , слѣдовательно (см. пред. 24) имѣемъ:

$$Ок. BC_1 = Ок. BA_1 \sin A$$

Изъ треугольниковъ  $OBA_1$  и  $OBC_1$  слѣдуетъ:

$$Ок. BA_1 = Ок. OB \sin c, \quad Ок. BC_1 = Ок. OB \sin a$$

подставляя въ предыдущее уравненіе, получимъ:

$$\sin a = \sin c \sin A$$

Какъ извѣстно, изъ этой формулы вытекаетъ вся сферическая тригонометрія, которая, слѣдовательно, независитъ отъ аксіомы параллельныхъ линій.



Зависимость между дугами двух предѣльных линий.

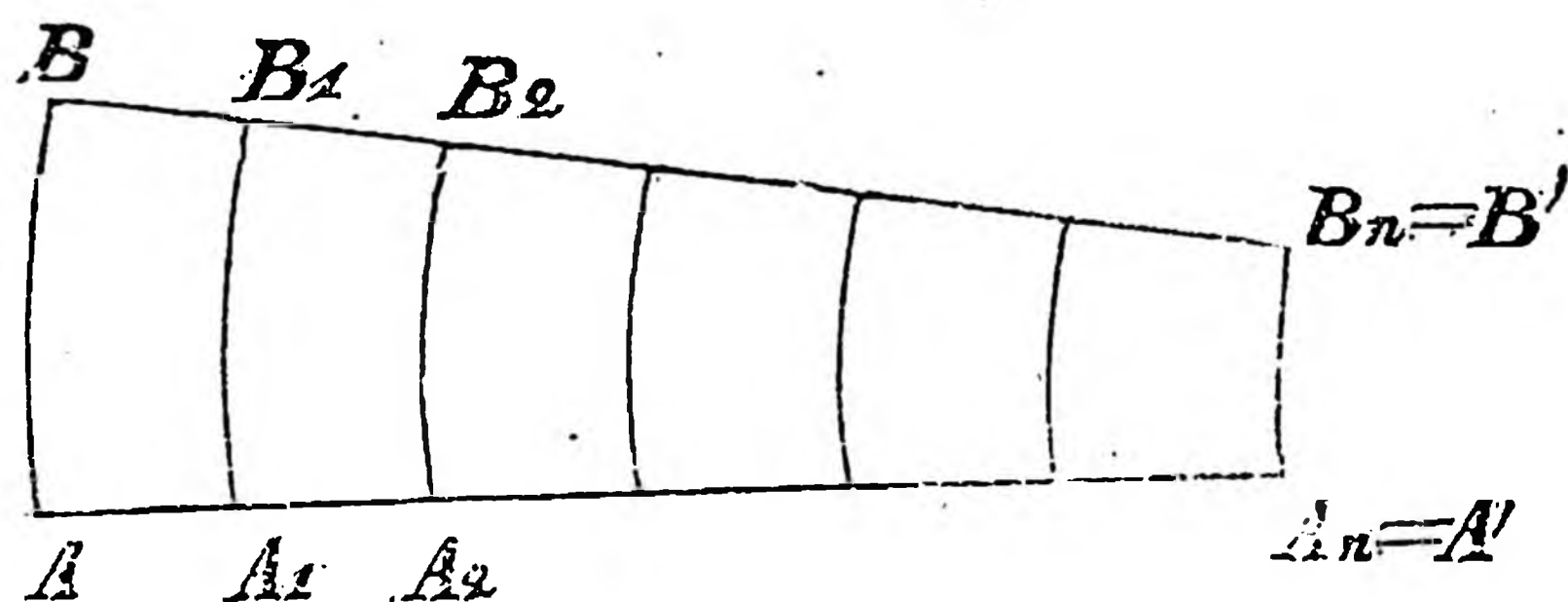
Если  $AD$  и  $A_1D_1$  будутъ двѣ дуги предѣльныхъ линий, лежащихъ между двумя осями  $AA'$  и  $DD'$ , то равнымъ хордамъ  $AB$  и  $BD$ , первой изъ нихъ, будутъ соответствовать равныя хорды  $A_1B_1$ ,  $A_1D_1$  второй, слѣдовательно (см. фиг. 20):

$$AA_1 = BB_1 = DD_1$$

Раздѣлимъ предѣльную дугу  $AM$  на  $m$  равныхъ частей, то осями, проведенными въ точкахъ дѣленія, и дуга  $A'M'$  раздѣлится на столько же равныхъ частей, слѣдовательно, отношеніе двухъ такихъ дугъ не зависитъ отъ величины дугъ, а зависитъ отъ разстоянія  $AA'$  этихъ дугъ.

Чтобы опредѣлить это отношеніе, раздѣлимъ разстояніе  $AA'$  (фиг. 25) на  $n$  равныхъ частей; пусть  $AA_1 = A_1A_2 \dots = A_{n-1}A' = a$ , и  $AB = s$ ,  $A_1B_1 = s_1$ ,

Фиг. 25.



$A_2B_2 = s_2, \dots, A'B' = s_n$ , суть дуги, соответствующія точкамъ дѣленія  $A, A_1, A_2, \dots$ . Мы сказали, что отношеніе между дугами зависитъ только отъ разстоянія между ними, слѣдовательно:

$$\frac{s}{s_1} = \frac{s_1}{s_2} = \frac{s_2}{s_3} = \dots = \frac{s_{n-1}}{s_n} = \lambda$$

гдѣ  $\lambda$  есть отношеніе, соответствующее разстоянію  $a$ . Перемножая эти  $n$  уравненій мы получимъ:

$$\frac{s}{s_n} = \lambda$$

Пусть  $k$  будетъ разстояніе двухъ предѣльныхъ дугъ, коихъ отношеніе равно данному числу  $e$ , и пусть  $k = ma$ , то:

$$e = \lambda^m \quad \text{и} \quad \lambda = e^{\frac{1}{m}}$$

слѣдовательно:

$$\frac{s}{s_n} = e^{\frac{n}{m}} = e^{\frac{na}{ma}} = e^{\frac{x}{k}}$$

Разстояніе  $k$  можно такъ выбрать, что  $e$  будетъ основаніе Неперовыхъ логарифмовъ:

$$e=2,718281828459.....$$

*Слѣдствіе.* Положимъ:

$$e^{\frac{x}{k}} = \zeta, \quad e^{\frac{y}{k}} = \eta$$

перемножая и раздѣляя, найдемъ:

$$\zeta\eta = e^{\frac{x+y}{k}}, \quad \zeta : \eta = e^{\frac{x-y}{k}}$$

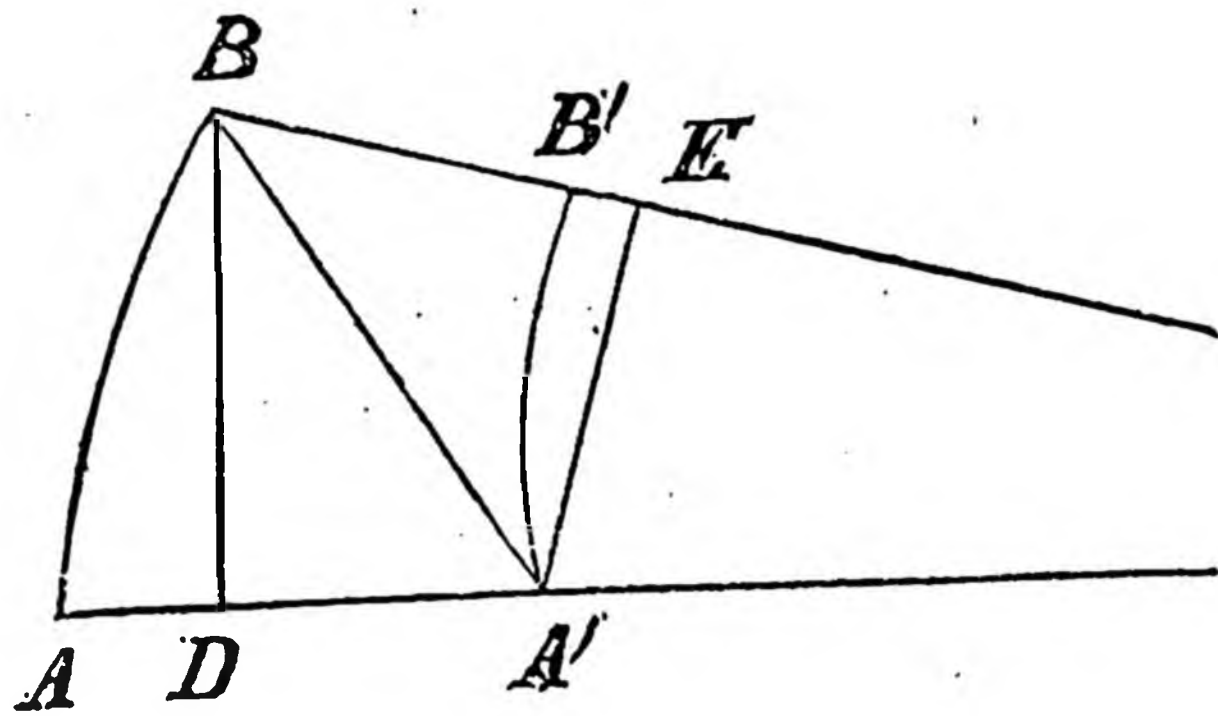
$\zeta\eta$  и  $\zeta : \eta$  суть отношенія дугъ, соотвѣтствующія разстояніямъ  $x+y$  и  $x-y$ . Если  $x$  выразить въ частяхъ  $k$ , то будемъ имѣть  $s = s_n e^x$ .

*Предложеніе 26.* Пусть  $AB$  и  $A'B'$  будутъ двѣ предѣльныя дуги между двумя осями  $AA'$  и  $BB'$ , то ихъ отношеніе будетъ:

$$AB : A'B' = \sin AA'B : \sin A'BB'$$

*Доказат.* Если проведемъ прямыя  $BD \perp AA'$  и  $A'E \perp BB'$ , то будемъ имѣть:

Фиг. 26.



$$O_k.BD = O_k.A'B \sin AA'B, \quad O_k.A'E = O_k.A'B \sin A'BB'.$$

Но:

$$O_k.BD = 2\pi AB, \quad O_k.A'E = 2\pi A'B'$$

подставляя, получимъ требуемую пропорцію.

Зависимость между разстояніемъ и угломъ параллельности.

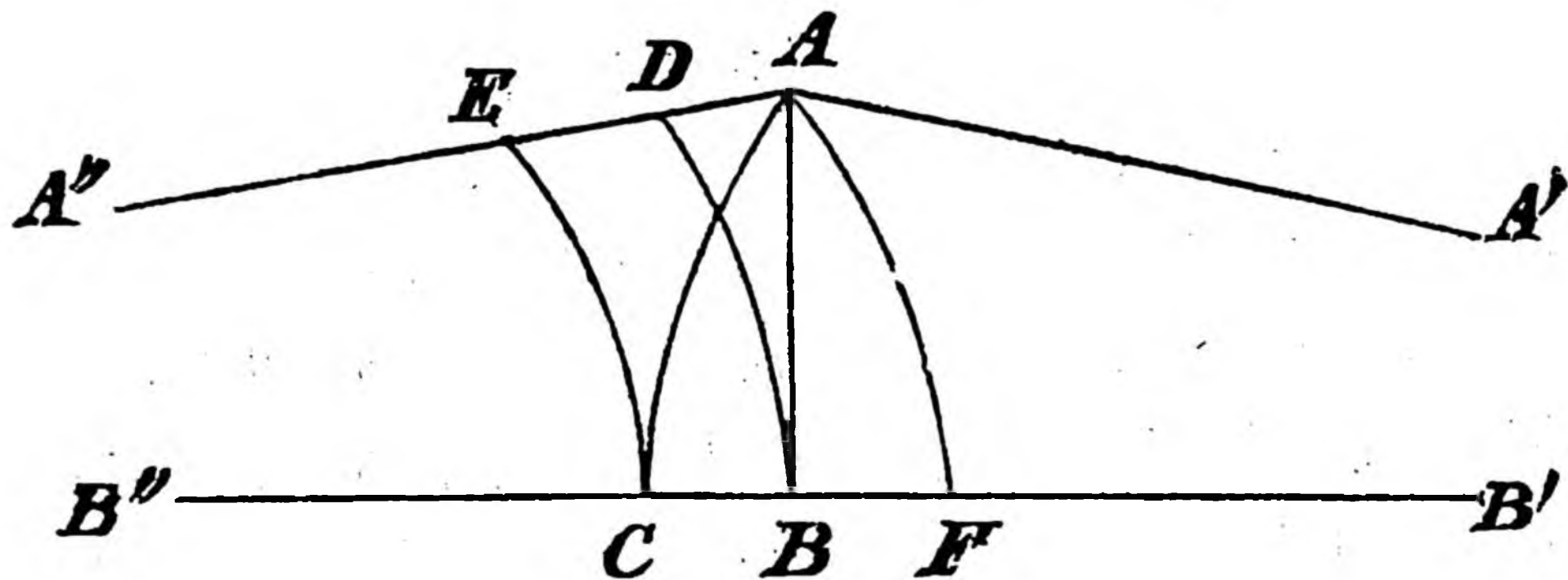
*Предложеніе 27.* Если  $p$  есть разстояніе какой нибудь точки отъ прямой и  $\Pi(p)$  уголъ параллельности, то:

$$\cotg \frac{1}{2} \Pi(p) = e^{\frac{p}{k}}$$

*Доказат.* 1) Пусть  $A$  будетъ точка внѣ прямой  $B''B'$ ,  $AB \perp B'B''$ ,  $AA' \parallel BB'$ ,  $AA'' \parallel BB''$ , и пусть  $AC$ ,  $BD$ ,  $CE$  будутъ предѣльныя линіи относительно осей  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CB''$ ; то  $AD=DE=BC$ , такъ какъ, проведя предѣльную дугу  $AF$  къ оси  $AA''$ , мы имѣемъ:

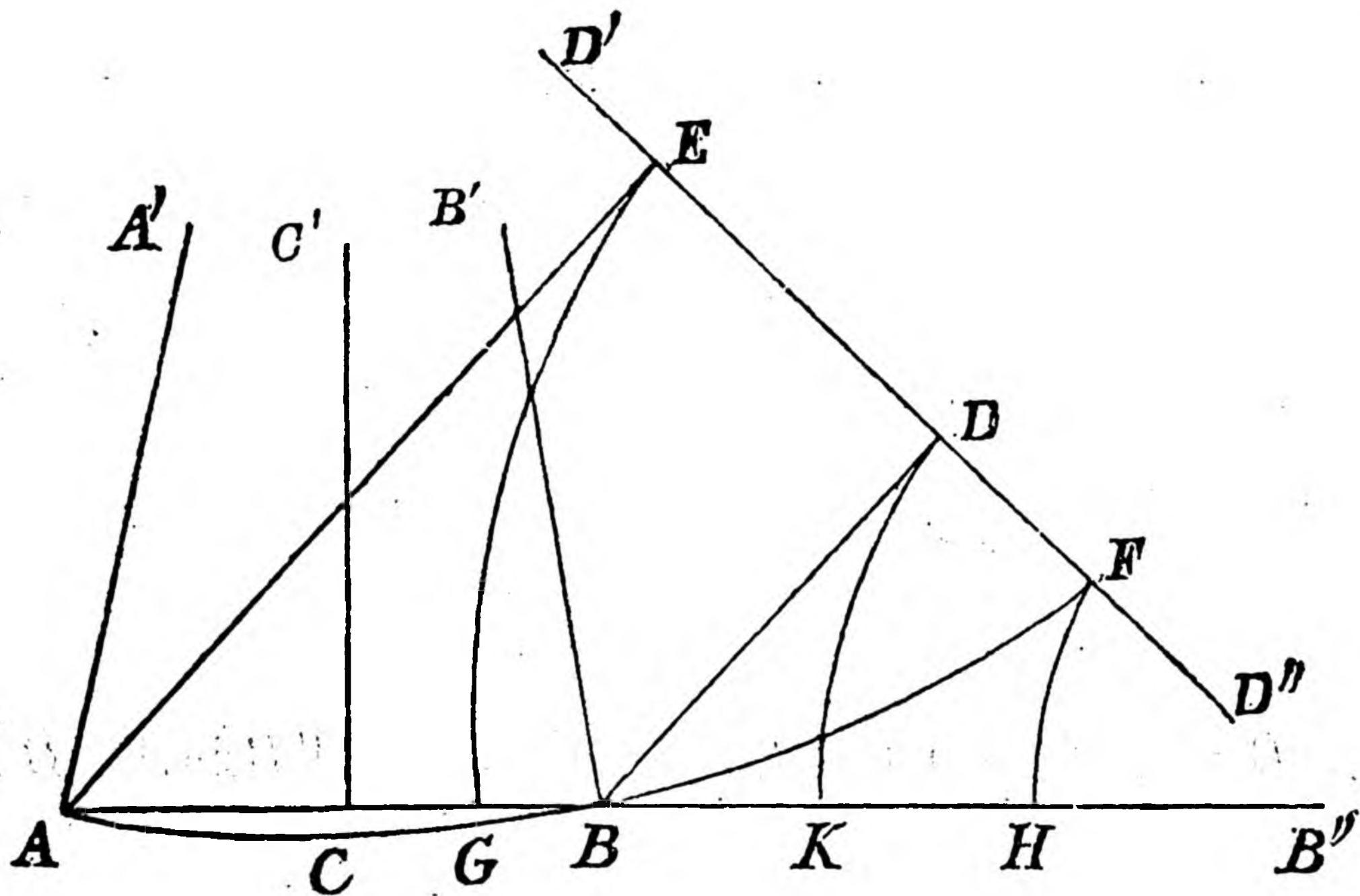
$$CB=BF, \quad CB=ED, \quad BF=DA$$

Фиг. 27.



2) Пусть  $AA' \parallel BB'$  и  $A'AB=B'BA$ , и  $C$  середина прямой  $AB$ , то  $CC' \perp AB$  будетъ параллельна къ  $AA'$  и  $BB'$ .

Фиг. 28.



Пусть  $BB''$  будетъ продолженіе  $AB$ , а  $BD$  прямая, дѣлящая уголъ  $B'BB''$  пополамъ. Мы можемъ такъ опредѣлить разстояніе  $BD$ , что



$D'D'' \perp BD$  будетъ параллельная въ одномъ направленіи  $DD'$ , а въ другомъ направленіи  $DD''$ , т. е.

$$BB' \parallel DD', \quad BB'' \parallel DD''$$

слѣдовательно, также  $AB'' \parallel DD''$ ; и какъ  $AA' \parallel BB'$ , то  $AA' \parallel D'D'$ . Слѣдовательно, прямая  $AE \perp D'D''$  дѣлитъ уголъ  $A'AB$  пополамъ.

3) Опишемъ предѣльную линію на  $AA'$  какъ на оси, эта кривая пройдетъ чрезъ точку  $B$  и встрѣтитъ прямую  $D'D''$  въ точкѣ, напри-  
мѣръ,  $F$ . Предѣльныя линіи, описанныя на  $ED'$  и  $FD'$  какъ на осяхъ, встрѣтятъ прямую  $AB''$  въ точкахъ  $G$  и  $H$ , слѣдовательно:

$$AH=2AG=2GH$$

Пусть еще  $K$  будетъ точка встрѣчи прямой  $AB''$  съ предѣльною линіею  $DK$  оси  $DD''$ , то также будемъ имѣть:

$$BH=2BK=2KH$$

Изъ этого слѣдуетъ, что:

$$AB=AH-BH=2(AG-BK)$$

4) Полагая:

$$AB=2p, \quad AG=x, \quad BK=y$$

имѣемъ:

$$p=x-y$$

Изъ предложенія 26 слѣдуетъ, что отношенія предѣльныхъ дугъ, соотвѣтствующія разстояніямъ  $AG=x$  и  $BK=y$ , будутъ:

$$e^{\frac{x}{k}} = \sin \frac{\pi}{2} : \sin \frac{1}{2} \Pi(p) = 1 : \sin \frac{1}{2} \Pi(p)$$

$$e^{\frac{y}{k}} = \sin \frac{\pi}{2} : \sin \frac{1}{2} [2\pi - \Pi(p)] = 1 : \cos \frac{1}{2} \Pi(p)$$

откуда:

$$e^{\frac{p}{k}} = \cotg \frac{1}{2} \Pi(p)$$

*Слѣдствіе.* Изъ тригонометрическихъ уравненій:

$$\sin \alpha = \frac{2 \cotg \frac{\alpha}{2}}{1 + \cotg^2 \alpha}, \quad \cos \alpha = \frac{\cotg^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{1 + \cotg^2 \frac{\alpha}{2}}$$

слѣдуетъ:

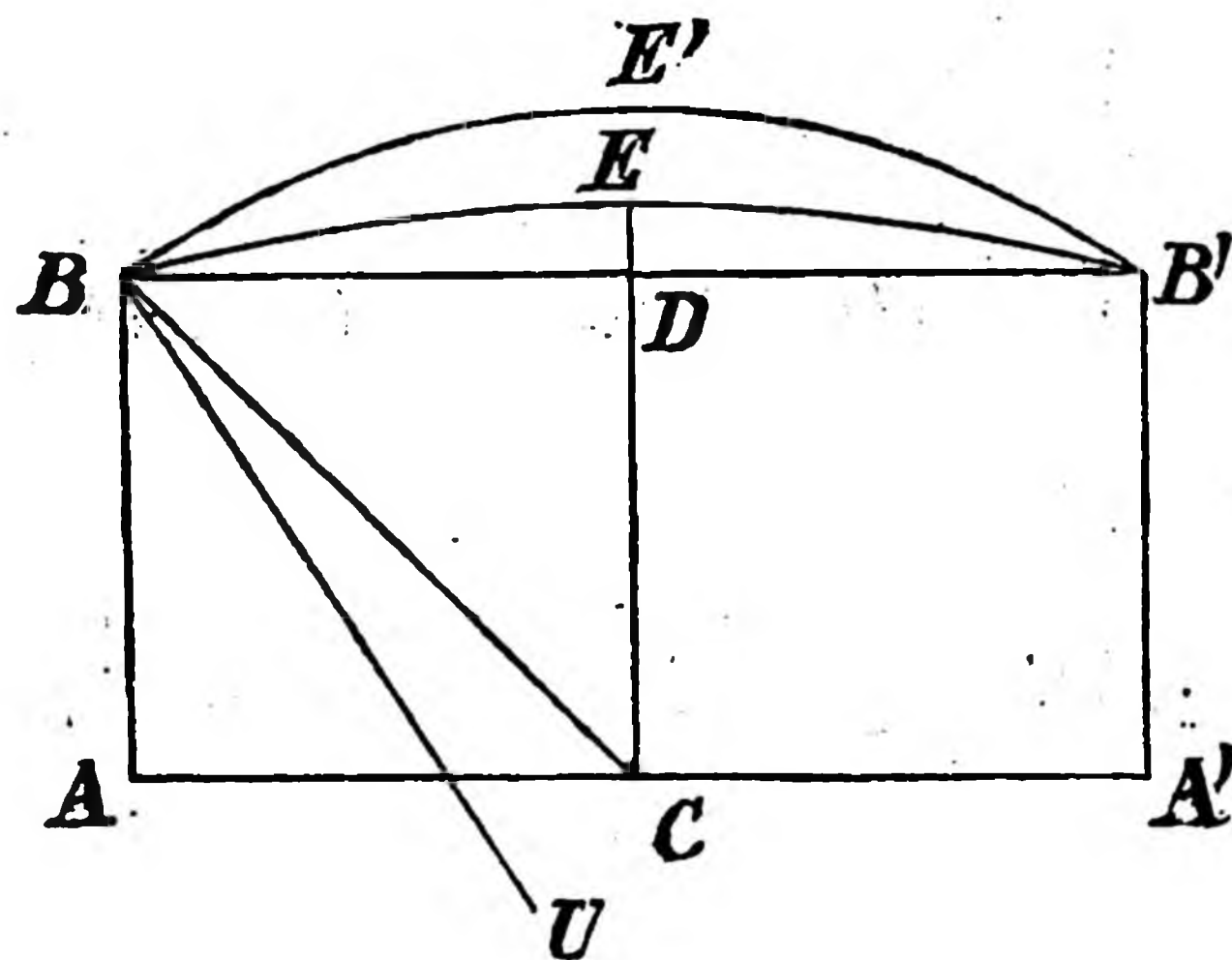
$$\sin \Pi(p) = \frac{2}{e^{\frac{p}{k}} + e^{\frac{-p}{k}}}, \quad \cos \Pi(p) = \frac{e^{\frac{p}{k}} - e^{\frac{-p}{k}}}{e^{\frac{p}{k}} + e^{\frac{-p}{k}}}$$

### Линіи и поверхности равнаго разстоянія.

Мы уже выше видѣли, что линія  $BEB'$ , коей точки находятся въ равномъ разстояніи  $h$  отъ данной прямой  $AA'$ , есть кривая, имѣющая слѣдующія свойства:

Пусть  $B$  и  $B'$  будутъ двѣ точки этой кривой,  $BA$  и  $B'A'$  перпендикуляры изъ точекъ  $B$  и  $B'$  на прямую  $AA'$ .

Фиг. 29.



Пусть  $E$  будетъ точка на кривой  $BB'$ , соотвѣтствующая срединѣ  $C$  прямой  $AA'$ ; перпендикуляръ  $CE=h$  встрѣчаетъ прямую  $BB'$  въ точкѣ  $D$ , такъ что  $CE > CD$ . Углы  $B$  и  $B'$ , хорды  $BB'$  съ перпендикулярами  $BA$  и  $B'A'$ , будутъ острые. Если точка  $B'$  будетъ приближаться неопредѣленно къ точкѣ  $B$ , то углы  $B$  и  $B'$  будутъ увеличиваться, а прямая  $BB'$  будетъ приближаться къ касательной въ точкѣ  $B$ . Слѣдовательно, касательная въ точкѣ  $B$  перпендикулярна къ  $AB$ . Пусть  $BU \parallel EC$ , то  $BU$  будетъ лежать ближе къ  $EC$  нежели къ  $AB$ ,  $AB$  есть прямая, не встрѣчающая прямой  $DC$ . Изъ этого видимъ, что предѣльная кривая  $BE'B'$ , проходящая чрезъ точки  $B$  и  $B'$ , которой касательная въ точкѣ  $B$  перпендикулярна къ  $BU$ , лежитъ внѣ кривой равнаго разстоянія  $BB'$ .

Вращая кривую, равнаго разстоянія, около прямой  $CE$  какъ около оси,

она опишетъ поверхность, коей точки будутъ въ равномъ разстояніи  $h$ , отъ плоскости, описанной прямою  $AC$ . Эта поверхность называется *поверхностью равнаго разстоянія  $h$* . Каждая точка кривой  $BEV'$ , наприимѣръ  $B$ , опишетъ окружность, коей всѣ точки будутъ находиться въ равномъ разстояніи  $h$ , отъ окружности, описанной точкою  $A$ .

Отношеніе части кривой равнаго разстоянія къ части, соотвѣтствующей прямой, не зависитъ отъ величины этихъ частей, слѣдовательно можно вмѣсто этихъ частей поставить окружности, описанныя этими частями.

Первая окружность  $= \text{Ок.} BD$ , а вторая  $= \text{Ок.} AC$ .

Но мы имѣемъ:

$$\text{Ок.} BD = \text{Ок.} BC \sin BCE, \quad \text{Ок.} AC = \text{Ок.} BC \sin ABC$$

и искомое отношеніе будетъ:

$$\text{Ок.} BD : \text{Ок.} AC = \sin BCE : \sin ABC$$

Отодвигая точку  $C$  все болѣе и болѣе отъ точки  $A$ , уголъ  $ACB$  будетъ уменьшаться, а уголъ  $BCE$  будетъ увеличиваться и когда точка  $C$  отодвинется на безконечное разстояніе, то  $BCE = d$ , а  $ABC = \Pi(AB) = \Pi(h)$ . Слѣдовательно, выше написанное постоянное отношеніе части кривой, равнаго разстоянія  $h$ , къ соотвѣтствующей части прямой, будетъ:

$$1 : \sin \Pi(h) = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{h}{k}} + e^{\frac{-h}{k}} \right)$$

Когда  $h=0$ , то кривая  $BEV'$  совпадетъ съ прямою  $AA'$ .

Оставимъ точки  $B$  и  $B'$  на мѣстѣ и будемъ строить чрезъ нихъ кривыя равныхъ разстояній для всѣхъ значеній  $h$  отъ  $h=0$  до  $h=\infty$ , то эти кривыя будутъ все болѣе и болѣе выгнуты и при  $h=\infty$  переходятъ въ предѣльную кривую, коей ось будетъ  $BU \parallel DC$ , такъ какъ при  $h=\infty$  отношеніе:

$$1 : \sin \Pi(h) = \text{cosec} \Pi(h) = \infty$$

т. е.  $AA'=0$ , слѣдовательно, прямыя  $AB$  и  $B'A'$  встрѣчаются на безконечности.

*Слѣдствіе.* Такъ какъ  $BCE = \frac{\pi}{2} - ACB$ , то предъидущее отношеніе можно написать такъ:

$$\cos ACB : \sin ABC = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{h}{k}} + e^{\frac{-h}{k}} \right)$$



т. е. въ прямоугольномъ треугольникѣ  $ABC$ , въ которомъ уголъ  $A$  прямой, если сторона  $AB=h$  остается постоянною, то остается постояннымъ также и отношеніе:

$$\cos ACB : \sin ABC = \frac{1}{2} (e^{\frac{h}{k}} + e^{-\frac{h}{k}})$$

#### Окружность круга.

Если  $AB \perp AC$  (фиг. 30), то для произвольной точки  $C$ , на прямой  $AC$ , вслѣдствіе выше найденнаго, мы имѣемъ:

$$\cos ACB : \sin ABC = \cos AC_1B : \sin ABC_1$$

или

$$\cos ACB : \cos AC_1B = \sin ABC : \sin ABC_1$$

но мы еще имѣемъ:

$$Ок.AC : Ок.AB = \sin ABC : \sin ACB$$

$$Ок.AC_1 : Ок.AB = \sin ABC_1 : \sin AC_1B$$

раздѣляя, найдемъ:

$$Ок.AC : Ок.AC_1 = \frac{\sin ABC}{\sin ABC_1} : \frac{\sin ACB}{\sin AC_1B}$$

или, въ силу предыдущихъ уравненій:

$$Ок.AC : Ок.AC_1 = \cotg ACB : \cotg AC_1B$$

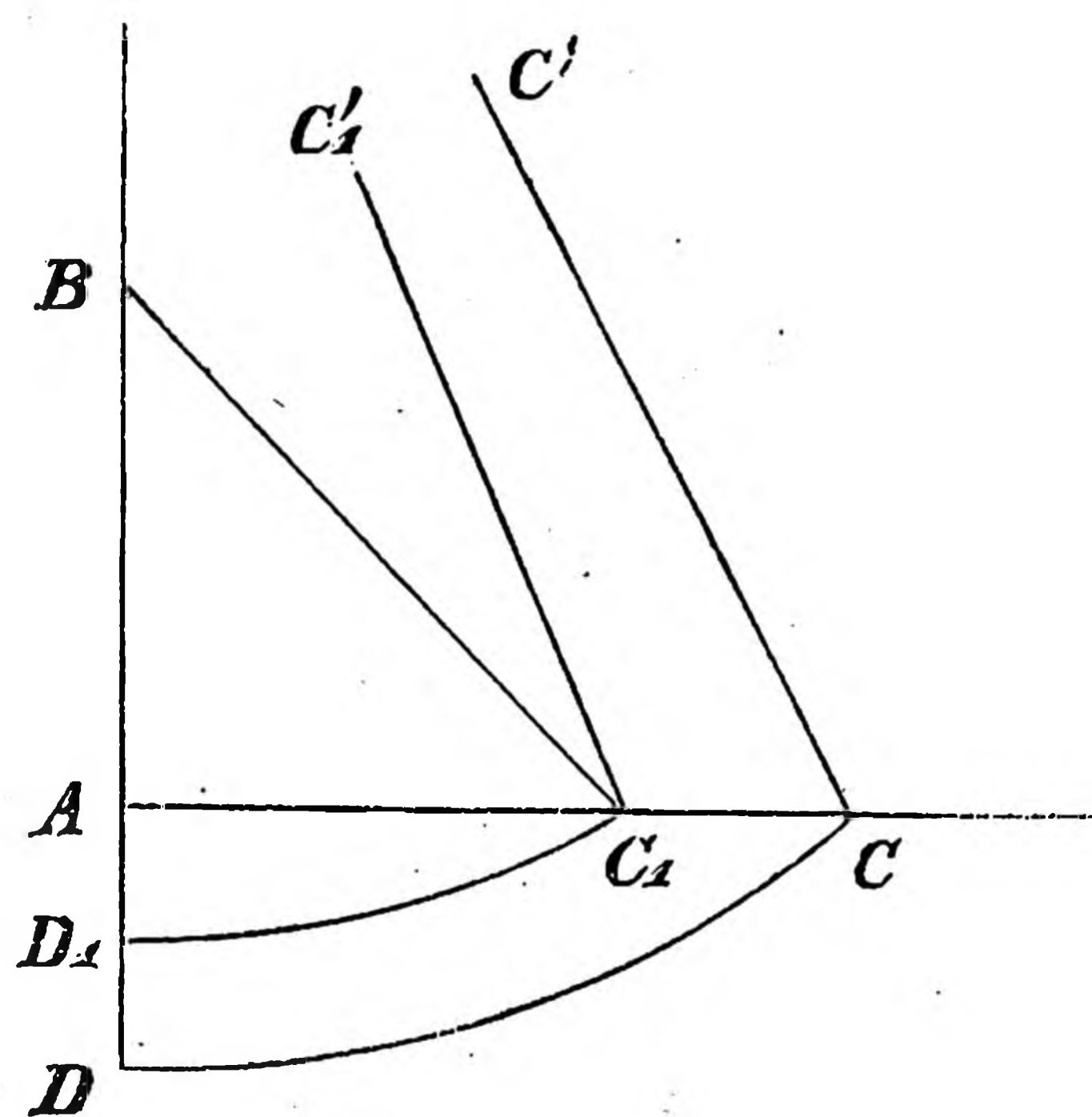
Опишемъ предѣльныя дуги  $CD$  и  $C_1D_1$  на прямыхъ  $CC'$  и  $C_1C_1' \parallel AB$  какъ осяхъ, то отношеніе этихъ дугъ будетъ:

$$2\pi CD : 2\pi C_1D_1 = Ок.AC : Ок.AC_1$$

слѣдовательно:

$$CD : C_1D_1 = \cotg ACB : \cotg AC_1B$$

Фиг. 30.



Полагая для краткости:

$$AC=y, \quad CD=r, \quad ACB=\varphi$$

$$AC_1=y_1, \quad C_1D_1=r_1, \quad AC_1B=\varphi$$

следовательно:

$$Oy : Oy_1 = r : r_1 = \cotg \varphi : \cotg \varphi_1.$$

Положимъ  $AB=\infty$ , то углы  $\varphi$  и  $\varphi_1$  сдѣлаются углами параллельности  $ACC'$  и  $AC_1C'_1$ , соотвѣтствующими разстояніямъ  $y$  и  $y_1$ , следовательно:

$$r : \cotg \Pi(y) = r_1 : \cotg \Pi(y_1) = C$$

гдѣ  $C$  есть постоянное число. Отсюда слѣдуетъ:

$$r = C \cotg \Pi(y) = \frac{C}{2} \left( e^{\frac{y}{k}} - e^{-\frac{y}{k}} \right).$$

Чтобы опредѣлить постоянное  $C$ , замѣтимъ, что отношеніе:

$$\frac{r}{y} = \frac{C \cotg \Pi(y)}{y}$$

при  $y=0$  дѣлается  $=1$ , следовательно для  $y=0$ :

$$C = \frac{y}{\cotg \Pi(y)}$$

Но мы имѣемъ:

$$\frac{\cotg\Pi(y)}{y} = \frac{1}{k} + \frac{y^2}{1.2.3.k^3} + \dots,$$

слѣдовательно при  $y=0$ ,  $C=k$ , и

$$\text{Ок. } y = k\pi \left( e^{\frac{y}{k}} - e^{-\frac{y}{k}} \right)$$

**Задача 1.** Чрезъ данную точку  $B$ , внѣ данной прямой  $AC$ , провести параллельную линію  $BG$  прямой  $AC$ , т. е. по данному разстоянію  $AB$  найти соотвѣтствующій уголъ параллельности?

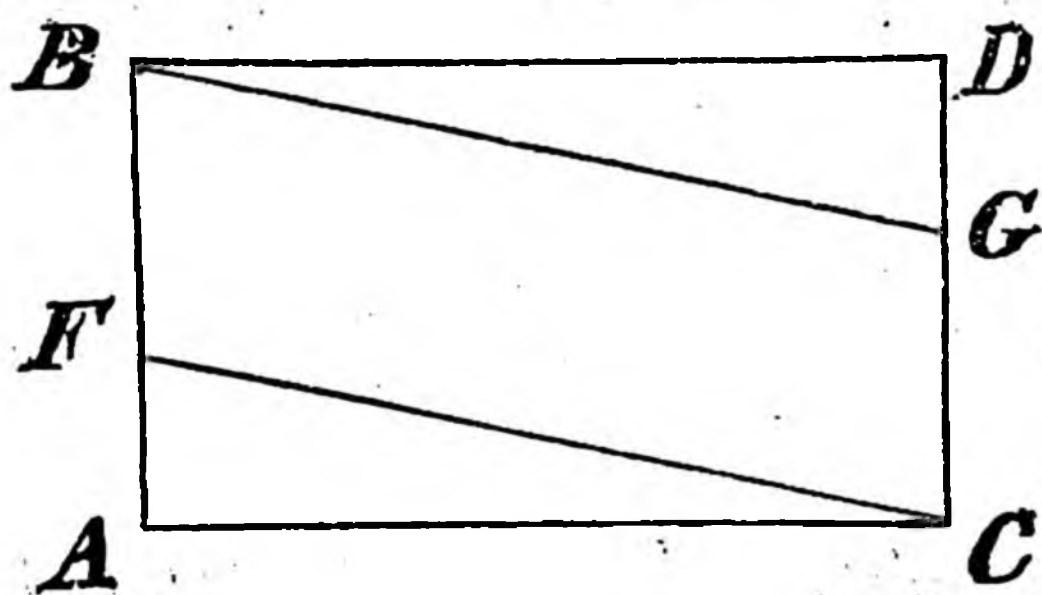
**Рѣшеніе.** Пусть  $BA \perp AC$ ,  $BD \perp BA$ ,  $D$  произвольная точка на прямой  $BD$  и  $DC \perp AC$ , то мы имѣемъ (см. стр. 37).

$$\text{Ок. } BD : \text{Ок. } AC = 1 : \sin\Pi(h)$$

гдѣ  $h=AB$  разстояніе точки  $B$  отъ прямой  $AC$ , а  $\Pi(h)$  уголъ параллельности.

Такъ какъ  $1 > \sin\Pi(p)$ , то  $BD > AC$ .

Фиг. 31.



Изъ точки  $C$  радіусомъ  $BD$  опишемъ кругъ, который встрѣтитъ прямую  $AB$  въ точкѣ  $F$ . Изъ треугольника  $ACF$  имѣемъ:

$$\text{Ок. } CF : \text{Ок. } CA = 1 : \sin AFC$$

слѣдовательно:

$$\Pi(h) = AFC$$

Изъ точки  $B$  проведемъ прямую  $BG$  такъ, чтобы уголъ  $ABG = AFC$ , то  $BG \parallel AC$ .

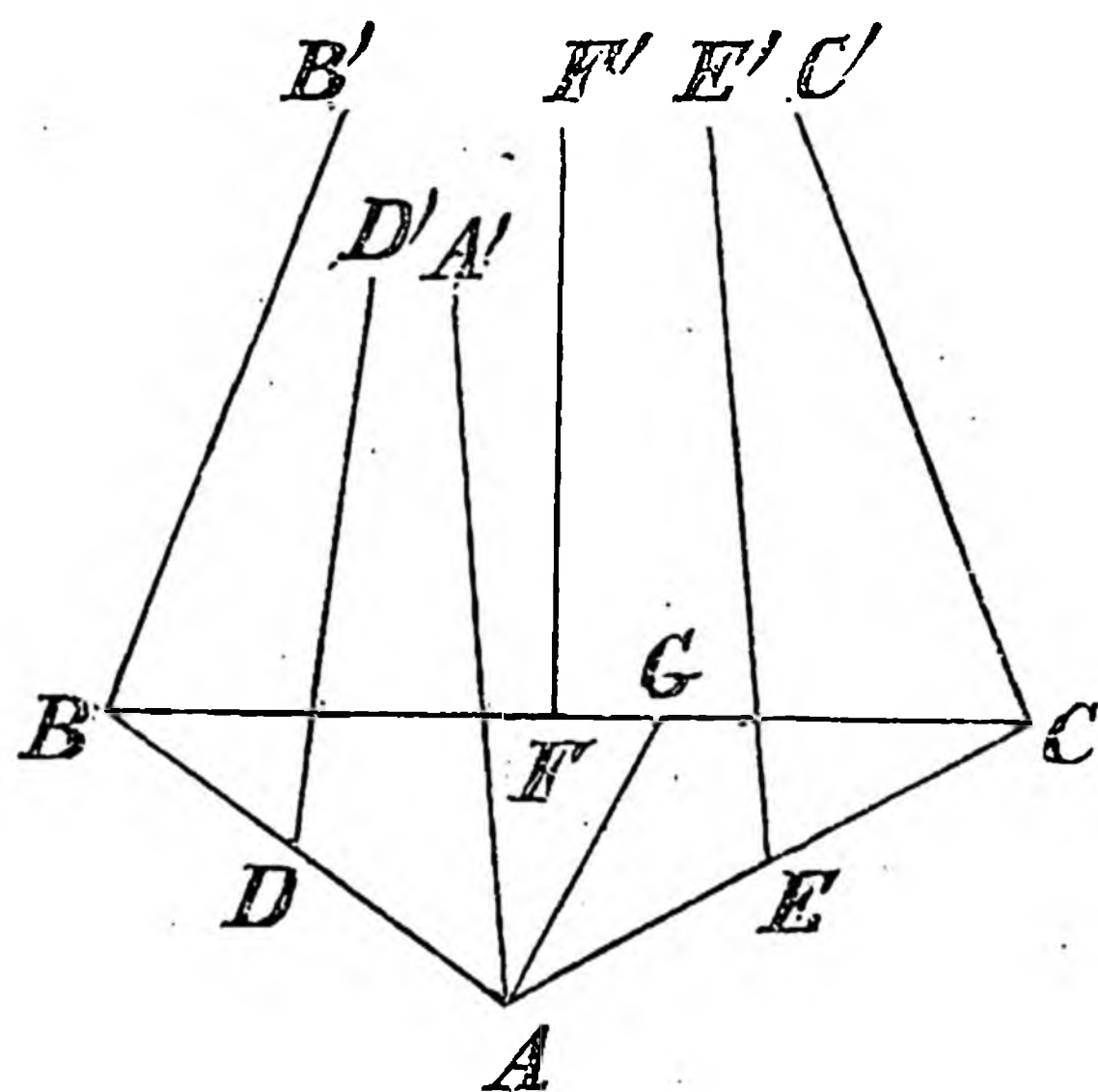
**Задача 2.** По данному углу параллельности найти соотвѣтствующее разстояніе?



*Рѣшеніе.* Если два изъ перпендикуляровъ  $DD'$ ,  $EE'$ ,  $FF'$ , возставленныхъ изъ срединъ сторонъ  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$  треугольника  $ABC$ , будутъ параллельны, то и всѣ три будутъ параллельны.

1) Чрезъ вершины  $A, B, C$  треугольника  $ABC$  проведемъ параллельныя  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , къ параллельнымъ перпендикулярамъ,  $DD'$  и  $EE'$ , то, соображаясь съ предл. 20, 2) мы увидимъ, что и третій перпендикуляръ будетъ параллеленъ двумъ первымъ.

Фиг. 32.



2) Пусть  $2a$ ,  $2b$ ,  $2c$  будутъ стороны противуположающія угламъ  $A, B, C$ , и  $A$  наибольшій изъ угловъ, то, въ этомъ случаѣ, мы получимъ слѣдующія уравненія между углами и сторонами:

$$A = \Pi(b) + \Pi(c)$$

$$B = \Pi(c) - \Pi(a)$$

$$C = \Pi(b) - \Pi(a)$$

3) Проведемъ  $AG$  такъ чтобы уголъ  $A'AG = B'BC = \Pi(a)$ , то въ треугольникѣ  $ACG$ , такъ какъ  $GAC = \Pi(b) - \Pi(a) = C$ ,  $AG = CG$ .

Изъ этихъ трехъ предложеній, непосредственно, слѣдуетъ рѣшеніе нашей задачи:

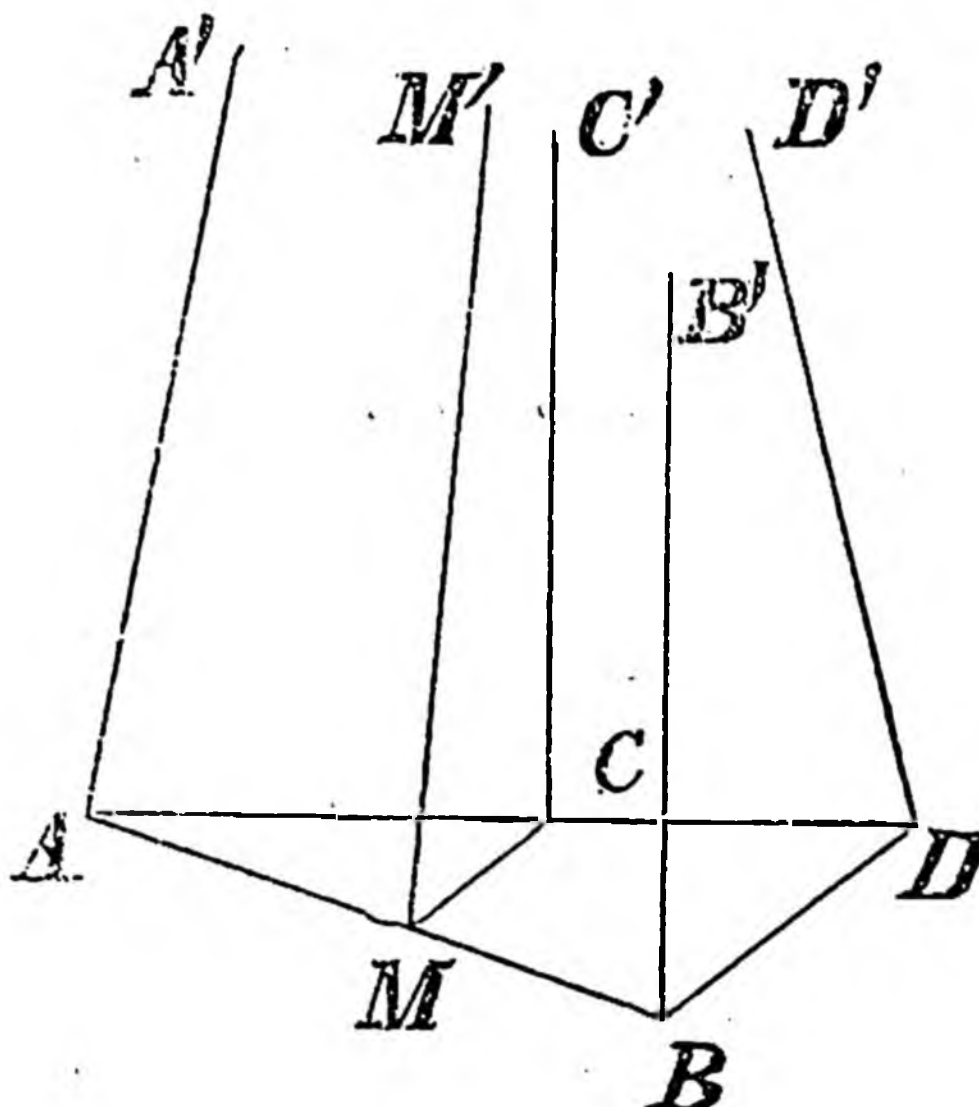
Пусть  $B'BC$  будетъ данный уголъ, то, съ помощью предъидущихъ предложеній, можно, для достаточно малаго разстоянія  $BD$ , построить уголъ параллельности  $B'BD > B'BC$ .

Сдѣлаемъ  $DA = BD$ ,  $AA' \parallel BB'$ ,  $A'AG = B'BC$  и  $GC = AG$  на прямой  $BC$ , то середина  $F$  стороны  $BC$  даетъ разстояніе, соотвѣтствующее углу параллельности  $B'BC$ .

*Задача 3.* Пусть  $AA' \parallel BB'$ . По данной точкѣ  $A$  на прямой  $AA'$  требуется найти точку  $B$  на прямой  $BB'$ , такъ чтобы  $A'AB = B'BA$ ?

*Рѣшеніе.* Проведемъ внѣ плоскости  $AA'BV'$  прямую  $CC' \parallel AA'$ , сделаемъ  $AC \perp CC'$ ,  $CD=AC$  и  $DD' \parallel CC'$ .

Фиг. 33.



По прямой  $CC'$  проведемъ плоскость такъ, чтобы она съ плоскостью  $AA'CC'$  составляла такой же уголъ, какъ и плоскость  $DD'BV'$  и (см. пред. 16) найдемъ ея пересѣченіе  $MM'$  съ плоскостью  $AA'BV'$ . Прямая  $AB \perp MM'$  опредѣлитъ искомую точку  $B$ .

Чрезъ точку  $A$  на оси  $AA'$  построимъ предѣльную поверхность, на этой поверхности четыре плоскости  $AA'DD'$ ,  $AA'BV'$ ,  $DD'BV'$ ,  $CC'MM'$  образуютъ два подобныхъ предѣльныхъ треугольника, изъ которыхъ, такъ какъ  $AC=CD$ ,  $AM=MB$ , будемъ имѣть  $A'AB=B'BA$ .

**Задача 4.** Найти предѣльную дугу, которая была бы равна суммѣ двухъ предѣльныхъ дугъ  $AB$  и  $CD$ ?

*Рѣшеніе.* Опредѣлимъ (см. зад. 1) углы  $\Pi(\frac{1}{2} AB)$  и  $\Pi(\frac{1}{2} CD)$ , соотвѣтствующіе  $\frac{1}{2} AB$  и  $\frac{1}{2} CD$  и соединимъ хорды  $AB$  и  $CD$  подъ угломъ  $\Pi(\frac{1}{2} AB) + \Pi(\frac{1}{2} CD)$ . Точка  $A$ , начало первой хорды и  $D$  конецъ второй опредѣляютъ двѣ точки искомой предѣльной дуги, которая вполне опредѣляется этими двумя точками.

Точно также опредѣлимъ предѣльную дугу, равную разности двухъ предѣльныхъ дугъ.

**Задача 5.** По даннымъ тремъ предѣльнымъ дугамъ  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$ , найти четвертую пропорціональную?

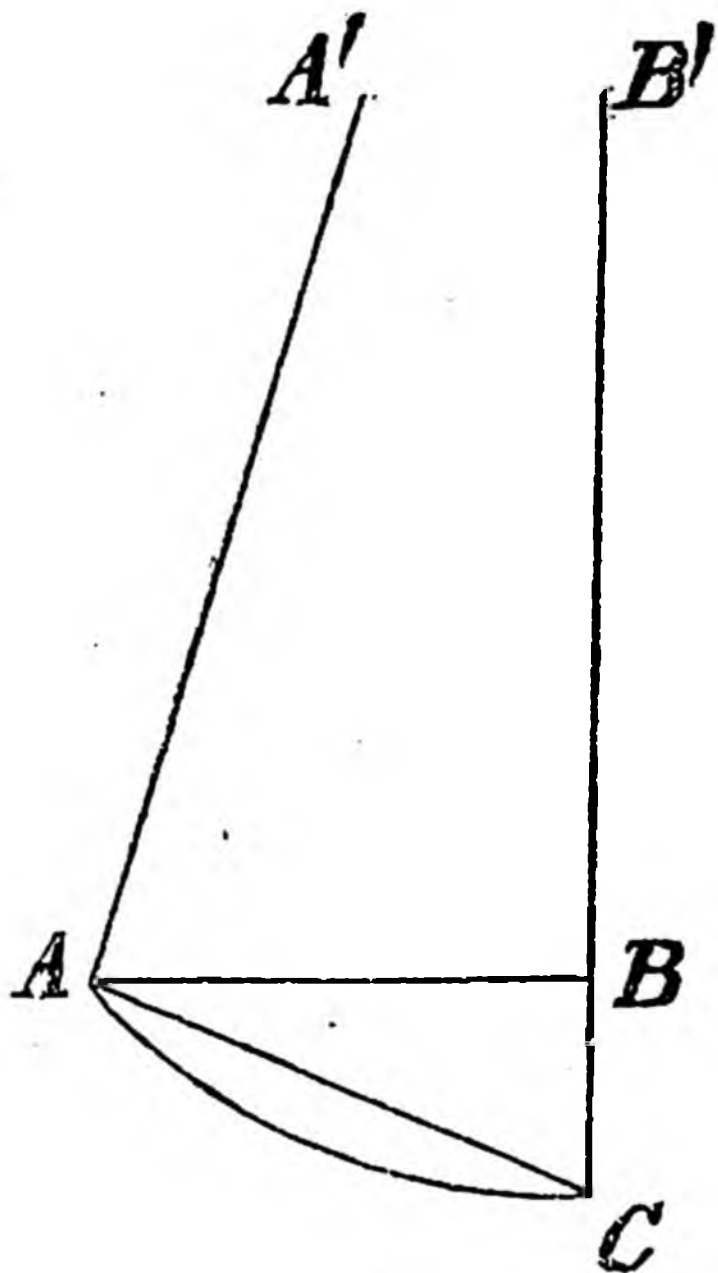
Задача эта рѣшается какъ и въ Евклидовской системѣ. Въ плоскости  $\alpha$  проведемъ хорды дугъ  $SA$  и  $AB$  такъ, чтобы точки  $S$ ,  $A$ ,  $B$  лежали на одной предѣльной кривой, т. е. чтобы уголъ  $SAB = \Pi(\frac{1}{2} SA) + \Pi(\frac{1}{2} AB)$ . Пусть  $SS'$  будетъ ось этой предѣльной кривой, чрезъ эту ось проведемъ произвольную плоскость  $\alpha'$  и въ этой плоскости проведемъ прямую  $CC' \parallel SS'$  такъ, чтобы  $SC$  была равна хордѣ третьей дуги и уголъ

$S'SC = C'CS = \Pi(\frac{1}{2} SC)$ . Чрезъ  $BB'$  проведемъ плоскость подъ такимъ угломъ къ плоскости  $\alpha$ , подъ какимъ плоскость  $\alpha$  наклонена къ плоскости  $AA'CC'$  и опредѣлимъ (см. стр. 23) ее пересѣченіе съ плоскостью  $\alpha'$ , то получимъ четвертую пропорціональную  $CD$ , если опредѣлимъ точку  $D$  такъ, чтобы уголъ  $D'DC = C'CD$ . Точно также можно построить средне пропорціональную и другія подобныя построенія. Однимъ словомъ на предѣльной поверхности можно сдѣлать всѣ тѣ построенія, которыя возможны въ Евклидовской системѣ.

Слѣдовательно возможно дѣленіе  $ED$  на равныя части.

*Примѣръ.* Пусть  $A'AB = \frac{\pi}{6}$ , и разстояніе  $AB$  такъ взято, что  $BB' \perp AB$  и параллельна  $AA'$ . Опредѣлимъ на прямой  $BB'$  точку  $C$ , такъ

Фиг. 34.



чтобы  $A'AC = B'CA$ . Пусть  $BC = x$ , то мы имѣемъ:

$$e^{\frac{x}{k}} = 1 : \sin \frac{\pi}{6} = 2$$

Если бы мы уголъ  $A'AB$  такъ выбрали, чтобы  $\sin A'AB = \frac{1}{e}$ , то имѣли бы  $x = k$ . Приблизительно этотъ уголъ будетъ:

$$A'AB = 21^\circ, 35', 5'', 63$$

**Зависимость между суммою угловъ треугольника и его площадью.**

Кривая равныхъ разстояній даетъ возможность найти зависимость между суммою угловъ треугольника и его площадью.

*Предложеніе 28.* Если  $AB$  и  $CD$  суть двѣ кривыя равнаго разстоянія  $h$  отъ данной прямой  $PQ$ , то каждая прямая  $MN$ , соединяющая двѣ точки кривыхъ  $AB$  и  $CD$ , дѣлится прямою  $PQ$  въ точкѣ  $O$  пополамъ.

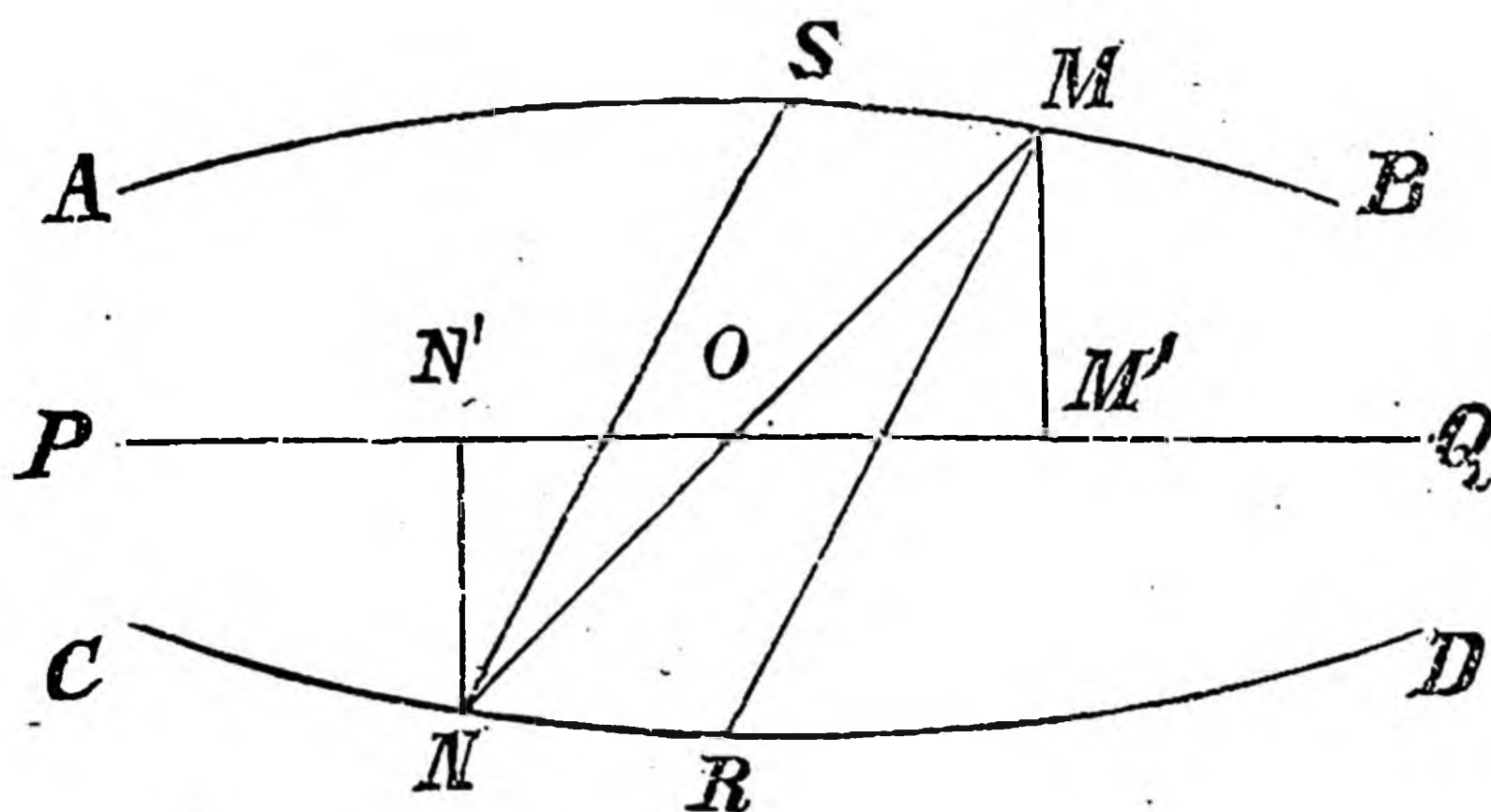


*Доказат.* Проведемъ  $MM' \perp PQ$  и  $NN' \perp PQ$ , то:

$$\triangle OMM' = \triangle ONN'$$

слѣдовательно:  $MO = ON$ .

Фиг. 35.



По симметріи построения кривыхъ  $AB$  и  $CD$  уголъ  $AMN = MND$ .

Легко видѣть теперь, что сумма угловъ треугольника  $MNR$ , коего одна сторона  $NR$  есть часть кривой равнаго разстоянія отъ прямой  $PQ$  и, коего вершина  $M$  лежитъ на другой кривой  $AB$  равнаго разстоянія отъ той же прямой  $PQ$ , равна двумъ прямымъ угламъ.

И въ самомъ дѣлѣ мы имѣемъ:

$$N + M + R = AMN + NMR + RMB = 2d$$

Если проведемъ хорду  $NR$ , то сумма угловъ въ треугольникѣ  $NMR < 2d$ .

*Предложеніе 29.* Если сдѣлаемъ дугу  $MS = NR$ , то можно къ четырехугольнику  $NRMS$ , составленному изъ смѣшанныхъ линій, приложить всѣ теоремы прямолинейнаго параллелограмма въ Евклидовской геометріи. Такъ напримѣръ, всѣ треугольники, имѣющіе основаніемъ хорду  $NR$ , дуги линіи равнаго разстоянія  $CD$  отъ прямой  $PQ$ , а вершины на другой линіи равнаго разстоянія отъ той же прямой  $PQ$ , будутъ имѣть равныя площади и равныя суммы угловъ.

На этомъ основаніи можно рѣшить слѣдующія задачи.

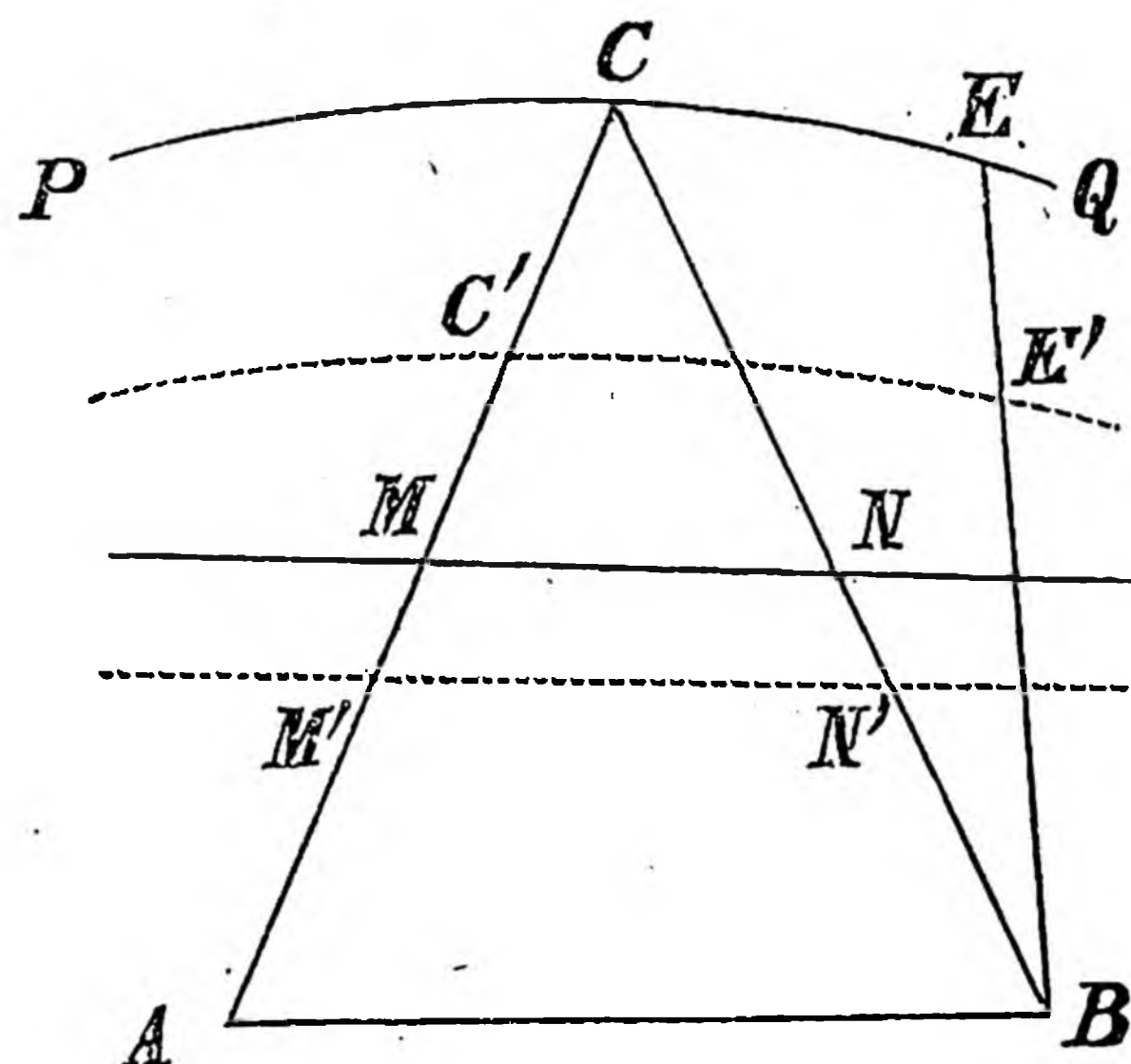
- Преобразовать треугольникъ въ равносторонній?
- Преобразовать треугольникъ въ прямоугольный? и т. д.

*Предложеніе 30.* Два треугольника  $ABC$  и  $ABD$ , имѣющіе площади равныя и одно основаніе  $AB$ , имѣютъ и равныя суммы угловъ.

*Доказат.* Пусть  $M$  и  $N$  будутъ середины сторонъ  $AC$  и  $BC$ , то разстоянія точекъ  $A$ ,  $B$ ,  $C$  отъ прямой  $MN$  будутъ равны, напримѣръ  $h$ . Всѣ треугольники имѣющіе основаніемъ прямую  $AB$ , а вершины лежащія

на линіи  $PQ$  равнаго разстоянія  $h$ , отъ прямой  $MN$ , имѣютъ равныя площади и равныя суммы угловъ. Слѣдовательно, надобно только доказать, что точка  $D$ , непоказанная на чертежѣ, лежитъ на линіи  $PQ$ .

Фиг. 36.



Пусть точка  $D$  не находится на линіи  $PQ$ , проведемъ линію  $BD$ .

1) Если прямая  $BD$  пересѣчетъ прямую  $MN$ , то она пересѣчетъ и  $PQ$ , наприимѣръ, въ точкѣ  $E$ . Изъ равенства треугольниковъ:

$$\triangle ABC = \triangle ABE, \quad \triangle ABC = \triangle ABD$$

слѣдуетъ равенство треугольниковъ:

$$\triangle ABE = \triangle ABD$$

что невозможно, если точка  $D$  не совпадаетъ съ  $E$ .

2) Если прямая  $BD$  не встрѣчаетъ прямой  $MN$ , то мы возьмемъ за точку  $C$ , точку пересѣченія перпендикуляра, возставленнаго изъ середины основанія  $AB$  съ линіею  $PQ$ , т. е. положимъ треугольникъ равностороннимъ. На прямыхъ  $MA$  и  $NB$  возьмемъ точки  $M'$  и  $N'$  такъ, чтобы  $AM' = BN'$  и чтобы прямая  $BD$  пересѣкала прямую  $M'N'$ . Чрезъ точку  $C'$ , такъ взятую, чтобы  $M'C' = M'A$ , проведемъ линію  $C'E'$  равнаго разстоянія отъ прямой  $M'N'$ , которая прямую  $BD$  встрѣчаетъ въ точкѣ  $E'$ , то будемъ имѣть:

$$\triangle ABC' = \triangle ABE'$$

$$\triangle ABD < \triangle ABE'$$

$$\triangle ABC' < \triangle ABC$$

слѣдовательно:

$$\triangle ABD < \triangle ABC$$

что не согласно съ положеніемъ. Слѣдовательно, точка  $D$  прямой  $BD$  должна упасть на линію  $PQ$ , гдѣ нибудь, въ точкѣ  $E$ .

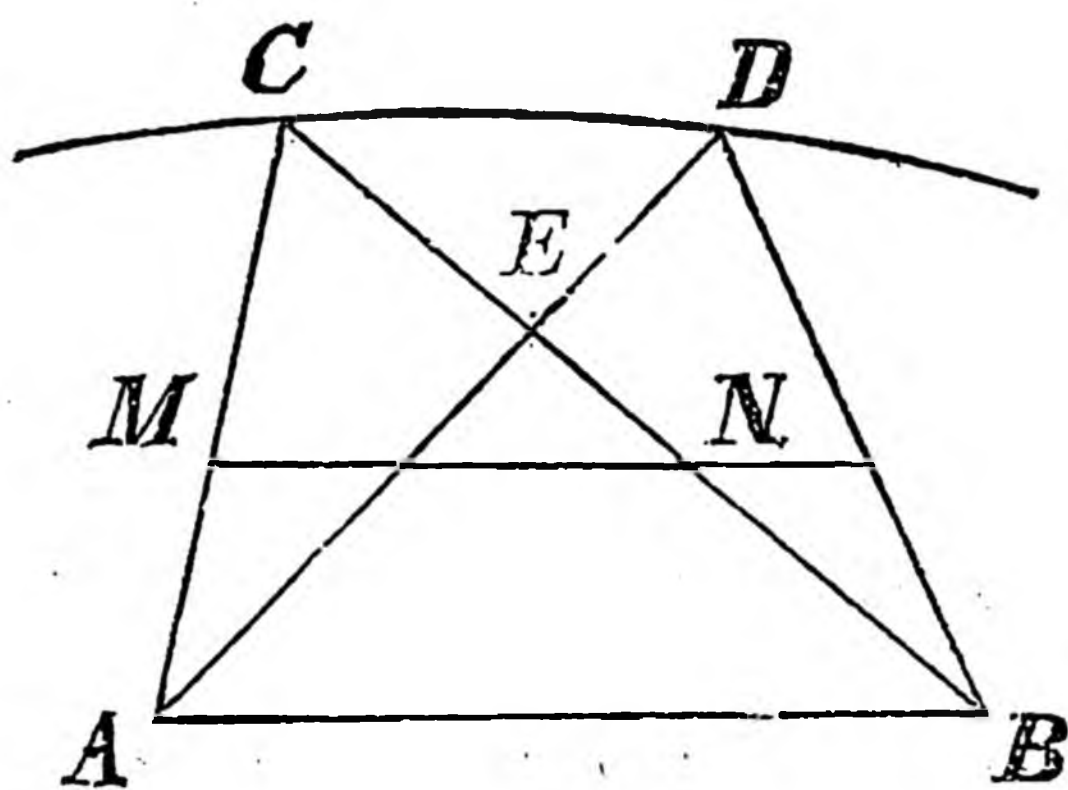
*Слѣдствіе.* Не равные треугольники равнаго основанія  $AB$  и равной высоты не имѣютъ площадей равныхъ, такъ какъ линіи равнаго разстоянія, проведенныя чрезъ точку  $C$ , относительно прямыхъ  $AB$  и  $MN$ , различны.

*Предложеніе 31.* Два треугольника  $ABC$  и  $A'B'C'$ , имѣющіе равныя площади, имѣютъ и равныя суммы угловъ.

*Доказат.* Можно сдѣлать предположеніе, что въ обоихъ треугольникахъ, прямая, проведенная чрезъ середины  $M$  и  $N$ ,  $M'$  и  $N'$  сторонъ  $AC$  и  $BC$ ,  $A'C'$  и  $B'C'$ , перпендикулярна къ сторонамъ  $AC$  и  $A'C'$ .

Пусть  $AC < A'C'$ , опредѣлимъ на линіи  $CD$  равнаго разстоянія отъ прямой  $MN$  точку  $D$  такъ, чтобы  $AD = A'C'$ . Изъ равенства площадей

Фиг. 37.



треугольниковъ  $ABC$  и  $A'B'C'$ ,  $ABC$  и  $ABD$ , а также треугольниковъ  $A'B'C'$  и  $ABD$  слѣдуетъ, соображаясь съ предыдущимъ предложеніемъ, равенство суммъ угловъ въ треугольникахъ  $ABC$ ,  $ABD$ ,  $A'B'C'$ .

*Предложеніе 32.* Два треугольника  $ABC$  и  $A'B'C'$ , имѣющіе равныя суммы угловъ, имѣютъ и равныя площади.

*Доказат.* Если бы было  $\triangle ABC > \triangle A'B'C'$ , то пусть будетъ  $\triangle ABE = \triangle A'B'C'$ , гдѣ точка  $E$  находится на сторонѣ  $BC$ . По предлож. 31 треугольники  $ABC$  и  $ABE$  имѣютъ равныя суммы угловъ, что по предл. 4 а) только тогда возможно, когда сумма угловъ въ треугольникѣ  $ACB$  равна двумъ прямымъ угламъ.

*Предложеніе 33.* Площади двухъ треугольниковъ относятся между собою какъ избытки двухъ прямыхъ угловъ надъ суммою угловъ въ треугольникахъ, т. е. если:

$$A+B+C=2d-u, \quad A'+B'+C'=2d-u'$$

то:

$$\triangle ABC : \triangle A'B'C' = u : u'$$

*Доказат.* Пусть площади треугольниковъ относятся какъ два числа

$m$  и  $m'$ ; раздѣлимъ треугольникъ  $ABC$  прямыми, проходящими чрезъ вершину  $C$ , на  $m$  равныхъ  $\alpha$  треугольниковъ и также точно раздѣлимъ треугольникъ  $A'B'C'$  на  $m'$  равныхъ  $\alpha'$  треугольниковъ.

Изъ равенствъ:

$$\triangle ABC = m\alpha, \quad \triangle A'B'C' = m'\alpha'$$

слѣдуетъ равенство площадей и суммъ угловъ треугольниковъ  $\alpha$  и  $\alpha'$ . Пусть  $2d - \varepsilon$ , будетъ сумма угловъ одного изъ этихъ треугольниковъ, то сумма угловъ въ треугольникѣ  $ABC$  будетъ:

$$m(2d - \varepsilon) - (m - 1)2d = 2d - m\varepsilon$$

а въ треугольникѣ  $A'B'C'$  эта сумма будетъ  $2d - m'\varepsilon$ , слѣдовательно:

$$u = m\varepsilon, \quad u' = m'\varepsilon$$

откуда:

$$u : u' = m : m'.$$

Слѣдовательно, если  $\Delta$  есть площадь треугольника  $ABC$ , то:

$$\Delta = \lambda u$$

гдѣ  $\lambda$  есть постоянное число.

#### Плоская тригонометрія.

Мы видѣли, что если въ треугольникѣ  $ABC$  уголъ  $C$  прямой, то (пред. 25):

$$Ok.a = Ok.c \sin A$$

подставивъ вмѣсто  $Ok.a$  и  $Ok.c$  ихъ выраженія (см. стр. 40) найдемъ:

$$e^{\frac{a}{k}} - e^{\frac{-a}{k}} = (e^{\frac{c}{k}} - e^{\frac{-c}{k}}) \sin A$$

также точно:

$$e^{\frac{b}{k}} - e^{\frac{-b}{k}} = (e^{\frac{c}{k}} - e^{\frac{-c}{k}}) \sin B$$

(1)

Но мы имѣемъ (см. стр. 38):

$$\cos A : \sin B = \frac{1}{2} (e^{\frac{a}{k}} + e^{\frac{-a}{k}})$$

(2)

$$\cos B : \sin A = \frac{1}{2} (e^{\frac{b}{k}} + e^{\frac{-b}{k}})$$



Изъ этихъ уравненій слѣдуетъ:

$$\sin A = \frac{e^{\frac{a}{k}} - e^{\frac{-a}{k}}}{e^{\frac{c}{k}} - e^{\frac{-c}{k}}}$$

$$\cos A = \frac{1}{2} (e^{\frac{a}{k}} + e^{\frac{-a}{k}}) \frac{e^{\frac{b}{k}} - e^{\frac{-b}{k}}}{e^{\frac{c}{k}} - e^{\frac{-c}{k}}}$$

эти выраженія, подставленныя въ уравненіе:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

даютъ:

$$(e^{\frac{c}{k}} - e^{\frac{-c}{k}})^2 = \frac{1}{4} (e^{\frac{a}{k}} + e^{\frac{-a}{k}})^2 (e^{\frac{b}{k}} - e^{\frac{-b}{k}})^2 + (e^{\frac{a}{k}} - e^{\frac{-a}{k}})^2$$

прибавляя къ обѣимъ частямъ этого уравненія 4, и замѣчая что:

$$(e^x + e^{-x})^2 = (e^x - e^{-x})^2 + 4$$

найдемъ:

$$(e^{\frac{c}{k}} + e^{\frac{-c}{k}})^2 = \frac{1}{4} (e^{\frac{a}{k}} + e^{\frac{-a}{k}})^2 (e^{\frac{b}{k}} + e^{\frac{-b}{k}})^2$$

такъ какъ  $e^x$  для всѣхъ дѣйствительныхъ величинъ  $x$  есть величина положительная, то мы будемъ имѣть:

$$\frac{1}{2} (e^{\frac{c}{k}} + e^{\frac{-c}{k}}) = \frac{1}{2} (e^{\frac{a}{k}} + e^{\frac{-a}{k}})^{\frac{1}{2}} (e^{\frac{b}{k}} + e^{\frac{-b}{k}})^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

Изъ уравненій (2), перемножая ихъ, найдемъ:

$$\cotg A \cotg B = \frac{1}{2} (e^{\frac{c}{k}} + e^{\frac{-c}{k}}) \quad (4)$$

Съ помощью уравненій (1), (2), (3) и (4) можно рѣшить всѣ задачи относительно прямоугольныхъ треугольниковъ.

Такъ какъ всякій треугольникъ можно разбить на два прямоугольные треугольника, то изъ предыдущихъ формулъ, для прямоугольнаго треугольника, можно получить формулы для какого угодно треугольника. Но этотъ выводъ можетъ быть облегченъ слѣдующимъ замѣчаніемъ: формулы для прямоугольнаго треугольника, выведенныя выше, переходятъ въ формулы прямоугольнаго сферическаго треугольника, когда вмѣсто отношеній  $\frac{a}{k}$ ,  $\frac{b}{k}$ ,  $\frac{c}{k}$  поставитъ  $ai$ ,  $bi$ ,  $ci$ , гдѣ  $i = \sqrt{-1}$ , а  $k$  принять за радіусъ сферы. Слѣдовательно, можно вывести общія формулы плоской тригонометріи, не только тѣмъ способомъ, которымъ выводятся общія формулы сферической тригонометріи, но просто замѣщая въ общихъ формулахъ сферической тригонометріи стороны  $a$ ,  $b$ ,  $c$  отношеніями  $\frac{ai}{k}$ ,  $\frac{bi}{k}$ ,  $\frac{ci}{k}$ . Такимъ образомъ получимъ слѣдующія формулы плоской тригонометріи:

$$e^{\frac{a}{k}} - e^{-\frac{a}{k}} : e^{\frac{b}{k}} - e^{-\frac{b}{k}} = \sin A : \sin B \quad (5)$$

$$\frac{e^{\frac{a}{k}} + e^{-\frac{a}{k}}}{2} = \frac{e^{\frac{b}{k}} + e^{-\frac{b}{k}}}{2} \cdot \frac{e^{\frac{c}{k}} + e^{-\frac{c}{k}}}{2} - \frac{e^{\frac{b}{k}} - e^{-\frac{b}{k}}}{2} \cdot \frac{e^{\frac{c}{k}} - e^{-\frac{c}{k}}}{2} \cos A \quad (6)$$

$$\frac{2 \sin B \cotg A}{e^{\frac{c}{k}} + e^{-\frac{c}{k}}} + \cos B = \frac{e^{\frac{c}{k}} - e^{-\frac{c}{k}}}{e^{\frac{c}{k}} + e^{-\frac{c}{k}}} : \frac{e^{\frac{a}{k}} - e^{-\frac{a}{k}}}{e^{\frac{a}{k}} + e^{-\frac{a}{k}}} \quad (7)$$

$$\cos A \cos B + \cos C = \frac{e^{\frac{c}{k}} + e^{-\frac{c}{k}}}{2} \sin A \sin B \quad (8)$$

Задачи рѣшаются въ этой тригонометріи совершенно такъ, какъ и въ сферической.

Если вмѣсто выраженій:

$$\frac{e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}}{2}, \quad \frac{e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}}{e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}}, \quad \frac{e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}}{2}$$

поставимъ въ формулы (1), (2), (3) и (4) ихъ выраженіе въ функціи угла параллельности:

$$\operatorname{cosec} \Pi(x), \quad \cos \Pi(x), \quad \cotg \Pi(x)$$

то эти формулы сдѣлаются:

$$\cotg \Pi(a) = \cotg \Pi(c) \sin A$$

$$\sin \Pi(b) \cos B = \sin A$$

$$\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b)$$

$$\tg A \tg B = \sin \Pi(c)$$

а формулы (5), (6), (7), (8) сдѣлаются:

$$\cotg \Pi(a) : \cotg \Pi(b) = \sin A : \sin B$$

$$\cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) + \frac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} = 1$$

$$\cotg A \sin B \sin \Pi(c) + \cos B = \frac{\cos \Pi(c)}{\cos \Pi(a)}$$

$$\cos A \cos B + \cos C = \frac{\sin A \sin B}{\sin \Pi(c)}$$

Формулы *плоской* тригонометріи примутъ видъ болѣе удобный, если мы введемъ гиперболическія функціи (см. прибавленіе II):

$$\sinh\left(\frac{a}{k}\right) : \sinh\left(\frac{b}{k}\right) = \sin A : \sin B$$

$$\cosh\left(\frac{a}{k}\right) = \cosh\left(\frac{b}{k}\right) \cosh\left(\frac{c}{k}\right) - \sinh\left(\frac{b}{k}\right) \sinh\left(\frac{c}{k}\right) \cos A$$

$$\frac{\sin B \cotg A}{\cosh\left(\frac{c}{k}\right)} + \cos B = \tanh\left(\frac{c}{k}\right) : \tanh\left(\frac{a}{k}\right)$$

$$\cos A \cos B + \cos C = \cosh\left(\frac{c}{k}\right) \sin A \sin B.$$

**Безконечно малыя фигуры.**

Если, въ предъидущихъ формулахъ, положимъ отношенія  $\frac{a}{k}$ ,  $\frac{b}{k}$ ,  $\frac{c}{k}$  очень малыми, то получимъ слѣдующія формулы:

$$a : b = \sin A : \sin B$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\sin B \cotg A + \cos B = \frac{c}{a}$$

$$\cos A \cos B + \cos C = \sin A \sin B$$

Двѣ послѣднія формулы можно преобразовать въ слѣдующія:

$$a \sin(A+B) = c \sin A$$

$$\cos(A+B) + \cos C = 0$$

откуда:

$$a \sin(A+B+C) = a \sin(A+B) \cos C + a \cos(A+B) \sin C$$

$$= c \sin A [\cos C + \cos(A+B)] = 0$$

т. е.

$$A+B+C=2d.$$

Слѣдовательно, формулы Неевклидовской тригонометрии переходятъ въ Евклидовскія, если отношенія  $\frac{a}{k}$ ,  $\frac{b}{k}$ ,  $\frac{c}{k}$  дѣлаются очень малыми.

Отношенія эти могутъ быть очень малыми, когда  $k$  есть величина конечная, а  $a$ ,  $b$ ,  $c$  суть величины очень малыя, или когда  $a$ ,  $b$ ,  $c$  суть величины конечныя, а  $k$  есть величина очень большая.

Изъ перваго предположенія слѣдуетъ, что геометрическая система безконечно малыхъ фигуръ есть Евклидовская, слѣдовательно, она независитъ отъ аксіомы параллельныхъ линій. Изъ втораго предположенія слѣдуетъ, что евклидовская геометрическая система есть частный случай системы неевклидовской, когда въ этой послѣдней  $k$  дѣлается величиною безконечно большою.

Если разстоянія, измѣряемыя на землѣ и въ нашей солнечной системѣ, суть величины безконечно-малыя относительно  $k$ , то наша геометрическая система—Евклидовская можетъ быть только приближеніемъ Неевклидовской системы нашего пространства. Лобачевскій пытался провѣрить есть-ли наше пространство Евклидовское или Неевклидовское, вычисляя сумму угловъ въ треугольникѣ, коего стороны не меньше земной орбиты.



Вычисления показали, что сумма эта разнится отъ двухъ прямыхъ угловъ на 0,003. Такая незначительная разность можетъ происходить отъ погрѣшностей въ наблюденіяхъ.

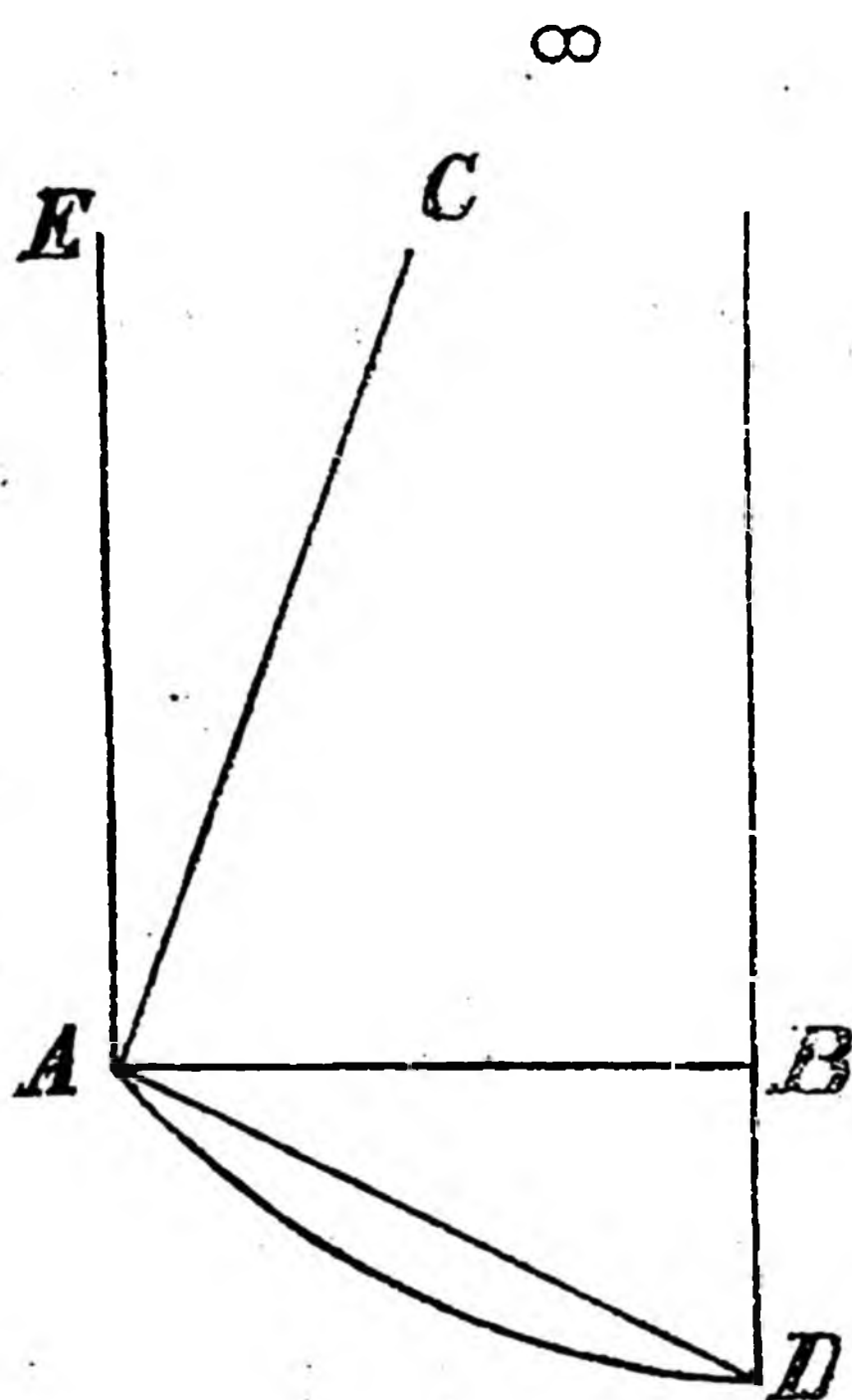
### Площадь треугольника.

Мы видѣли, что площадь треугольника равна:

$$\Delta = \lambda u$$

гдѣ  $\lambda$  есть постоянное, а  $u$  избытокъ двухъ прямыхъ надъ суммою угловъ въ треугольникѣ. Возьмемъ треугольникъ  $ABC$ , въ которомъ уголъ  $B=d$ , а вершина  $C$  лежитъ на бесконечности, т. е. уголъ  $C=0$ , или что тоже  $AC \parallel BC$ .

Фиг. 38.



Пусть  $AE \perp AB$ , то уголъ:

$$EAC = 2d - A - B = u.$$

Опишемъ предѣльную кривую  $AD$ , то будемъ имѣть (см. о кругѣ):

$$AD = k \cotg \Pi(AB) = k \operatorname{tg}(u)$$

Площадь  $P$ , ограниченная предѣльною дугою  $AD$  и осями  $AC$  и  $DC$ , (см. прибавленіе I) будетъ:

$$P = k \cdot AD = k^2 \operatorname{tg}(u)$$

слѣдовательно, отношеніе:

$$\frac{P}{ABC} = \frac{k^2 \operatorname{tg}(u)}{\lambda u} = \frac{k^2}{\lambda} \cdot \frac{\operatorname{tg}(u)}{u}$$

Когда сторона  $AB$ , уменьшаясь, приближается къ нулю, то отношеніе  $\frac{AD}{AB}$ , а также и отношенія  $\frac{P}{ABC}$  и  $\frac{\operatorname{tg}(u)}{u}$  приближаются къ единицѣ. Въ предѣлѣ, слѣдовательно, мы будемъ имѣть  $\lambda = k^2$ .

Откуда площадь треугольника будетъ:

$$\Delta = k^2 u = k^2 (\pi - A - B - C)$$

#### Площадь многоугольника.

Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_n$  будутъ внутренніе углы многоугольника, имѣющаго  $n$  сторонъ. Площадь его  $M$ , очевидно, будетъ:

$$M = k^2 [(n-2) \pi - A_1 - A_2 - \dots - A_n]$$

Если многоугольникъ правильный, то  $A_1 = A_2 = \dots = A_n$ , слѣдовательно, площадь его будетъ:

$$M = k^2 [(n-2) \pi - n A_1].$$

Если  $A_1 = A_2 = \dots = A_n = 0$ , то:

$$M = (n-2) \pi k^2$$

будетъ наибольшая площадь. Если  $n=3$ , то наибольшая площадь треугольника будетъ:

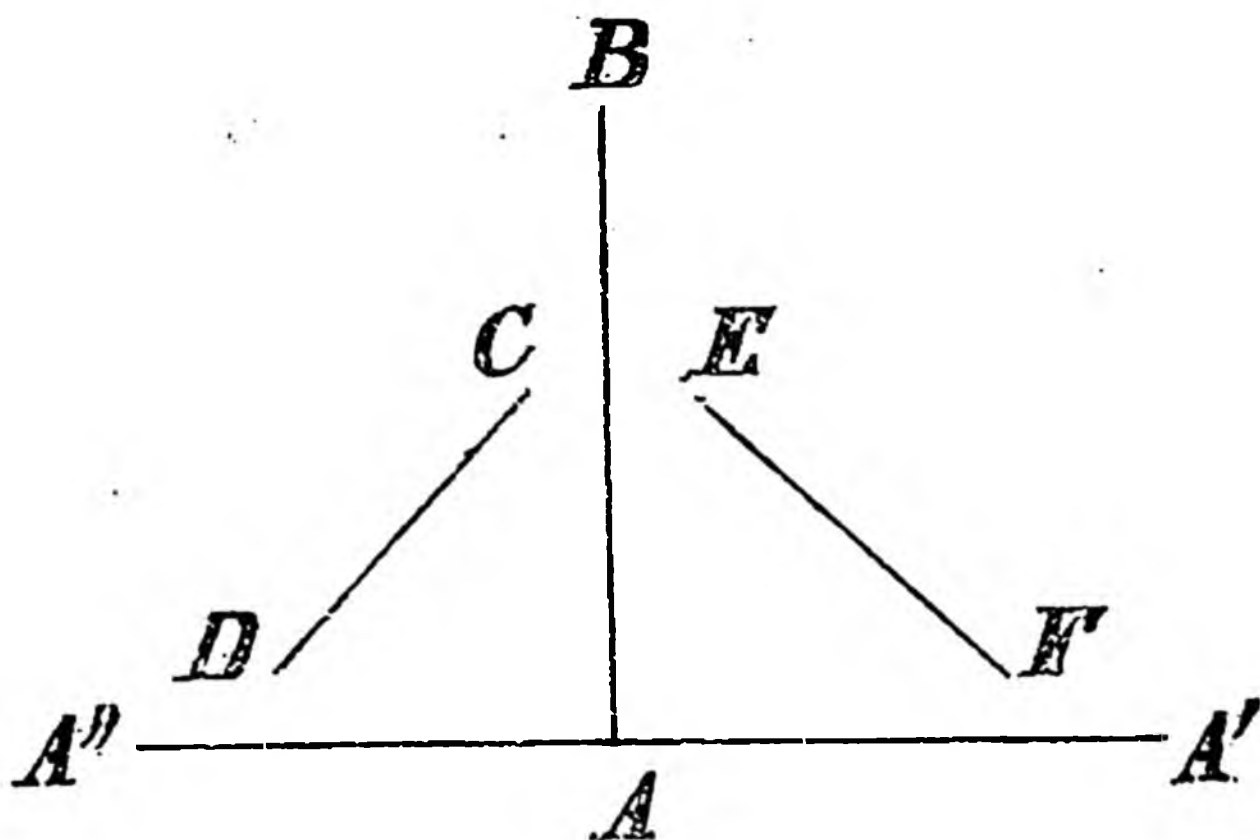
$$\Delta = \pi k^2$$

Построить этотъ треугольникъ можно слѣдующимъ образомъ (фиг. 39): изъ точки  $A$  на прямой  $A'A''$  возставимъ перпендикуляръ  $AB$  къ  $A'A''$  и опредѣлимъ, какъ было показано (см. зад. 2, стр. 40), прямыя  $CD$  и  $EF$  такъ, чтобы:

$$CD \parallel AA'', \quad CD \parallel AB$$

$$EF \parallel AA', \quad EF \parallel AB$$

Фиг. 39.



## Заключение.

Все выше изложенное даетъ возможность провести параллель между системами Евклидовской и Лобачевского, и показать въ какихъ частяхъ эти двѣ системы сходны, и въ какихъ различаются между собою.

1. Всѣ предложенія, доказанныя на основаніи только 8-й и 12-й аксіомъ, принадлежатъ обѣимъ системамъ, слѣдовательно двадцать восемь предложеній Евклида принадлежатъ и системѣ Лобачевского.

2. Геометрія бесконечно-малыхъ фигуръ принадлежащая, какъ мы видѣли, обѣимъ системамъ, не зависитъ отъ одиннадцатой аксіомы.

3. Обѣимъ системамъ, будутъ принадлежать также и тѣ предложенія, въ которыхъ конечныя фигуры могутъ быть замѣщены бесконечно-малыми. Таковы слѣдующія предложенія:

а) Двѣ прямыя  $BB'$  и  $CC'$ , параллельныя третьей  $AA'$ , по тому же направленію, параллельны между собою. Въ самомъ дѣлѣ,  $BB'$  и  $CC'$  приближаются, со стороны параллельности, къ  $A'A''$  неопредѣленно. На бесконечно большомъ разстояніи, точки прямой  $AA'$  находятся въ бесконечно маломъ разстояніи отъ точекъ прямыхъ  $BB'$  и  $CC'$ . Если возьмемъ одну изъ такихъ точекъ на  $AA'$ , и чрезъ нее проведемъ плоскость перпендикулярную къ  $AA'$ , то она будетъ перпендикулярна и къ прямымъ  $BB'$  и  $CC'$ . Слѣдовательно, три прямыя  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , перпендикулярныя къ одной плоскости, будутъ параллельны между собою.

б) Сумма двугранныхъ угловъ трехъ плоскостей, пересѣкающихся по параллельнымъ прямымъ, равна двумъ прямымъ угламъ. Разсужденіе тоже, что и въ а).

с) Сферическая геометрія, т. е. геометрія фигуръ на сферѣ, ограниченныхъ дугами большихъ круговъ, одинакова въ обѣихъ системахъ. Въ самомъ дѣлѣ, если изъ центра данной сферы опишемъ бесконечно-малую сферу, то всѣ фигуры на данной сферѣ будутъ проектироваться на бесконечно-малой сферѣ, бесконечно-малыми фигурами, имѣющими тѣже свойства.

Или еще вслѣдствіе того, что геометрія сферы основана на 8-й и 12-й аксіомахъ, съ нѣкоторыми исключеніями для послѣдней (слѣд. стр. 5), и на аксіомѣ, отличной отъ одиннадцатой Евклида и Лобачевского, именно: всѣ прямыя на сферѣ пересѣкаются.

Въ этихъ частяхъ сбѣ системы сходны, въ слѣдующихъ различны:

1. Въ системѣ Евклида. Кругъ касательный въ извѣстной точкѣ прямой, съ увеличеніемъ радіуса приближается къ прямой и переходитъ въ нее, когда радіусъ сдѣлается бесконечно большимъ.

Въ системѣ Лобачевского. Такой же кругъ переходитъ не въ прямую, но въ предѣльную кривую.

2. Въ системѣ Евклида есть двѣ кривыя, которыхъ каждая часть можетъ совмѣститься, гдѣ угодно, на остальной части безъ изгиба—это прямая и кругъ.

Въ системѣ Лобачевского есть четыре такихъ линіи: прямая, кругъ, предѣльная кривая и кривая равныхъ разстояній.

3. Въ системѣ Евклида есть двѣ поверхности, на которыхъ фигуры могутъ быть передвинуты безъ изгиба: плоскость и сфера.

Въ системѣ Лобачевского ихъ есть четыре: плоскость, сфера, предѣльная поверхность и поверхность равныхъ разстояній.

Геометрія на предѣльной поверхности въ системѣ Лобачевского есть геометрія Евклида.

4. Мѣровыя зависимости, самыя обыкновенныя на плоскости, не имѣютъ мѣста на плоскости Лобачевского. Таковы, напримѣръ, теорема Пифагора и подобіе фигуръ.

5. Уголъ параллельности въ системѣ Евклида есть прямой, въ системѣ Лобачевского онъ опредѣляется выраженіемъ:

$$\cotg \Pi(p) = \frac{e^{\frac{p}{k}} - e^{-\frac{p}{k}}}{2}$$

гдѣ  $e$  есть основаніе Неперовыхъ логарифмовъ,  $p$  есть извѣстное разстояніе, а  $k$  есть постоянный параметръ, которымъ одна система Лобачевского отличается отъ другой. Этотъ параметръ, если наше пространство не есть Евклидовское, а Лобачевского, можетъ быть опредѣленъ опытомъ, который



показываетъ, что онъ безконечно большой въ сравненіи со всѣмъ тѣмъ, что мы можемъ измѣрять въ нашей солнечной системѣ.

6. Если въ формулахъ сферической геометріи системы Евклида введемъ радіусъ и этотъ радіусъ измѣнимъ въ  $ki$ ,  $i = \sqrt{-1}$ , то получимъ формулы геометрической системы Лобачевского, откуда слѣдуетъ, что система Лобачевского, построенная на сферѣ, коей радіусъ мнимая величина  $ki$ , или квадратъ радіуса есть величина отрицательная.

Такова въ общихъ чертахъ система Лобачевского, которую онъ построилъ, измѣнивъ одиннадцатую аксіому Евклида. Такъ какъ система оказалась возможною и логичною во всѣхъ своихъ частяхъ и заключаетъ въ себѣ, какъ частный случай, систему Евклида, то изъ этого можно заключить, что одиннадцатая аксіома Евклида, на основаніи 8-й и 12-й, доказана быть не можетъ. Съ одиннадцатою аксіомою геометрическая система раздвояется на Евклидовскую и Лобачевского, сообразно смыслу, данному одиннадцатою аксіомѣ.

Спрашивается теперь, дѣйствительно-ли эти двѣ системы возможны совмѣстно на плоскости, или же Евклидовская существуетъ на плоскости, а Лобачевского на другой какой-то поверхности? Этотъ вопросъ былъ вполнѣ разрѣшенъ итальянскимъ геометромъ Бельтрами въ мемуарахъ: *Resolutione del problema di riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che linee geodetiche vengano representato da linee rette. Annali matematiche. Roma 1866. Saggio di interpretatione della geometria non euclidea. Giornale matimatico di Napoli 1868 и Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante. Annali di matematiche. 1869.*

Ниже я изложу только результаты этихъ изслѣдованій, такъ какъ полное изложеніе несообразно съ цѣлью и элементарнымъ характеромъ настоящаго сочиненія. Такое общее изложеніе результатовъ достаточно покажетъ конкретное значеніе системы Лобачевского и другихъ возможныхъ системъ и выяснитъ тѣ результаты системы Лобачевского, которые, съ перваго взгляда, намъ кажутся несообразными на плоскости.

#### Кривизна поверхностей.

Извѣстно, что для изслѣдованія кривой линіи сравниваютъ ее съ прямыми и кругами. Для этого берутъ, въ извѣстной точкѣ кривой, прямую, имѣющую двѣ общія точки съ кривою—прямая эта называется *сѣкущею*; если же двѣ точки сѣченія сольются въ одну, то такая прямая называется *касательной*, въ данной точкѣ къ данной кривой. Касательная къ кривой въ извѣстной точкѣ, вообще, въ этой точкѣ, не пересѣкаетъ кривую, т. е. всѣ сосѣднія точки кривой лежатъ по одну сторону касательной, исклю-

чая особенныхъ точекъ кривой, какъ напимѣръ, въ точкѣ *перелѣва*, гдѣ кривая, дѣлаясь изъ выпуклой вогнутою, переходитъ на другую сторону касательной и слѣдовательно пересѣкаетъ ее. Построивъ касательную, въ извѣстной точкѣ кривой, мы можемъ уже судить о ея кривизнѣ въ этой точкѣ, опредѣляя насколько сосѣднія точки удаляются отъ касательной. Если сосѣднія точки кривой удаляются значительно отъ касательной, то мы говоримъ, что кривизна кривой больше и обратно. Подъ сосѣдними точками я разумѣю точки, лежащія бесконечно близко отъ точки касанія. Еще болѣе опредѣленное понятіе мы составимъ о кривизнѣ кривой, сравнивъ кривизну ея, въ извѣстной точкѣ, съ кривизною круга. Для этого мы возьмемъ три произвольныя точки на кривой, чрезъ эти точки проведемъ кругъ, центръ и радіусъ этого круга будутъ зависѣть отъ положенія взятыхъ трехъ точекъ на кривой. Если мы будемъ измѣнять положеніе взятыхъ точекъ на кривой, то, очевидно, будетъ измѣняться положеніе центра круга и величина радіуса его. Если вторая точка совпадетъ съ первой, то кругъ, въ нѣкоторомъ смыслѣ, сдѣлается опредѣленнѣе; это будетъ одинъ изъ тѣхъ круговъ, которые имѣютъ общую касательную съ кривой въ первой точкѣ. Если и третья точка совпадетъ съ первой и второй, т. е. если всѣ три взятые на кривой точки совпадутъ съ первой, то кругъ вполне опредѣлится, положеніе центра и величина радіуса сдѣлаются извѣстными и опредѣленными, для взятой точки. Кругъ этотъ называется *кругомъ кривизны* кривой въ данной точкѣ, а радіусъ его называется *радіусомъ кривизны*. Кругъ этотъ, вообще пересѣкаетъ кривую въ данной точкѣ, т. е. переходитъ, въ этой точкѣ, съ одной стороны кривой на другую. Кривизна этого круга намъ даетъ болѣе точное понятіе о кривизнѣ кривой въ извѣстной точкѣ, такъ какъ о кривизнѣ круга, когда радіусъ его извѣстенъ, мы всегда имѣемъ точное понятіе. Поэтому условились измѣрять кривизну кривой, въ извѣстной точкѣ, единицей раздѣленной на радіусъ кривизны, т. е. если чрезъ  $\omega$  назовемъ кривизну кривой въ данной точкѣ, чрезъ  $R$  радіусъ кривизны въ этой точкѣ, то:

$$\omega = \frac{1}{R}$$

Если въ извѣстной точкѣ кривой  $R = \infty$ , то говорятъ, что кривизна кривой въ этой точкѣ есть нуль, т. е. три бесконечно близкія точки на кривой лежатъ на одной прямой линіи. Касательная въ этой точкѣ имѣетъ три общія точки съ кривой. Если кривизна кривой равна нулю въ каждой ея точкѣ, то кривая линія есть прямая. На плоскости есть *только* двѣ кривыя коихъ кривизна есть величина постоянная: прямая кривизна кото-



рой, во всѣхъ ея точкахъ, есть нуль и кругъ, кривизна котораго есть известная, опредѣленная положительная величина.

Перейдемъ къ поверхностямъ: возьмемъ на какой нибудь поверхности точку, чрезъ эту точку проведемъ кривыя по поверхности во всевозможныхъ направленіяхъ, къ каждой изъ этихъ кривыхъ проведемъ касательную въ точкѣ взятой на поверхности, всѣ эти касательныя лежатъ въ одной плоскости, которая и называется *касательною плоскостью* къ поверхности въ данной точкѣ. Если точки поверхности, лежащія безконечно близко точки касанія, всѣ лежатъ по одну сторону касательной плоскости, то говорятъ, что поверхность, въ сосѣдствѣ точки касанія, *выпуклая* или *вогнутая*. Если же однѣ точки лежатъ по одну сторону касательной плоскости, а другія по другую, то говорятъ, что поверхность, въ сосѣдствѣ точки касанія, *выпукло-вогнутая*.

Прямая, проведенная чрезъ точку касанія перпендикулярно къ касательной плоскости, называется *нормальною линіею* къ поверхности.

Первыя изслѣдованія, относительно кривизны поверхностей, были сдѣланы Эйлеромъ и Монжемъ. Онѣ состоятъ въ слѣдующемъ: чрезъ данную точку на поверхности проведемъ нормальную линію, чрезъ эту линію проводятъ, во всевозможныхъ направленіяхъ плоскости, плоскости эти пересекутъ поверхность по кривымъ, которыя расходятся, по всѣмъ направленіямъ отъ взятой точки.

Если теперь опредѣлимъ, какъ выше указано, радіусы кривизны каждой кривой въ данной точкѣ, то мы составимъ себѣ понятіе о кривизнѣ каждой кривой, а слѣдовательно составимъ понятіе и о кривизнѣ поверхности въ этой точкѣ. Анализъ показываетъ, что между этими радіусами кривизны есть всегда два, изъ коихъ одинъ будетъ больше всѣхъ, а другой меньше всѣхъ. Эти радіусы кривизны называются *главными*, также какъ и соответствующія линіи сѣченія. Плоскости главныхъ сѣченій, т. е. сѣченій въ которыхъ кривизна кривыхъ есть наименьшая и наибольшая, наклонены между собою всегда подъ прямымъ угломъ. Если означимъ чрезъ  $\alpha$  уголъ, который какая нибудь изъ плоскостей, проведенныхъ чрезъ нормаль, составляетъ съ плоскостью, содержащею кривую съ наибольшимъ радіусомъ кривизны, то, означая чрезъ  $R_1$  и  $R_2$  наибольшій и наименьшій радіусы кривизны, а чрезъ  $R$  радіусъ кривизны кривой, лежащей въ плоскости, составляющей уголъ  $\alpha$ , нашли что:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} \cos^2 \alpha + \frac{1}{R_2} \sin^2 \alpha.$$

Слѣдовательно, радіусы кривизны кривыхъ зависятъ отъ наклоненія  $\alpha$  и радіусовъ  $R_1$  и  $R_2$ .

Если поверхность въ данной точкѣ будетъ выпукло-вогнутая, то какъ мы видѣли, она, въ точкѣ касанія, лежитъ по обѣ стороны касательной плоскости, слѣдовательно, кривизна кривыхъ, происшедшихъ отъ нормальныхъ сѣченій, въ извѣстномъ направленіи, должна изъ выпуклой перейти въ вогнутую или обратно, слѣдовательно, радіусы кривизны должны быть направлены въ противоположную сторону своего прежняго направленія, т. е. изъ положительныхъ сдѣлаться отрицательными, или обратно. Кривизна кривыхъ должна, слѣдовательно, перейти чрезъ нуль, а радіусы кривизны должны перейти чрезъ безконечность. Въ выпукло-вогнутыхъ поверхностяхъ главные радіусы кривизны не будутъ наибольшій и наименьшій, а оба будутъ наименьшіе, одинъ между положительными, а другой между отрицательными. Одна изъ плоскостей, проходящая между главными плоскостями сѣченія, содержитъ кривую, которая въ этой точкѣ имѣетъ кривизну нуль, слѣдовательно, радіусъ кривизны равенъ безконечности. Одинъ изъ главныхъ радіусовъ кривизны будетъ положительный, а другой отрицательный. Переходъ радіусовъ кривизны отъ положительныхъ къ отрицательнымъ бываетъ или чрезъ кривую, имѣющую точку перегиба, или чрезъ прямую. Это послѣднее свойство имѣетъ однополый гиперболоидъ и параболическій гиперболоидъ. Эти поверхности съ касательной плоскостью пересѣкаются по прямой линіи. Такимъ образомъ, мы можемъ составить понятіе о кривизнѣ поверхности въ данной точкѣ, но самыхъ важныхъ результатовъ въ этомъ отношеніи достигъ Гауссъ.

Чтобы судить о кривизнѣ поверхности, Гауссъ беретъ извѣстную часть поверхности, т. е. фигуру и сравниваетъ ее съ соотвѣтствующей фигурой на шарѣ, коего радіусъ есть единица, слѣдующимъ образомъ: изъ каждой точки контура фигуры на поверхности онъ проводитъ нормальную линію, а изъ центра сферы проводитъ радіусы параллельно проведеннымъ нормалямъ; такимъ образомъ на сферѣ образуется фигура, соотвѣтствующая фигурѣ на поверхности. Площадь фигуры на сферѣ Гауссъ назвалъ *полною кривизною*, взятой на поверхности фигуры. *Средней кривизной* онъ назвалъ отношеніе площади фигуры на сферѣ къ площади фигуры на поверхности.

Если площадь взятой фигуры на поверхности будетъ безконечно малая, то средняя кривизна называется *кривизною поверхности* въ точкѣ, лежащей внутри безконечно малаго контура.

Если означимъ чрезъ  $\Omega$  площадь безконечно малой фигуры на поверхности, чрезъ  $\omega$  площадь соотвѣтствующей фигуры на сферѣ, то кривизна поверхности, въ точкѣ лежащей внутри контура фигуры  $\Omega$ , будетъ:

$$\frac{\omega}{\Omega}$$

Гауссъ нашелъ, что это отношеніе равно:



$$\frac{\omega}{\Omega} = \frac{1}{R_1 R_2}$$

гдѣ  $R_1$  и  $R_2$  суть радіусы кривизны главныхъ сѣченій поверхности въ точкѣ на площади фигуры  $\Omega$ . Если поверхность въ данной точкѣ выпуклая, то кривизна ея есть величина положительная, а если выпукло-вогнутая, то кривизна поверхности, въ этой точкѣ, есть величина отрицательная.

Теперь я докажу, что если мы будемъ выгибать поверхность, такъ чтобы не образовалось ни складокъ, ни разрывовъ, т. е. чтобы разстояніе, какихъ нибудь двухъ точекъ на поверхности оставалось безъ измѣненія, то при всѣхъ такихъ выгибаніяхъ кривизна поверхности, въ извѣстной точкѣ, не переизмѣнится, т. е. отношеніе  $\frac{\omega}{\Omega}$  не измѣнится, а слѣдовательно, не измѣнится и произведеніе  $R_1 R_2$  главныхъ радіусовъ кривизны въ данной точкѣ.

Во первыхъ замѣтимъ, что при такихъ выгибаніяхъ величина площади фигуры  $\Omega$  и ея контура не измѣняется, слѣдовательно, надобно только показать, что не измѣняется, при выгибаніи фигуры  $\Omega$ , и площадь фигуры  $\omega$ .

Для этого вспомнимъ сначала слѣдующее свойство многоугольника на сферѣ, образованнаго дугами большихъ круговъ. Если периметръ такого многоугольника назовемъ чрезъ  $P$ , а площадь, соотвѣтствующаго ему полярнаго многоугольника, назовемъ чрезъ  $\Pi$ , то извѣстно, что:

$$P + \Pi = 4d.$$

Возьмемъ на площади элемента  $\Omega$  точку, эту точку возьмемъ за центръ сферы, коей радіусъ есть единица. Проведемъ чрезъ эту точку къ контуру  $\Omega$  безчисленное множество прямыхъ линій, которыя продолжимъ до встрѣчи съ сферой, на сферѣ образуется многоугольникъ съ безчисленнымъ числомъ сторонъ. Периметръ этого многоугольника назовемъ чрезъ  $P$ . Если элементъ  $\Omega$  выгибается, то очевидно периметръ  $P$  не измѣняется. Полярный многоугольникъ, соотвѣтствующій многоугольнику, коего периметръ есть  $P$ , очевидно, будетъ ничто иное какъ элементъ  $\omega$ . Означивъ периметръ этого послѣдняго элемента чрезъ  $\Pi$ , мы выше видѣли, что:

$$P + \Pi = 4d$$

откуда видимъ, что при выгибаніи элемента  $\Omega$ , элементъ  $\omega$  не измѣняется, слѣдовательно, отношеніе:

$$\frac{c}{\Omega} = \frac{1}{R_1 R_2}$$

остается постояннымъ.

Диге (Digue) показалъ еще, что если чрезъ данную точку  $A$  на поверхности проведемъ, по всѣмъ направленіямъ, геодезическія линіи, на которыхъ возьмемъ постоянную бесконечно малую длину  $s$ , то на поверхности образуется элементъ  $\Omega$ , котораго периметръ  $\delta$  и площадь  $\Omega$  выражаются слѣдующими уравненіями:

$$\delta = 2\pi s - \frac{\pi s^3}{3R_1 R_2}, \quad \Omega = \pi s^2 - \frac{\pi s^4}{12R_1 R_2} \quad (a)$$

Изъ послѣдняго уравненія легко видѣть, что если кривизна поверхности есть величина постоянная, то элементы, образованные въ различныхъ точкахъ, подобно элементу  $\Omega$ , будутъ совмѣщаться, слѣдовательно способъ наложенія можетъ быть примѣненъ къ такимъ поверхностямъ, т. е. на такихъ поверхностяхъ аксіома *совмѣстимости* имѣетъ мѣсто.

Изъ этого видимъ, что свойствомъ *совмѣстимости* обладаютъ не только плоскость и сфера, какъ мы выше сказали, но всѣ поверхности, имѣющія постоянную кривизну. На всѣхъ такихъ поверхностяхъ 8-я Евклидовская аксіома имѣетъ мѣсто и можетъ быть приложенъ способъ наложенія для сравненія мѣровыхъ отношеній фигуръ.

Если, какую нибудь, поверхность мы будемъ изгибать всѣми возможными способами, но только такими, при которыхъ не образовались бы ни складки, ни разрывы, то получимъ всѣ поверхности, которыя могутъ быть навиты, очевидно, безъ складокъ и разрывовъ одна на другую. Такъ какъ при выгибаніи поверхности, кривизна ея въ каждой точкѣ не измѣняется, то изъ этого слѣдуетъ, что для того, чтобы одна поверхность могла быть навита на другую, необходимо, чтобы, въ соотвѣствующихъ точкахъ, кривизны обѣихъ поверхностей были равны. Но этого условія недостаточно, надобно еще, чтобы элементы геодезическихъ линій на обѣихъ поверхностяхъ были равны. Это послѣднее условіе вытекаетъ изъ втораго уравненія (a).

Постоянная кривизна поверхности можетъ быть *нуль*, *положительная* и *отрицательная*.

Типомъ поверхностей съ кривизной нуль служитъ *плоскость*.

Типомъ поверхностей съ постоянной положительной кривизной служитъ *сфера*.

И, наконецъ, типомъ поверхностей съ постоянной отрицательной кривизной служитъ *псевдо-сфера* или *плоскость Лобачевского*.

**Поверхности съ кривизною нуль.**

Кривизна плоскости, очевидно, есть нуль, такъ какъ главные радіусы кривизны оба равны безконечности. Слѣдовательно, поверхности, которыя можно развернуть на плоскости, или на которыя можно навить плоскость, будутъ имѣть всѣ кривизну нуль. Таковы: поверхности *цилиндрическія, коническія*, и вообще всѣ поверхности извѣстныя подъ названіемъ *развертывающихся* поверхностей.

На всѣхъ этихъ поверхностяхъ всѣ три аксіомы Евклида имѣютъ мѣсто безъ исключеній, слѣдовательно, геометрическая система Евклида принадлежитъ не только плоскости, но и всѣмъ поверхностямъ съ кривизною нуль.

Пояснимъ это обстоятельнѣе: возьмемъ прямой цилиндръ съ круговымъ основаніемъ и что скажемъ о цилиндрѣ, то легко отнести и ко всякой другой развертывающейся поверхности.

*Аксіома 8.* Возьмемъ на плоскости какую нибудь фигуру, напри- мѣръ, треугольникъ и перенесемъ его по плоскости въ какое нибудь дру- гое мѣсто, затѣмъ навьемъ плоскость на цилиндръ; очевидно, что вообще, изгибъ треугольника на цилиндрѣ, въ одномъ мѣстѣ, будетъ отличенъ отъ изгиба въ другомъ, но одинъ изъ треугольниковъ можно передвинуть по цилин- дру и совмѣстить съ другимъ. Тоже самое можно сказать о совмѣстимости и на другихъ развертывающихся поверхностяхъ. Слѣдовательно, аксіома сов- мѣстимости имѣетъ мѣсто на всѣхъ развертывающихся поверхностяхъ.

*Аксіома 12.* Прямая линія вполнѣ опредѣляется двумя данными точ- ками на плоскости, она же есть и кратчайшее разстояніе между этими точками.

Если плоскость, на которой между двумя точками проведена прямая линія, навьемъ на какую нибудь развертывающуюся поверхность, напри- мѣръ, цилиндръ, то прямая, навитая на цилиндръ съ плоскостью, можетъ остаться прямой и на цилиндрѣ, можетъ обратиться въ кругъ и можетъ сдѣлаться гелисомъ. При такихъ разнообразныхъ формахъ, которыя прямая принимаетъ на цилиндрѣ, она будетъ и на цилиндрѣ вполнѣ опредѣляться двумя точками и останется кратчайшимъ разстояніемъ и на цилиндрѣ. Все, что я сказалъ о цилиндрѣ, можно отнести и ко всѣмъ развертывающимся поверхностямъ.

Изъ сказаннаго видимъ, что 12-я аксіома, или опредѣленіе прямой есть масштабъ для геометрическихъ построеній на поверхностяхъ, не пред- ставляющихъ исключеній для этого опредѣленія. Этотъ масштаб измѣ- няется по формѣ, не только отъ поверхности къ поверхности, но и на од- ной и той же поверхности.



Мы привыкли съ этимъ опредѣленіемъ прямой соединять неразрывно ея частную форму въ нашемъ пространствѣ, или на плоскости; для насъ она есть форма натянутой нити или отвѣса, между тѣмъ какъ опредѣленіе ея допускаетъ самыя разнообразныя формы. Евклидъ въ четвертомъ своемъ опредѣленіи, очевидно, имѣлъ въ виду форму прямой нашего пространства. Это опредѣленіе даетъ дѣйствительно понятіе о формѣ прямой, но не можетъ служить для геометрическихъ построеній,

*Аксиома 11.* Разсуждая точно также и относительно этой аксіомы, мы видимъ, что она, въ формѣ Евклида, или Лобачевского, будетъ имѣть мѣсто и на всѣхъ развертывающихся поверхностяхъ, если дѣйствительно обѣ геометрическія системы совмѣстно существуютъ на плоскости.

Изъ этого видимъ, что геометрическія системы Евклида и Лобачевского, существуя совмѣстно на плоскости, будутъ существовать и на всѣхъ развертывающихся поверхностяхъ. Это будутъ геометрическія системы поверхностей съ кривизною *нуль*.

#### Поверхности съ положительной кривизной.

Представителемъ поверхностей съ постоянной положительной кривизной есть сфера. Въ каждой точкѣ сферы, коей радіусъ есть  $R$ , всѣ радіусы кривизны равны  $R$ , слѣдовательно кривизна сферы, въ каждой ея точки, будетъ равна  $\frac{1}{R^2}$ .

*Аксиома 8.* Такъ какъ сфера есть поверхность съ постоянной положительной кривизной, то на ней, какъ мы выше показали, аксіома совмѣстимости имѣетъ мѣсто, какъ и на плоскости. Способъ наложенія для сравненія мѣровыхъ отношеній фигуръ на ней примѣняется.

*Аксиома 12.* На сферѣ двумя точками опредѣляется дуга большаго круга, она же есть и кратчайшее разстояніе между двумя точками. Слѣдовательно, на сферѣ прямая линія есть дуга большаго круга. Хотя двѣ точки на сферѣ и опредѣляютъ всегда дугу большаго круга, но положеніе двухъ точекъ бываетъ таково, что чрезъ нихъ можно провести безчисленное множество дугъ большихъ круговъ. Таковы двѣ діаметрально противоположныя точки. Кромѣ того, разстояній между двумя точками на сферѣ всегда два, одно изъ нихъ есть кратчайшее, а другое, хотя имѣетъ въ каждой своей точкѣ свойство кратчайшаго, но не есть кратчайшее. Слѣдовательно, двѣнадцатая аксіома на сферѣ имѣетъ мѣсто съ нѣкоторыми исключеніями. Вслѣдствіе этихъ исключеній не всѣ двадцать восемь первыхъ положеній Евклида имѣютъ мѣсто на сферѣ.

Напримѣръ, двѣ прямыя перпендикулярныя къ третьей на сферѣ встрѣчаются.



**Аксиома 11.** Всѣ прямыя (дуги большихъ круговъ), на сферѣ встрѣчаются. Геометрическая система построенная на этихъ аксиомахъ не имѣетъ теоріи параллельныхъ линій, въ ней нѣтъ подобія фигуръ. Сумма угловъ въ треугольникѣ, въ такой системѣ, больше двухъ прямыхъ. Площадь треугольника зависитъ отъ суммы угловъ. Въ самомъ дѣлѣ, извѣстно, что:

$$\triangle ABC = R^2(A+B+C-\pi).$$

Теперь становится ясно почему Лежандръ успѣлъ доказать, что сумма угловъ въ треугольникѣ не можетъ быть меньше двухъ прямыхъ, введя аксиому: что чрезъ данную точку внутри угла всегда можно провести прямую, встрѣчающую обѣ стороны угла. Очевидно, это одиннадцатая аксиома для сферы, а на сферѣ сумма угловъ въ треугольникѣ больше двухъ прямыхъ, слѣдовательно, Лежандръ, введя эту аксиому, перешелъ безсознательно къ геометрической системѣ сферы.

Все то, что я сказалъ относительно сферы, относится ко всѣмъ поверхностямъ, навивающимся на сферу, т. е. къ поверхностямъ, которыя имѣютъ кривизну равную кривизнѣ  $\frac{1}{R^2}$  сферы. Слѣдовательно, геометрическую систему сферы можно назвать системой *постоянной положительной кривизны*.

Геометрическая система нулевой кривизны *одна*. Геометрическихъ системъ постоянной положительной кривизны безчисленное множество, и всѣ онѣ отличаются между собою только постояннымъ числомъ, выражающимъ кривизну, которая входитъ извѣстнымъ образомъ въ геометрическія зависимости системы. Напримѣръ, мы уже видѣли, что площадь треугольника на сферѣ равна:

$$\triangle ABC = R^2(A+B+C-\pi)$$

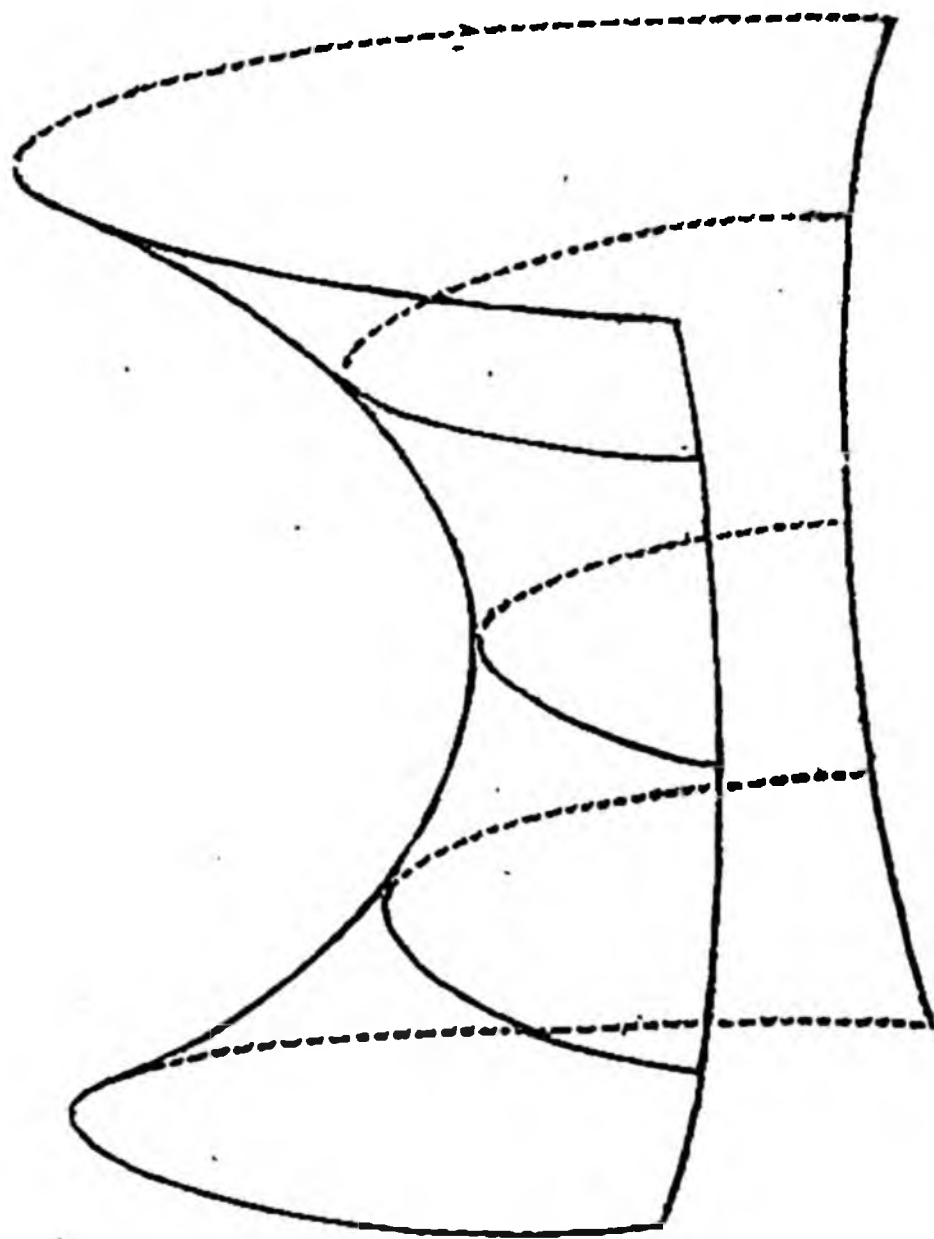
$R^2$  для различныхъ системъ будетъ различно.

#### Поверхности съ постоянной отрицательной кривизной.

Мы видѣли, что если въ извѣстной точкѣ поверхности кривизна ея есть величина отрицательная, то въ этой точкѣ поверхность выпукло-вогнутая и лежитъ частію съ одной, а частію съ другой стороны касательной плоскости въ данной точкѣ. Если поверхность имѣетъ во всѣхъ своихъ точкахъ отрицательную кривизну, то ее называютъ *седло-образною*, такъ

какъ въ каждой ея точкѣ она имѣетъ форму сѣдла, главные радіусы кривизны обращены въ противоположныя стороны. Если кривизна такой по-

Фиг. 40.



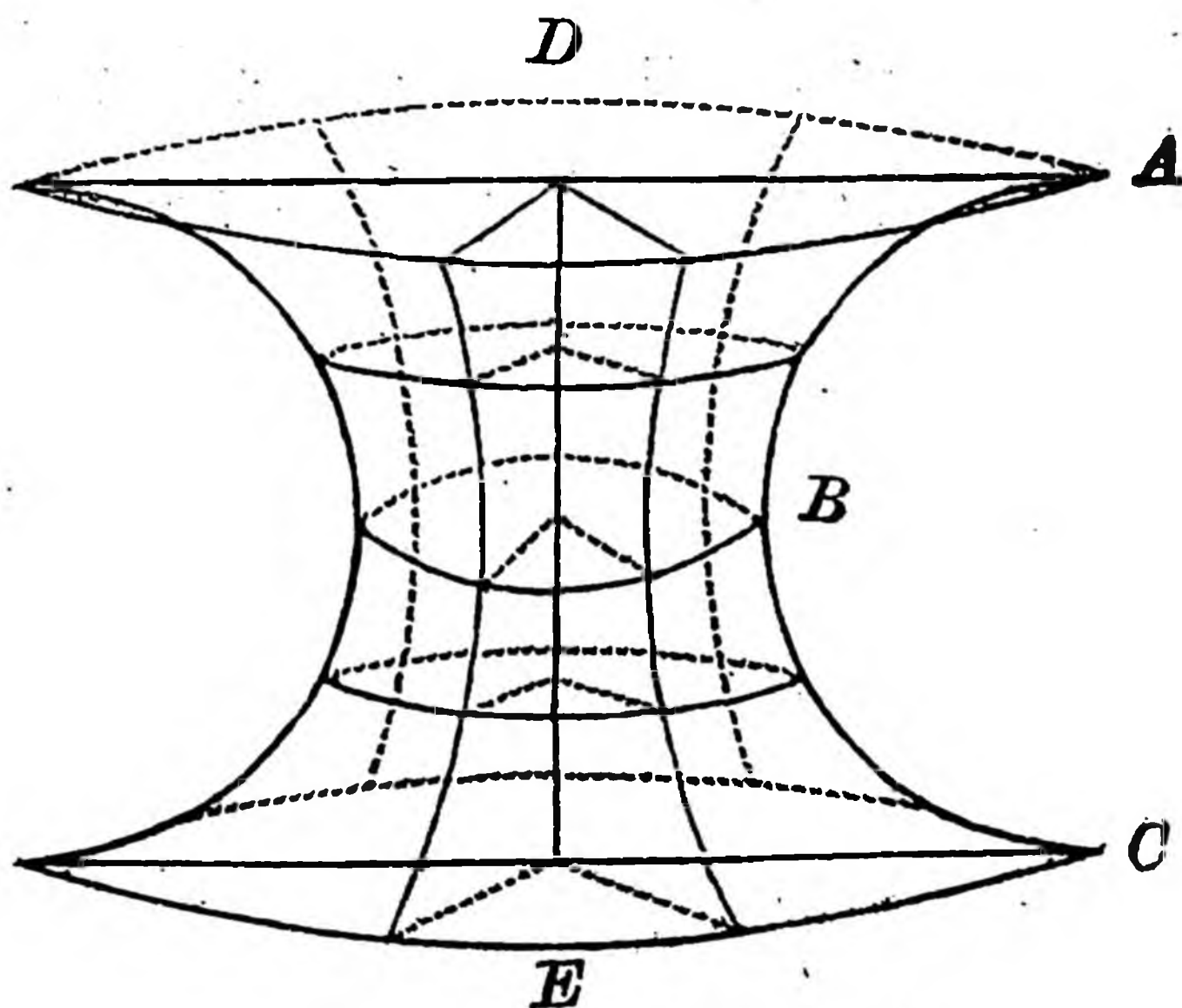
верхности есть величина постоянная, т. е. если произведение главныхъ радіусовъ кривизны  $R_1$  и  $R_2$  будетъ:

$$R_1 R_2 = -R^2$$

то такую поверхность называютъ *псевдо-сферой*. Названіе это далъ итальянскій геометръ Бельтрами, который въ первый разъ и изслѣдовалъ свойства псевдо-сферы. Сходства между сферой и псевдо-сферой нѣтъ никакого, единственное сходство заключается въ томъ, что какъ въ той, такъ и въ другой поверхности, кривизна постоянная, но въ одной положительная, а въ другой отрицательная.

Часть псевдо-сферической поверхности можно получить обращая полуокружность  $ABC$  около оси  $DE$ . Въ каждой точкѣ, такимъ образомъ полу-

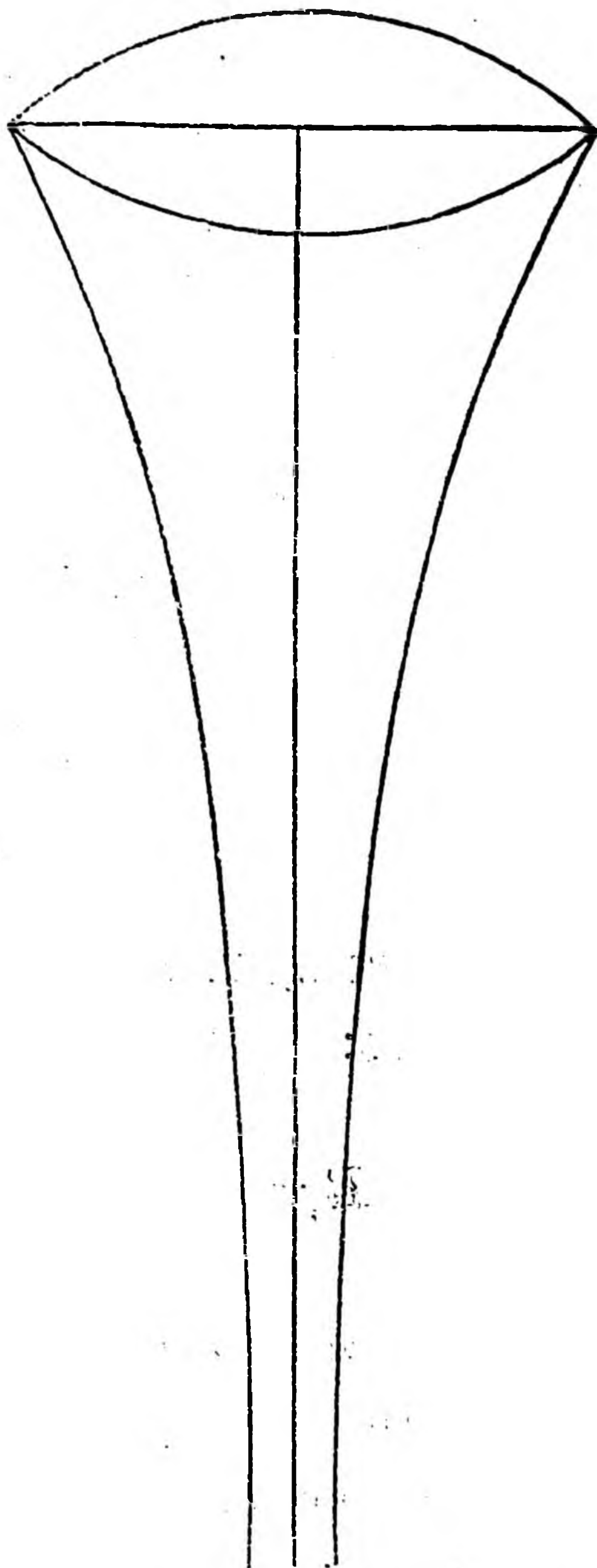
Фиг. 41.



ченной поверхности, кривизна есть постоянная отрицательная величина. Еще

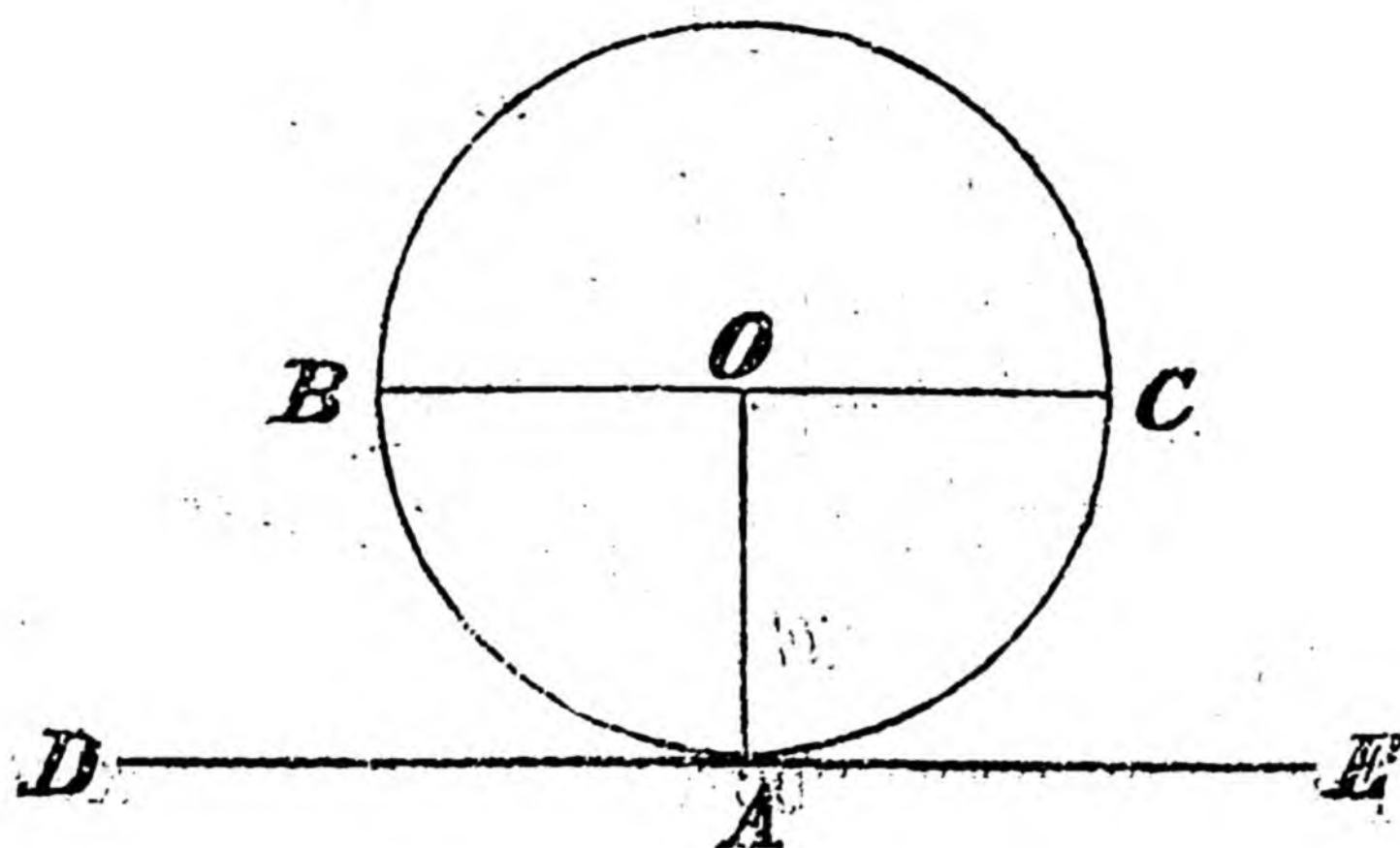
часть псевдо-сферы представить шампанскій бокаль, если острую ножку послѣдняго, суживая, продолжите до бесконечности.

Фиг. 42.



*Исслѣдованія Бельтрами.* Бельтрами сначала рѣшаетъ слѣдующую задачу: найти поверхности, точки которыхъ, можно бы было такъ отнести къ плоскости, чтобы линіи кратчайшихъ разстояній на поверхности (геодезическія) изображались прямыми линіями на плоскости? Бельтрами показываетъ, что такія поверхности суть сфера и псевдо-сфера. Пояснимъ это на сферѣ. Возьмемъ сферу  $O$  и на ней точку  $A$ , назовемъ эту точку полюсомъ и проведемъ чрезъ нее касательную плоскость  $DE$  къ сферѣ. Проведемъ чрезъ центръ шара  $O$  прямая по всѣмъ направленіямъ къ точкамъ плоскости, эти пря-

Фиг. 43.





мыя пересѣкутъ полу-сферу  $BAC$  въ точкахъ, которыя будутъ соотвѣтствовать точкамъ плоскости и обратно. Очевидно, что каждой точкѣ плоскости будетъ соотвѣтствовать *одна* только точка полу-сферы  $BAD$ . Каждой линіи на одной изъ поверхностей будетъ соотвѣтствовать линія на другой. Каждой геодезической линіи на одной изъ поверхностей соотвѣтствуетъ геодезическая линія на другой. И въ самомъ дѣлѣ, каждая плоскость, проходящая чрезъ центръ сферы, пересѣкаетъ плоскость  $DE$  по прямой, а полу-сферу по большому кругу. Точки большого круга на сферѣ, коего плоскость параллельна плоскости  $DE$ , будутъ соотвѣтствовать бесконечно удаленнымъ точкамъ на плоскости. Двумъ параллельнымъ прямымъ на плоскости будутъ соотвѣтствовать два большихъ круга сферы, коихъ общій діаметръ параллеленъ касательной плоскости  $DE$ . Слѣдовательно, зная такую зависимость, мы, отъ теоремъ геометрической системы на плоскости, можемъ переходить къ теоремамъ на сферѣ и построить, такимъ образомъ, сферическую геометрическую систему.

*Псевдо-сфера.* Другая поверхность, найденная Бельтрами, есть псевдо-сфера. Онъ находитъ, что она распространяется въ бесконечность, но въ бесконечности ограничена кругомъ, коего радіусы суть бесконечно большія геодезическія линіи на поверхности, исходящія изъ одной точки. За предѣломъ этого геодезическаго круга, поверхность не продолжается, точки ея дѣлаются мнимыми, идеальными. Всѣ ея точки можно такъ отнести къ плоскости, что соотвѣтствующія точки плоскости будутъ всѣ лежать внутри конечнаго круга, окружность котораго будетъ соотвѣтствовать точкамъ поверхности, лежащимъ на бесконечности, т. е. на выше упомянутой геодезической окружности.

Геодезическимъ линіямъ на поверхности будутъ соотвѣтствовать хорды круга на плоскости.

*Аксиома 8.* Такъ какъ кривизна псевдо-сферы есть величина постоянная, то аксіома совмѣстимости на ней имѣетъ мѣсто и способъ наложенія можетъ быть примѣненъ какъ и на плоскости.

*Аксиома 12.* Геодезическая линія, или линія кратчайшаго разстоянія между двумя точками, *вполнѣ* опредѣляется двумя данными точками безъ всякихъ исключеній, слѣдовательно *вполнѣ* соотвѣтствуетъ опредѣленію прямой на плоскости.

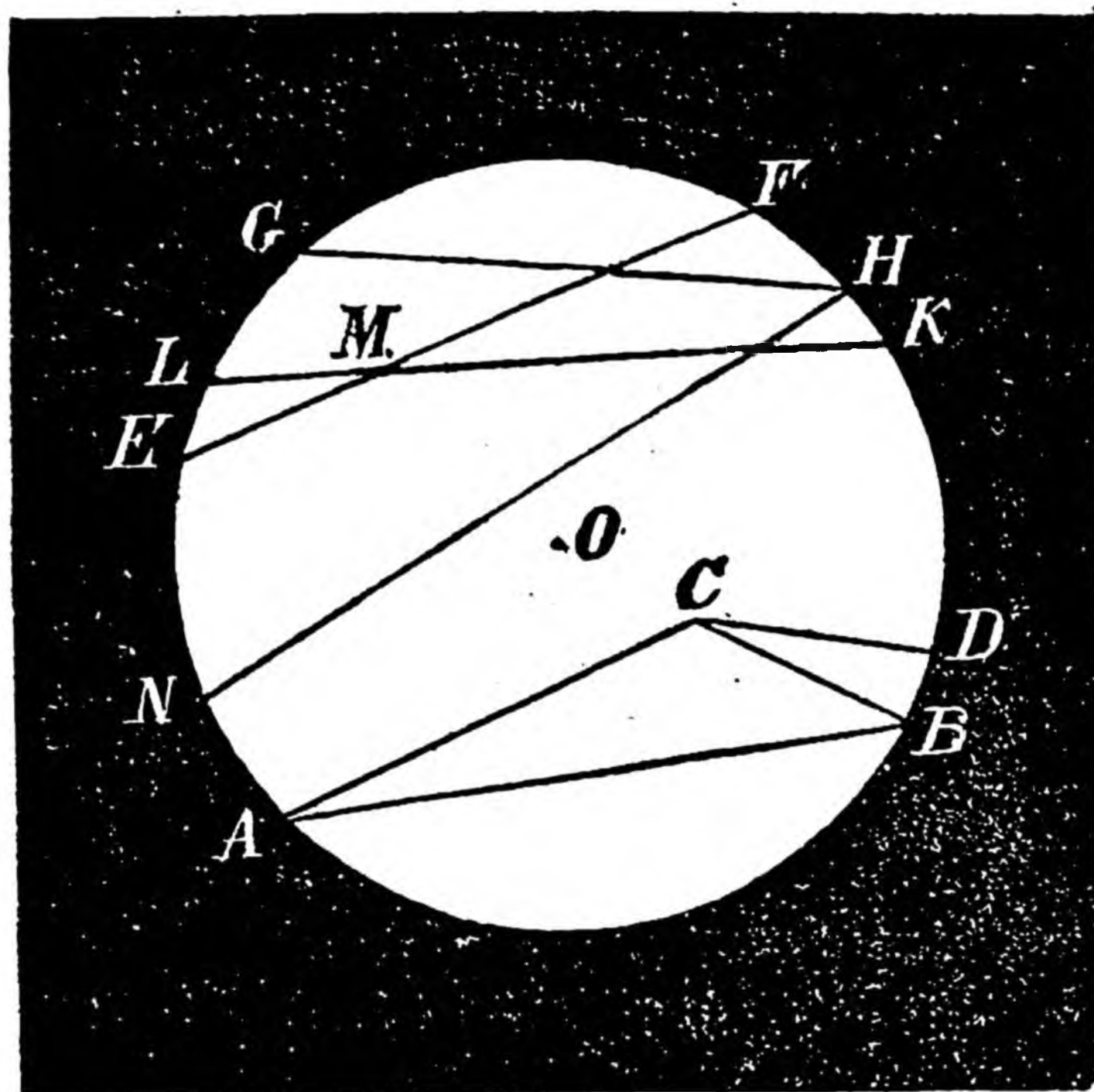
Изъ этого видимъ, что 8-я и 12-я аксіомы принадлежатъ и плоскости и псевдо-сферѣ вмѣстѣ, слѣдовательно первыя двадцать восемь положеній Евклида будутъ общими и плоскости и псевдо-сферѣ.

*Аксиома 11.* Я уже сказалъ, что каждой точкѣ на псевдо-сферѣ соотвѣтствуетъ только *одна* точка круга на плоскости, коего радіусъ есть величина конечная, и что геодезическимъ линіямъ соотвѣтствуютъ хорды



круга. Точкамъ встрѣчи хорды съ окружностью соотвѣтствуютъ бесконечно удаленныя точки геодезической линіи на псевдо-сферѣ.

Фиг. 44.



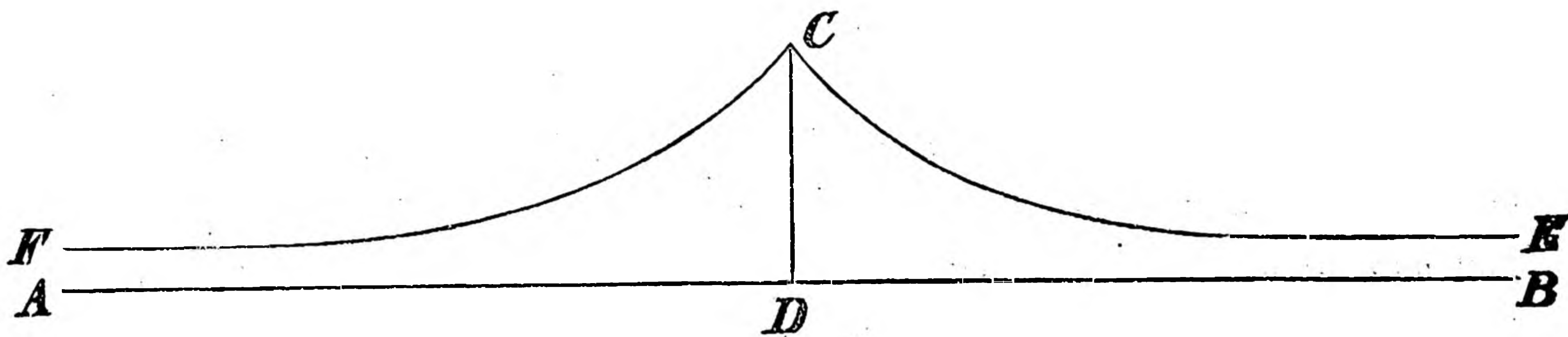
Пусть  $O$  будетъ центръ круга, коего точки соотвѣтствуютъ точкамъ псевдо-сферы (фиг. 44). Окружность  $ABFE$  будетъ соотвѣтствовать точкамъ бесконечно удаленнымъ на псевдо-сферѣ. Хорда, на примѣръ  $AB$ , соотвѣтствуетъ геодезической линіи на псевдо-сферѣ. Точки  $A$  и  $B$  хорды  $AB$  соотвѣтствуютъ бесконечно удаленнымъ точкамъ геодезической линіи. Если двѣ хорды пересѣкаются внутри круга  $ABFE$ , какъ на примѣръ хорды  $LK$  и  $EF$  въ точкѣ  $M$ , то соотвѣтствующія геодезическія линіи пересѣкаются на псевдо-сферѣ въ конечномъ разстояніи. Если двѣ хорды пересѣкаются на окружности, какъ на примѣръ хорды  $GH$  и  $NH$ , то геодезическія линіи пересѣкаются на бесконечности. Если наконецъ двѣ хорды, какъ на примѣръ  $GH$  и  $LK$ , пересѣкаются внѣ круга, то геодезическія линіи, соотвѣтствующія такимъ хордамъ на псевдо-сферѣ, не пересѣкаются.

Возьмемъ на псевдо-сферѣ геодезическую линію  $A_1B_1$  и точку  $C_1$ , лежащую внѣ геодезической линіи. Пусть въ кругѣ  $ABEF$  хорда  $AB$  соотвѣтствуетъ геодезической линіи  $A_1B_1$  на псевдо-сферѣ, а точка  $C$  пусть соотвѣтствуетъ точкѣ  $C_1$ . Если чрезъ точку  $C$  въ кругѣ проведемъ двѣ хорды  $CA$  и  $CB$ , то на псевдо-сферѣ имъ будутъ соотвѣтствовать двѣ геодезическія линіи, проходящія чрезъ данную точку на псевдо-сферѣ и встрѣчающія данную геодезическую линію  $A_1B_1$  на бесконечности. Хордамъ, проходящимъ чрезъ точку  $C$  и лежащимъ внутри угла  $ACB$ , будутъ соотвѣтствовать на псевдо-сферѣ геодезическія линіи, проходящія чрезъ данную точку и встрѣчающія данную геодезическую линію. Хордамъ, проходящимъ чрезъ ту же точку  $C$  и лежащимъ внѣ угла  $ABC$ , будутъ соотвѣтствовать геодезическія линіи, проходящія чрезъ данную точку и не

встрѣчающія данной геодезической линіи. Изъ этого видимъ, что если на псевдо-сферѣ дана геодезическая линія и точка лежащая внѣ геодезической линіи, то всѣ геодезическія линіи, проходящія чрезъ данную точку, дѣлятся на встрѣчающія и невстрѣчающія данную. Двѣ геодезическія линіи, проходящія чрезъ данную точку, встрѣчающія данную на бесконечности отдѣляютъ встрѣчающія отъ невстрѣчающихъ. Если эти послѣднія двѣ линіи назовемъ *параллельными* данной, то мы сейчасъ видимъ, что геометрическая система Лобачевского есть система на псевдо-сферѣ, такъ какъ три аксіомы на псевдо-сферѣ суть аксіомы, положенныя Лобачевскимъ въ основаніе своей системы. Такимъ образомъ, Лобачевскій первый изслѣдовалъ ту поверхность, которую Бельтрами назвалъ псевдо-сферой и которую слѣдовало бы назвать плоскостью Лобачевского.

Далѣе Бельтрами показываетъ, что если  $AB$  будетъ геодезическая линія на псевдо-сферѣ и  $C$  точка внѣ ея,  $CD=r$  перпендикулярная геоде-

Фиг. 45.



зическая линія къ  $AB$ ,  $CE$  и  $CF$  параллельныя  $AB$ , то, назвавъ уголъ  $ECD$  чрезъ  $\Pi(p)$  будетъ:

$$\cotg \frac{1}{2} \Pi(p) = e^{\frac{p}{k}}$$

гдѣ  $k$  радіусъ кривизны псевдо-сферы. Слѣдовательно, постоянное  $k$  системы Лобачевского есть ничто иное, какъ радіусъ кривизны псевдо-сферы.

Бельтрами находитъ, что окружность круга на псевдо-сферѣ, коего радіусъ есть  $r$ , какъ и у Лобачевского, имѣетъ выраженіе:

$$Ок. r = \pi k (e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}})$$

Сумма угловъ въ геодезическомъ треугольникѣ на псевдо-сферѣ меньше двухъ прямыхъ. Площадь его, если  $A, B, C$  суть углы треугольника, будетъ:

$$\Delta = k^2 (\pi - A - B - C).$$



Однимъ словомъ Бельтрами показываетъ полное тождество геометрической системы Лобачевского съ системою на псевдо-сферѣ, которое уже становится яснымъ, какъ только онъ показалъ, что аксіомы Лобачевского и псевдо-сферы тождественны.

Послѣ этого ясно видно почему одиннадцатая аксіома не можетъ быть доказана на основаніи 8-й и 12-й. Аксіомы 8-я и 12-я принадлежатъ и плоскости и псевдо-сферѣ, слѣдовательно, доказать съ помощью 8-й и 12-й одиннадцатую аксіому, это значитъ показать, что свойство, выраженное ею, принадлежитъ и плоскости и псевдо-сферѣ, а эти поверхности только и отличаются смысломъ одиннадцатой аксіомы.

Геометрическихъ системъ съ постоянной отрицательной кривизной есть безчисленное множество, всѣ онѣ отличаются между собою только числовымъ значеніемъ кривизны. Система эта принадлежитъ и всѣмъ поверхностямъ, которыя навиваются на псевдо-сферу.

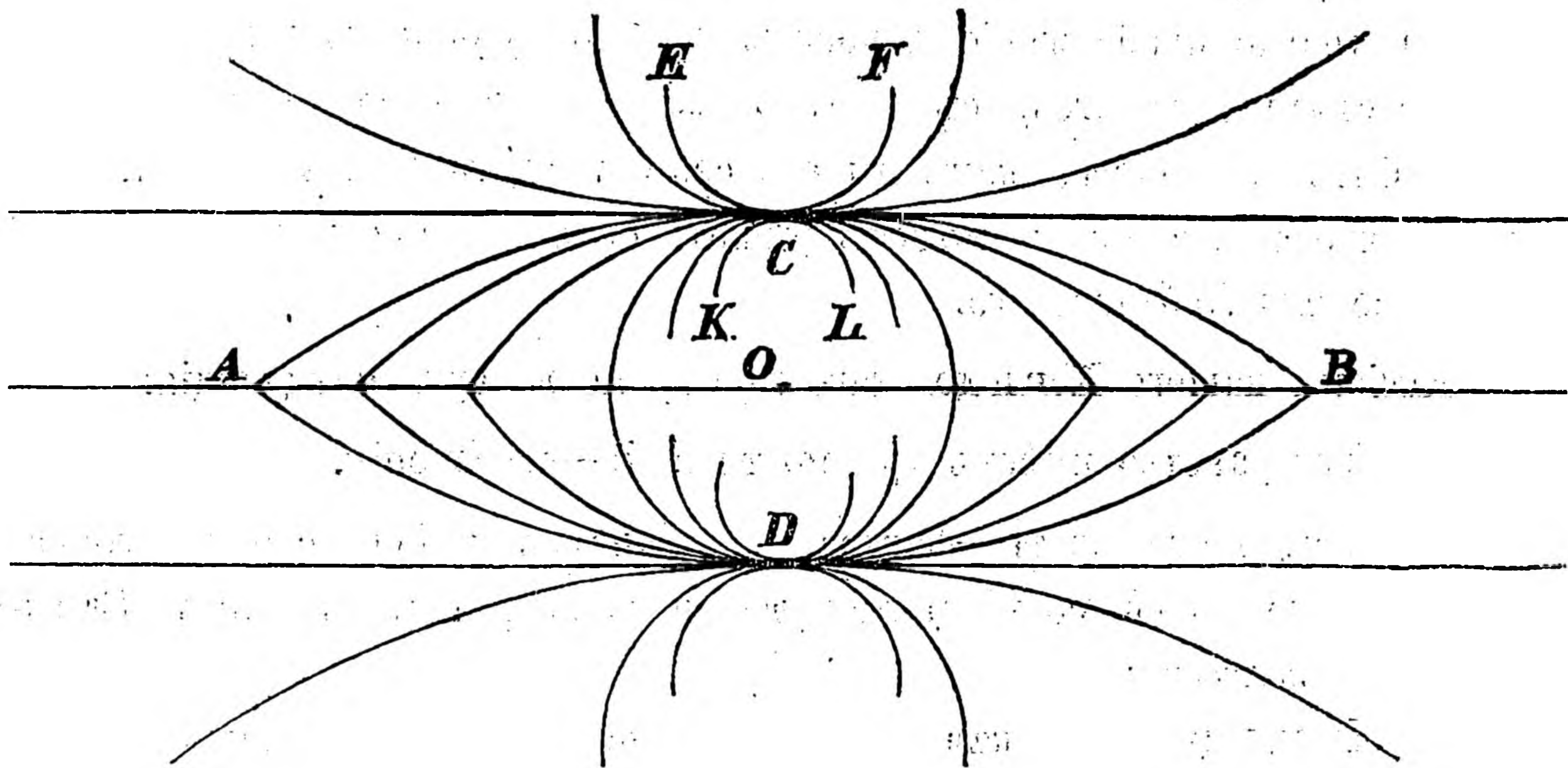
Изъ всего сказаннаго видимъ, что существуетъ три геометрическія системы: система на поверхности съ кривизною *нуль* или плоская геометрія—Евклидовская, система на поверхности съ постоянной *положительной* кривизной, или сферическая геометрія и система на поверхности съ постоянной *отрицательной* кривизной или геометрія псевдо-сферическая—Лобачевского. Плоская геометрія составляетъ переходъ отъ сферической къ псевдо-сферической. Изъ этого также видимъ, что одиннадцатая аксіома тѣсно связана съ кривизною той поверхности на которой строится геометрическая система.

Риманъ весьма наглядно рисуетъ систему поверхностей, имѣющихъ всевозможныя постоянныя кривизны. Для этого сначала построимъ поверхности, которыя можно навить на сферу. Возьмемъ сферу съ извѣстнымъ радіусомъ и на ней двѣ діаметрально противоположныя точки, соединимъ эти точки двумя дугами большихъ круговъ и часть сферы, заключающейся между этими кругами, т. е. сферическую лодку, вырѣжемъ и края остальной части сферы сведемъ, такимъ образомъ, получится веретено-образная поверхность, которая очевидно, навивается на сферу. Чѣмъ вырѣзанная часть сферы будетъ больше, тѣмъ полученная веретено-образная поверхность будетъ тоньше. Мы взяли сферу съ предѣльнымъ радіусомъ, напимѣръ,  $R$ . Теперь будемъ брать сферы, радіусы которыхъ, начиная съ  $R$ , дѣлались бы все больше и больше до  $\infty$ . Изъ такихъ сферъ будемъ вырѣзывать сферическія лодки и сближать края остальныхъ частей сферъ. Лодки должны быть такъ вырѣзаны, чтобы полученные веретено-образныя поверхности заключали внутри



взятую сферу и касались бы ей по большому кругу. Когда мы возьмемъ наконецъ сферу съ радіусомъ равнымъ безконечности, то, очевидно, веретено-образная поверхность обратится въ прямой цилиндръ, радіусъ основанія котораго есть  $R$ . Все это суть поверхности вращенія около оси  $AB$ .

Фиг. 46.



Если еще возьмемъ два полукруга  $KCL$  и  $ECF$ , которые касаются круга  $O$  и коихъ радіусы меньше  $R$ , то они опишутъ около оси  $AB$  поверхности изъ коихъ одна, описанная полукругомъ  $KCL$ , будетъ навиваться на сферу, коей радіусъ равенъ радіусу круга  $KCL$ , а другая  $ECF$  опишетъ часть псевдо-сферы. Вся система такихъ поверхностей вращенія будетъ представлять поверхности со всевозможными постоянными кривизнами, отъ  $-\infty$  до  $+\infty$ . Цилиндрическая поверхность съ кривизною нуль отдѣляетъ поверхности съ положительной кривизной отъ поверхностей съ кривизной отрицательной. На каждой изъ поверхностей можетъ быть построена геометрическая система, которая и будетъ одной изъ трехъ выше упомянутыхъ.

Каждая изъ всевозможныхъ поверхностей съ постоянной кривизной можетъ быть навита на одну изъ предыдущей системы поверхностей.

Мы уже видѣли, что Евклидовская система есть частный случай системы Лобачевского, и что Лобачевскій пытался провѣрить это, построениемъ такихъ треугольниковъ, которыхъ бы стороны были не меньше земной орбиты. Онъ вычислилъ сумму угловъ въ такихъ треугольникахъ и нашелъ, что она меньше двухъ прямыхъ на 0,003 секунды. Такая незначительная разница можетъ происходить отъ погрѣшностей при наблюденіяхъ, но если обратимъ вниманіе на то, что, дѣлая подобныя повѣрки, всегда находятъ

сумму угловъ въ треугольникахъ меньше двухъ прямыхъ, то можно, съ нѣкоторою вѣроятностію, предположить, что если бы стороны построенныхъ треугольниковъ были еще значительнѣе, на примѣръ, были бы равны, по крайнѣй мѣрѣ, разстоянію Сиріуса отъ земли, то могло случиться, что найденная сумма угловъ въ такихъ треугольникахъ отличалась бы отъ двухъ прямыхъ на количество болѣе значительное. Изъ этого мы заключили бы, что наше пространство имѣетъ законы отличные отъ Евклидовскихъ, которые суть только приближеніе законовъ псевдо-сферическаго пространства. Какъ не странно кажется, съ перваго взгляда, что наше пространство можетъ быть не такимъ, какъ мы его себѣ представляемъ, но мы выше видѣли, что только опытъ можетъ рѣшить есть-ли наше пространство Евклидовское или Лобачевского.

Аксиомы нашего Евклидовскаго пространства суть слѣдующія:

- 1) Пространство имѣетъ три протяженія—измѣренія.
- 2) Каждая его часть—фигура, совмѣщаясь всѣми своими точками въ одномъ его мѣстѣ, совмѣщается, точно также, и въ другомъ. Это аксіома *совмѣстимости*.
- 3) Между двумя точками въ пространствѣ можно провести только *одну* прямую линію.
- 4) Сумма угловъ въ прямолинейномъ треугольникѣ въ пространствѣ равна двумъ прямымъ угламъ.

Пространство, опредѣляемое этими аксіомами, мы будемъ называть *плоскимъ* или Евклидовскимъ.

Изъ этихъ основныхъ аксіомъ Евклидовскаго пространства вытекаютъ слѣдующія свойства его:

а) Евклидовское пространство бесконечно и безгранично. Въ немъ можно построить безчисленное множество пространствъ двухъ протяженій—поверхностей, отдѣляющихъ одну часть пространства отъ другой. Онѣ дѣлятся на конечныя, но безграничныя—это поверхности съ положительной кривизной, на безграничныя и бесконечныя—съ кривизною нуль и на бесконечныя, но ограниченныя—это поверхности съ отрицательной кривизной. Типы ихъ: сфера, плоскость и псевдо-сфера.

б) Чрезъ три точки въ пространствѣ, не лежащія на одной прямой линіи, можно провести только *одну* плоскость.

в) Если двѣ точки прямой, лежащей въ одной плоскости, совпадаютъ съ двумя точками прямой лежащей въ другой плоскости, то обѣ прямыя совпадаютъ всѣми своими точками.

г) Уголъ, образуемый перпендикулярами, возставленными изъ какой нибудь точки пересѣченія двухъ плоскостей къ этому пересѣченію въ



плоскостяхъ, есть величина постоянная—имъ измѣняется наклоненіе двухъ плоскостей.

На этихъ свойствахъ пространства построена Евклидовская стереометрія.

Если мы оставимъ первыя три аксіомы Евклидоваго пространства безъ измѣненія, а измѣнимъ четвертую, сказавъ что сумма угловъ въ прямолинейномъ треугольникѣ меньше двухъ прямыхъ, то мы получимъ пространство, которое уже изслѣдовалъ Лобачевскій, а въ 1868 году Бельтрами, въ мемуарѣ *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante*. Бельтрами называлъ такое пространство *псевдо-сферическимъ*, но лучше бы было его назвать пространствомъ Лобачевского.

Вотъ результаты данные Бельтрами:

а) Въ псевдо-сферическомъ пространствѣ тремя точками вполне определяется псевдо-сфера, или плоскость Лобачевского.

б) Если двѣ точки геодезической линіи, лежащей на одной псевдо-сферѣ, совпадаютъ съ двумя точками геодезической линіи, лежащей на другой псевдо-сферѣ, то обѣ геодезическія линіи совпадаютъ всѣми своими точками.

с) Если двѣ псевдо-сферическія поверхности или плоскости Лобачевского пересѣкаются, то уголъ наклоненія есть величина постоянная.

Изъ этого видимъ, что псевдо-сфера въ псевдо-сферическомъ пространствѣ тоже, что плоскость въ Евклидовскомъ.

Поверхностямъ сферическимъ въ пространствѣ Евклидовскомъ соотвѣтствуютъ, въ пространствѣ псевдо-сферическомъ, поверхности, которыя пересѣкаютъ всѣ геодезическіе радіусы, исходящіе изъ одной точки, подѣляя ихъ прямымъ угломъ—это суть геодезическія сферы. Здѣсь также случается, что чрезъ три данныя точки, а тѣмъ болѣе чрезъ четыре, нельзя провести геодезической сферы, имѣющей свой центръ въ данной точкѣ. Геодезическая сфера, коей центръ находится на бесконечности, есть ничто иное какъ *предѣльная поверхность* Лобачевского. Эта поверхность въ псевдо-сферическомъ пространствѣ имѣетъ кривизну нуль и на ней имѣетъ мѣсто геометрическая система Евклида.

Изъ этихъ результатовъ данныхъ Бельтрами видимъ, что геометріи Лобачевского соотвѣтствуетъ геометрія въ псевдо-сферическомъ пространствѣ на псевдо-сферѣ, съ тою только разницею, что плоская геометрія Лобачевского можетъ быть конкретно представлена на *дѣйствительной* поверхности въ пространствѣ Евклида, а для геометріи трехъ измѣреній въ псевдо-сферическомъ пространствѣ нѣтъ конкретного представленія, такъ какъ это пространство отлично отъ нашего и конкретного о немъ представленія мы имѣть не можемъ; эти два пространства



сходны между собою, но только тогда когда радиусъ кривизны есть величина бесконечно-большая, т. е. когда кривизна мало отличается отъ нуля. Следовательно только опытъ можетъ рѣшить этотъ вопросъ.

Я сказалъ выше: *когда кривизна пространства есть нуль*. Чтобы пояснить это выраженіе, вспомнимъ, что площадь треугольника на псевдо-сферѣ имѣетъ выраженіе:

$$R^2(\pi - A - B - C)$$

гдѣ  $R$  есть радиусъ кривизны псевдо-сферы. Если площади всѣхъ треугольниковъ, построенныхъ въ псевдо-сферическомъ пространствѣ, будутъ имѣть предъидущее выраженіе, то  $\frac{1}{R^2}$  называется *кривизною пространства*. Следовательно кривизна Евклидоваго пространства есть нуль, поэтому его называютъ *плоскимъ*.

Гельмгольцъ наглядно изображаетъ какимъ образомъ мы можемъ представить возможность пространства, отличнаго отъ нашего. Для этого онъ воображаетъ существа двухъ измѣреній, живущія на какой нибудь поверхности. Поверхность эта будетъ для такихъ существъ пространствомъ, въ которомъ они живутъ и движутся. Если эти существа разумныя и занимаются геометріей, то они найдутъ, что ихъ пространство двухъ протяженій, о томъ же, что существуетъ внѣ этой поверхности, они не будутъ имѣть никакого понятія; для нихъ выйти изъ поверхности невозможно, какъ и намъ изъ нашего пространства. Если эта поверхность—ихъ пространство—есть плоскость, то ихъ геометрія будетъ Евклидовская. Положимъ теперь, что наши существа живутъ на прямомъ цилиндрѣ, котораго радиусъ основанія весьма большой. Существо, двигаясь по генератрисѣ, по директрисѣ и по гелису, параллельно самому себѣ, очевидно не измѣнитъ своей формы, но если оно будетъ обращаться около одной изъ своихъ точекъ, то изгибъ его фигуры будетъ измѣняться, хотя разстояніе между точками фигуры не измѣнится. Такъ какъ все вмѣстѣ съ существомъ измѣняется въ такомъ же смыслѣ, то существо этого и не замѣтитъ. Всѣ расходящіяся направленія, по которымъ существо можетъ двигаться, будутъ ему казаться тождественными. Всѣ линіи кратчайшихъ разстояній будутъ ему казаться одинаковыми, какъ намъ представляется прямая. Если при этомъ, существо можетъ изучить только небольшую часть своей поверхности, то его геометрія будетъ наша плоская—Евклидовская. Положимъ, теперь, что существо двигаясь по директрисѣ—по окружности основанія—возвратилось въ точку исхода и затѣмъ, изслѣдуя свое пространство во всѣхъ направленіяхъ, было въ состояніи построить геометрію

цилиндрическую такую, какая она есть для насъ. Очевидно, что эта послѣдняя геометрія будетъ для него дѣйствительною, а прежняя Евклидовская будетъ только субъективно возможная—идеальная. Существо найдетъ радиусъ основанія своего пространства и построитъ всѣ геометрическія системы на цилиндрахъ, коихъ радиусы будутъ имѣть всевозможныя величины отъ 0 до  $\infty$ ; построить наконецъ систему сферическую и псевдо-сферическую. Всѣ эти системы будутъ для него идеальными, существующими субъективно, выраженными извѣстными аналитическими комбинаціями.

Въ такомъ положеніи находимся мы въ нашемъ пространствѣ. Субъективно-аналитически мы можемъ построить безчисленное множество другихъ пространствъ, между которыми пространство съ постоянной положительной кривизной или сферическое и пространство съ постоянной отрицательной кривизной или псевдо-сферическое суть самыя простыя.

Сферическое пространство можетъ быть построено по слѣдующимъ законамъ:

- 1) Оно трехъ протяженій.
- 2) Совмѣстимость въ немъ имѣетъ мѣсто.
- 3) Прямая всегда возвращается въ точку своего исхода.
- 4) Сумма угловъ въ геодезическомъ треугольникѣ всегда больше двухъ прямыхъ.

Пространство плоское Евклидовское бесконечно и безгранично.

Пространство сферическое конечно, но безгранично.

Пространство псевдо-сферическое—Лобачевского бесконечно, но ограничено.

Если бы мы аналитически построили пространство четырехъ измѣреній—протяженій, обобщеніемъ нашего пространства плоскаго, то всѣ пространства трехъ измѣреній относились бы къ нему такъ, какъ всѣ поверхности—пространства двухъ измѣреній,—относятся къ нашему плоскому пространству.

#### Лобачевскій.

Николай Ивановичъ Лобачевскій родился въ Нижнемъ-Новгородѣ въ 1793 году, воспитывался въ Казанской гимназіи и въ 1807 году поступилъ въ Казанскій университетъ въ число студентовъ математическаго факультета. Будучи студентомъ, онъ пользовался особеннымъ расположеніемъ профессора Бартельса, который замѣтилъ въ немъ необыкновенное дарованіе къ математикѣ. Въ 1811 году онъ былъ утвержденъ магистромъ математическихъ наукъ и началъ свою преподавательскую дѣятельность въ университетѣ изложеніемъ Небесной Механики Лапласа и *Disquisitiones arithmeticae* Гаусса. Въ 1816 году онъ занялъ кафедру чистой математики и съ этого времени начинаются ученые труды Лобачевского. Онъ былъ 6 разъ сряду избираемъ ректоромъ университета, пробылъ въ этой должности 19 лѣтъ. Со-



стоялъ членомъ Геттингенскаго, Копенгагенскаго и другихъ ученыхъ обществъ и почетнымъ членомъ университетовъ Московскаго и Казанскаго. Дѣятельность его была по истинѣ удивительная: онъ присутствовалъ на всѣхъ засѣданіяхъ, которыхъ въ то время было очень много, читалъ лекціи за профессоровъ, посылаемыхъ за границу, присутствовалъ на всѣхъ экзаменахъ и былъ не строгъ, но иногда своенравенъ, требовалъ отвѣтовъ не бойкихъ, но показывающихъ развитіе. Самыя глубокомысленныя и замѣчательныя сочиненія, которыя ставятъ Лобачевскаго на ряду съ самыми геніальными математиками всѣхъ временъ, суть слѣдующія:

1) О началахъ геометріи. Рядъ статей, въ Казанскомъ Вѣстникѣ за 1829—1830 г.

2) *Géométrie imaginaire*. *Crell's, Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Band 17.

3) Воображаемая геометрія. Ученныя Записки Казанскаго университета 1835 г.

4) Новыя начала геометріи съ полной теоріей параллельныхъ. Учен. Записки Казанск. универс. 1835, 1836, 1837 и 1838.

5) Примѣненіе воображаемой геометріи къ нѣкоторымъ интеграламъ. Учен. Зап. Казан. унив. 1836.

6) *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*. Berlin 1840.

7) *Rangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles*, въ Сборникѣ, изданномъ въ 1856 году, по случаю 50-лѣтняго юбилея Казанскаго университета.

Прежде нежели это послѣднее сочиненіе было издано, авторъ лишился зрѣнія и вскорѣ умеръ, въ 1856 году.

Всѣ вышеуказанныя сочиненія были направлены къ тому, чтобы пополнить пробѣлъ Евклидовой геометрической системы. Для пополненія этого пробѣла онъ предпринялъ построеніе системы, независимой отъ одиннадцатой аксіомы. Предшественниковъ въ этомъ направленіи онъ не имѣлъ, онъ былъ полный творецъ своей системы, которая оставалась въ забвеніи цѣлыхъ сорокъ лѣтъ, и только разъ, мелькомъ, въ продолженіи этого времени, указалъ на нее Гауссъ. Но когда Риманъ, Бельтрами и Гельмгольцъ указали на важное значеніе этой системы, не только въ математикѣ, но и въ философіи, когда Бельтрами специально занялся изслѣдованіями для конкретнаго уясненія системы Лобачевскаго, тогда его сочиненія были переведены на нѣмецкій, французскій и итальянскій языки и ими Лобачевскаго сдѣлалось, въ настоящее время, европейскимъ. Важность системы Лобачевскаго я выражу слѣдующими словами: кто глубоко не изучилъ геометрической системы Лобачевскаго, тотъ не можетъ составить полнаго понятія о смыслѣ и значеніи геометрическихъ аксіомъ.



### Евклидъ.

Тѣ незначительныя свѣдѣнія, которыя мы имѣемъ о развитіи началъ геометріи у Грековъ, переданы намъ Прокломъ, Боеціемъ, Симплиціемъ, Теономъ изъ Смирны и другими. Свѣдѣнія эти суть выдержки изъ двухъ утерянныхъ сочиненій Теофраста и Евдема, учениковъ Аристотеля, изъ которыхъ первый написалъ исторію геометріи и ариѳметики, а второй исторію геометріи и астрономіи. Изъ этихъ немногихъ отрывковъ мы узнаемъ, что уже до Евклида начала геометріи были собраны и приведены въ порядокъ: Анаксимандромъ, написавшимъ „введеніе въ геометрію“, Гераклитомъ изъ Понта, написавшимъ „О началахъ геометріи“, Гипократомъ изъ Хіоса, Леономъ ученикомъ Неоклида, Ксенократомъ и Тевдіусомъ изъ Магнезіи. Сочиненіе этого послѣдняго считалось лучшимъ. Всѣ эти сочиненія утеряны, но избѣжало этой участи только сочиненіе Евклида „Начала“, что заставляетъ предполагать, что оно считалось самымъ лучшимъ и имѣло много списковъ.

Въ настоящее время можно положительно утверждать, что начала геометріи въ томъ видѣ, въ какомъ ихъ изложилъ Евклидъ, принадлежатъ исключительно эллинскому гению. Въ самомъ дѣлѣ, если Греки могли почерпнуть гдѣ либо геометрическія свѣдѣнія, то только у Египтянъ и Индусовъ; но какія свѣдѣнія имѣлъ тотъ народъ, котораго жрецы (каста ученая) и царь удивлялись Өалесу, измѣрившему высоту пирамиды по ея тѣни! Что же касается Индусовъ, то изслѣдованія настоящаго времени показали, что у нихъ не было ничего похожаго на геометрическую систему. О томъ значеніи и смыслѣ аксіомъ, какія послѣднія имѣли у грековъ, Индусы не имѣли никакого понятія, свойства фигуръ—теоремы доказываются у нихъ часто изъ симметріи фигуры, а равенство линій и угловъ просто изъ чертежа и тому подобное. Этимъ я не хочу сказать, что Египтяне и Индусы не имѣли геометрическихъ свѣдѣній, напротивъ, ихъ свѣдѣнія были далеко не элементарныя; я только хочу сказать, что они не имѣли системы; выстроить пирамиды, храмы, перенести громадныя массы гранита изъ одного мѣста въ другое, дать ему извѣстную форму, требовало вовсе

не элементарныхъ свѣдѣній. Точно тоже можно сказать и объ Индусахъ, изъ сочиненій Брагмагупта и Бгаскара мы узнаемъ, что они умѣли опредѣлить площадь треугольника по тремъ даннымъ его сторонамъ и найти радіусъ вписаннаго въ него круга и много другихъ предложеній относительно треугольника и четырехугольника; но не знали чему равна сумма угловъ въ треугольникѣ, знали еще отношеніе діаметра къ окружности и другія свойства фигуръ, но эти сочиненія не представляютъ собою Началъ геометріи или свода основныхъ предложеній. Слѣдовательно греки дали ту строго-логическую форму началамъ геометріи, въ которой ихъ передалъ Евклидъ.

Жизнь Евклида мало извѣстна, мы знаемъ только, что онъ жилъ въ Александріи, куда переселился изъ Греціи при первыхъ Птоломеяхъ, около 280 года до Р. Х. Его считаютъ основателемъ александрійской математической школы. Онъ написалъ нѣсколько весьма замѣчательныхъ математическихъ сочиненій, но всеобщую извѣстность прибрѣлъ своими *Началами* *Στοιχεῖα*, сочиненіе, которое и въ настоящее время, послѣ всѣхъ новѣйшихъ изслѣдованій, представляетъ образецъ ясности, логической послѣдовательности въ порядкѣ теоремъ и строгости ихъ доказательствъ.

Проклъ, одинъ изъ комментаторовъ Евклида, жившій въ V вѣкѣ по Р. Х., говоритъ, что Евклидъ собралъ начала геометріи, привелъ въ порядокъ и строго доказалъ то, что до него было слабо доказано. Начала геометріи состоятъ изъ 13-ти книгъ, изъ коихъ шесть содержатъ плоскую геометрію, 7, 8 и 9 содержатъ ариметику, 10-я занимается несоизмѣримыми величинами и приложеніемъ ихъ къ геометріи. Книги 11, 12 и 13 содержатъ стереометрію. Къ тринадцати книгамъ присоединяютъ еще двѣ о правильныхъ тѣлахъ, но ихъ приписываютъ геометру Гипсиклу.

Кромѣ Прокла Евклидъ имѣлъ многихъ комментаторовъ, изъ коихъ самыя древнія, о которыхъ упоминается, были: Геронъ, Паппусъ, Еней изъ Гіераполиса, Теонъ младшій александрійскій. Теонъ не только комментировалъ Евклида, но и далъ новое изданіе Началъ съ прибавленіями и измѣненіями.

Боецій въ V вѣкѣ по Р. Х., въ своемъ трактатѣ геометріи, далъ только теоремы и фигуры первыхъ четырехъ книгъ Евклида, утверждая при этомъ, что Евклидъ только привелъ въ порядокъ предложенія, найденныя и доказанныя другими, а что настоящій творецъ есть Теонъ. Есть даже списки, въ которыхъ говорится, что все сочиненіе почерпнуто изъ бесѣдъ Теона (*ἐκ τῶν Θεωνος συνομιῶν*). Симсонъ, большой знатокъ древней математической литературы, издавшій Евклида на англійскомъ языкѣ въ 1781 году, говоритъ: „сравнивая опредѣленія и доказательства теоремъ различныхъ списковъ греческихъ изданій, какія мы имѣемъ, я нахожу, что



Теонъ или кто-бы ни былъ издателемъ греческаго текста, прибавляя, выбрасывая и смѣшивая свои доказательства съ Евклидовскими, все это сдѣлалъ къ худшему“. Боецій былъ единственный писатель по геометріи, извѣстный въ Европѣ до IX вѣка нашей эры, а Евклида даже имя не было извѣстно.

Въ концѣ VIII и началѣ IX вѣка при калифахъ Аль-Мансурѣ и Гарунѣ-аль-Рашидѣ начали переводить греческія сочиненія на арабскій языкъ, но переводили сначала на сирійскій языкъ, а съ этого послѣдняго на арабскій. Переводы эти были сдѣланы сирійскими медиками, находившимися при дворѣ калифовъ и знавшими греческій языкъ. Въ числѣ переведенныхъ сочиненій было и твореніе Евклида „Начала“. Самый знаменитый переводчикъ его былъ Гонецъ-бенъ-Исакъ и сынъ его Исакъ-бенъ-Гонецъ, но такъ какъ отецъ и сынъ не знали математики, то ихъ переводъ требовалъ исправленія, которое и было сдѣлано Тебетъ-бенъ-Корра между 892 и 902 годами. Отманъ изъ Дамаска, неизвѣстно когда жившій, но позже XIII вѣка, далъ переводъ полнѣе предыдущихъ, по списку, который онъ нашелъ въ Римѣ и въ которомъ было 40-а предложеніями больше, чѣмъ въ обыкновенныхъ спискахъ. Астрономъ и геометръ Нассиръ-Еддинъ, жившій около 1260 года, перевелъ Евклида на персидскій языкъ; къ этому же времени относятся комментаріи Евклида, сдѣланные арабскимъ математикомъ Маймонѣ-Рашидомъ. Комментаріи Нассиръ-Еддина были напечатаны на арабскомъ языкѣ въ Римѣ въ 1594 году\*). Ганкель говоритъ, что у Арабовъ было до 50-ти переводовъ и передѣлокъ Евклида, въ особенности они много занимались 10-й книгою объ несоизмѣримыхъ величинахъ, которая и въ настоящее время представляетъ образецъ въ своемъ родѣ. Арабы также занимались много значеніемъ аксіомъ, опредѣленіями и порядкомъ теоремъ, и въ этомъ отношеніи они не уступаютъ Европейцамъ, такъ напримѣръ доказательство 11-й аксіомы Нассиръ-Еддина не хуже тѣхъ, о которыхъ мы упомянули въ началѣ введенія. Евклидъ былъ въ первый разъ переведенъ въ 1130 году на латинскій языкъ Ателяромъ (Athelard de Bath) съ арабскаго списка, найденнаго имъ въ Испаніи. Этотъ переводъ былъ напечатанъ, въ первый разъ, въ 1482 году въ Венеціи Эргардомъ Ратгольтомъ (Erhard Rathold) съ комментаріями Кампануса (Campanus). Французскій математикъ Шаль (Chasles) полагаетъ, что арабскіе списки Евклида были привезены изъ Испаніи Кампанусомъ, въ числѣ другихъ математическихъ сочиненій, и переведены имъ.

Съ этихъ поръ Евклидъ быстро распространился въ Европѣ и до семнадцатаго вѣка оставался исключительнымъ руководствомъ. Считали

---

\*) Нѣкоторые говорятъ, что это изданіе было напечатано въ 1598 г. во Флоренціи.



святотатствомъ измѣнять порядокъ теоремъ, данный Евклидомъ. Паскаль говоритъ, что если бы геометрія была снова изобрѣтена, то *Начала* были бы даны въ томъ порядкѣ, какой имъ далъ Евклидъ; это и понятно, такъ какъ, безъ сомнѣнія, въ философскихъ школахъ Греціи, каждая теорема была разсмотрѣна во всѣхъ отношеніяхъ.

Первое изданіе *Началъ*, напечатанное въ Венеціи, не имѣетъ заглавія, а начинается словами: *Preclearissimus Liber Elementorum Euclidis, perspicacissimi in artem geometrie incipit quam felicissime.*

Второе изданіе *Началъ*, перепечатано съ перваго. Оно напечатано въ Виченцѣ въ 1491 г.

Третье изданіе было издано Замберти (Zamberti) подъ заглавіемъ: *Euclidis Megariensis, philosophi Platonici, mathematicarum disciplinarum janitoris, Opera, Zamberto Veneto, interprete.* Въ концѣ тома напечатано: *Impressum Venetiis.... in edibus Ioannis Tamini, M. D. V. VIII kalendas novembris.* Замберти въ предисловіи говоритъ, что онъ перевелъ съ греческаго оригинала.

Четвертое изданіе было издано Лукою Пачіолусомъ (Lucas Pacioli), который болѣе извѣстенъ подъ именемъ Lucas di Borgo, въ Венеціи въ 1509 г. Заглавіе этого изданія слѣдующее: *Euclidis Megarensis, philosophi acutissimi, mathematicorum omnium sine controversia principis Opera.*

До шестнадцатаго вѣка смѣшивали Евклида съ Евклидомъ Мегарскимъ, философомъ, который жилъ вѣкомъ раньше перваго.

Пятое изданіе, вольный переводъ *Началъ*, былъ подготовленъ Яковомъ Лефевромъ изъ Этапля (Jacques Lefèvre d'Étaples) и напечатанъ въ Парижѣ въ 1516 г. Генрихомъ Етьеномъ (Henri Estienne).

Итакъ видимъ, что въ продолженіи тридцати пяти лѣтъ было пять изданій Евклида, всѣ in fol., на латинскомъ языкѣ.

Греческій текстъ Евклида съ комментаріями Прокла въ первый разъ былъ изданъ Симономъ Гриномъ (Grune) въ Базелѣ въ 1533 году.

Греческое и латинское изданіе, приписываемое знаменитому математику Бриггу, напечатанное въ Лондонѣ Вильямомъ Джономъ въ 1620 г., содержитъ только первыя шесть книгъ, хотя въ заглавіи сказано, что изданы всѣ 13 книгъ.

Въ 1608 г. *Начала* Евклида были переведены на китайскій языкъ іезуитомъ Маттео Риччи (Matteo Ricci), который въ предисловіи къ своему переводу упоминаетъ о переводахъ сдѣланныхъ на китайскій языкъ до него. Эти переводы можно отнести къ тому времени, когда въ 1368 году импе-

раторъ велѣлъ перевести всѣ арабскіе манускрипты, находившіеся въ его библіотекѣ, на китайскій языкъ, а это показываетъ, что въ то время въ Китаѣ высоко цѣнилась арабская ученость. Послѣ того Начала были переведены еще нѣсколько разъ. Послѣдній переводъ сдѣланъ въ 1857 г. Вили (Wylie) и напечатанъ въ Шанхаѣ.

Изъ тѣхъ свѣдѣній, которыя мнѣ удалось собрать, видно, что въ XVI вѣкѣ было напечатано 80 изданій Евклида, въ XVII—59, въ XVIII—50 и въ XIX-мъ—115, на всѣхъ европейскихъ языкахъ. Въ концѣ книги поименована большая часть изданій съ 1482 года до настоящаго времени, съ указаніемъ гдѣ и кѣмъ издано. Всего съ 1837 по 1874 г. въ одной Англіи было 63 изданія Евклида.

Полное собраніе сочиненій Евклида на греческомъ языкѣ было издано въ Оксфордѣ въ 1703 году Давидомъ Грегори подъ заглавіемъ: *Εὐκλείδου τὰ σὺγγράμματα*. Другаго изданія въ этомъ родѣ не существуетъ. Евклидъ, какъ я замѣтилъ выше, до XVIII столѣтія былъ единственнымъ руководствомъ начальной геометріи въ Европѣ. Съ XVIII столѣтія начали появляться сочиненія оригинальныя или передѣлки Евклида, въ особенности во Франціи и въ Германіи, а въ Англіи *Начала* Евклида и понынѣ остаются единственнымъ руководствомъ въ школахъ. Отъ этого школа выигрываетъ то, что для нея есть самое важное, именно: однообразіе преподаванія и одну систему. Этимъ, если можно такъ выразиться, влагаютъ одну математическую душу всѣмъ, изучающимъ математику. Евклидъ дѣлается математическимъ Евангеліемъ, на текстъ котораго можно всегда сослаться. Лагранжъ часто говорилъ: „тотъ, кто не изучилъ геометріи по Евклиду, похожъ на человѣка, желающаго изучить древніе языки не по древнимъ оригиналамъ, а по сочиненіямъ, написаннымъ въ настоящее время на этихъ языкахъ“.

На русскомъ языкѣ были слѣдующія изданія Евклида:

1. Евклидовы Елементы Геометріи, сокращенныя проф. Фарварсономъ, пер. съ латин. И. Сатаровъ. 1739 г. Спб. \*)

---

\*) Андрей Фарварсонъ (Farwharson), профессоръ абердинскаго университета, былъ приглашенъ въ Россію Петромъ Вел., когда онъ былъ въ Англіи въ 1698 г. По прибытіи въ Россію, онъ составилъ уставъ для морскаго училища, въ которомъ былъ первымъ преподавателемъ. Съ открытіемъ въ Петербургѣ морской академіи, ему было поручено выбирать для нея учениковъ, а потомъ онъ былъ и самъ переведенъ туда. Даже въ официальныхъ бумагахъ о немъ сохранилось извѣстіе, что съ помощью его „первое обученіе математики въ Россіи введено“. По словамъ же Перри, онъ ввелъ у насъ и арабскія цифры, которыя въ первый разъ примѣнены были въ „Журналѣ объ осадѣ Нотебурга“, изданномъ въ концѣ 1702 г. Въ 1703 г. при участіи Фарварсона, изданы были, „Таблицы логарифмовъ“, а въ 1722 г. „Таблицы горизонтальныя сѣверныя и южныя широты“. Въ 1730-хъ гг.



2. Евклидовы Элементы Геометріи, перев. съ франц. Н. Кургановъ 1769 г. Спб.

3. Евклидовы Стихіи. Перев. съ греч. П. Суворовъ и В. Никитинъ 1789 г. Спб.

4. Евклидовыхъ Началь 8 книгъ. Пер. съ греч. Θ. Петрушевскій 1819 г. Спб.

Самыя лучшія изданія Началь съ комментаріями считаются: Дасиподіуса (1564), Коммандина (1572), Клавіуса (1574), Баррова (1659), Грегори (1703), Кейля (1708), Лоренца (1781), Симсона (1781), Камерера и Гаубера (1824), Августа (1826), Валькера (1827) и Тоттентера (1864). Въ настоящемъ столѣтіи лучшимъ переводомъ Началь считается переводъ сдѣланный Пейраромъ въ 1814 году по списку IX вѣка, находившемуся въ Парижской Національной Библіотекѣ, а нынѣ въ Ватиканской Библіотекѣ.

Настоящее изданіе, съ пояснительнымъ введеніемъ и разъясненіями относительно значенія и мѣста каждой теоремы, убѣдитъ, я надѣюсь, cadaго преподавателя, что единственнымъ руководствомъ, къ преподаванію элементарной геометріи, долженъ быть Евклидъ, съ тѣми незначительными измѣненіями, которыя указаны въ приложенной въ концѣ программѣ.

---

напечатано его сочиненіе „Тригонометрія плоская и сферическая“; кромѣ того ему принадлежатъ: алгебра, трактатъ о новой инвенціи, для отвращенія вліянія качки при observaціяхъ, о которыхъ сохранились только извѣстія. Сочиненія его служили руководствами въ тогдашнихъ русскихъ школахъ. При Петрѣ Вел. Фарварсону поручены были и астрономическія наблюденія, о которыхъ онъ обязанъ былъ сообщать царю, гдѣ бы тотъ ни былъ, и которыя тогда же печатались. Изданіе Евклида озаглавлено такъ: „Эвклидовы элементы изъ двѣнадцати ньютоновыхъ книгъ выбранныя, и въ осемь книгъ чрезъ профессора математики Андрея Фарварсона сокращенныя“, которые переводилъ съ латин. хирургусъ Сатаровъ въ 1719 г. См. Певарскій, Литер. и наука при Петрѣ Вел. т. I, 122, 123, 269—272, 281; т. II, 458. Біогр. Фарварсона въ Морск. Сборн. 1856 г. № 14 и 1866 № 5.



# НАЧАЛА ЕВКЛИДА.

## КНИГА I.

Опредѣленія (ὅροι, definitiones).

1. Точка есть то, что не имѣетъ частей.

2. Линія есть длина безъ ширины.

3. Концы линіи суть точки.

*Примѣч. 1.* Эти опредѣленія суть отвлеченія понятій, полученныхъ опытомъ.

4. Прямая линія есть та, которая одинаково лежитъ относительно всѣхъ своихъ точекъ (Εὐθεΐα γραμμή ἐστίν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται).

*Примѣч. 2.* Этимъ опредѣленіемъ, очевидно, Евклидъ желаетъ описать форму прямой въ нашемъ пространствѣ, данную опытомъ. Геометрическаго значенія это опредѣленіе не имѣетъ. Этому опредѣленію удовлетворяетъ и кругъ.

5. Поверхность (ἐμβαδόν, ἐπιφάνεια) есть то, что имѣетъ только длину и ширину.

6. Концы поверхности суть линіи.

*Примѣч. 3.* Тоже можно сказать, что сказали о 1, 2 и 3.

7. Плоская поверхность (ἐπίπεδος) есть та, которая одинаково расположена относительно всѣхъ прямыхъ линій на ней лежащихъ.

*Примѣч. 4.* Это опредѣленіе можно отнести и къ сферѣ относительно большихъ круговъ.

8. Плоскій уголъ (γωνία) есть взаимное наклоненіе двухъ линій, которыя встрѣчаются въ плоскости и имѣютъ различныя направленія.

9. Если линіи, образующія уголъ на плоскости, суть прямыя, то уголъ называется прямолинейнымъ.

10. Если прямая, встрѣчающая другую прямую, составляет съ ней два равные смежные угла, то каждый изъ этихъ угловъ есть *прямой*, а прямая, составляющая ихъ, называется *перпендикуляромъ* ко второй прямой.

11. *Тупымъ* угломъ называется уголъ, который больше прямого.

12. *Острымъ* угломъ называется уголъ, который меньше прямого.

*Примѣч. 5.* Опредѣленіе 8 говоритъ о наклоненіи вообще линій, слѣдовательно и кривыхъ, но въ такомъ случаѣ, это опредѣленіе не даетъ понятія объ углѣ, составленномъ двумя кривыми линіями, а такъ какъ Евклидъ въ своихъ Началахъ этимъ опредѣленіемъ нигдѣ не пользуется, то Симсонъ думаетъ, что здѣсь есть неловкая вставка переписчика и полагаетъ, что опредѣленія 8 и 9 можно слить въ одно.

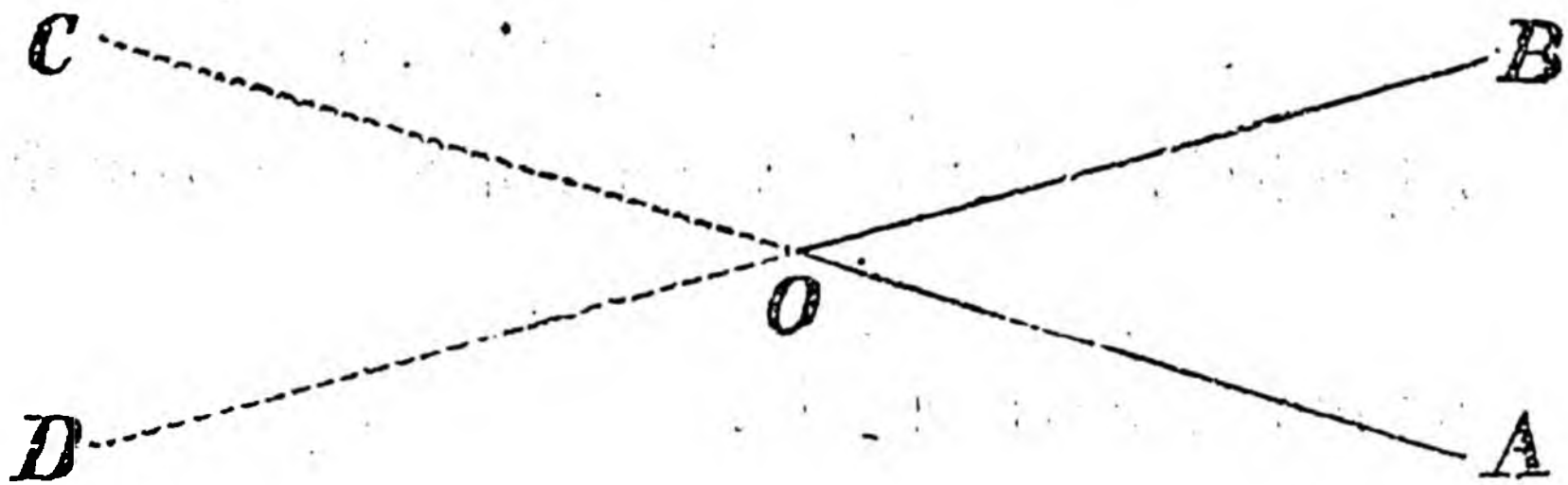
Опредѣленія: Уголъ есть взаимное наклоненіе двухъ прямыхъ линій, или разность направленій, или величина поворота одной прямой до совпаденія съ другою, представляютъ уголъ *какъ какое-то количество* и выраженія часто употребляемыя: точка лежитъ въ углѣ или внѣ, прямая отдѣляетъ отъ угла треугольникъ и друг. не имѣютъ смысла. Бертранъ изъ Женевы первый опредѣлилъ уголъ какъ часть плоскости (*Développement nouveau de la partie élémentaire des Mathématiques* 1778 г.).

Плоскость раздѣляется двумя пересѣкающимися прямыми на четыре части, которыя называются углами. Части прямыхъ, исходящія изъ общей точки сѣченія и заключающія уголъ, называются *сторонами* угла, а общая точка сѣченія называется *вершиною* его.

Уголъ называется *выпрямленнымъ*, если его стороны имѣютъ противоположныя направленія, слѣдовательно составляютъ одну прямую линію. Всѣ *выпрямленные* углы равны между собою, такъ какъ они совмѣщаются. Уголъ называется *вогнутымъ* или *выпуклымъ*, смотря потому будетъ-ли онъ меньше или больше *выпрямленнаго* угла.

Каждому *вогнутому* углу принадлежатъ два *смежныхъ* угла, которые составлены одною изъ сторонъ угла и продолженіемъ другой.

Фиг. 47.



Смежные углы угла  $AOB$  суть:  $BOC$  и  $AOD$  (фиг. 47). Уголъ  $COD$ , составленный продолженіемъ сторонъ угла  $AOB$ , называется *противуположнымъ* угломъ.

Противуположные углы равны, то есть  $AOB = COD$ . Въ самомъ дѣлѣ,  $AOB + BOC = BOC + COD$ , такъ какъ всѣ выпрямленные углы равны, откуда  $AOB = COD$ .

Вогнутый уголъ называется *острымъ*, *прямымъ* или *тупымъ*, смотря потому будетъ ли онъ меньше, равенъ или больше своего смежнаго угла. *Всѣ прямые углы равны*, какъ половины выпрямленнаго угла. Если прямая составляетъ прямой уголъ, то онъ называется *перпендикулярнымъ* одна къ другой (*καθετοι*).

13. *Предѣломъ* (ὄρος) называется оконечность чего нибудь.

14. *Фигурой* (σχήμα) называется то, что ограничено однимъ или нѣсколькими предѣлами.

15. *Кругъ* (κύκλος) есть плоская фигура, ограниченная одной линіей, называемой *окружностью*, къ которой всѣ прямыя линіи, называемыя *радіусами*, проведенныя изъ нѣкоторой точки, лежащей внутри ея, равны между собою.

16. Эта точка называется *центромъ* (κέντρον) круга.

17. *Діаметръ* (διάμετρος) круга есть прямая, проведенная чрезъ центръ и ограниченная съ обѣихъ сторонъ окружностью: эта прямая дѣлитъ кругъ пополамъ.

18. *Полукругъ* есть фигура ограниченная діаметромъ и равною частью окружности, на которыя этотъ діаметръ дѣлитъ окружность.

19. *Сегментъ*, отрѣзокъ (τμήμα) есть фигура, ограниченная прямою и одной неравной частью окружности, на которыя эта прямая дѣлитъ окружность.

20. *Прямолинейная* (εὐθύγραμμος) фигура есть та, которая ограничена прямыми линіями.

21. *Трехсторонняя* (τρίπλευρος) фигуры суть тѣ, которыя ограничены тремя прямыми линіями.

22. *Четырехсторонняя* (τετράπλευρος) фигуры суть тѣ, которыя ограничены четырьмя прямыми линіями.

23. *Многосторонняя* (πολύπλευρος) фигуры суть тѣ, которыя ограничены болѣе чѣмъ четырьмя прямыми линіями.

24. Между трехсторонними фигурами, равностороннимъ треугольникомъ, называютъ ту, въ которой всѣ стороны равны.

25. Треугольникомъ *равнобедреннымъ* (ισοσκελής) называется тотъ, въ которомъ двѣ стороны равны.

26. *Разностороннимъ* (σκαληνία) треугольникомъ называется тотъ, въ которомъ всѣ стороны неравны.

27. *Прямоугольный* (ὀρθογώνιος) треугольникъ есть тотъ, въ которомъ одинъ уголъ прямой.

28. *Тупоугольный* (ἄμβλυγώνιος) треугольникъ есть тотъ, въ которомъ одинъ уголъ тупой.

29. *Остроугольный* (ὀξυγώνιος) треугольникъ есть тотъ, въ которомъ всѣ три угла острые.

30. *Квадратъ* есть четырехсторонникъ, въ которомъ всѣ стороны равны и углы прямые.

31. *Ромбъ* (ρόμβος) есть четырехугольникъ, въ которомъ всѣ стороны равны, но углы не прямые.



32. *Параллелограмъ* (ρομβοειδής) есть четырехугольникъ, въ которомъ только противоположныя стороны и противоположные углы равны, но не-прямые.

33. Всѣ прочія четырехстороннія фигуры называются *трапеціями* (траπέζιον).

34. *Параллельныя* (παράλληλος) *прямая линія* суть такія, которыя, находясь въ одной плоскости, и будучи продолжены въ обѣ стороны, какъ угодно далеко, никогда не встрѣчаются.

*Примѣч. 6.* Въ нѣкоторыхъ спискахъ нѣтъ опредѣленія 19.

### Требованія (αἰτήματα, postulata).

Допускается:

1. Что отъ одной точки до другой, какой нибудь, можно провести прямую линію.
2. Что конечную прямую можно продолжить неопредѣленно.
3. Что изъ какой нибудь точки, какъ изъ центра, произвольнымъ радіусомъ, можно описать кругъ.

*Примѣч. 7.* Всѣ элементарныя построенія дѣлаются съ помощью этихъ трехъ требованій.

### Аксиомы (κοινὰ ἔννοια, communes notiones).

Евклидъ даетъ слѣдующія двѣнадцать аксіомъ:

1. Величины, равныя одной и той же величинѣ, равны между собою.
2. Если къ величинамъ равнымъ придадимъ величины равныя, то суммы получимъ равныя.
3. Если отъ величинъ равныхъ отнимемъ величины равныя, то остатки получимъ равные.
4. Если къ величинамъ неравнымъ придадимъ величины равныя, то суммы получимъ неравныя.
5. Если отъ величинъ неравныхъ отнимемъ величины равныя, то остатки получимъ неравные.
6. Величины двойныя одной и той же величины равны между собою.
7. Половины одной и той же величины равны между собою.
8. Величины, которыя по наложеніи совмѣщаются, равны между собою.
9. Цѣлое болѣе своей части.
10. Всѣ прямые углы равны между собою.
11. Если двѣ прямая линіи встрѣчаются третьей такъ, что сумма вну-

тренныхъ угловъ, лежащихъ по одну сторону третьей, меньше двухъ прямыхъ угловъ, то двѣ первыя прямыя, по достаточномъ продолженіи, встрѣтятся по ту сторону третьей прямой, на которой сумма внутреннихъ угловъ меньше двухъ прямыхъ.

12. Двѣ прямыя линіи не могутъ заключать пространства.

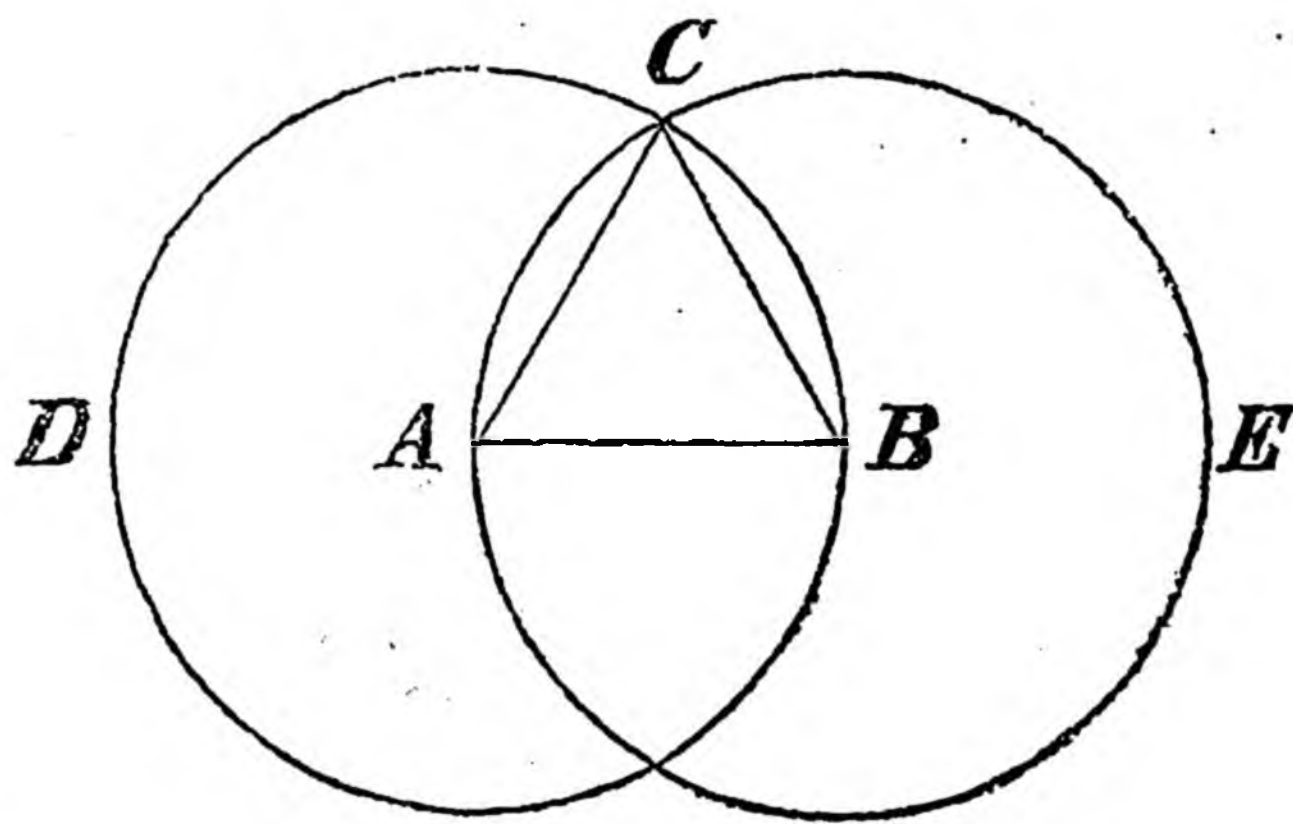
Подробный анализъ аксіомъ изложенъ во введеніи.

Предложенія (πρότασις, propositio, problema).

*Предложеніе 1.* На данной конечной прямой  $AB$  построить равносторонній треугольникъ (фиг. 48)?

*Рѣшеніе.* Изъ точки  $A$ , какъ изъ центра, радіусомъ  $AB$  опишемъ кругъ  $B CD$  (тр. 3); изъ точки  $B$ , какъ изъ центра, тѣмъ же радіусомъ  $AB$  опишемъ кругъ  $A CE$ .

Фиг. 48.



Изъ точки  $C$ , въ которой пересѣкаются оба круга, проведемъ къ точкамъ  $A$  и  $B$  прямыя  $CA$  и  $CB$  (тр. 1). Треугольникъ  $ABC$  будетъ требуемый.

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ  $AC=AB$  (опр. 15) и  $BC=BA$ , откуда  $AC=BC$  (акс. 1). Слѣдовательно  $AC=BC$ , т. е. треугольникъ, построенный на  $AB$ , есть равносторонній (опр. 24).

*Примѣч. 8.* Находятъ, что это построеніе неполное, потому, что не показано, что оба круга пересѣкутся; но для этого надобно только замѣтить, что каждый изъ круговъ имѣетъ одну точку внутри, а другую внѣ, относительно другаго круга.

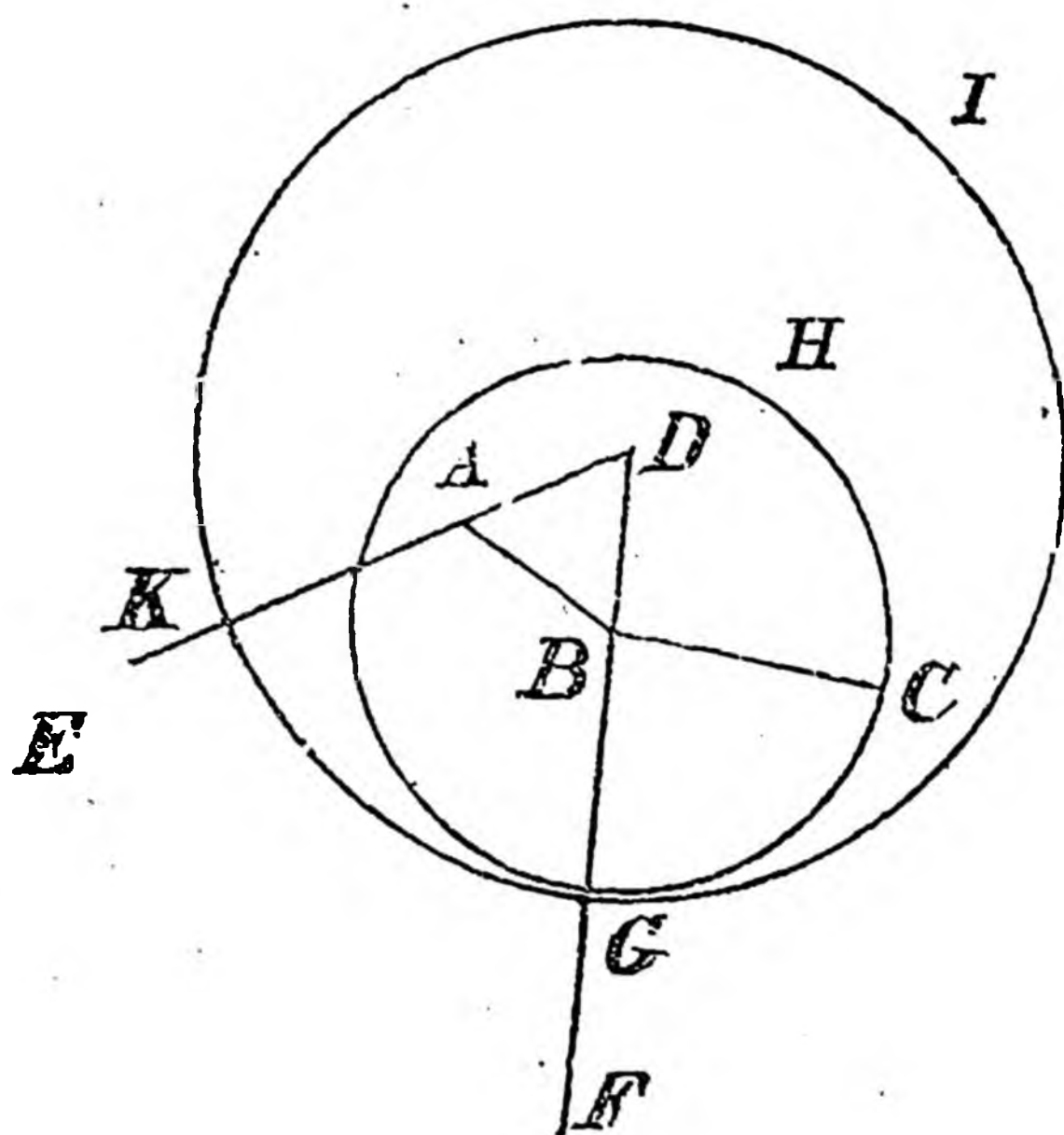
Намъ воспитаннымъ на французскихъ руководствахъ странно, что это предложеніе стоитъ первымъ, мы привыкли имѣть дѣло сейчасъ съ углами и при этомъ предполагаемъ такія построенія, которыхъ не умѣемъ еще сдѣлать. Евклидъ распредѣляетъ предложенія такъ, что въ каждомъ изъ нихъ всѣ построенія извѣстны изъ предыдущаго.

*Предложеніе 2.* Изъ данной точки  $A$  провести прямую равную данной прямой  $BC$  (фиг. 49)?

*Рѣшеніе.* Соединимъ точки  $A$  и  $B$  прямою  $AB$  (тр. 1). На этой пря-

мой построимъ равносторонній треугольникъ  $ABD$  (пред. 1). Продолжимъ стороны  $DA$  и  $DB$  треугольника до  $E$  и  $F$  (тр. 2).

Фиг. 49.

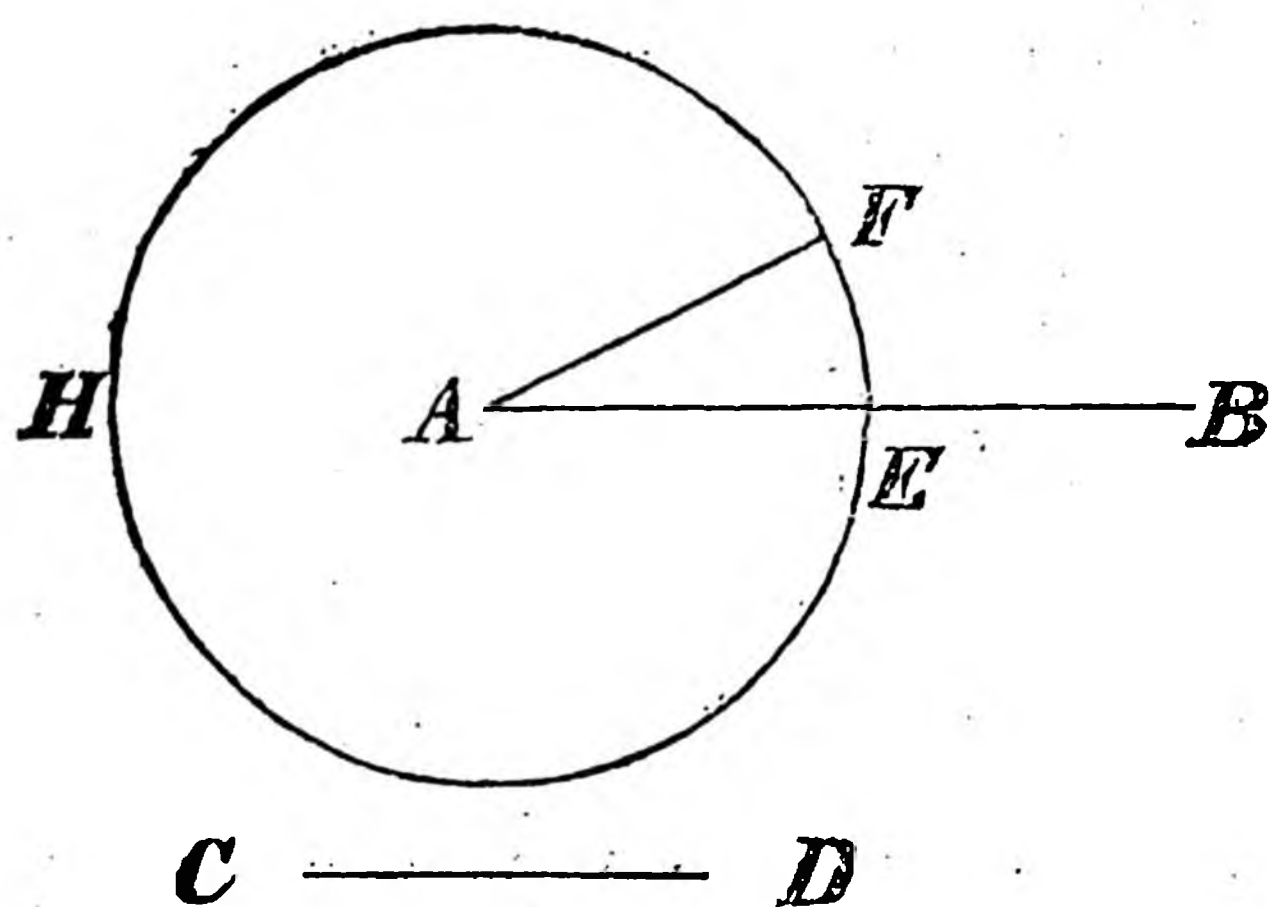


Изъ точки  $B$ , какъ изъ центра, радиусомъ  $BC$  опишемъ кругъ  $CGH$ ; изъ точки  $D$ , какъ изъ центра, радиусомъ  $DG$  опишемъ кругъ  $GIK$  (тр. 3). Прямая  $AK=BC$  и будетъ требуемая прямая. Въ самомъ дѣлѣ,  $DK=DG$  (опр. 15), а  $DA=DB$  (опр. 24), то  $AK=BG$  (акс. 3). Но  $BC=BG$ , слѣдовательно  $AK$  и  $BC$  равны  $BG$ , откуда  $AK=BC$  (акс. 1).

*Примѣч. 9.* Эта задача въ Евклидовскомъ рѣшеніи имѣетъ восемь рѣшеній. Можно данную точку  $A$  соединить или съ  $B$  или съ  $C$ , на каждой изъ этихъ прямыхъ  $AB$  и  $AC$  можно построить равносторонніе треугольники съ одной и съ другой стороны, наконецъ можно продолжить стороны  $AD$  и  $BD$  въ противоположномъ направленіи. Задача эта неопредѣленная имѣетъ безчисленное множество рѣшеній и рѣшается просто слѣдующимъ образомъ: изъ данной точки  $A$ , какъ изъ центра, опишемъ кругъ радиусомъ, равнымъ данной прямой  $BC$  (трб. 3) и центръ  $A$  соединимъ съ какою нибудь точкою  $D$  окружности (трб. 1), прямая  $AD$  и будетъ рѣшеніе.

*Предложеніе 3.* Даны двѣ неравныя прямыя  $AB$  и  $CD$  отнять отъ большей  $AB$  меньшую  $CD$  (фиг. 50)?

Фиг. 50.



*Рѣшеніе.* Изъ точки  $A$  проведемъ прямую  $AF$  равную  $CD$  (пред. 2) и изъ  $A$ , какъ изъ центра, радиусомъ  $AF$  опишемъ кругъ  $EFH$  (тр. 3),

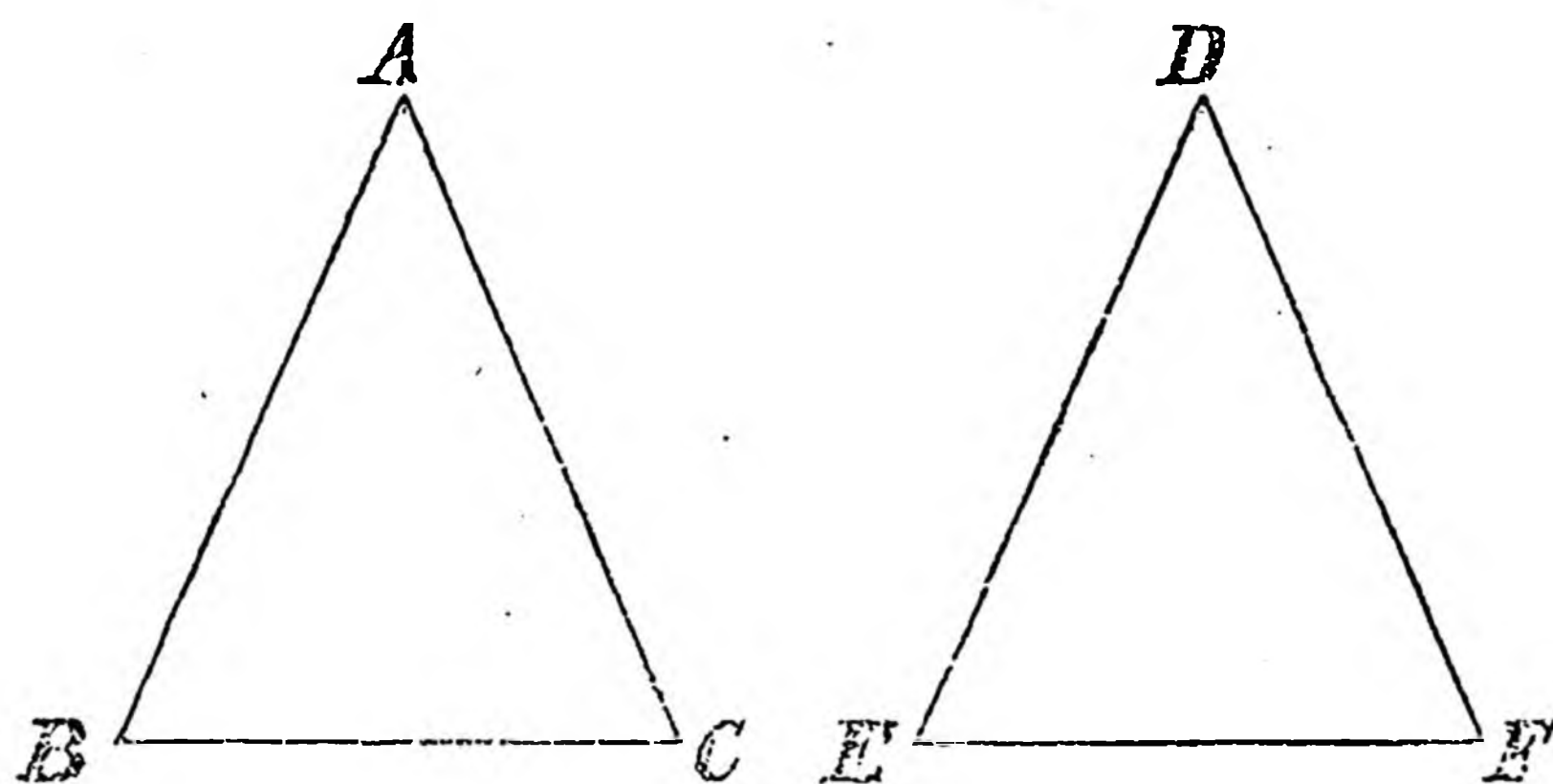


который встрѣтитъ  $AB$  въ точкѣ  $E$ . Слѣдовательно отъ  $AB$  отняли прямую  $AE=CD$ . Въ самомъ дѣлѣ,  $AE=AF$  (опр. 15); но  $AF=DE$ , слѣдовательно  $BE=AB-CD$ .

**Предложеніе 4.** Если двѣ стороны  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  равны двумъ сторонамъ  $DE$  и  $DF$  треугольника  $DEF$ , каждая каждой, и углы  $BAC$  и  $EDF$ , заключенные между равными сторонами, равны, то треугольники будутъ имѣть равныя основанія  $BC$  и  $EF$ , будутъ сами равны и остальные углы  $ABC$  и  $DEF$ ,  $ACB$  и  $DFE$ , противолежащіе равнымъ сторонамъ, будутъ равны каждый каждому (фиг. 51).

**Доказат.** Наложимъ треугольникъ  $ABC$  на треугольникъ  $DEF$  такъ, чтобы точка  $A$  совмѣстилась съ точкою  $D$  и сторона  $AB$  совмѣстилась съ  $DE$ .

Фиг. 51.



Точка  $B$  совмѣстится съ  $E$ , такъ какъ  $AB=DE$ . Такъ какъ уголъ  $BAC$  равенъ углу  $EDF$ , то  $AC$  приметъ направленіе  $DF$  и какъ  $AC=DF$ , то точка  $C$  совмѣстится съ  $F$ . Если точка  $B$  совмѣстилась съ  $E$ , и точка  $C$  съ  $F$ , то сторона  $BC$  совмѣстится съ  $EF$ , такъ какъ, въ противномъ случаѣ, эти двѣ прямыя, имѣя общіе концы, заключали бы пространство, что невозможно (акс. 12). Слѣдовательно  $BC=EF$ .

Откуда:

$$\triangle ABC = \triangle DEF$$

$$\angle ABC = \angle DEF, \quad \angle ACB = \angle DFE.$$

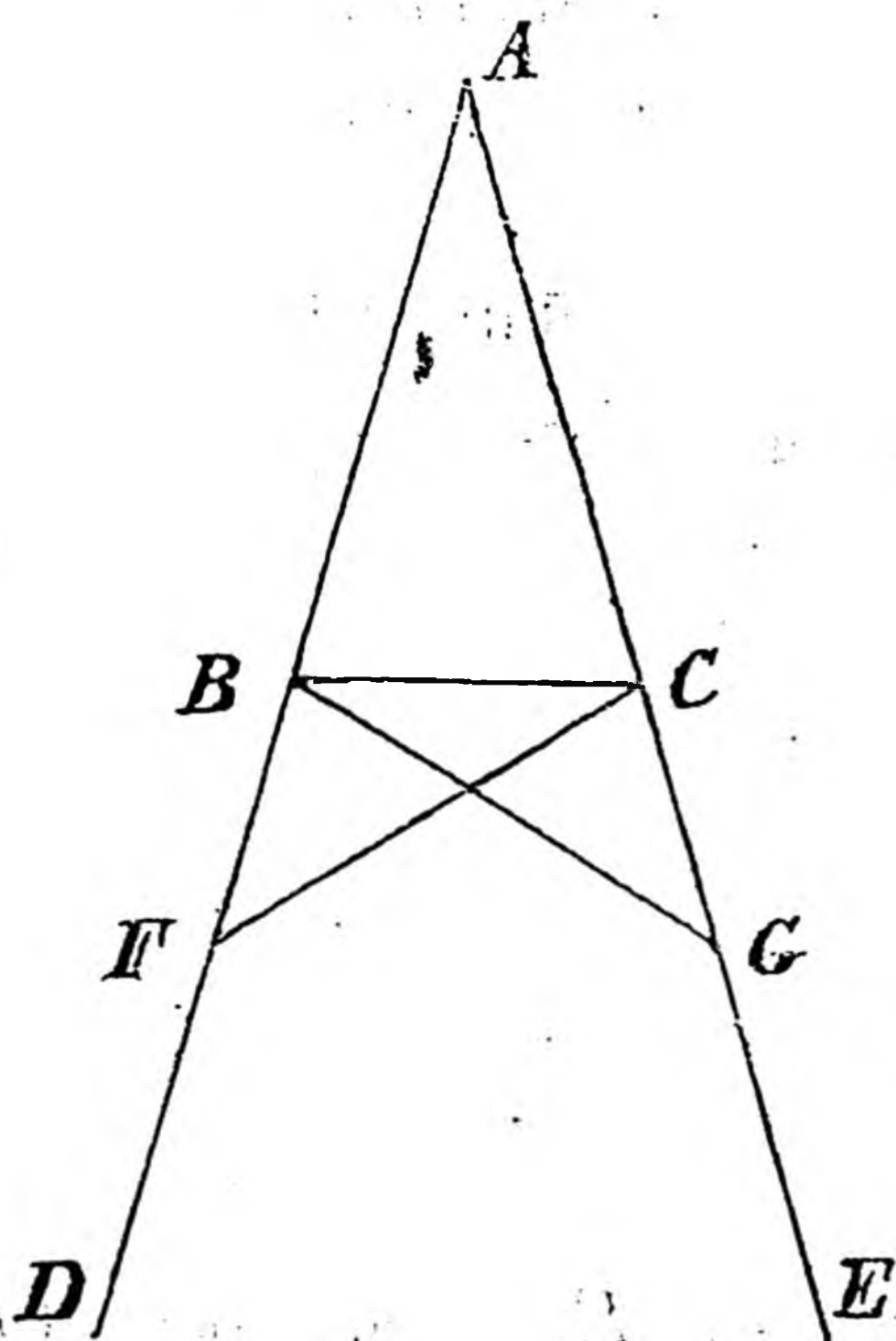
**Примѣч. 10.** Доказательство этой теоремы основано на томъ свойствѣ плоскости, которое мы назвали аксіомой совмѣстимости, т. е. что на плоскости фигура можетъ быть перенесена въ другое мѣсто безъ измѣненія взаимнаго разстоянія точекъ на ней и безъ измѣненія угловъ. Евклидъ только разъ примѣняетъ это свойство плоскости для доказательства пред. 4, не упоминая нигдѣ о немъ, какъ объ аксіомѣ. Мы подробно разобрали эту аксіому во введеніи. За предложеніемъ 4-мъ, въ нашихъ руководствахъ слѣдуетъ доказательство, съ помощью наложенія, равенства треугольниковъ, имѣющихъ по два равные угла, каждый каждому, и по равнымъ сторонамъ прилежащимъ этимъ угламъ. Доказывается это слѣдующимъ образомъ: пусть въ треугольникахъ  $ABC$  и  $DEF$  (фиг. 51),  $BC=EF$  и  $\angle ABC=\angle DEF$ ,  $\angle ACB=\angle DFE$ . Наложимъ треугольникъ  $DEF$  на треугольникъ  $ABC$  такъ, чтобы основаніе  $EF$  совпало съ основаніемъ  $BC$ , по равенству угловъ  $E$  и  $B$ ,  $F$  и  $C$ ,

стороны  $ED$  и  $FD$  совпадутъ съ сторонами  $BA$  и  $CA$ , а слѣдовательно и точка  $D$  совпадетъ съ точкою  $A$ .

**Предложеніе 5.** Въ равнобедренномъ треугольникѣ  $ABC$ : 1) углы  $ABC$  и  $ACB$  при основаніи  $BC$  равны между собою; 2) если продолжимъ равныя стороны  $AB$  и  $AC$ , то углы образованные ниже основанія:  $DBC$  и  $ECB$  будутъ также равны (фиг. 52).

**Доказат.** На продолженіи  $BD$  стороны  $AB$  возьмемъ произвольную точку  $F$ , а на  $AE > AF$ , возьмемъ  $AG = AF$  (пред. 3), затѣмъ соединимъ прямыми точки  $F$  съ  $C$  и  $G$  съ  $B$ .

Фиг. 52.



1. Въ треугольникахъ  $ACF$  и  $ABG$  мы имѣемъ:  $AF = AG$ ,  $AC = AB$ , уголъ  $A$  общій, слѣдовательно (пред. 4)  $FC = BG$ ,  $\angle ACF = \angle ABG$ ,  $\angle AFC = \angle AGB$ .

Но такъ какъ  $AF = AG$  и  $AB = AC$ , то (акс. 3)  $BF = CG$ . слѣдовательно (пред. 4) треугольники  $FBC$  и  $CBG$  равны, откуда и углы ниже основанія равны.

2. Мы видѣли, что  $\angle ABG = \angle ACF$  и  $\angle CBG = \angle BCF$ , слѣдовательно (акс. 3)  $\angle ABC = \angle ACB$ , т. е. углы при основаніи  $BC$  равны.

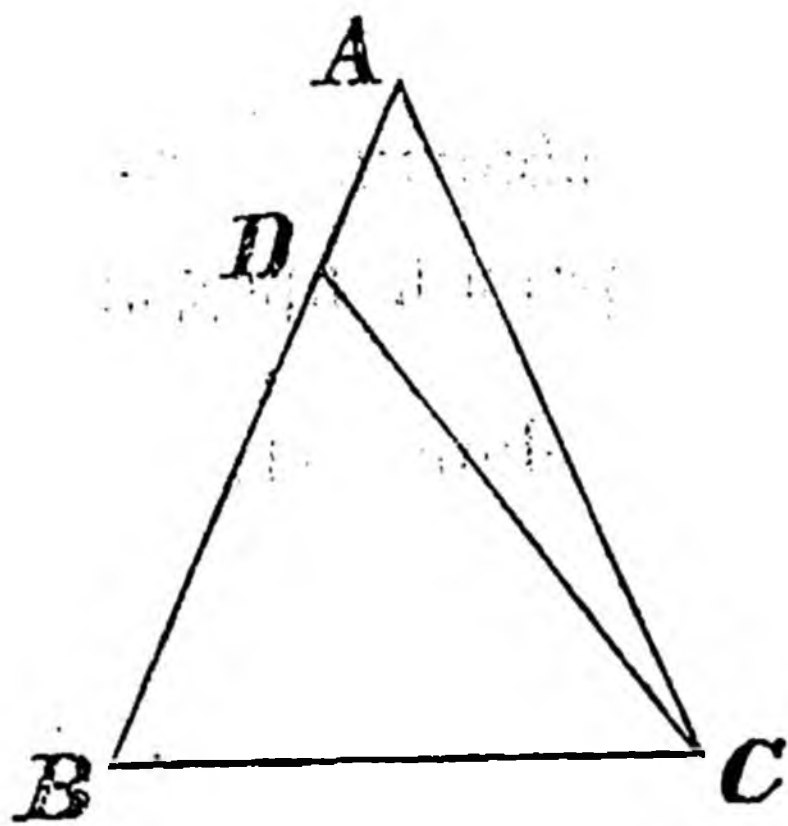
**Примѣч. 11.** Равенство угловъ  $ABC$  и  $ACB$  можно доказать гораздо проще, если въ треугольникамъ  $BAC$  и  $CAB$  приложить пред. 4., т. е. наложить треугольникъ  $BAC$  самъ на себя такъ, чтобы сторона  $AB$  совмѣстилась съ  $AC$ , уголъ  $A$  равенъ углу  $A$ , слѣдовательно сторона  $AC$  пойдетъ по направленію  $AB$  и по равенству ихъ точка  $C$  совмѣстится съ  $B$ , и точка  $B$  совмѣстится съ  $C$ . Такъ какъ Евклиду надобно, для послѣдующаго знать, что въ равнобедренномъ треугольникѣ, углы ниже основанія равны, то это можно вывести на основаніи примѣч. 5, гдѣ показано, что сумма смежныхъ угловъ равна выпрямленному углу, или какъ говорятъ равна двумъ прямымъ.

**Предложеніе 6.** Если въ треугольникѣ  $ABC$  углы  $ABC$  и  $ACB$  равны, то и стороны  $AC$  и  $AB$ , противолежащія этимъ угламъ, равны (фиг. 53).



*Доказат.* Если бы стороны  $AC$  и  $AB$  не были равны, то одна изъ нихъ, наримѣръ,  $AB$  будетъ больше.

Фиг. 53.



Отложимъ на большей сторонѣ  $AB$ , отъ точки  $B$ , меньшую  $AC=BD$  (предл. 3) и соединимъ  $C$  съ  $D$ . Въ треугольникахъ  $ABC$  и  $BCD$  мы имѣемъ  $BD=AC$ ,  $BC$  есть сторона общая и  $\angle DBC=\angle ACB$ , слѣдовательно (пред. 4):

$$\triangle DBC = \triangle ABC$$

что невозможно (акс. 9). Изъ этого слѣдуетъ, что  $AC$  и  $AB$  не могутъ быть неравными, слѣдовательно  $AB=AC$ .

*Примѣч. 12.* Было бы лучше изъ равенства треугольниковъ  $ABC$  и  $DBC$  заключить о равенствѣ угловъ  $ABC$  и  $DCB$ , а оттуда заключить о невозможномъ равенствѣ угловъ  $ACB$  и  $DCB$ .

Въ геометріи доказательства дѣлятся на прямыя и непрямыя. Въ прямомъ доказательствѣ показывается почему извѣстное предположеніе справедливо, а въ непрямомъ показывается, что оно не можетъ быть несправедливымъ. Пріемъ этотъ состоитъ въ приведеніи къ абсурду-несообразности. Прямое доказательство всегда надобно предпочитать непрямому.

Если бы Евклидъ послѣ 4 пред. доказалъ наложеніемъ, какъ мы показали въ примѣч. 10, равенство треугольниковъ, имѣющихъ по два равные угла, каждый каждому, и по равной сторонѣ имъ прилежащей, то пред. 6 могло бы быть доказано прямо, показавъ что треугольники  $BAC$  и  $CAB$  равны.

Предл. 6 есть обратное пред. 5. Говорятъ, что одно предположеніе есть обратное другому, когда заключеніе перваго есть положеніе втораго. Такъ въ предл. 5 положеніе есть равенство сторонъ, а заключеніе равенство угловъ; въ предл. 6 положеніе есть равенство угловъ, а заключеніе равенство сторонъ.

Если въ предположеніи есть нѣсколько положеній или нѣсколько заключеній, то мы можемъ составить нѣсколько обратныхъ предположеній. Напримѣръ, предположеніе 5 имѣетъ еще другое обратное именно: если въ треугольникѣ углы ниже основанія, образуемые продолженіемъ сторонъ, равны, то и стороны треугольника равны.

Обратное предположеніе не всегда вѣрно.

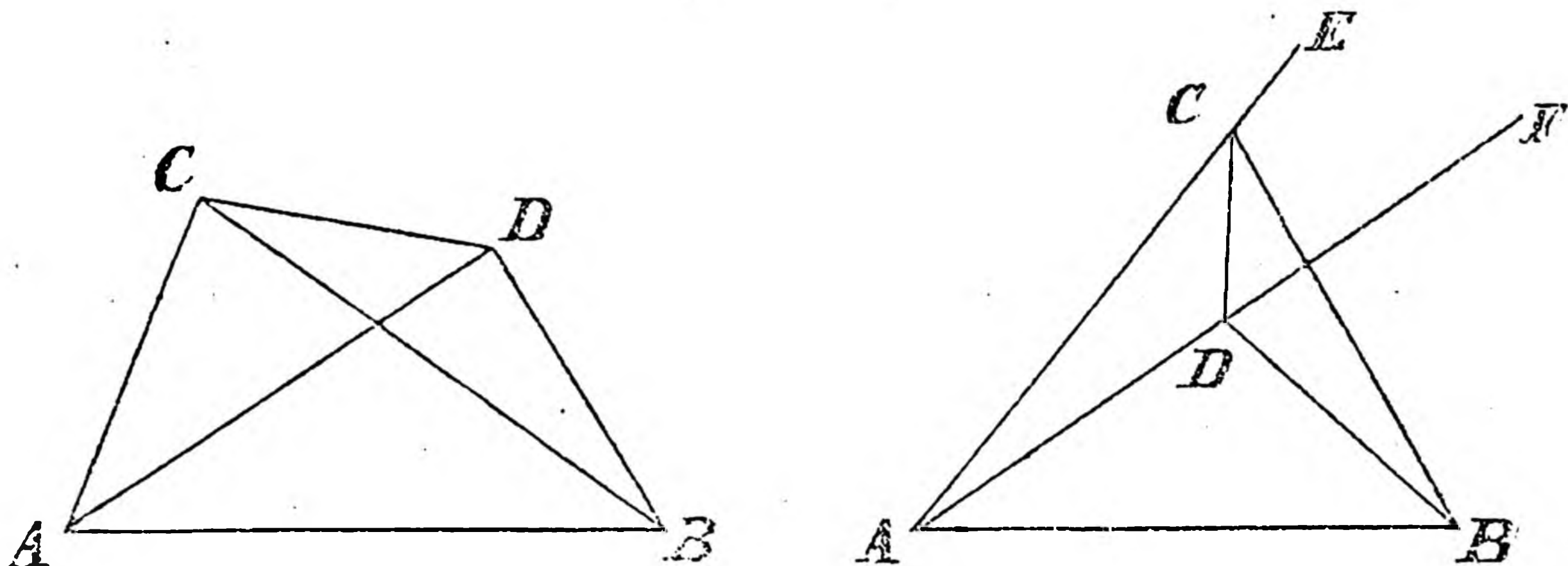
Замѣтимъ еще, что пред. 6 можно доказать и помѣстить и послѣ пред. 18, и послѣ 26, т. е. оно можетъ быть доказано или съ помощью пред. 18, или съ помощью пред. 26, такъ какъ Евклидъ его примѣняетъ только во 2-й книгѣ въ пред. 4.



**Предложение 7.** Если мы соединимъ концы основанія  $AB$  съ двумя точками  $C$  и  $D$ , лежащими по одну сторону прямой  $AB$ , то разстоянія  $CA$  и  $CB$  точки  $C$  отъ концовъ основанія  $AB$ , не могутъ быть равны, каждое каждому, разстояніямъ  $DA$  и  $DB$  точки  $D$  отъ тѣхъ же концовъ основанія  $AB$  (фиг. 54).

**Доказат.** Положимъ что возможно, чтобы  $AD=AC$  и  $BD=BC$ . Соединимъ  $C$  съ  $D$  (во второмъ чертежѣ продолжимъ  $AC$  и  $AD$  къ  $E$  и  $F$ ).

Фиг. 54.



1. Точка  $D$  внѣ треугольника  $ACB$ . Такъ какъ  $AD=AC$ , то  $\angle ADC=\angle ACD$  (пред. 5), слѣдовательно  $\angle ADC>\angle DCB$  (акс. 9), а тѣмъ болѣе  $\angle BDC>\angle DCB$ . Но мы имѣемъ также  $BD=BC$ , откуда  $\angle BDC=\angle DCB$  (пред. 5), что противорѣчитъ предъидущему.

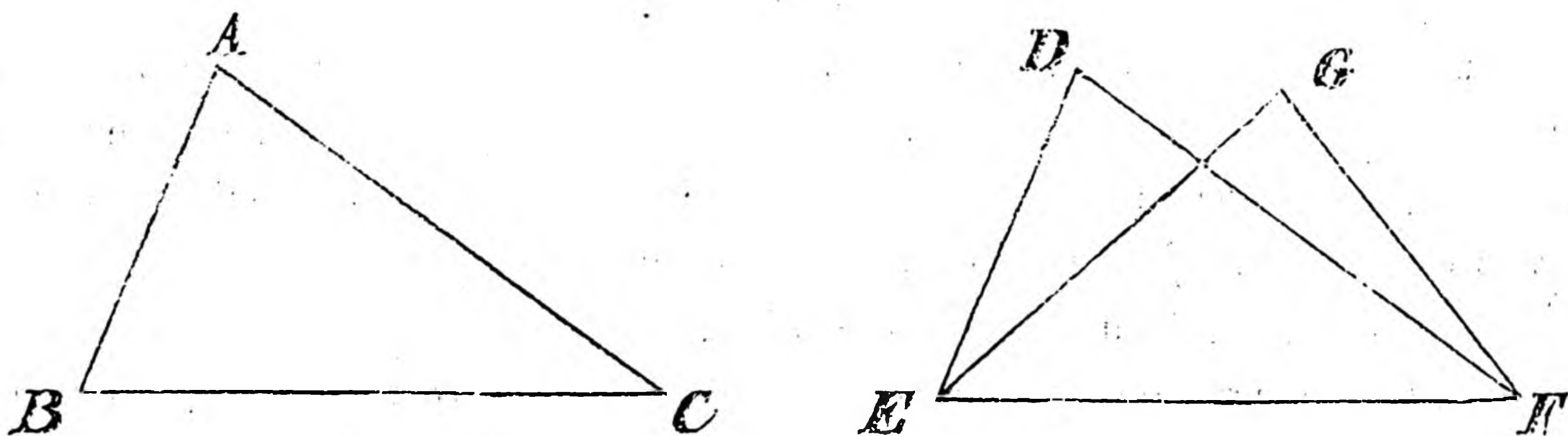
2. Точка  $D$  внутри треугольника  $ACB$ . Такъ какъ  $AD=AC$ , то (пред. 5)  $\angle FDC=\angle ECD$ , но  $\angle FDC<\angle BDC$ , слѣдовательно  $\angle ECD<\angle BDC$ , тѣмъ болѣе  $\angle BDC>\angle DCB$ , что противорѣчитъ положенію  $BD=BC$ .

**Примѣч. 13.** Предложеніе это служить единственно для доказательства предложенія 8 и нигдѣ болѣе у Евклида не прилагается.

**Предложение 8.** Если два треугольника  $ABC$  и  $DEF$  имѣютъ равныя стороны  $AB=DE$ ,  $AC=DF$  и равныя основанія  $BC=EF$ , то и углы, заключенные между равными сторонами, равны (фиг. 55).

**Доказат.** Нанесемъ треугольникъ  $ABC$  на треугольникъ  $DEF$  такъ, чтобы ихъ основанія  $BC$  и  $EF$  совпали.

Фиг. 55.



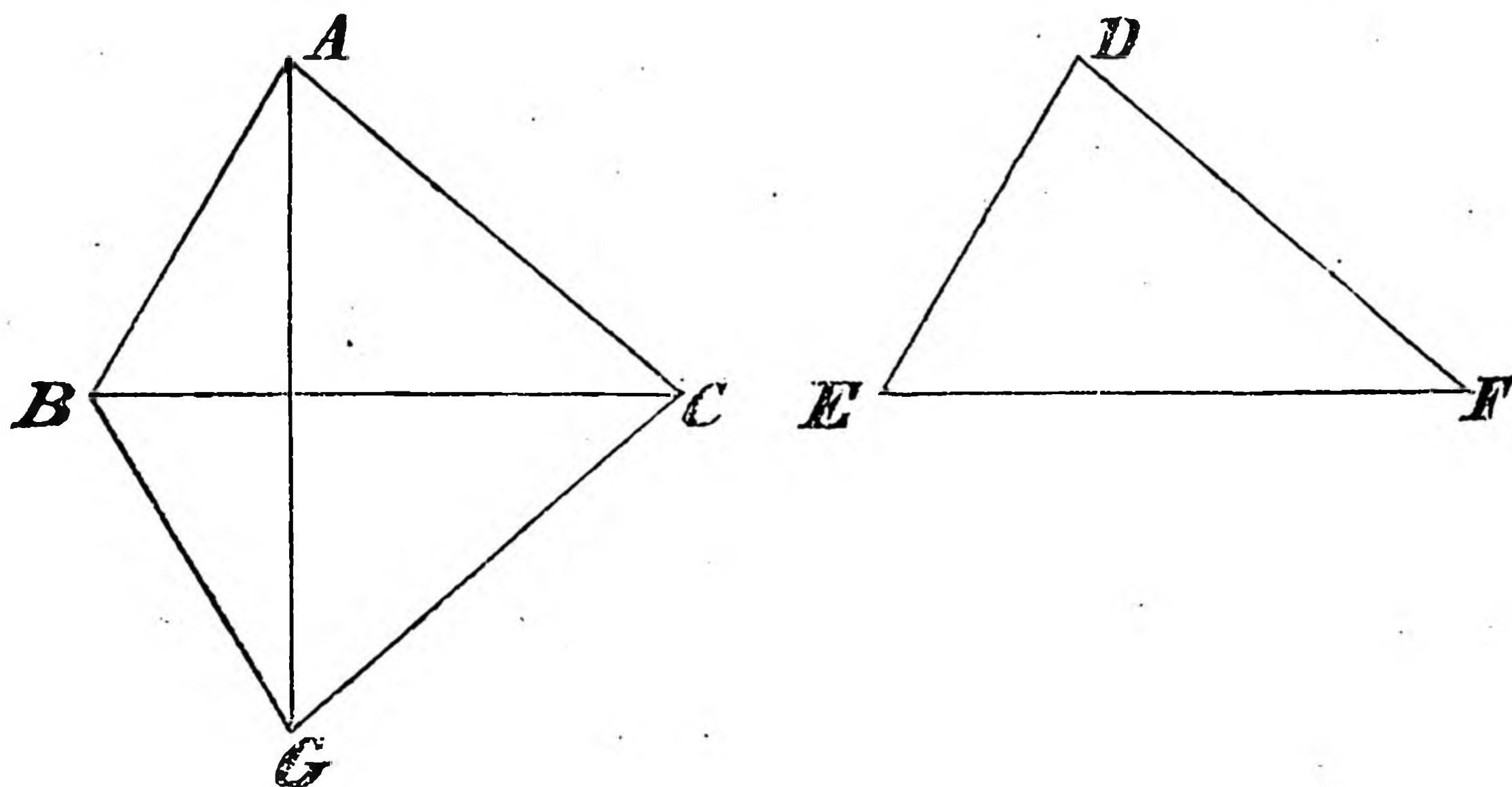
Такъ какъ  $AB=DE$  и  $AC=DF$ , то точка  $A$  упадетъ въ точку  $D$ ,

ибо если бы точка  $A$  не упала въ точку  $D$ , а въ какую нибудь другую  $G$ , то невозможно имѣть равенствъ  $AB=DE$ ,  $AC=DF$  (пред. 7). Слѣдовательно уголъ  $\angle BAC=\angle EDF$ . Откуда (пред. 4)  $\triangle ABC=\triangle DEF$ .

Итакъ два треугольника, имѣющіе по три равныя стороны, каждую каждой, по наложеніи совмѣщаются, слѣдовательно равны.

*Примѣч. 14.* Предложеніе 8 можно доказать слѣдующимъ образомъ: наложимъ треугольникъ  $DEF$ , на треугольникъ  $ABC$  такъ, чтобы ихъ основанія  $BC$  и  $EF$  совмѣстились, и чтобы вершина  $D$  упала, относительно точки  $A$ , по другую сторону основанія  $BC$  въ точку  $G$  (фиг. 56).

Фиг. 56.



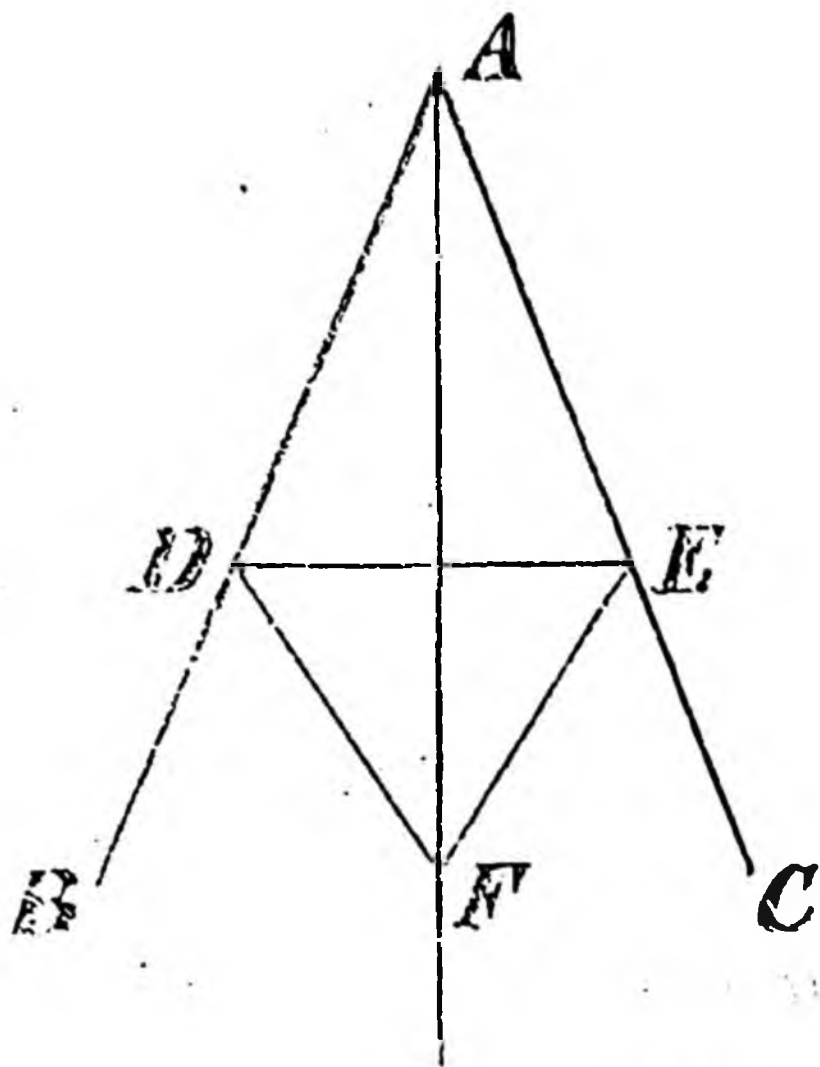
Соединимъ  $A$  съ  $G$ . Въ треугольникѣ  $ABG$  стороны  $BA$  и  $BG$  равны, слѣдовательно и углы  $BAG$  и  $BGA$  также равны (пред. 5). Точно также въ треугольникѣ  $ACG$  углы  $GAC$  и  $CGA$  равны. Откуда (акс. 2)  $\angle BAC=\angle BGC=\angle EDF$ . Слѣдовательно треугольники  $BAC$  и  $EDF$  равны (пред. 4).

Можетъ случиться, что линія  $AG$  пройдетъ чрезъ точки  $B$  или  $C$ , или же можетъ упасть внѣ основанія  $BC$ . Эти оба случая не представляютъ затрудненій.

*Предложеніе 9.* Раздѣлить прямолинейный уголъ  $BAC$  на двѣ равныя части (фиг. 57)?

*Рѣшеніе.* Возьмемъ на  $AB$  какую нибудь точку  $D$  и отъ точки  $A$  на прямой  $AC$  отложимъ  $AE=AD$  (пред. 3).

Фиг. 57.



Соединимъ  $D$  съ  $E$  и на прямой  $DE$  построимъ равносторонній тре-

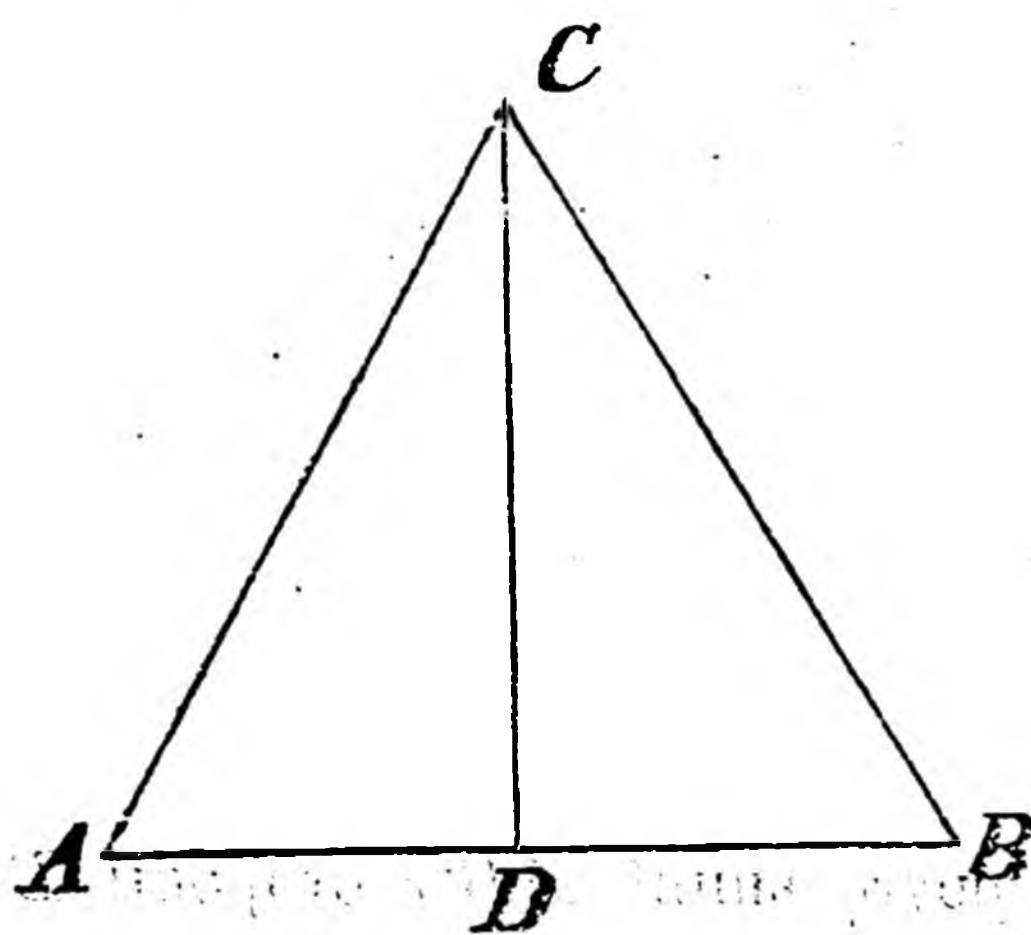
угольникъ  $FDE$  (пред. 1). Если соединимъ  $A$  съ  $F$ , то прямая  $AF$  раздѣлитъ уголъ  $BAC$  пополамъ. Въ самомъ дѣлѣ, треугольники  $ADF$  и  $AEF$  имѣютъ общую сторону  $AF$ , сторона  $AD=AE$  и  $DF=EF$ , следовательно треугольники равны (пред. 8), откуда и  $\angle DAF=\angle EAF$ .

*Примеч. 15.* Равносторонній треугольникъ  $DEF$ , можно построить и съ другой стороны прямой  $DE$ , но можетъ случиться, что точка  $F$  совпадетъ съ точкою  $A$  и тогда задача не можетъ быть рѣшена.

**Предложеніе 10.** Конечную прямую  $AB$  раздѣлить на двѣ равныя части (фиг. 58).

*Рѣшеніе.* На  $AB$  построимъ равносторонній треугольникъ  $ABC$  (пред. 1).

Фиг. 58.

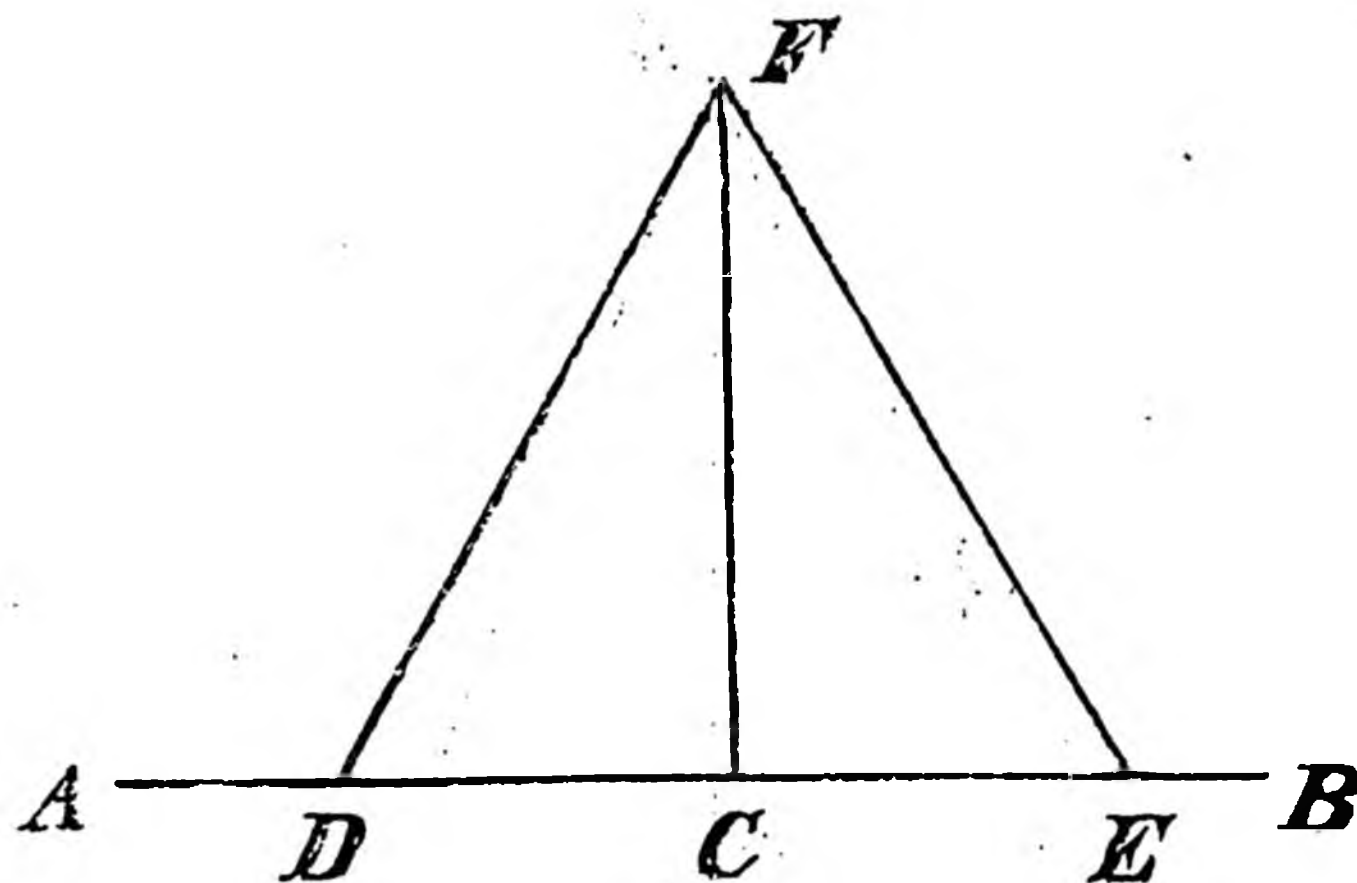


Раздѣлимъ уголъ  $ACB$  на двѣ равныя части (пред. 9) прямою  $DC$ , эта прямая раздѣлитъ  $AB$  въ точкѣ  $D$  пополамъ. Въ самомъ дѣлѣ, въ треугольникахъ  $ACD$  и  $BCD$ , сторона  $CD$  общая,  $AC=CB$  и  $\angle ACD=\angle BCD$ , следовательно (пред. 4)  $AD=DB$ .

**Предложеніе 11.** Изъ данной точки  $C$  на прямой  $AB$  возставить къ ней перпендикуляръ (фиг. 59)?

*Рѣшеніе.* Возьмемъ на  $AB$  какую нибудь точку  $D$  и построимъ  $CE=CD$  (пред. 3).

Фиг. 59.



На прямой  $DE$  построимъ равносторонній треугольникъ  $DEF$  (пред. 1), соединимъ  $F$  съ  $C$ . Прямая  $CF$  и будетъ перпендикуляръ къ  $AB$  въ точ-

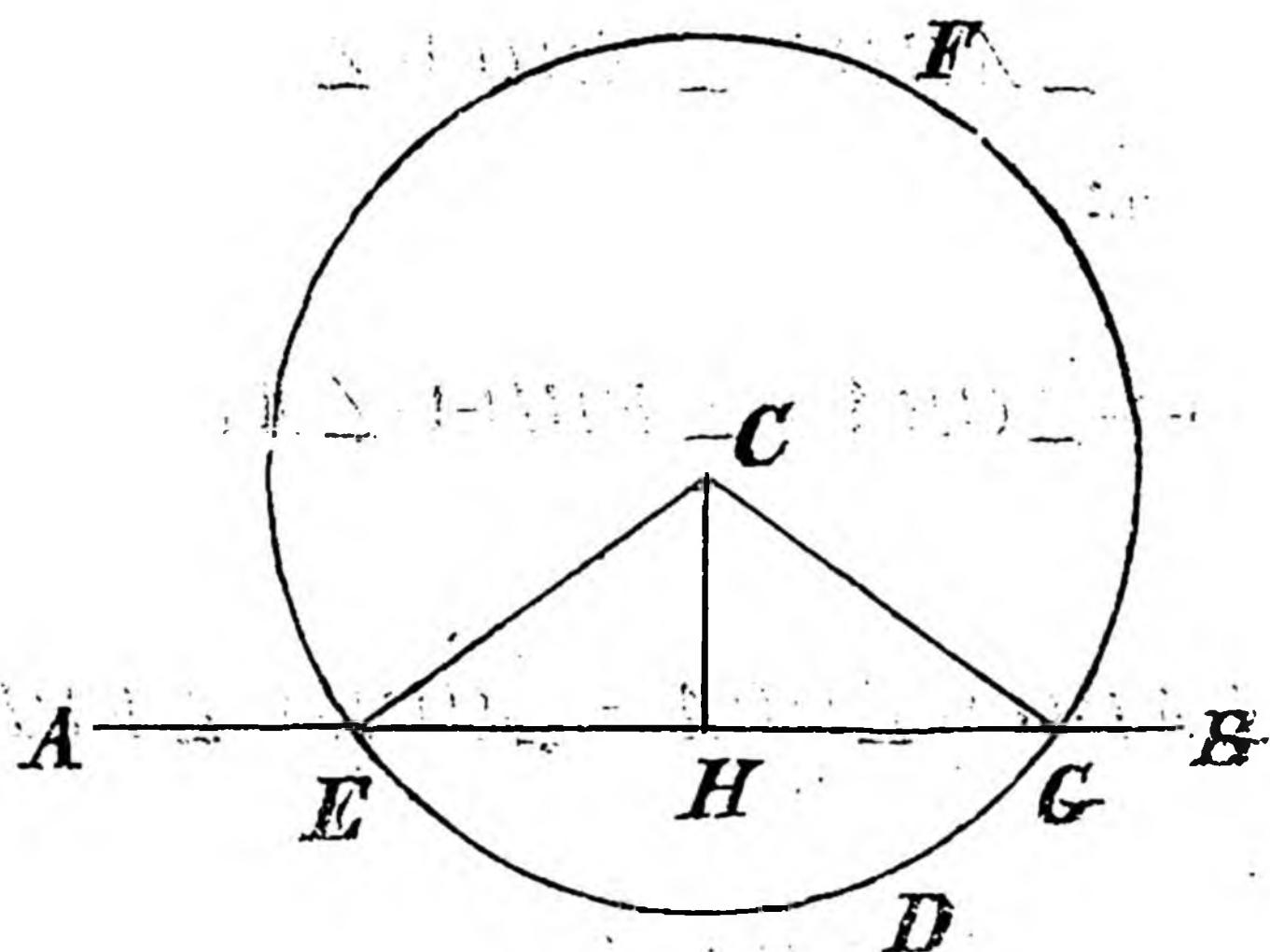


къ  $C$ . Въ самомъ дѣлѣ, въ треугольникахъ  $DCF$  и  $ECF$ , сторона  $CF$  общая,  $DC=CE$  и  $DF=EF$ , слѣдовательно (пред. 8)  $\angle DCF=\angle ECF$ , откуда (опр. 10)  $FC$  есть перпендикуляръ къ  $AB$ .

*Предложеніе 12.* Изъ данной точки  $C$  опустить перпендикуляръ на неопредѣленную прямую  $AB$  (фиг. 60)?

*Рѣшеніе.* Возьмемъ по другую сторону, прямой  $AB$ , относительно точки  $C$ , какую нибудь, точку  $D$ , изъ точки  $C$  какъ изъ центра радіусомъ  $CD$  опишемъ кругъ  $EFG$  (тр. 3).

Фиг. 60.

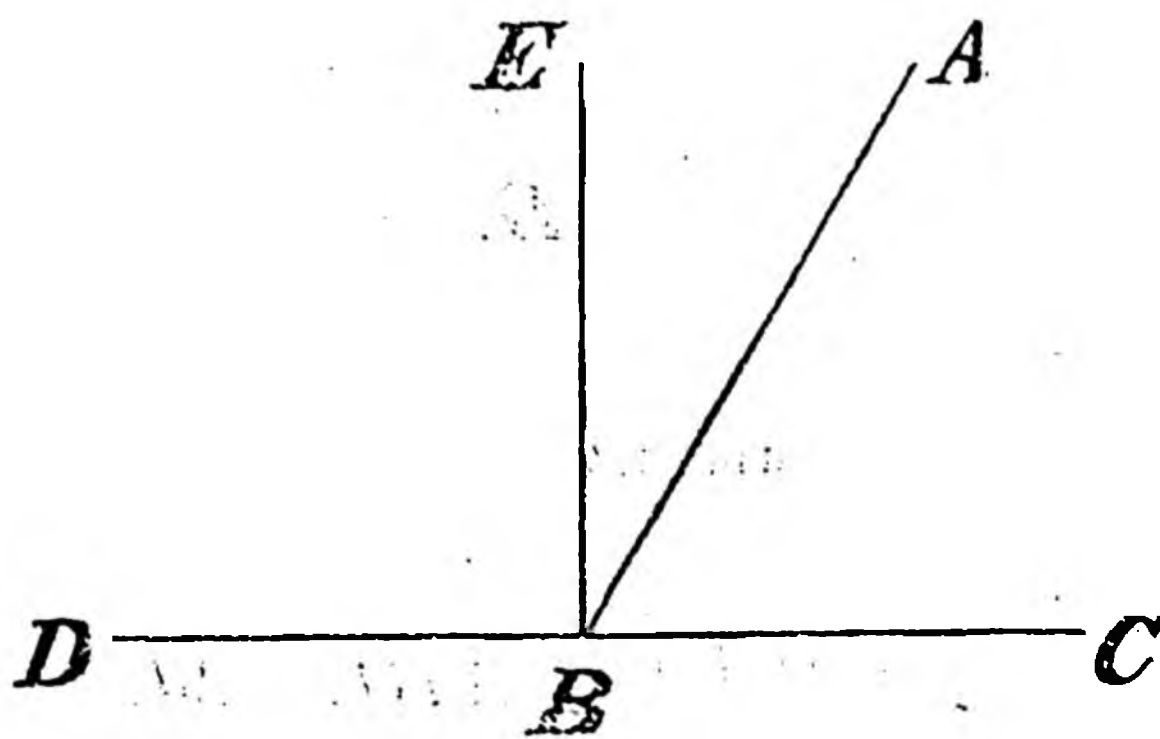


Раздѣлимъ  $EG$  пополамъ въ точкѣ  $H$  (пред. 10) и соединимъ  $C$  съ  $H$ , это и будетъ искомый перпендикуляръ къ  $AB$ . Въ самомъ дѣлѣ, соединяя  $E$  съ  $C$  и  $G$  съ  $C$ , мы имѣемъ два треугольника  $ECN$  и  $GCH$ , въ которыхъ, сторона  $CH$  общая,  $EC=GC$  (опр. 15) и  $EH=GH$  по построению, слѣдовательно (пред. 8)  $\angle EHC=\angle GHC$ . Откуда (опр. 10)  $CH$  есть перпендикуляръ къ  $AB$ .

*Предложеніе 13.* Смежные углы  $ABD$  и  $ABC$ , которые составляетъ прямая  $AB$  съ другою прямою  $CD$ , будутъ или оба прямые, или сумма ихъ равна двумъ прямымъ (фиг. 61).

*Доказат.* Если углы  $ABD$  и  $ABC$  равны между собою, то каждый изъ нихъ есть прямой (опр. 10).

Фиг. 61.



Если же они неравны, то, возставивъ перпендикуляръ  $BE$  изъ точки  $B$  къ прямой  $CD$  (пред. 11), мы будемъ имѣть два прямые угла  $CBE$  и  $EBD$  (опр. 7).

Но мы имѣемъ:

$$\angle CBE = \angle CBA + \angle ABE$$

прибавляя къ обѣимъ частямъ этого равенства уголъ  $EBD$  (акс. 2), получимъ:

$$\angle CBE + \angle EBD = \angle CBA + \angle ABE + \angle EBD.$$

Точно также, прибавляя къ обѣимъ частямъ равенства:

$$\angle ABD = \angle EBD + \angle ABE$$

по углу  $CBA$ , получимъ:

$$\angle ABD + \angle CBA = \angle EBD + \angle ABE + \angle CBA.$$

Откуда (акс. 1):

$$\angle ABD + \angle CBA = \angle CBE + \angle EBD$$

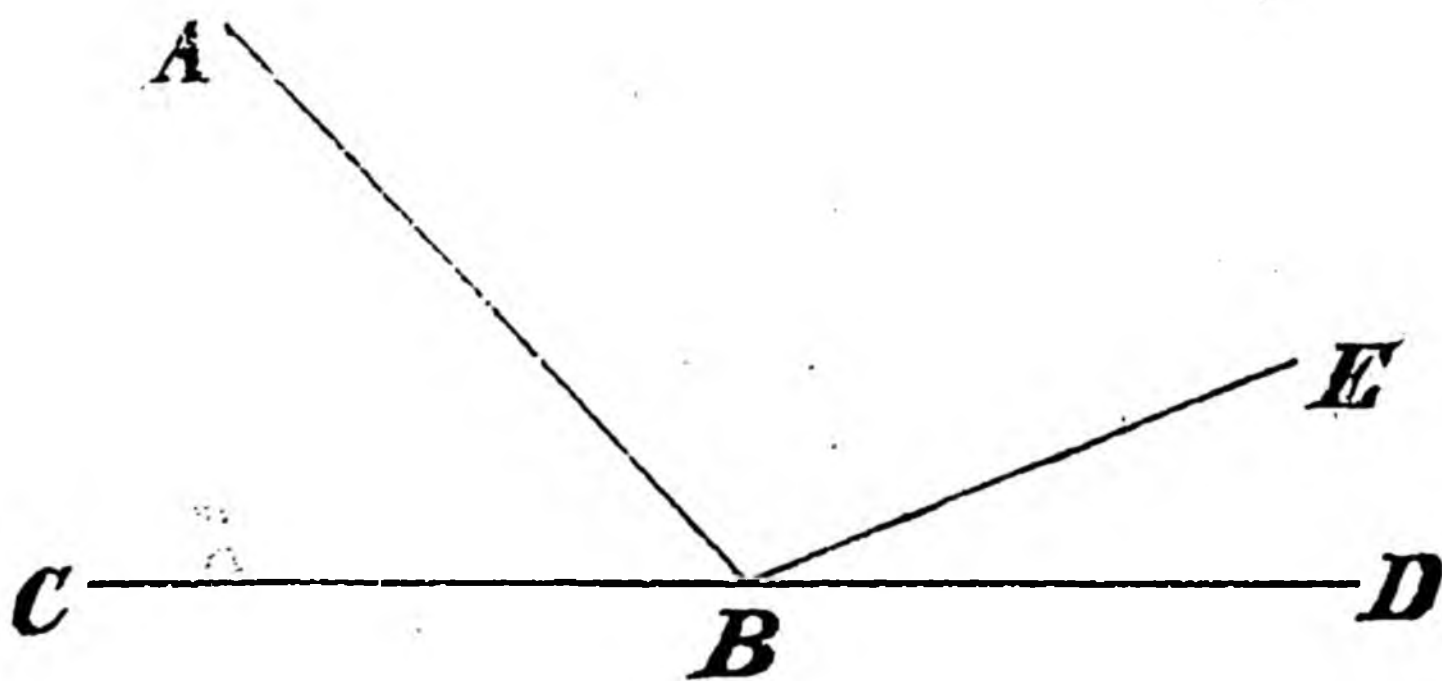
т. е.:

$$\angle ABD + \angle CBA = 2d.$$

*Предложеніе 14.* Если въ точкѣ  $B$  прямой  $AB$ , двѣ прямыя  $BC$  и  $BD$  составляютъ съ прямой  $AB$ , съ противоположныхъ ея сторонъ, смежные углы  $ABC$  и  $ABD$ , коихъ сумма равна двумъ прямымъ угламъ, то двѣ прямыя  $BD$  и  $BC$  составляютъ одну прямую  $CD$  (фиг. 62).

*Доказат.* Въ самомъ дѣлѣ, если бы  $BD$  не было продолженіе прямой  $BC$ , то продолженіе было бы на примѣръ  $BE$ .

Фиг. 62.



Въ этомъ предположеніи мы имѣемъ (пред. 13):

$$\angle CBA + \angle ABE = 2d.$$

Но по предположенію мы имѣемъ:

$$\angle ABC + \angle ABD = 2d$$

Слѣдовательно (акс. 1 и 10):

$$\angle ABC + \angle ABD = \angle ABC + \angle ABE.$$

Вычитая изъ обѣихъ частей по углу  $ABC$  (акс. 3), получимъ:

$$\angle ABD = \angle ABE$$

что невозможно (акс. 9). Слѣдовательно,  $BE$  не можетъ быть продолженіемъ прямой  $BC$ , тоже рассужденіе можно приложить и ко всякой другой прямой, отличной отъ  $BD$ . Слѣдовательно прямая  $BC$  и  $BD$  суть продолженія одна другой.

*Примѣч. 16.* Если бы Евклидъ опредѣлилъ сначала уголь выпрямленный, а затѣмъ прямой, какъ половину выпрямленнаго, то предложенія 13 и 14 можно бы было поставить въ началѣ. Для доказательства ихъ не было бы надобности въ предложеніи 11, такъ какъ они были бы просто слѣдствіемъ опредѣленія. Предложеніе 5 могло бы быть доказано проще.

*Предложеніе 15.* Если двѣ прямая  $AB$  и  $CD$  пересѣкаются въ точкѣ  $E$ , то въ этой точкѣ онѣ образуютъ равные противоположные углы  $AEC$  и  $DEB$ ,  $AED$  и  $CEB$ , которые равны, т. е. (фиг. 63):

$$\angle AEC = \angle DEB, \quad \angle AED = \angle CEB.$$

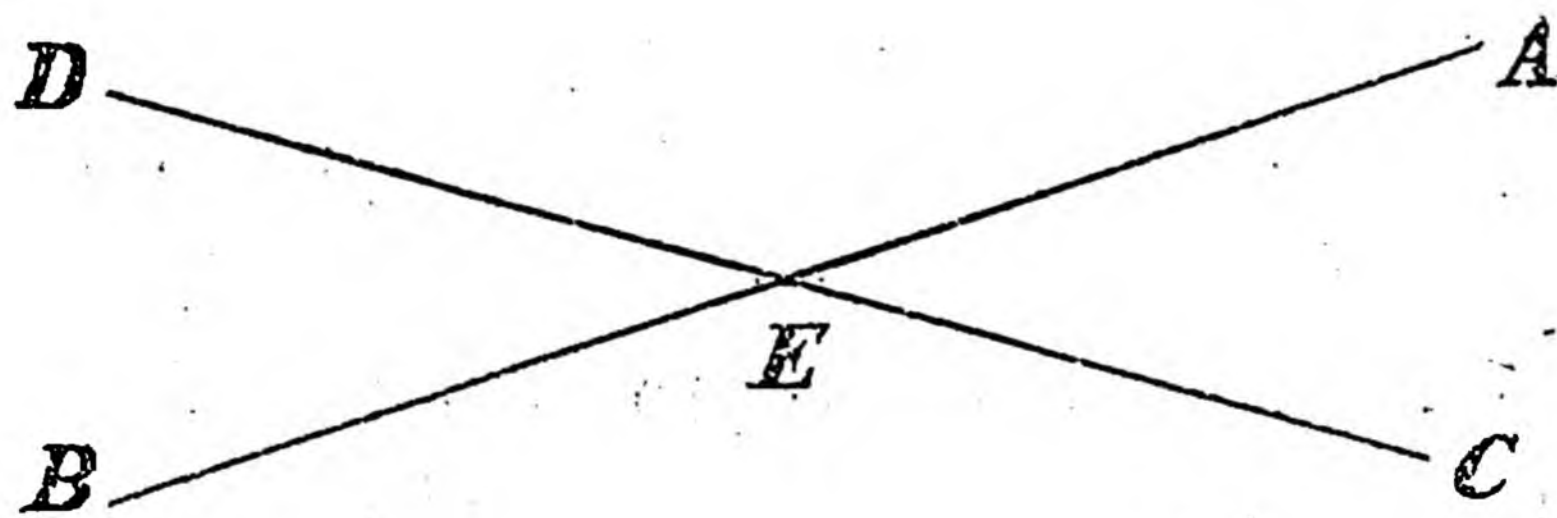
*Доказат.* Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ (пред. 13):

$$\angle AEC + \angle AED = 2d$$

и

$$\angle AED + \angle DEB = 2d$$

Фиг. 63.



Слѣдовательно (акс. 1 и 10):

$$\angle AEC + \angle AED = \angle AED + \angle DEB$$

отнимая отъ обѣихъ частей по углу  $AED$  (акс. 3), найдемъ:

$$\angle AEC = \angle DEB$$

Точно также можно доказать, что:

$$\angle CEB = \angle AED.$$

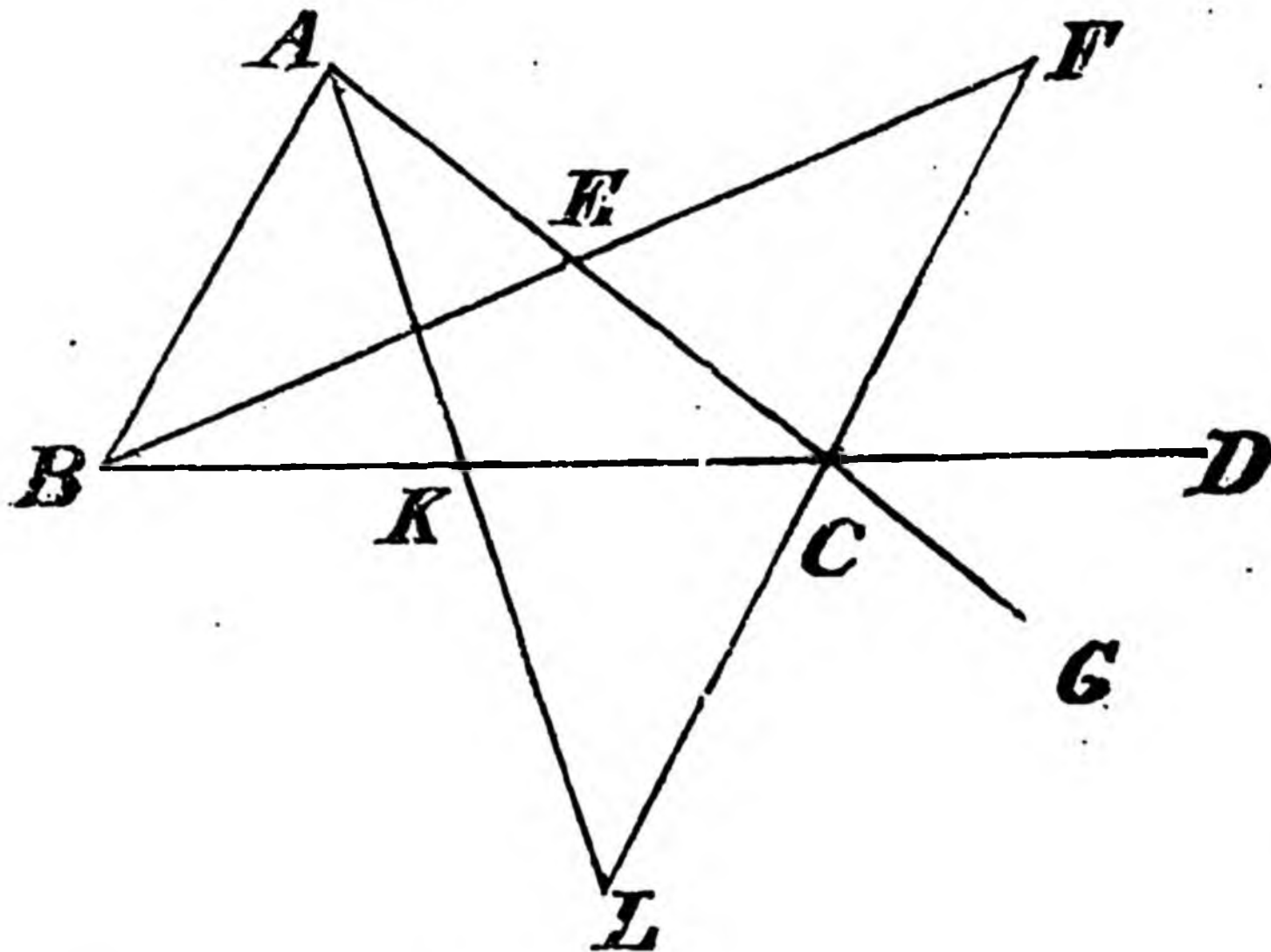
*Примѣч. 17.* Это предложеніе должно быть помѣщено въ началѣ, послѣ предложеній 13 и 14, какъ мы показали въ примѣч. 5.



**Предложение 16.** Если въ треугольникъ  $ABC$  продолжимъ какую нибудь изъ сторонъ, на примѣръ  $BC$ , то внѣшній уголъ  $ACD$  будетъ больше каждаго изъ внутреннихъ угловъ треугольника съ нимъ не смежныхъ  $CBA$  и  $BAC$  (фиг. 64).

**Доказат.** Раздѣлимъ сторону  $AC$  въ точкѣ  $E$  пополамъ (пред. 10), соединимъ  $B$  съ  $E$  и продолжимъ прямую  $BE$  такъ, чтобы  $BE=EF$  (пред. 3). Соединимъ  $F$  съ  $C$  прямою  $FC$ .

Фиг. 64.



Такъ какъ  $AE=EC$ ,  $BE=EF$  и  $\angle AEB=\angle FEC$  (пред. 15), то имѣемъ (пред. 4)  $\angle BAE=\angle ECF$ .

Но (акс. 9)  $\angle ACD > \angle ECF$ , слѣдовательно:

$$\angle ACD > \angle BAC.$$

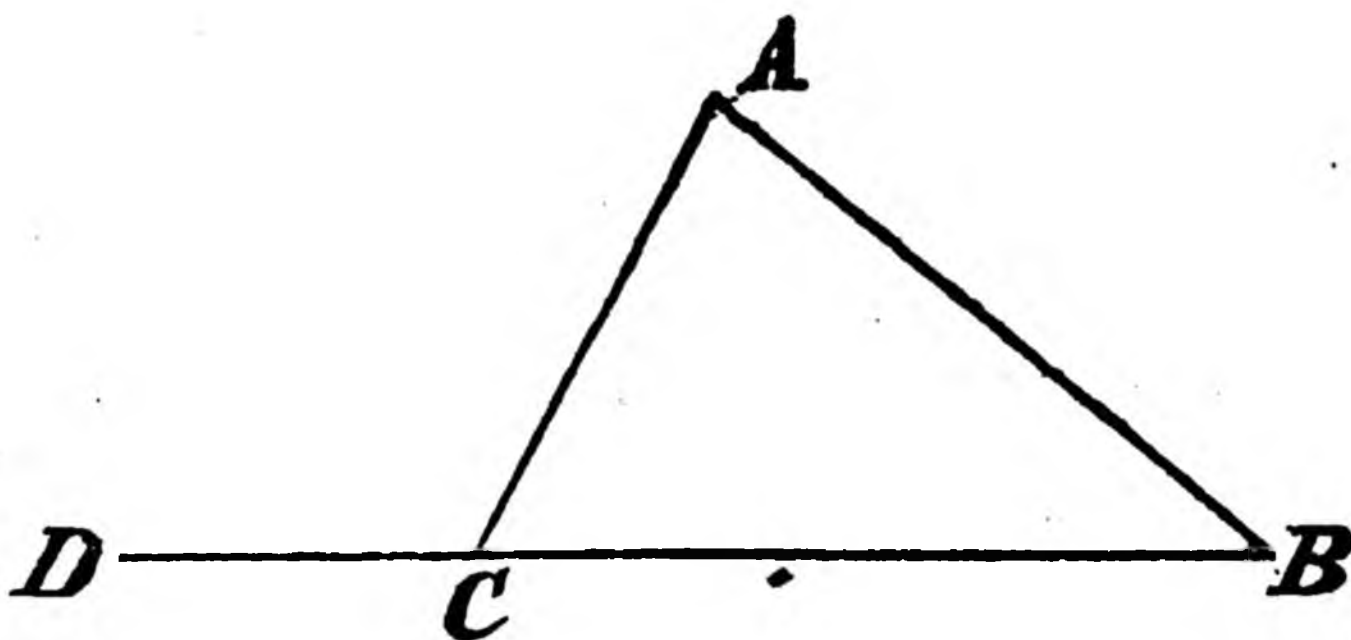
Раздѣляя сторону  $BC$  пополамъ и продолжая  $AC$ , мы, точно также, можемъ показать что  $\angle BCG=\angle ACD > \angle ABC$ .

**Примѣч. 18.** На основаніи 17 предложенія легко показать, 1) что перпендикуляръ, опущенный изъ какой нибудь точки на прямую, короче всякой другой прямой, соединяющей эту точку съ точками прямой, 2) что тѣ изъ этихъ прямыхъ, которыя встрѣчаютъ прямую дальше отъ основанія перпендикуляра больше тѣхъ которыя встрѣчаютъ ее ближе.

**Предложение 17.** Во всякомъ треугольникѣ  $ABC$  сумма двухъ, какихъ нибудь, внутреннихъ угловъ  $ABC$  и  $ACB$  меньше двухъ прямыхъ угловъ (фиг. 65).

**Доказат.** Продолжимъ сторону  $BC$  въ точкѣ  $D$ .

Фиг. 65.



Мы имѣемъ (пред. 16):

$$\angle ABC < \angle ACD.$$

Слѣдовательно (акс. 4):

$$\angle ABC + \angle ACB < \angle ACD + \angle ACB.$$

Но мы имѣемъ (пред. 13):

$$\angle ACD + \angle ACB = 2d$$

слѣдовательно:

$$\angle ABC + \angle ACB < 2d.$$

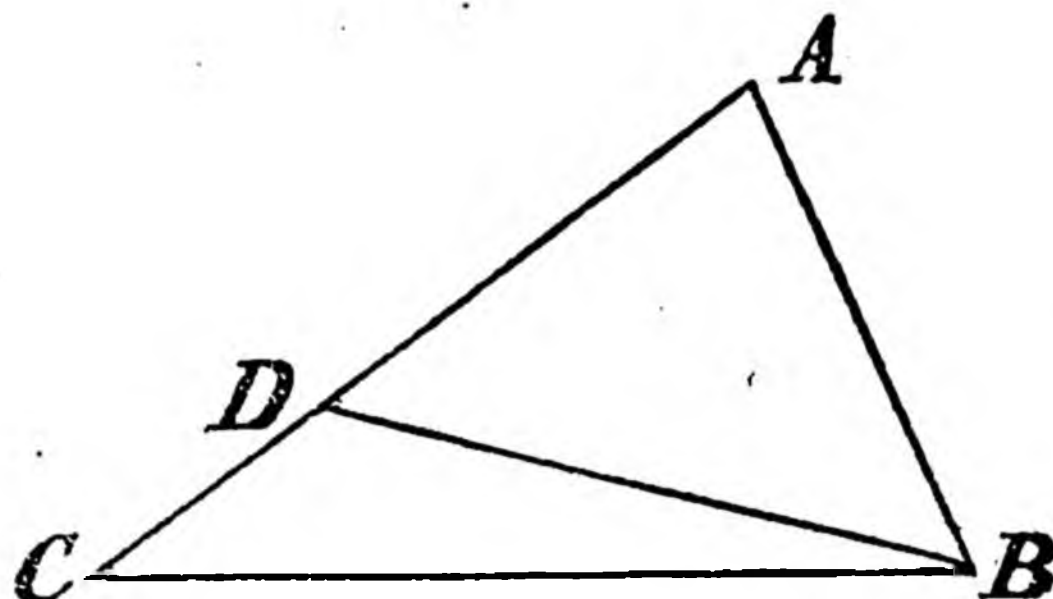
Точно также можно доказать, что:

$$\angle BCA + \angle CAB < 2d \quad \text{и} \quad \angle CAB + \angle ABC < 2d.$$

*Предложеніе 18.* Если въ треугольникѣ  $ABC$  двѣ стороны  $AC$  и  $AB$  неравны, то противъ большей стороны лежитъ и больший уголъ (фиг. 66).

*Доказат.* Пусть сторона  $AC > AB$ .

Фиг. 66.



Возьмемъ на  $AC$ ,  $AD = AB$  (пред. 3) и соединимъ точки  $B$  и  $D$ , то будемъ имѣть (пред. 16):

$$\angle ADB > \angle ACB.$$

Но уголъ  $ADB = ABD$ , слѣдовательно тѣмъ болѣе:

$$\angle ABC > \angle ACB.$$

*Предложеніе 19.* Если въ треугольникѣ  $ABC$  углы неравны, то большому углу  $ABC$  противолежитъ и большая сторона  $AC$ .

*Доказат.* Если бы  $AC$  не была больше  $AB$ , то она была бы равна, или меньше.

Если  $AC = AB$ , то (пред. 5)  $\angle ABC = \angle ACB$ .

Если  $AC < AB$ , то (пред. 18)  $\angle ABC < \angle ACB$ .

Эти два заключенія противорѣчатъ предположенію  $\angle ABC > \angle ACB$ , слѣдовательно:

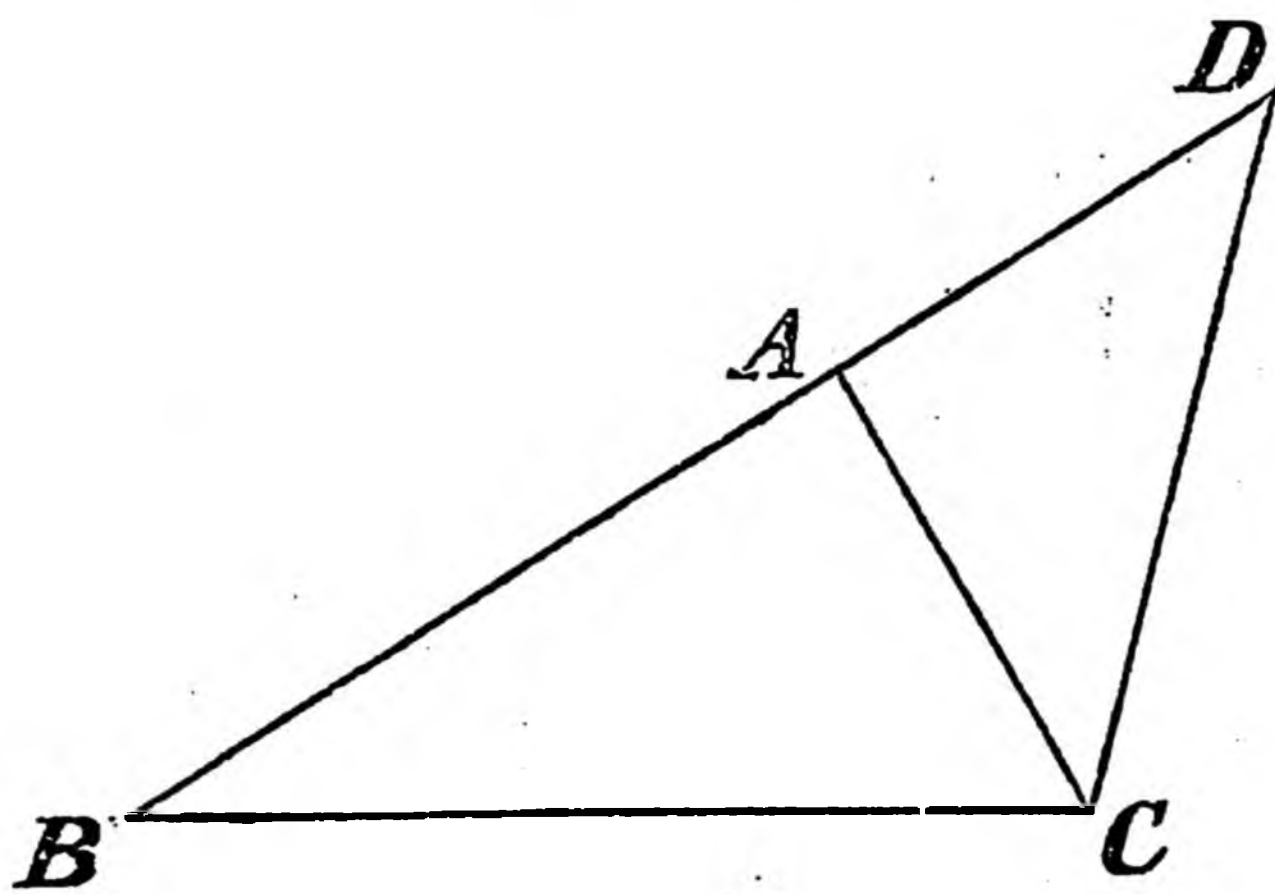
$$AC > AB.$$

*Примѣч. 19.* Предложенія 18 и 19 суть обратныя одно другому. 18 доказано прямо, а 19 приведено къ несообразности.

*Предложеніе 20.* Во всякомъ треугольникѣ  $ABC$ , сумма двухъ какихъ нибудь сторонъ  $AB$  и  $AC$  болѣе третьей стороны  $BC$  (фиг. 67).

*Доказат.* Продолжимъ сторону  $AB$  и отложимъ  $AD = AC$  (пред. 3), соединимъ  $C$  съ  $D$ .

Фиг. 67.



Такъ какъ  $AD = AC$ , то уголъ  $ACD = ADC$  (пред. 5). Но мы имѣемъ (акс. 9)  $\angle BCD > \angle ACD$ , слѣдовательно  $\angle BCD > \angle ADC$ . Откуда (пред. 19)  $BD > BC$ , т. е.:

$$BA + AC > BC.$$

Точно также можно доказать, что:

$$AB + BC > AC \text{ и } BC + AC > AB.$$

*Примѣч. 20.* Изъ этихъ неравенствъ слѣдуетъ, что разность двухъ сторонъ всегда меньше третьей стороны.

*Предложеніе 21.* Если въ треугольникѣ  $ABC$  концы основанія  $BC$  соединимъ съ точкою  $D$ , лежащею внутри треугольника, прямыми  $BD$  и  $CD$ , то 1) сумма этихъ двухъ прямыхъ менѣе суммы сторонъ  $AB$  и  $AC$ , и 2) уголъ  $BDC$ , заключающійся между  $BD$  и  $CD$ , больше угла  $BAC$ , противолежащаго основанію  $BC$  (фиг. 68).

*Доказат.* 1) Продолжимъ  $BD$  до встрѣчи съ  $AC$  въ точкѣ  $E$ . Въ треугольникѣ  $ABE$ , мы имѣемъ (пред. 20):

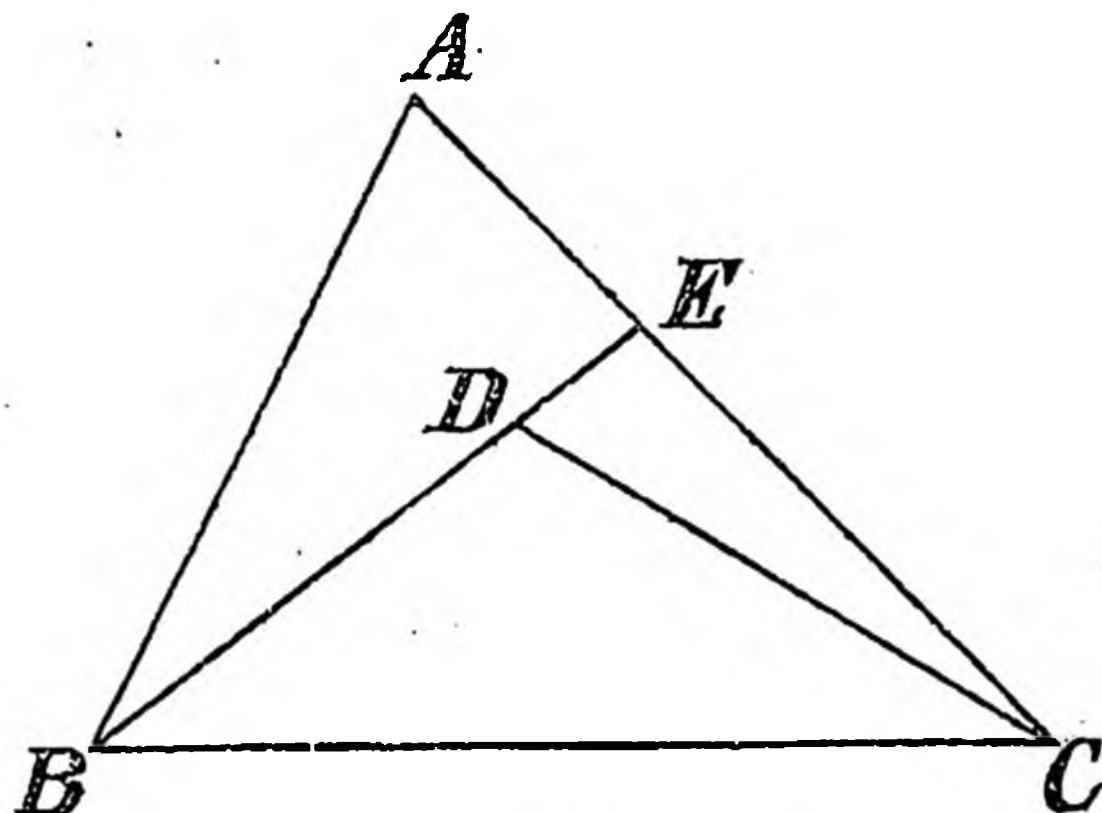
$$BA + AE > BE$$



Прибавляя къ обѣимъ частямъ этого неравенства по  $CE$  (акс. 4), найдемъ:

$$BA + AC > BE + EC. \quad (1)$$

Фиг. 68.



Въ треугольникѣ  $CDE$  (пред. 20), имѣемъ:

$$DE + EC > DC$$

прибавляя по  $BD$ , къ обѣимъ частямъ, найдемъ:

$$BE + EC > DC + BD. \quad (2)$$

Сравнивая неравенства (1) и (2), получимъ:

$$BA + AC > BD + DC.$$

2) Въ треугольникѣ  $DCE$  внѣшній уголъ  $BDC > BEC$  (пред. 16), а въ треугольникѣ  $EAB$  внѣшній уголъ  $BEC > BAC$ , слѣдовательно уголъ;

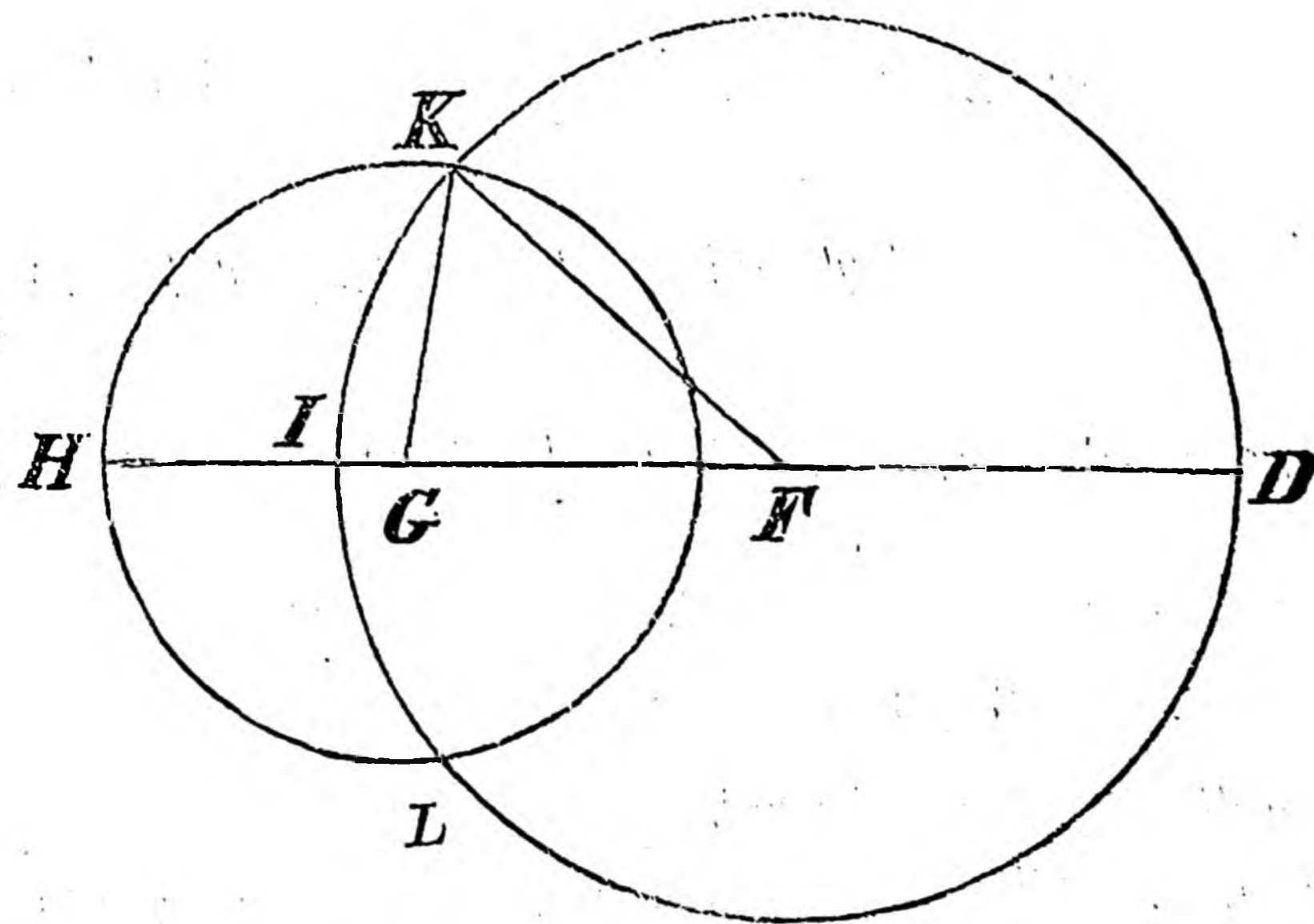
$$BDC > BAC.$$

*Предложеніе 22.* Построить треугольникъ, коего стороны были бы равны тремъ даннымъ прямымъ  $A$ ,  $B$  и  $C$ , такъ взятыхъ, что сумма двухъ какихъ нибудь изъ нихъ больше третьей (фиг. 69)?

*Рѣшеніе.* Проведемъ прямую  $DH$ , которая начинается въ  $D$  и продолжается неопредѣленно въ сторону точки  $H$ .

Фиг. 69.

$A$  —————  
 $B$  —————  
 $C$  —————



Возьмемъ  $DF = A$ ,  $FG = B$ ,  $GH = C$  (пред. 3). Изъ точки  $F$  какъ

изъ центра радіусомъ равнымъ  $DF$  опишемъ кругъ  $DKI$ . Изъ точки  $G$ , какъ изъ центра радіусомъ равнымъ  $GH$ , опишемъ кругъ  $KLH$ , который пересѣчетъ кругъ  $DKI$  въ точкѣ  $K$ . Соединимъ  $K$  съ  $F$  и  $K$  съ  $G$ , полученный треугольникъ  $KFG$  будетъ искомый. Въ самомъ дѣлѣ,  $FD=FK$  (опр. 15); но  $FD=A$ , слѣдовательно и  $FK=A$ . Точно также  $GK=GH$ , но  $GH=C$ , слѣдовательно  $GK=C$ . Кромѣ этого мы имѣемъ  $FG=B$ , слѣдовательно стороны треугольника  $FGK$  суть данныя прямыя  $A, B, C$ .

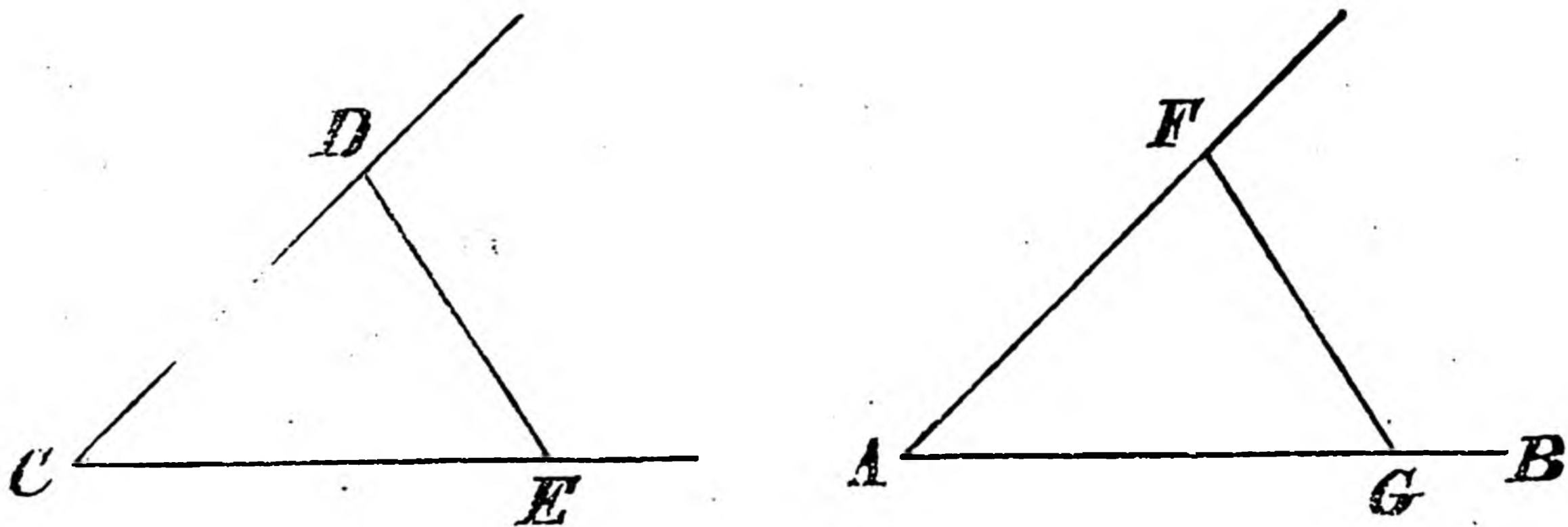
*Примѣч. 21.* У Евелида въ этомъ предложеніи пропущено условіе: что сумма двухъ, какихъ нибудь, изъ данныхъ прямыхъ, больше третьей. Гуель (Hoüel) поэтому говоритъ, что Евелидъ забылъ это условіе. Я думаю, что Евелидъ, доказавъ предложеніе 20, полагалъ что это условіе само собою подразумѣвается. Кромѣ этого обвиняютъ Евелида въ томъ, что онъ не показалъ, что круги  $DKL$  и  $KLH$  пересѣкутся. Это легко показать слѣдующимъ образомъ:

Изъ выше упомянутого условія слѣдуетъ, что  $DG > HG$  и что  $HG > GI$ ,  $GI$  есть разность между  $DF$  и  $GF$ . Слѣдовательно, точка  $D$  лежитъ внѣ круга  $HKL$ , а точка  $I$  лежитъ внутри того-же круга, откуда слѣдуетъ, что кругъ  $DKL$ , имѣя точки внѣ и внутри круга  $HKL$ , пересѣчетъ этотъ кругъ въ двухъ точкахъ.

*Предложеніе 23.* Въ точкѣ  $A$  на данной прямой  $AB$  построить плоскій уголъ равный данному углу  $DCE$  (фиг. 70)?

*Рѣшеніе.* На сторонахъ даннаго угла  $DCE$  возьмемъ двѣ произвольныя точки  $D$  и  $E$  и соединимъ ихъ прямою  $DE$ .

Фиг. 70.



Построимъ затѣмъ треугольникъ  $AFG$ , такой, чтобы:

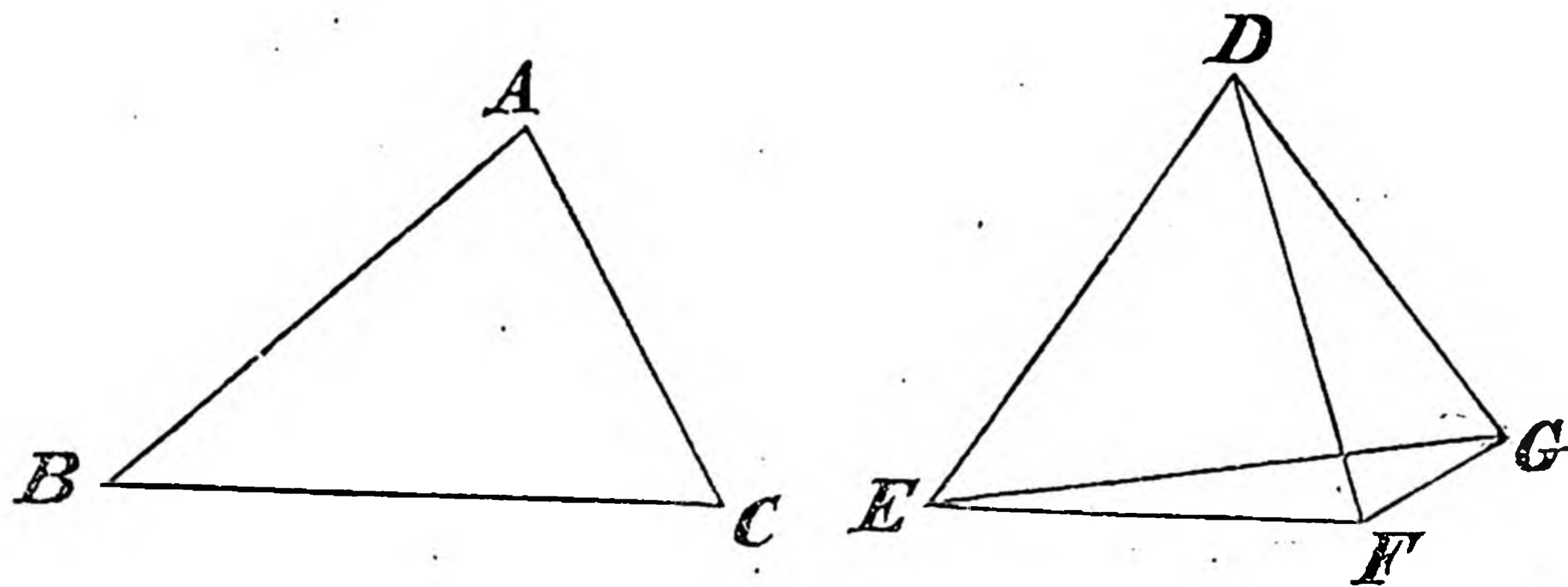
$$AF=CD, AG=CE, FG=DE \text{ (пред. 22)}$$

то будемъ имѣть уголъ  $FAG=DCE$  (пред. 8).

*Предложеніе 24.* Если два треугольника  $ABC$  и  $DEF$  (фиг. 71) имѣютъ по двѣ равныя стороны, каждая каждой,  $AB=DE$ ,  $AC=DF$ , а углы заключенные между этими сторонами не равны, уголъ  $BAC > EDF$ , то сторона  $BC$ , противолежащая большему углу, будетъ больше стороны  $EF$ , противолежащей меньшему углу (фиг. 71).

*Доказат.* Построимъ на сторонѣ  $DE$  треугольника  $DEF$ , въ точкѣ  $D$  уголъ  $EDG = BAC$  (пред. 23), отложимъ  $DG = AC = DF$  и соединимъ точку  $G$  съ точками  $E$  и  $F$ .

Фиг. 71.

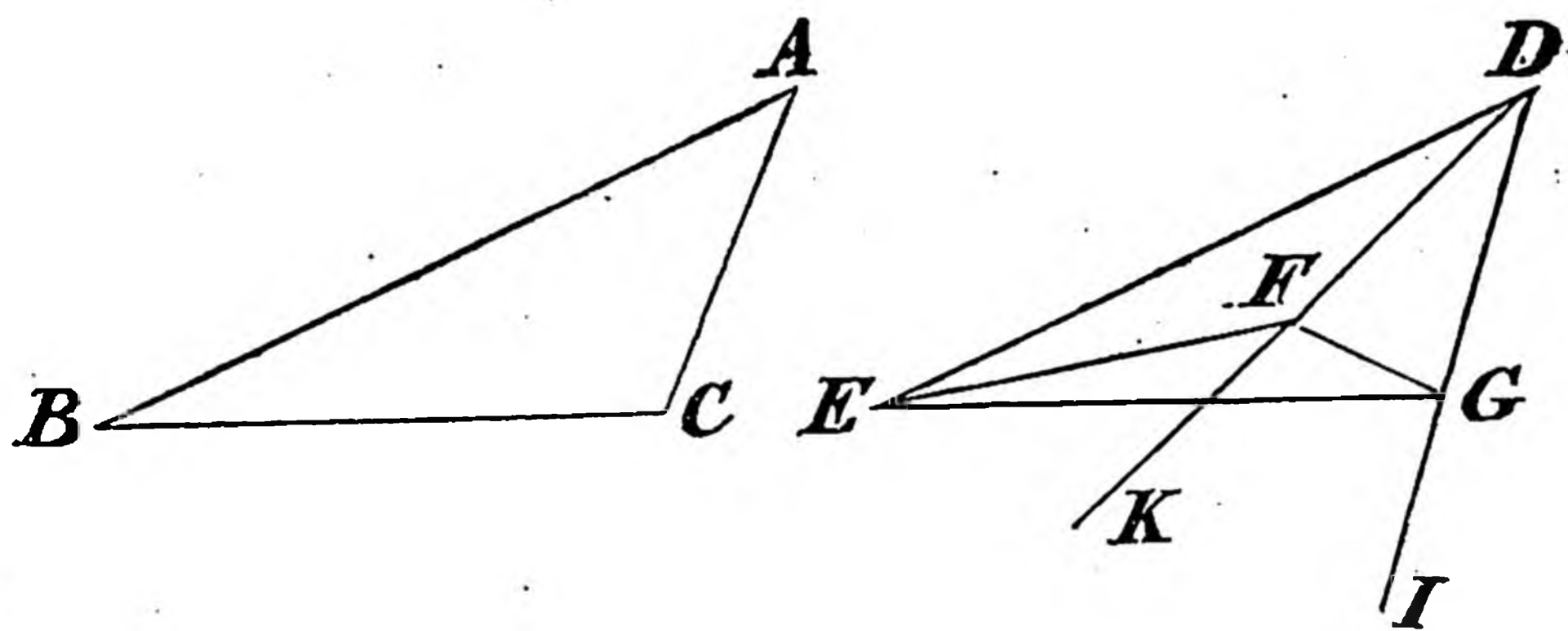


Такъ какъ  $AB = DE$ ,  $AC = DG$  и  $\angle BAC = \angle EDG$ , то слѣдуетъ (пред. 4), что  $BC = EG$ .

Но въ треугольникѣ  $FDG$  мы имѣемъ  $DG = DF$ , откуда (пред. 3),  $\angle DFG = \angle DGF$ , слѣдовательно  $\angle EFG > \angle FGD$ , и какъ  $\angle FGD > \angle FGE$ , то тѣмъ болѣе  $\angle EFG > \angle FGE$ . слѣдовательно (пред. 19)  $EG = BC > EF$ .

*Примѣч. 22.* У Евклида разсмотрѣнъ только тотъ случай, въ которомъ, какъ выше, сторона  $BC$  упала внутри угла  $DEF$ , но можетъ случиться, что эта сторона упадетъ внѣ угла  $DEF$  (фиг. 72). Въ этомъ случаѣ, въ равнобедренномъ треугольникѣ  $DFG$  углы ниже основанія  $KFG$  и  $IGF$  равны, (пред. 5), но  $\angle EFG > \angle KFG$ , слѣдовательно  $\angle EFG > \angle IGF$ , а тѣмъ болѣе  $\angle EFG > \angle EGF$  (акс. 9), откуда сторона  $EG = BC > EF$  (пред. 19).

Фиг. 72.



Симсонъ замѣчаетъ, что случай когда  $EG$  пойдетъ внѣ угла  $DEF$ , можетъ быть всегда сведенъ на первый, если за сторону  $DE$  взять меньшую изъ сторонъ  $DE$  и  $DF$ . Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ точки  $F$  и  $G$  лежатъ на окружности круга, описаннаго изъ точки  $D$ , а точка  $E$  будетъ лежать внутри этого круга. Изъ этого ясно, что точки  $D$  и  $E$  будутъ лежать по одну сторону прямой  $FG$ . Случай въ которомъ  $EG$  пойдетъ по  $EF$  очевиденъ.

*Предложеніе 25.* Если два треугольника  $ABC$  и  $DEF$  имѣютъ по двѣ равныя стороны, каждая каждой,  $AB = DE$ ,  $AC = DF$ , а третія стороны неравны  $BC > EF$ , то уголъ  $BAC$ , противолежащій большей сторонѣ, будетъ больше угла  $EDF$ , противолежащаго меньшей сторонѣ, (фиг. 71).

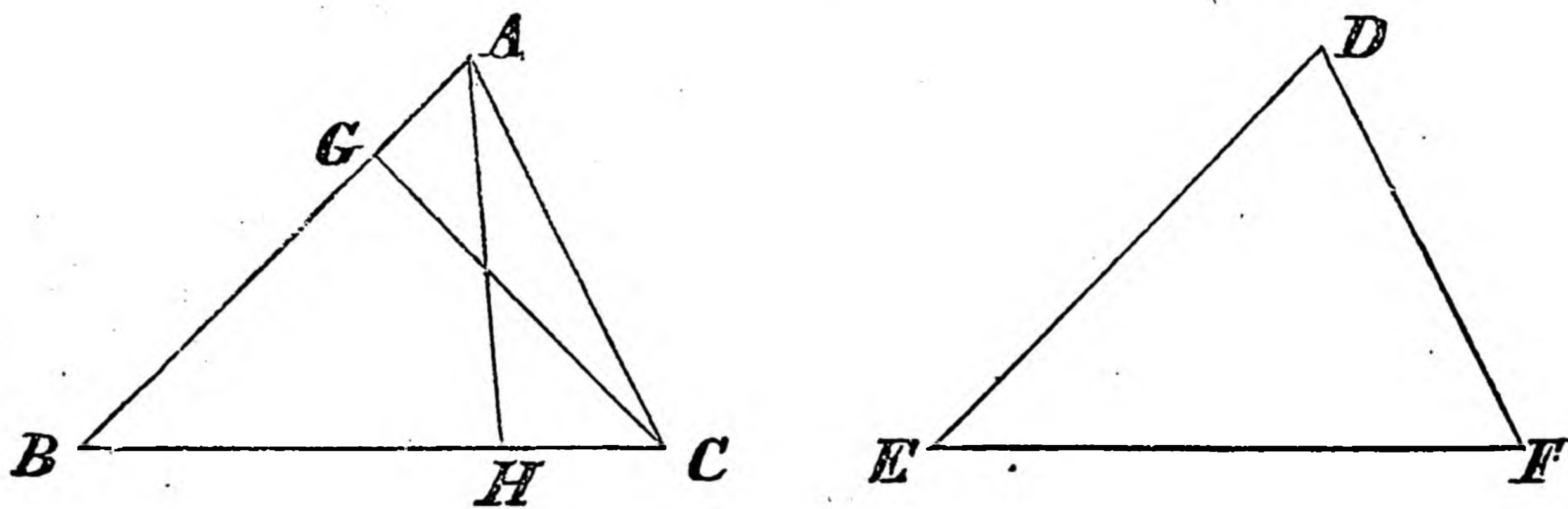


*Доказат.* Если бы угол  $BAC$  не былъ больше угла  $EDF$ , то онъ можетъ быть или равенъ, или меньше его. Въ первомъ случаѣ, мы бы имѣли (пред. 4)  $BC=EF$ ; а во второмъ (пред. 24)  $BC<EF$ . Оба эти случая противорѣчатъ предположенію  $BC>EF$ , слѣдовательно необходимо  $\angle BAC > \angle EDF$ .

*Предложеніе 26.* Если два треугольника  $ABC$  и  $DEF$  имѣютъ по два равные угла, каждый каждому,  $\angle ABC = \angle DEF$ ,  $\angle ACB = \angle DFE$  и по равной сторонѣ, которая или 1) прилежитъ равнымъ угламъ или 2) противолежитъ одному изъ равныхъ угловъ, напримѣръ  $AB=DE$ , то двѣ остальные стороны будутъ равны, каждая каждой и третій уголъ  $BAC$  будетъ равенъ третьему углу  $EDF$  (фиг. 73).

*Доказат.* 1). Сторона  $BC=EF$ . Если бы сторона  $AB$  не была равна сторонѣ  $DE$ , то была-бы, напримѣръ, больше,  $AB>DE$ . На сторонѣ  $AB$  возьмемъ  $BG=ED$  и соединимъ  $C$  съ  $G$ .

Фиг. 73.



Такъ какъ  $BG=ED$ ,  $BC=EF$ ,  $\angle ABC = \angle DEF$ , то (пред. 4)  $\angle BCG = \angle EFD = \angle BCA$ , что невозможно (акс. 9). Слѣдовательно  $AB$  не можетъ быть больше  $DE$ . Точно также  $AB$  не можетъ быть меньше  $DE$ . Слѣдовательно  $AB=DE$ . Но какъ  $AB=DE$ ,  $BC=EF$  и  $\angle ABC = \angle DEF$ , то (пред. 4)  $AC=DF$  и  $\angle BAC = \angle EDF$ .

2). Если стороны, противолежащія одному изъ равныхъ угловъ, равны  $AB=DE$ .

Если бы стороны  $BC$  и  $EF$  не были равны, то  $BC$  была бы напримѣръ больше  $EF$ . На сторонѣ  $BC$  возьмемъ  $BH=EF$  и соединимъ  $H$  съ  $A$ .

Такъ какъ мы имѣемъ теперь:

$$BH=EF, AB=DE, \angle ABC = \angle DEF$$

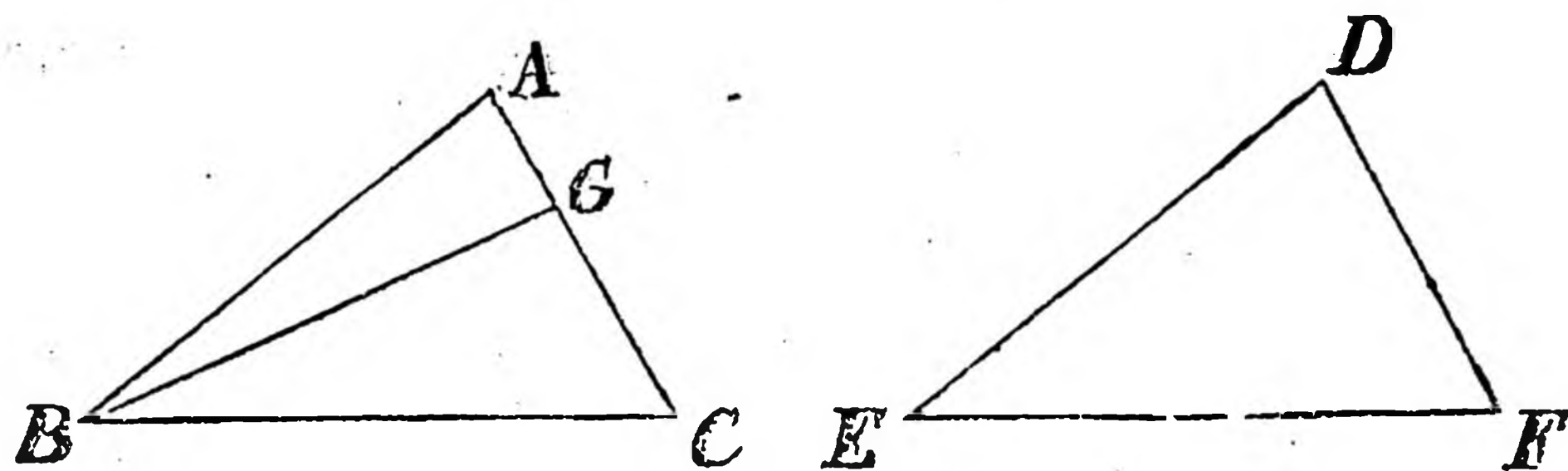
то (пред. 4)  $\angle BHA = \angle EFD = \angle BCA$ , что невозможно (пред. 14). Слѣдовательно  $BC$  не можетъ быть больше  $EF$ , точно также  $BC$  не можетъ быть и меньше  $EF$ , слѣдовательно  $BC=EF$ .  $BC=EF$ ,  $AB=DE$ ,  $\angle ABC = \angle DEF$ , слѣдовательно (пред. 4):

$$AC=DF, \angle BAC=\angle EDF.$$

*Примѣч. 23.* Кромѣ случаевъ равенства треугольниковъ данныхъ Евклидомъ (пред. 4, 26) есть еще слѣдующій: если два треугольника  $ABC$  и  $DEF$  имѣютъ по двѣ равныя стороны, каждая каждой,  $AB=DE$ ,  $BC=EF$  и уголъ  $ACB$ , противолежащій большей изъ равныхъ сторонъ  $AB>BC$ , будетъ равенъ углу  $DFE$ , противолежащему сторонѣ  $DE>EF$ , то и остальные части треугольника будутъ равны (фиг. 74).

*Доказат.* Мы имѣемъ  $AB>BC$ ,  $AB=DE$ ,  $BC=EF$  и  $\angle ACB=\angle DFE$ . Если бы сторона  $AC=DF$ , то и остальные части треугольниковъ  $ABC$  и  $DEF$  были бы равны.

Фиг. 74.



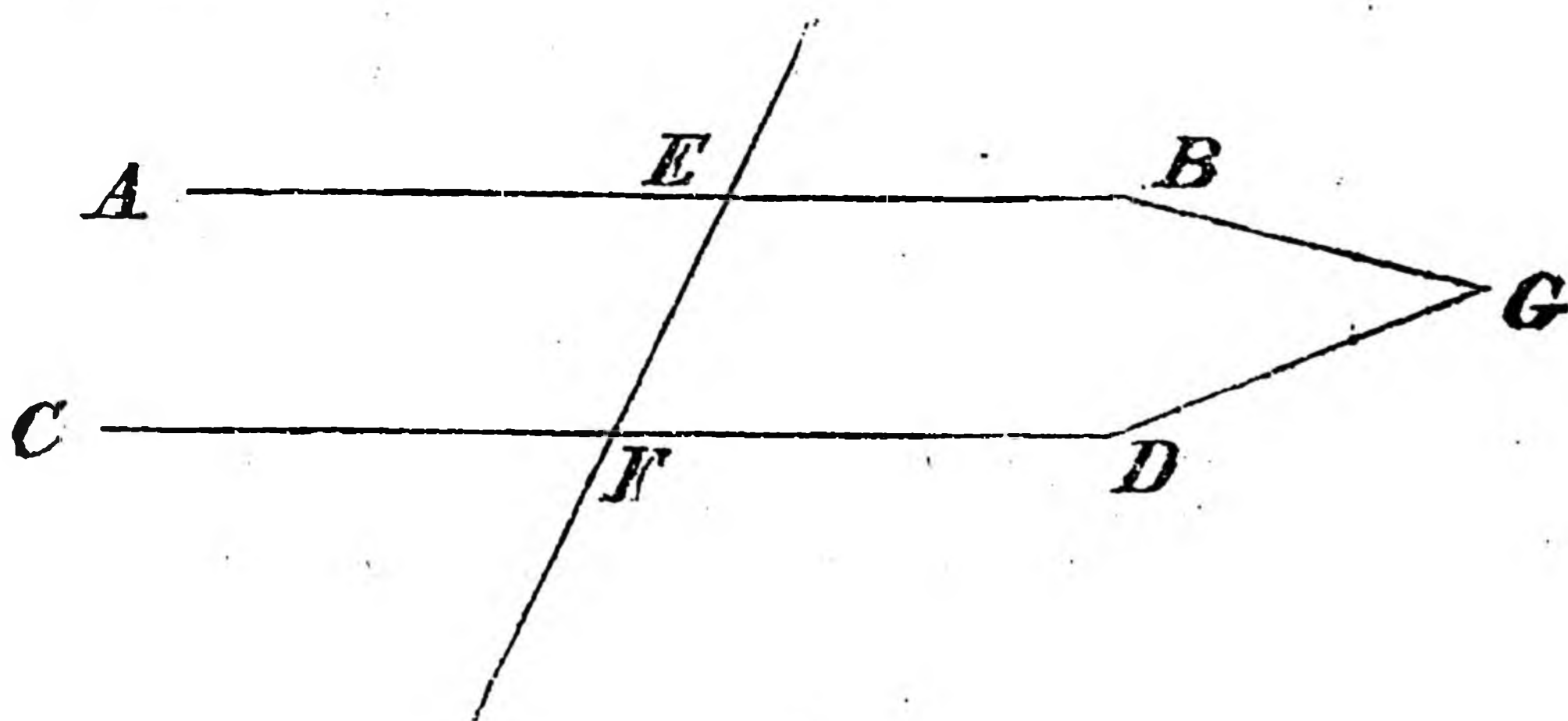
Положимъ, что  $AC>DF$ , отложимъ на сторонѣ  $AC$ ,  $CG=DF$ , то  $\triangle GBC=\triangle DEF$  (пред. 4), откуда  $DE=BG=BA$ , слѣдовательно (пред. 5),  $\angle BAC=\angle BGA$ . Но уголъ  $BGA>\angle BCG$  (пред. 16), слѣдовательно  $\angle BAC>\angle BCA$ , откуда слѣдуетъ (пред. 19)  $AB<BC$ , что противорѣчитъ предположенію. Точно также можно показать что не можетъ быть  $AC<DF$ . Симсонъ формулируетъ иначе этотъ случай равенства треугольниковъ. Если два треугольника  $ABC$  и  $DEF$  имѣютъ по двѣ стороны равныя, каждая каждой,  $AB=DE$ ,  $BC=EF$  и уголъ  $ACB$ , противолежащій сторонѣ  $AB$ , равенъ углу  $DFE$  противолежащему сторонѣ  $DE$ , то треугольники будутъ равны и въ остальныхъ частяхъ, если углы  $BAC$  и  $EDF$ , противолежащіе равнымъ сторонамъ  $BC$  и  $EF$ , будутъ или оба острые, или прямые, или тупые. Предложеніе, такимъ образомъ выраженное легко, доказать предъидущимъ приѣмомъ.

Замѣтимъ, что треугольники, имѣющіе по двѣ стороны равныя и по углу противолежащему одной изъ равныхъ сторонъ, не будутъ равны, если не добавитъ условія, что равные углы противолежатъ большей изъ равныхъ сторонъ, или что другіе углы, противолежащіе равнымъ сторонамъ, оба острые, или прямые, или тупые. Это видно на фигурѣ 66, если точку  $F$  соединимъ съ  $B$ . Здѣсь мы будемъ имѣть два треугольника  $ABC$  и  $DCB$ , которые имѣютъ по двѣ равныя стороны  $AB=DB$ ,  $CB$  общая, и уголъ  $ACB$  также общій, при этихъ условіяхъ, треугольникъ  $CDB$  есть часть треугольника  $ABC$ .

*Предложеніе 27.* Если двѣ прямыя  $AB$  и  $CD$  пересѣчены третьей  $EF$ , составляютъ съ  $EF$  равные внутренніе перекрестные углы  $AEF$  и  $EFD$ , то прямыя  $AB$  и  $CD$  не встрѣтятся (фиг. 75).

*Доказат.* Положимъ, что прямая  $AB$  и  $CD$  по нѣкоторомъ продолженіи встрѣтятся въ точкѣ  $G$ . Въ треугольникѣ  $GEF$  внѣшній уголъ

Фиг. 75.



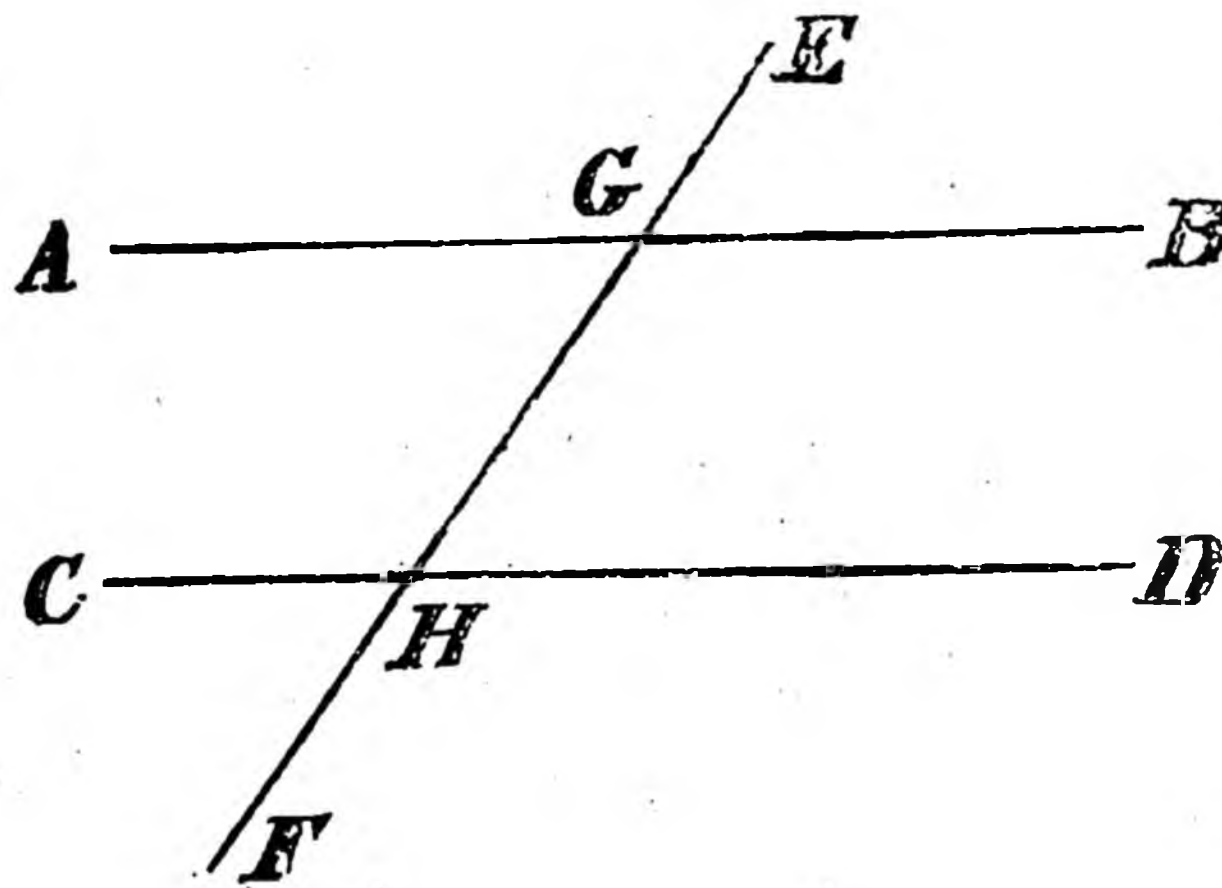
$\angle AEF$  долженъ быть больше внутреннего угла  $EFG$  (пред. 16), что противорѣчитъ предположенію  $\angle AEF = \angle EFD$ . Слѣдовательно  $AB$  и  $CD$  не могутъ встрѣтиться. По той же причинѣ онѣ не могутъ встрѣтиться и по другую сторону прямой  $EF$ .

*Предложеніе 28.* Если двѣ прямая  $AB$  и  $CD$ , пересѣченныя третьей  $EF$ , составляютъ съ  $EF$ : 1) равные внутренно-внѣшніе односторонніе углы  $EGB$  и  $GHD$ , или 2) если сумма внутреннихъ угловъ  $BGN$  и  $GHD$ , лежащихъ по одну сторону прямой  $EF$ , равна двумъ прямымъ, то прямая  $AB$  и  $CD$  не встрѣтятся (фиг. 76).

*Доказат.* 1) Такъ какъ  $\angle EGB = \angle GHD$ , а  $\angle EGB = \angle AGH$  (пред. 15), то  $\angle AGH = \angle GHD$ . Слѣдовательно (пред. 27) прямая  $AB$  и  $CD$  не встрѣтятся.

2) Такъ какъ  $\angle BGN + \angle GHD = 2d$ , а  $\angle AGH + \angle BGN = 2d$ , то

Фиг. 76.



слѣдуетъ  $\angle AGH + \angle BGN = \angle BGN + \angle GHD$  (акс. 1, 10). Вычитая по  $\angle BGN$ , найдемъ (акс. 3), что  $\angle AGH = \angle GHD$ . Слѣдовательно, (пред. 27) прямая  $AB$  и  $CD$  не встрѣтятся.

*Примѣч. 24.* Всѣ двадцать восемь предъидущихъ предложеній, къ которымъ слѣдуетъ прибавить еще предложеніе: что сумма внутреннихъ угловъ во всякомъ треугольникѣ на плоскости не можетъ быть болѣе двухъ прямыхъ (см. введ. пред. 2), доказаны только на



основаніи 8-й и 12-й аксіомъ. Затѣмъ для дальнѣйшаго развитія системы необходимо еще одно свойство плоскости, которое Евклидъ и далъ въ видѣ 11-й аксіомы. Нѣкоторые геометры, вмѣсто одиннадцатой аксіомы Евклида, берутъ другое ея видоизмѣненіе: двѣ пересѣкающіяся прямыя не могутъ быть обѣ параллельны третьей прямой. Остроградскій вмѣсто одиннадцатой аксіомы принялъ слѣдующую: двѣ прямыя, параллельныя третьей, параллельны между собою. Такъ какъ это предложеніе имѣетъ мѣсто и на плоскости и на псевдо-сферѣ, то оно не отдѣляетъ одну поверхность отъ другой, а слѣдовательно за аксіому принято быть не можетъ. И въ самомъ дѣлѣ, Остроградскій сейчасъ же сводитъ свою аксіому на евклидовскую, выраженную въ формѣ выше написанной: двѣ пересѣкающіяся прямыя не могутъ быть обѣ параллельны третьей (См. Руководство начальной геометріи, курсъ II-го общаго класса, стр. 26 и 27). Евклидъ, какъ видно, хотѣлъ строго отдѣлить предложенія, которыя доказаны только на основаніи 8-й и 12-й аксіомъ, отъ остальныхъ. Такой порядокъ вполне согласенъ съ новѣйшими изслѣдованіями.

*Предложеніе 29.* Если двѣ параллельныя прямыя  $AB$  и  $CD$ , пересѣчены третьей прямою  $EF$ , то онѣ составятъ съ  $EF$ : 1) равные внутренніе перекрестные углы  $AGH$  и  $GHD$ , 2) равные внутренне-внѣшніе односторонніе углы  $EGB$  и  $GHD$  и 3) внутренніе односторонніе углы  $BGH$  и  $GHD$ , коихъ сумма равна двумъ прямымъ (фиг. 76).

*Доказат.* 1) Если бы углы  $AGH$  и  $GHD$  были бы не равны, напри-  
мѣръ, если бы  $\angle AGH > \angle GHD$ , то прибавляя къ обѣмъ частямъ неравенства уголъ  $BGH$  (акс. 4), будемъ имѣть:

$$\angle AGH + \angle BGH > \angle BGH + \angle GHD.$$

Но мы имѣемъ  $\angle AGH + \angle BGH = 2d$  (пред. 13), слѣдовательно,  $\angle BGH + \angle GHD < 2d$ .

Изъ этого послѣдняго неравенства слѣдуетъ (акс. 11), что прямыя  $AB$  и  $CD$  встрѣтятся, что противорѣчитъ предположенію. Слѣдовательно углы  $AGH$  и  $GHD$  не могутъ быть неравными.

2) Такъ какъ  $\angle AGH = \angle GHD$  и  $\angle AGH = \angle EGB$  (пред. 15), то слѣдуетъ, что  $\angle EGB = \angle GHD$ .

3) Такъ какъ  $\angle EGB = \angle GHD$ , то прибавляя къ обѣмъ частямъ по углу  $BGH$  (акс. 2), мы будемъ имѣть:

$$\angle EGB + \angle BGH = \angle BGH + \angle GHD$$

но

$$\angle EGB + \angle BGH = 2d \text{ (пред. 13)}$$

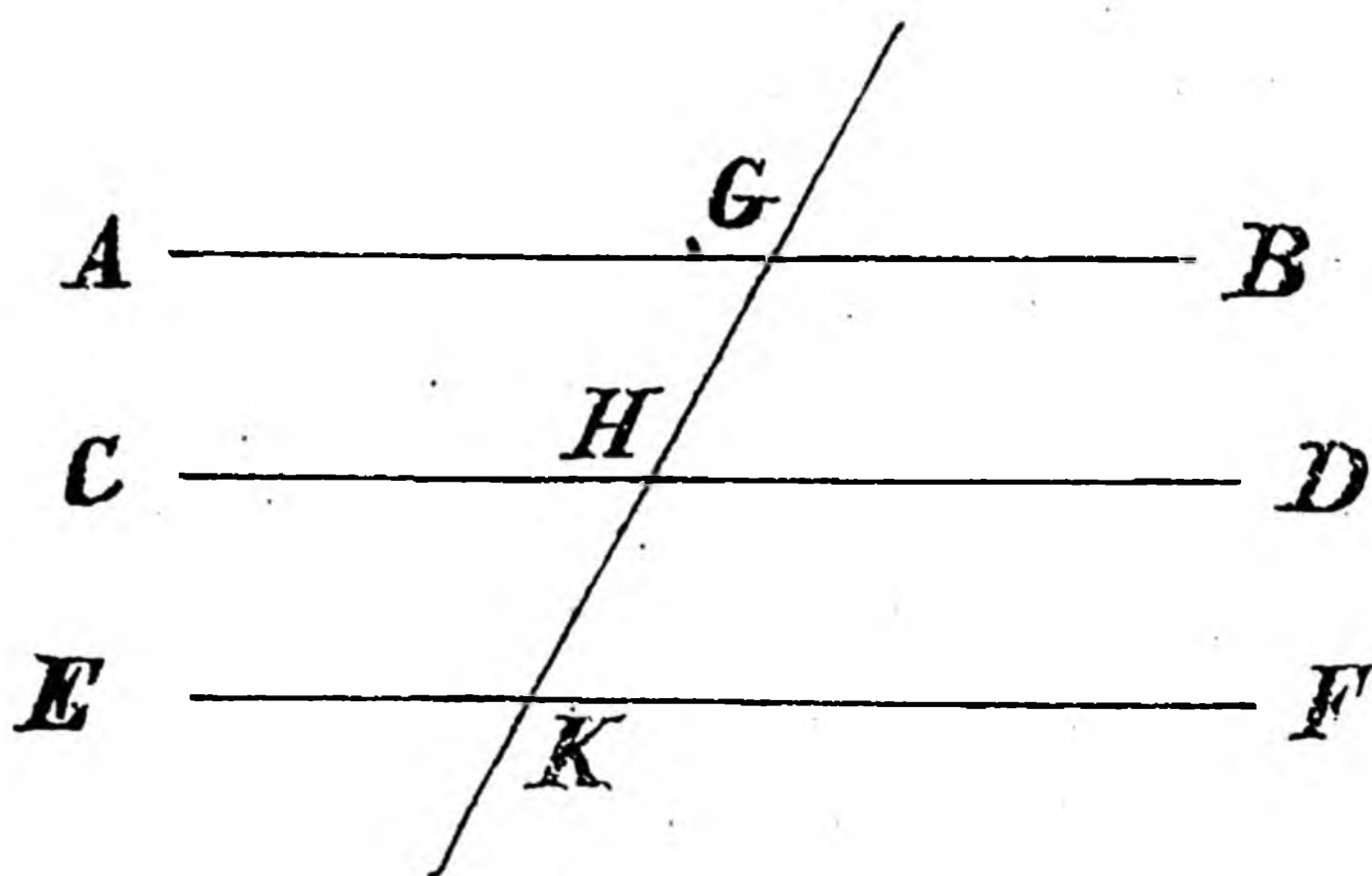
слѣдовательно:

$$\angle BGH + \angle GHD = 2d$$

*Примѣч. 25.* Было бы проще, изъ этого послѣдняго свойства, которое есть ничто иное какъ одиннадцатая аксіома, вывести свойства: 1 и 2.

**Предложение 30.** Двѣ прямыя  $AB$  и  $EF$ , параллельныя третьей  $CD$ , параллельны между собою (фиг. 77).

Фиг. 77.

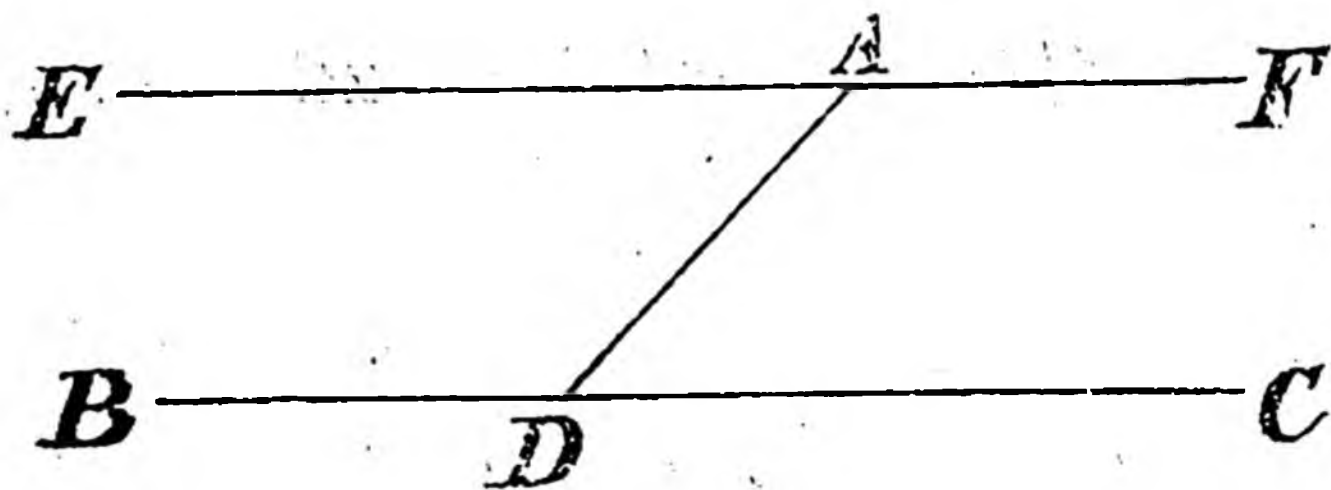


**Доказат.** Пересѣчемъ эти три прямыя прямою  $GK$ . Такъ какъ  $AB \parallel CD$ , то мы имѣемъ  $\angle AGH = \angle GHD$  (пред. 29). Точно также, такъ какъ  $CD \parallel EF$ , то  $\angle GHD = \angle HKF$ , откуда  $\angle AGH = \angle HKF$ , слѣдовательно,  $AB$  и  $EF$  параллельны (пред. 27).

**Примѣч. 26.** Если прямая  $EF$  лежитъ между прямыми  $AB$  и  $CD$ , то очевидно  $AB$  и  $CD$  не могутъ встрѣтиться, не встрѣтивъ прямой  $EF$ . Если же  $AB$  и  $CD$  лежатъ по одну сторону прямой  $EF$ , то онѣ не могутъ встрѣтиться, потому что въ такомъ случаѣ, чрезъ точку ихъ встрѣчи, было бы проведено двѣ параллельныя прямой  $EF$ .

**Предложение 31.** Чрезъ данную точку  $A$  внѣ данной прямой  $BC$  провести прямую параллельную  $BC$  (фиг. 78)?

Фиг. 78.



**Рѣшеніе.** На прямой  $BC$  возьмемъ какую нибудь точку  $D$  и соединимъ  $A$  съ  $D$ . Построимъ уголъ  $DAE = ADC$  (пред. 23) и продолжимъ  $EA$  до  $F$ . Прямая  $EF$  и будетъ параллельна  $BC$  (пред. 27).

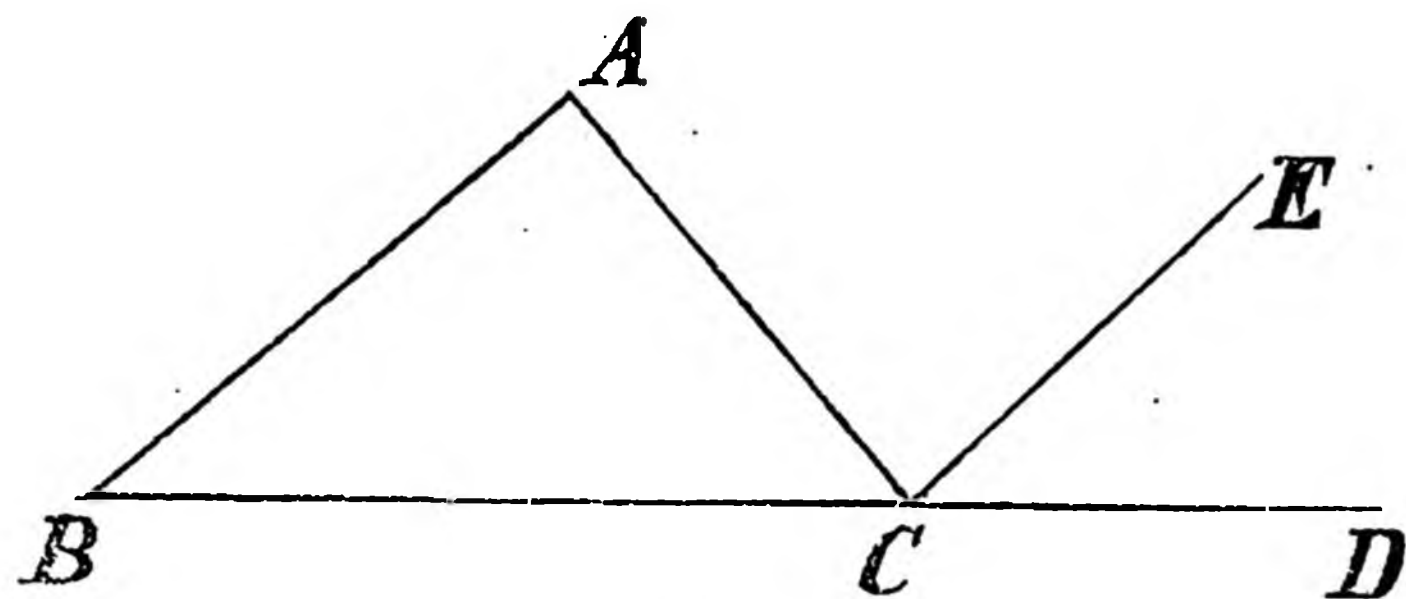
**Предложение 32.** Если въ треугольникѣ  $ABC$  продолжимъ сторону  $BC$ , то 1) внѣшній уголъ  $ACD$  будетъ равенъ суммѣ двухъ внутреннихъ угловъ съ нимъ не смежныхъ  $BAC$  и  $ABC$ , 2) сумма всѣхъ трехъ внутреннихъ угловъ  $BAC$ ,  $ABC$  и  $ACB$  равна двумъ прямымъ угламъ (фиг. 79).

**Доказат.** 1) Чрезъ точку  $C$  проведемъ прямую  $CE \parallel AB$  (пред. 31). Такъ какъ параллельныя  $AB$  и  $CE$  пересѣчены прямою  $AC$ , то  $\angle BAC = \angle ACE$ . Тѣже параллельныя пересѣчены прямою  $BD$ , то  $\angle ABC = \angle ECD$ , слѣдовательно:

$$\angle BAC + \angle ABC = \angle ACE + \angle ECD = \angle ACD.$$

2) Такъ какъ  $\angle BAC + \angle ABC = \angle ACD$ , то прибавляя къ обѣимъ частямъ по углу  $ACB$  (акс. 2), получимъ:

Фиг. 79.



$$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = \angle ACD + \angle ACB$$

но

$$\angle ACD + \angle ACB = 2d \text{ (пред. 13)}$$

откуда:

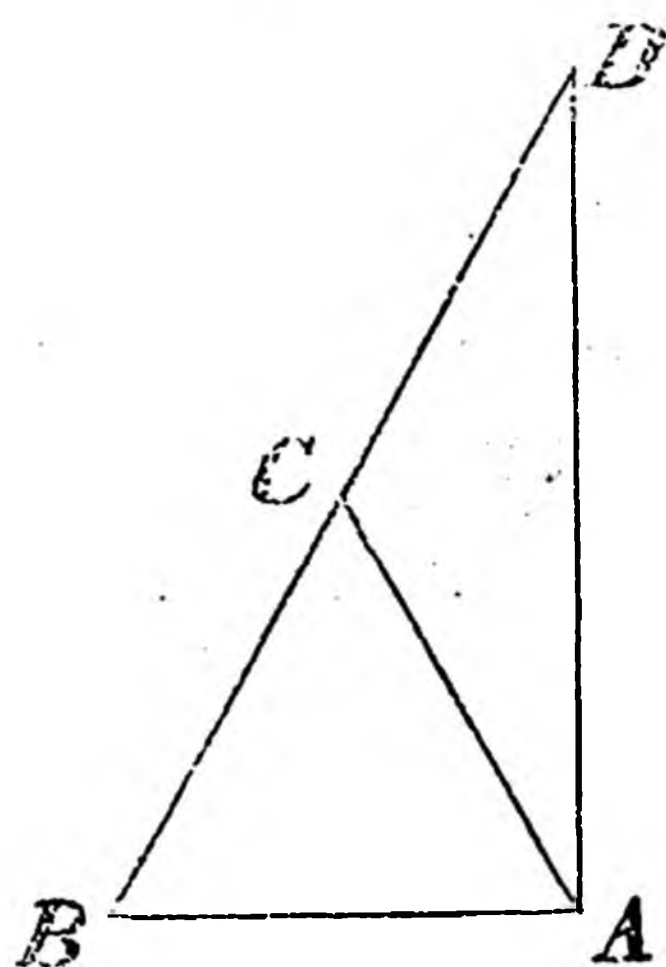
$$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 2d.$$

*Примѣч. 27.* Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что если два треугольника имѣютъ по два равныхъ угла, каждый каждому, то и третій уголъ, одного треугольника, будетъ равенъ третьему углу другого треугольника. Треугольники могутъ имѣть только одинъ уголъ прямой или тупой. На основаніи пред. 32 можно рѣшить слѣдующую задачу.

*Предложеніе.* Изъ конца  $A$  данной прямой  $AB$ , не продолжая ее, возставить къ ней перпендикуляръ (фиг. 80)?

*Рѣшеніе.* На прямой  $AB$  построимъ равносторонній треугольникъ  $ABC$ , продолжимъ сторону  $BC$ , такъ чтобы  $CB = CD$ . Соединимъ  $D$  съ  $A$ ,  $AD$  и будетъ искомый перпендикуляръ.

Фиг. 80.



Въ самомъ дѣлѣ, уголъ  $CAD = CDA$ , и уголъ  $CAB = CBA$  (пред. 5). Откуда уголъ  $BAD = ABD + BDA$  (акс. 2). Слѣдовательно, уголъ  $BAD$  прямой (пред. 32).

Замѣчу еще, что послѣ пред. 32, второй случай равенства треугольниковъ въ пред. 26, сводится непосредственно на первый.

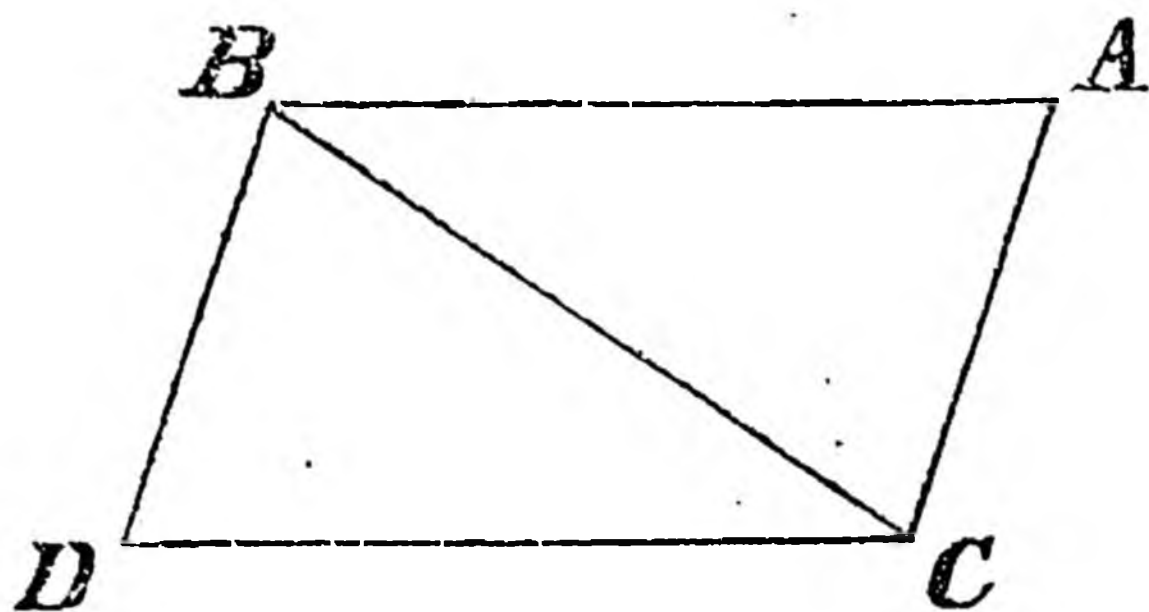
Всѣ случаи равенства прямоугольныхъ треугольниковъ, которые у насъ излагаются отдѣльно, заключаются въ предложеніяхъ Евелида.

*Предложеніе 33.* Если концы, направленныхъ въ одну сторону, равныхъ и параллельныхъ прямыхъ  $AB$  и  $CD$ , соединимъ прямыми  $AC$  и  $BD$ , то  $AC$  и  $BD$  будутъ равны и параллельны (фиг. 81).



*Доказат.* Соединимъ  $B$  съ  $C$  прямою  $BC$ . Такъ какъ  $AB \parallel CD$ , то уголъ  $ABC = BCD$  (пред. 29), но  $AB = CD$ , а сторона  $BC$  общая треугольникамъ  $ABC$  и  $DBC$ , слѣдовательно, и  $AC = BD$  (пред. 4). Такъ какъ уголъ  $ACB = CBD$ , то  $AC \parallel BD$  (пред. 27).

Фиг. 81.



*Предложеніе 34.* Во всякомъ параллелограммѣ  $ABCD$ , какъ противоположныя стороны, такъ и противоположные углы равны, и параллелограммъ діагональю  $BC$  дѣлится пополамъ (фиг. 81).

*Доказат.* 1) Такъ какъ  $AB \parallel CD$ , то уголъ  $ABC = BCD$  и уголъ  $ACB = CBD$ . Въ треугольникахъ  $ABC$  и  $BDC$ , сторона  $BC$  общая, слѣдовательно,  $AB = CD$ ,  $AC = BD$  и  $\angle BAC = \angle BDC$  (пред. 26). Мы имѣемъ также  $\angle ABC = \angle BCD$  и  $\angle CBD = \angle ACB$ , складывая эти равенства получимъ (акс. 2):

$$\angle ABC + \angle CBD = \angle BCD + \angle ACB$$

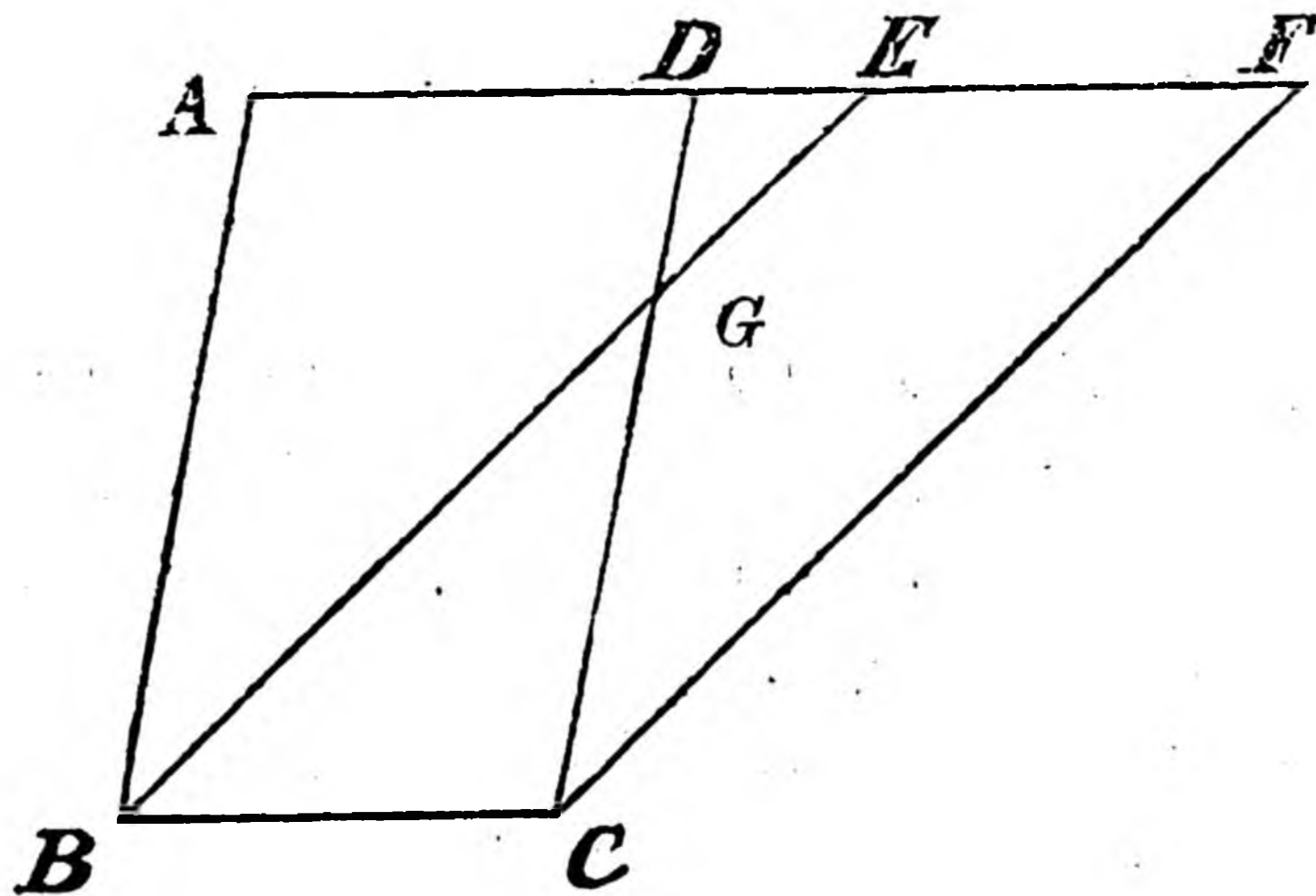
или

$$\angle ABD = \angle ACD.$$

2) Такъ какъ  $AB = CD$  и  $BC$  есть общая,  $\angle ABC = \angle BCD$ , то  $\triangle ABC = \triangle CBD$  (пред. 4).

*Предложеніе 35.* Два параллелограмма  $ABCD$  и  $EBCF$ , построенные на одномъ основаніи  $BC$  и лежащіе между параллельными прямыми  $AF$  и  $BC$ , равны между собою (фиг. 82).

Фиг. 82.



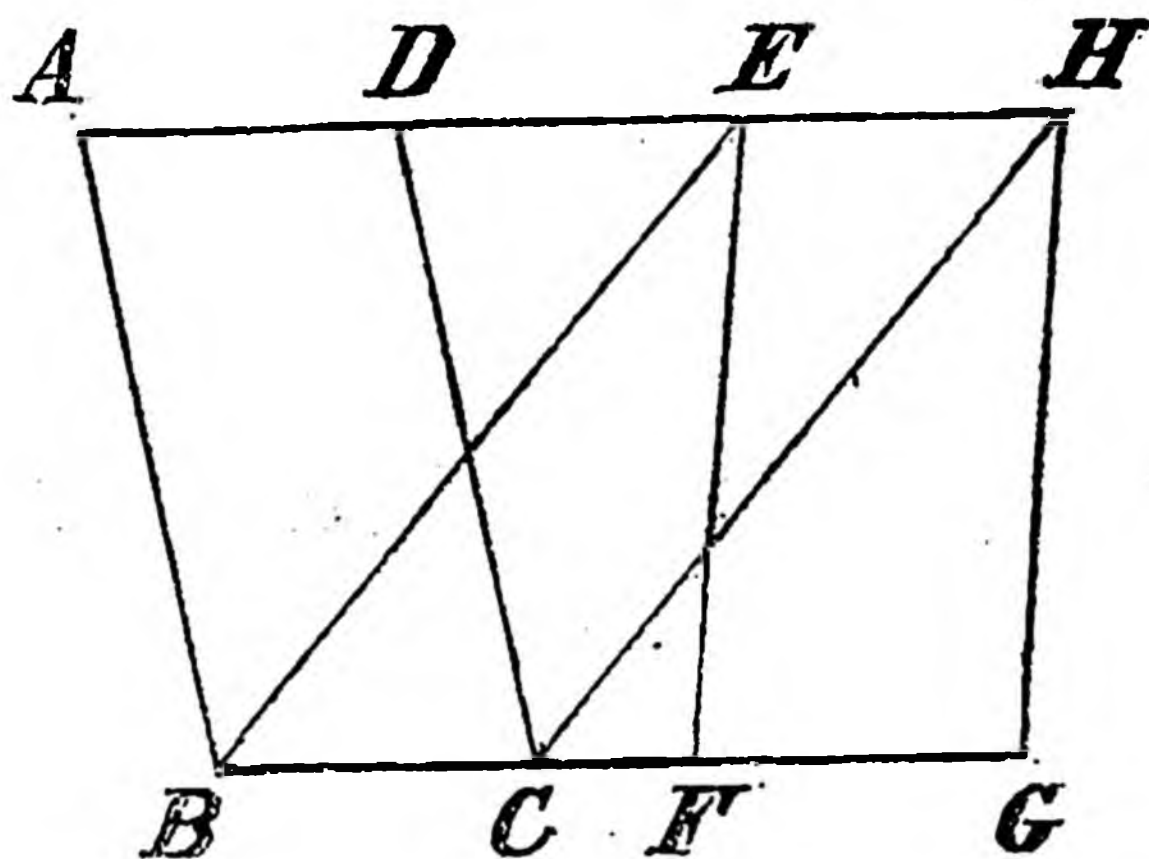
*Доказат.* Такъ какъ  $BC = AD$  и  $BC = EF$  (пред. 34), то  $AD = EF$  (акс. 1). Прибавимъ къ обѣимъ частямъ этого равенства по  $DE$ , то получимъ  $AE = DF$  (акс. 2). Но  $AB = DC$  (пред. 34) и

$\angle FAB = \angle FDC$  (пред. 29), следовательно  $\triangle ABE = \triangle CDF$ , отнимая отъ обѣихъ частей по  $\triangle EDG$  (акс. 3), найдемъ, что трапеція  $ABGD = EGCF$ , прибавляя по  $\triangle GCB$ , найдемъ наконецъ, что параллелограммы  $ABCD = EBCF$  равны.

*Примѣч. 28.* Надобно замѣтить, что здѣсь слово *равны* употребляется Евклидомъ въ смыслѣ слова *равноцѣпны*.

*Предложеніе 36.* Два параллелограма  $ABCD$  и  $EFGH$ , построенные на равныхъ основаніяхъ  $BC$  и  $FG$  и лежащіе между параллельными прямыми  $AH$  и  $BG$ , равны между собою (фиг. 83).

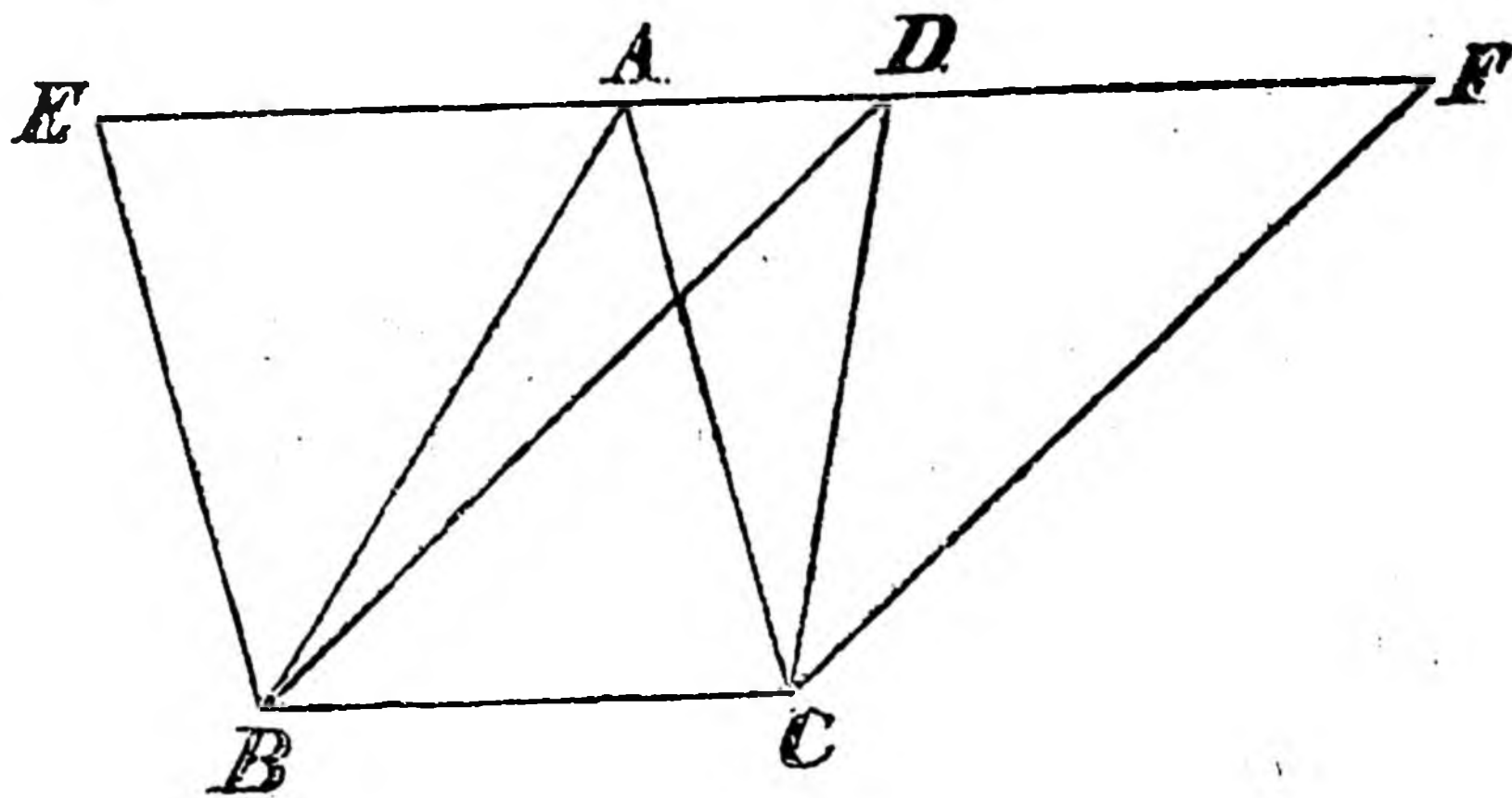
Фиг. 83.



*Доказат.* Соединимъ  $B$  съ  $E$  и  $C$  съ  $H$ . Такъ какъ  $BC = FG$  и  $FG = EH$  (пред. 34), то  $BC = EH$  (акс. 1). Но  $BC \parallel EH$ , следовательно,  $EB = CH$  (пред. 33) и  $EB \parallel CH$ . Откуда  $EBCH$  есть параллелограмъ, который равенъ параллелограму  $ABCD$  и параллелограму  $EFGH$  (пред. 35), следовательно, параллелограмъ  $ABCD = EFGH$ .

*Предложеніе 37.* Два треугольника  $ABC$  и  $DBC$ , построенные на одномъ основаніи  $BC$  и лежащіе между параллельными  $AD$  и  $BC$ , равны между собою (фиг. 84).

Фиг. 84.

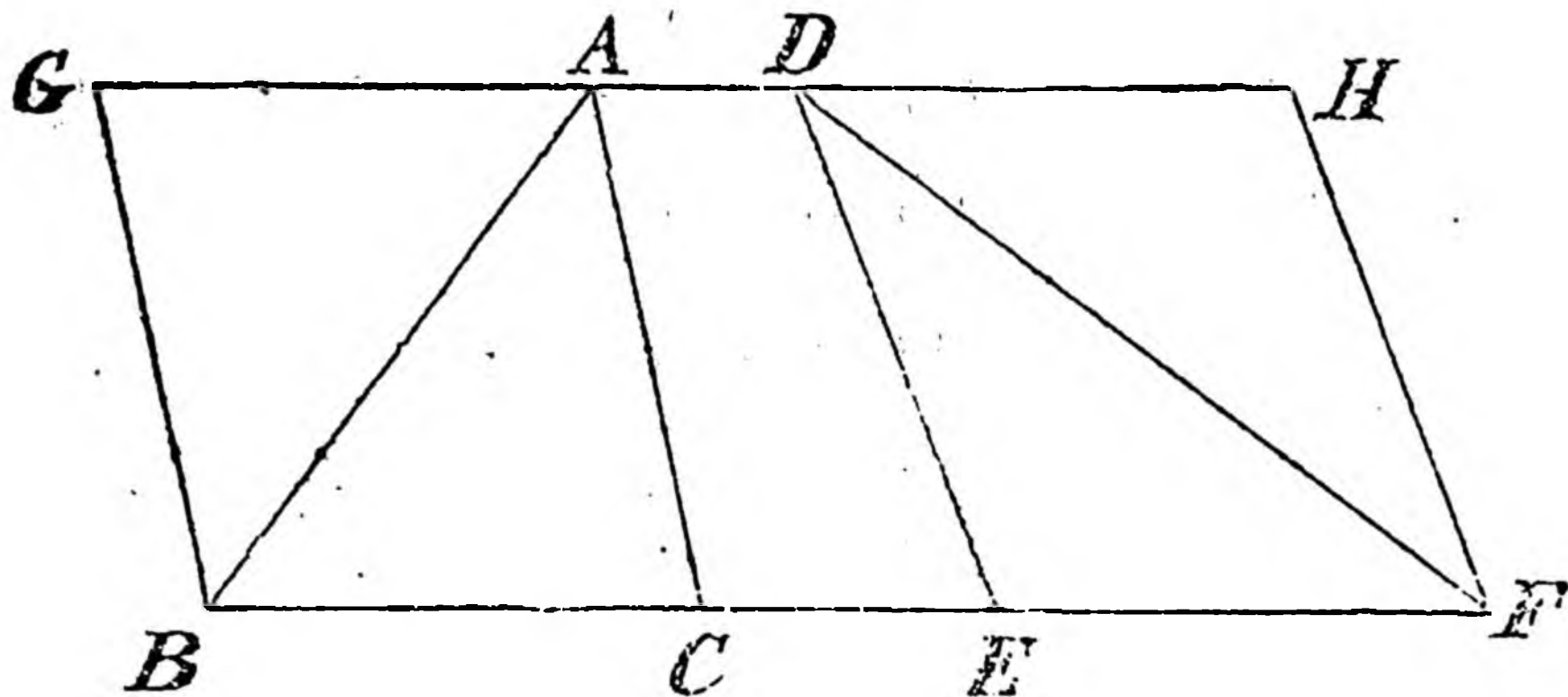


*Доказат.* Продолжимъ  $AD$  въ обѣ стороны и чрезъ точки  $B$  и  $C$  проведемъ  $BE \parallel AC$  и  $CF \parallel BD$  (пред. 31), то получимъ равные параллелограммы

$EVCA$  и  $DVCF$  (пред. 35). Но какъ треугольники  $ABC$  и  $DVC$  составляютъ половины этихъ параллелограмовъ, то они равны (пред. 34).

**Предложеніе 38.** Треугольники  $ABC$  и  $DEF$ , построенные на равныхъ основаніяхъ  $BC$  и  $EF$  и лежащіе между параллельными линиями  $AD$  и  $BF$ , равны между собою (фиг. 85).

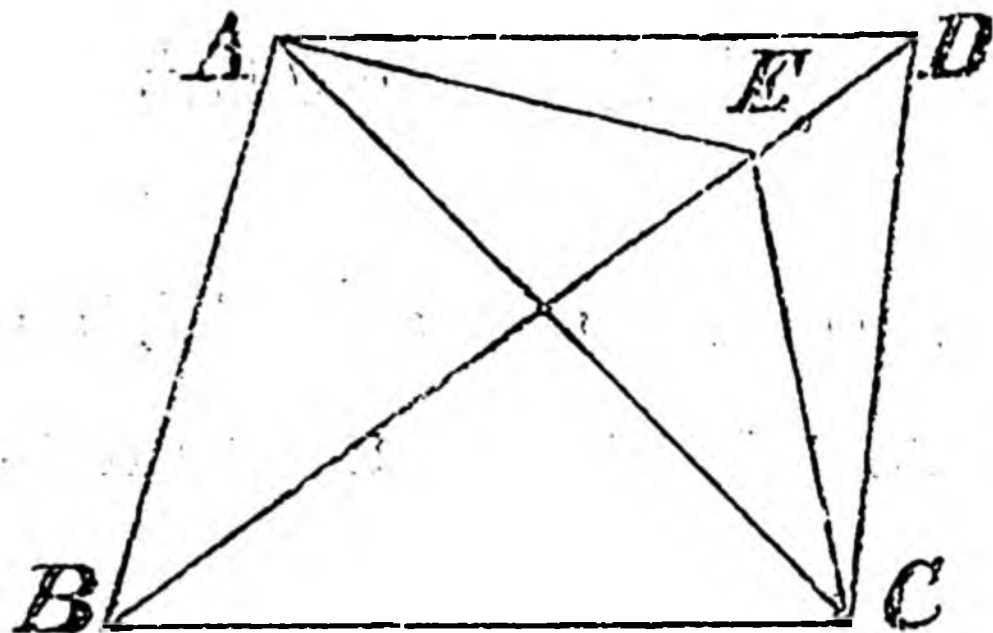
Фиг. 85.



**Доказат.** Продолжимъ  $AD$  въ обѣ стороны и чрезъ точки  $B$  и  $F$  проведемъ  $BG \parallel AC$  и  $FH \parallel ED$  (пред. 31), то получимъ равные параллелограмы  $GBCA$  и  $DEFH$  (пред. 36). Но треугольники  $ABC$  и  $DEF$ , составляютъ половины этихъ параллелограмовъ (пред. 34), слѣдовательно они равны.

**Предложеніе 39.** Если два равные треугольника  $ABC$  и  $DVC$  лежатъ на одномъ основаніи  $BC$ , то ихъ вершины лежатъ на одной прямой  $AD$ , параллельной основанію  $BC$  (фиг. 86).

Фиг. 86.



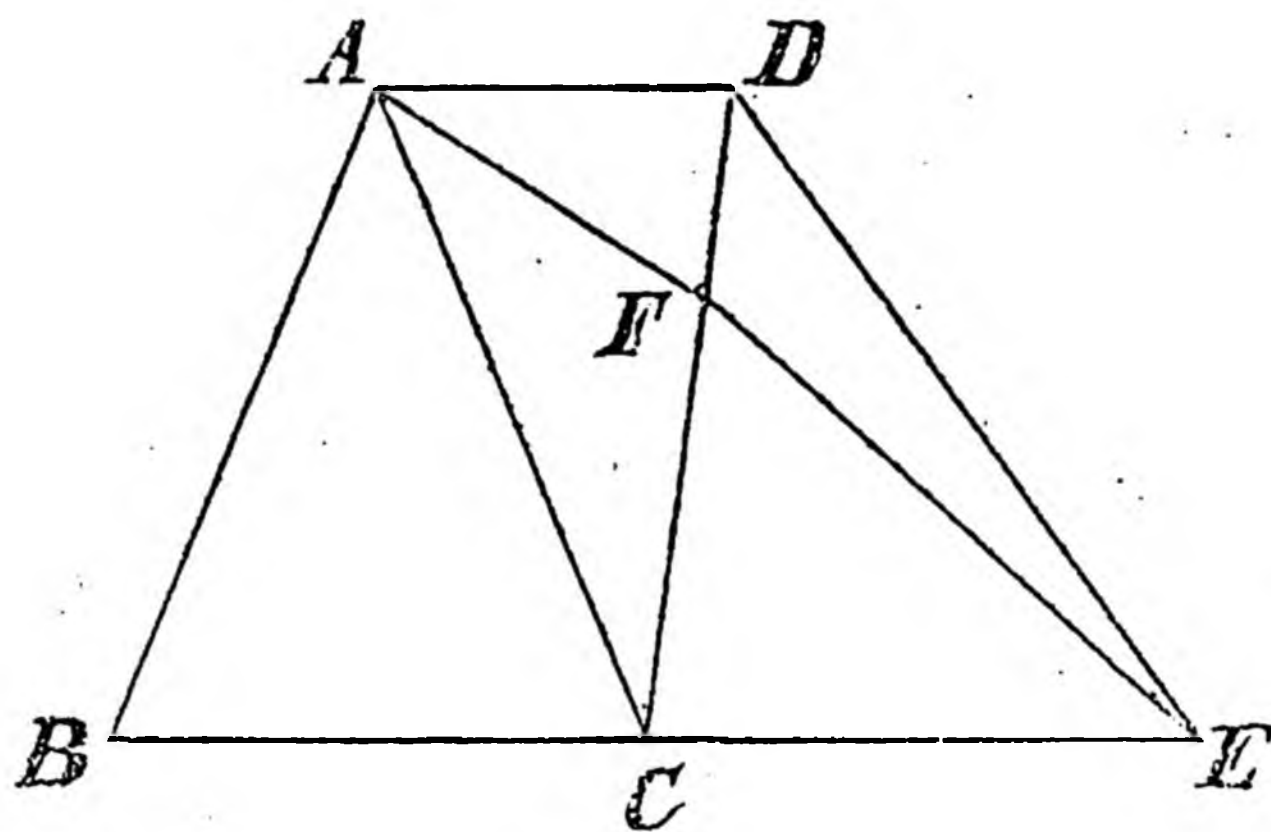
**Доказат.** Если прямая  $AD$ , проведенная чрезъ вершины  $A$  и  $D$  треугольниковъ  $ABC$  и  $DVC$ , не параллельна основанію  $BC$ , то есть другая прямая  $AE \parallel BC$ . Соединимъ  $E$  съ  $C$ , то  $\triangle ABC = \triangle EBC$  (пред. 38). Но  $\triangle ABC = \triangle DVC$ , слѣдовательно  $\triangle DVC = \triangle EBC$ , что невозможно (акс. 9). Слѣдовательно  $AE$  не есть прямая, параллельная  $BC$ , и на томъ же основаніи никакая другая, исключая  $AD$ , не будетъ параллельна  $BC$ . Слѣдовательно  $AD \parallel BC$ .

**Предложеніе 40.** Если два равные треугольника  $ABC$  и  $DCE$  имѣютъ равныя основанія  $BC$  и  $CE$ , лежащія на одной прямой  $BE$ , то вершины этихъ треугольниковъ лежатъ на одной прямой  $AD$ , параллельной основанію  $BE$  (фиг. 87).



*Доказат.* Если бы прямая  $AD$ , соединяющая вершины треугольников, не была параллельна основанию  $BE$ , то есть другая прямая  $AF \parallel BE$ .

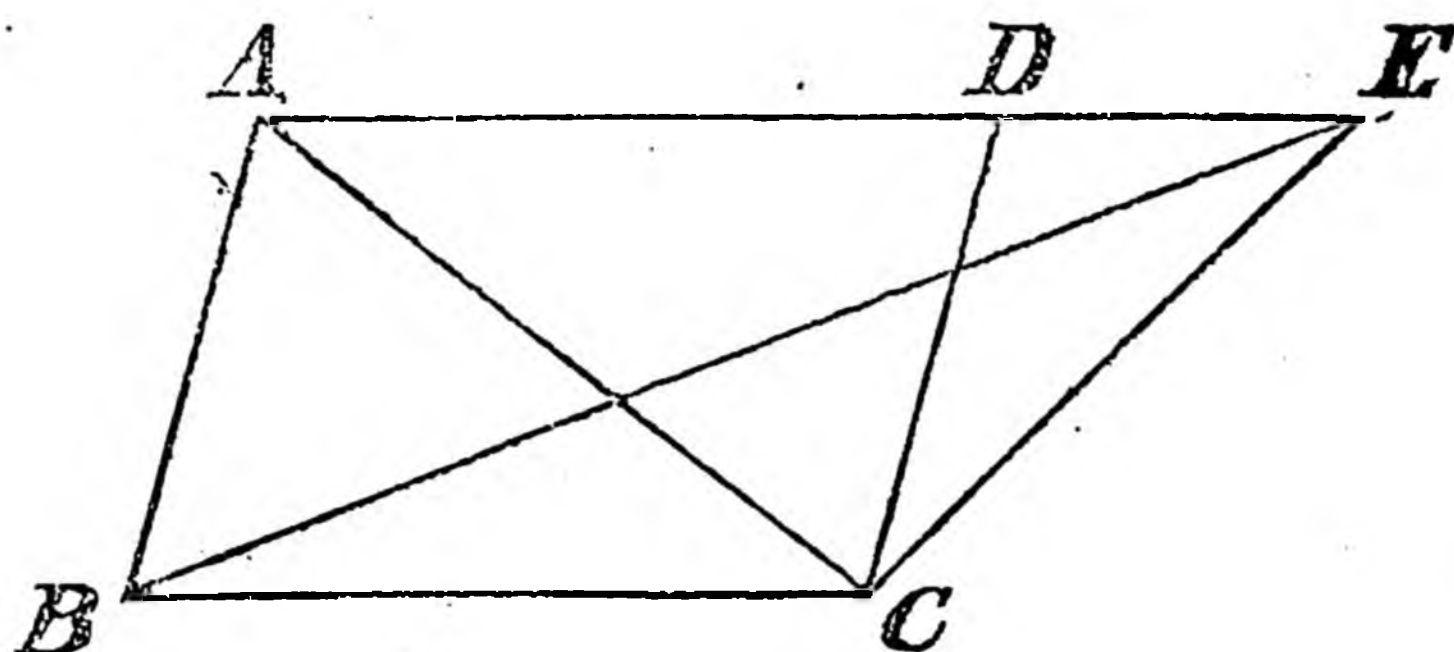
Фиг. 87.



Соединимъ точки  $F$  и  $E$ , то  $\triangle ABC = \triangle FCE$  (пред. 38). Но  $\triangle ABC = \triangle DCE$ , слѣдовательно  $\triangle DCE = \triangle FCE$ , что невозможно (акс. 9). Слѣдовательно  $AF$  не есть прямая, параллельная  $BE$ , и по той же причинѣ, кромѣ  $AD$ , никакая другая прямая не можетъ быть параллельна  $BE$ .

*Предложеніе 41.* Если параллелограмъ  $ABCD$  и треугольникъ  $EBC$  построены на одномъ основаніи  $BC$ , а вершина  $E$  треугольника  $EBC$  лежитъ на прямой  $AD$ , то треугольникъ составляетъ половину параллелограмма (фиг. 88).

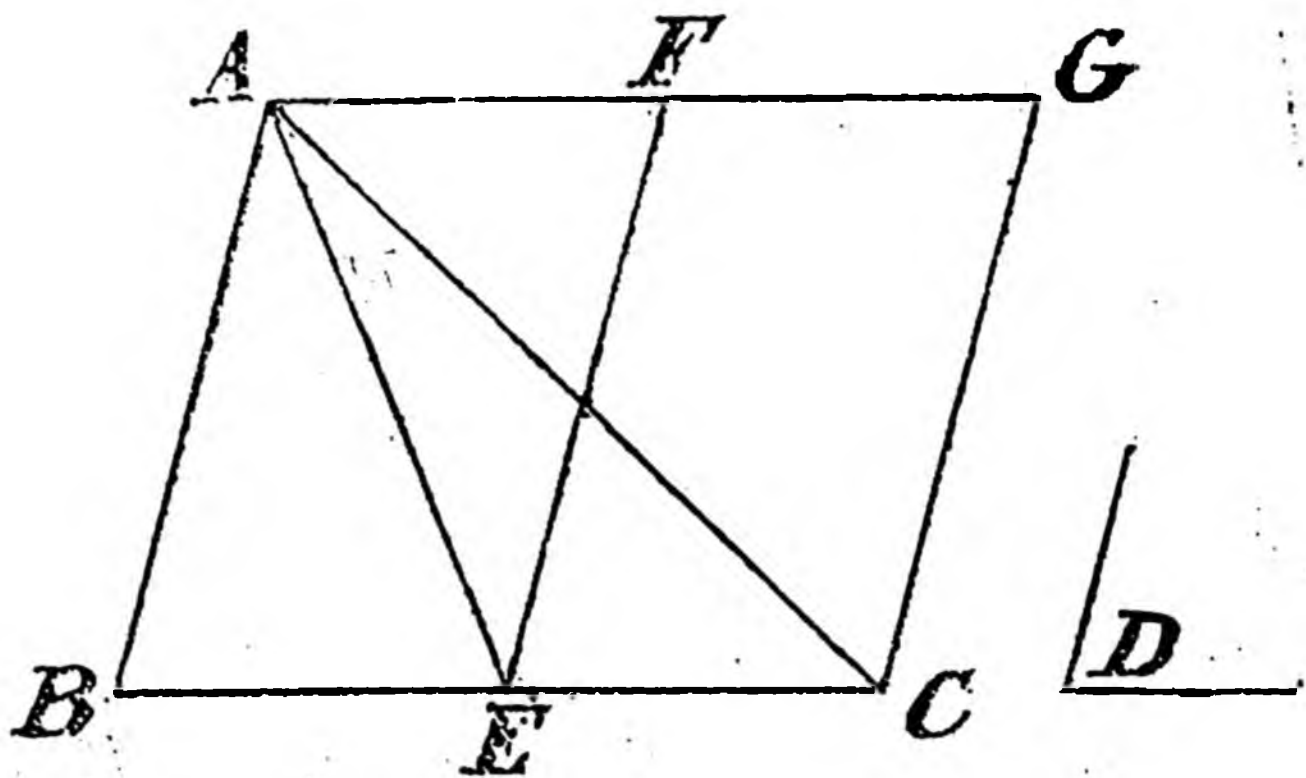
Фиг. 88.



*Доказат.* Соединимъ  $A$  съ  $C$ , то  $\triangle ABC = \triangle EBC$  (пред. 37), но  $\triangle ABC = \frac{1}{2} ABCD$  (пред. 34), слѣдовательно и  $\triangle EBC = \frac{1}{2} ABCD$ .

*Предложеніе 42.* Построить параллелограмъ, равный данному треугольнику  $ABC$ , котораго бы стороны были наклонены подъ даннымъ угломъ  $D$  (фиг. 89)?

Фиг. 89.

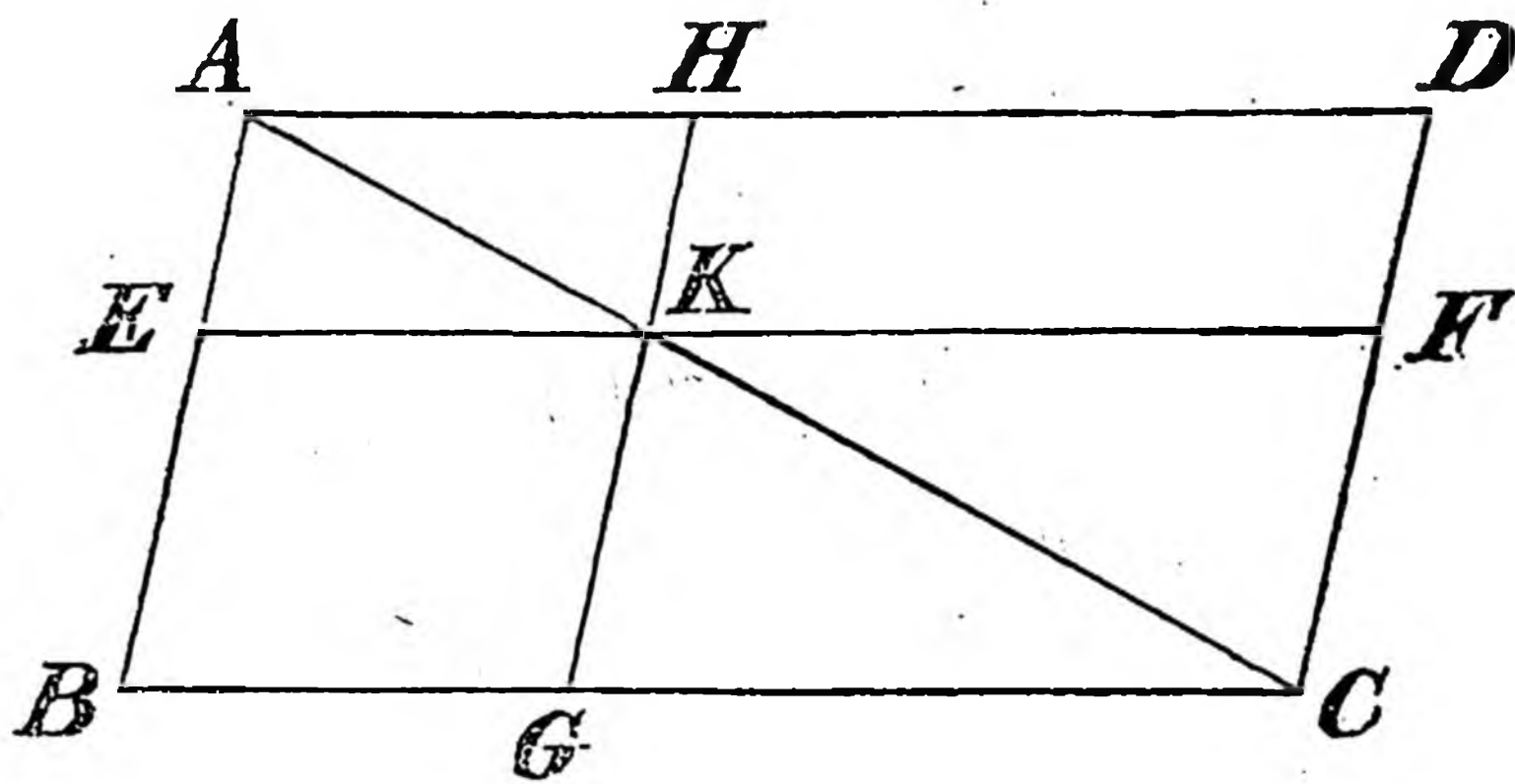


*Рѣшеніе.* Раздѣлимъ основаніе  $BC$  пополамъ въ точкѣ  $E$  (пред. 10).

Въ точкѣ  $E$  на прямой  $EC$  построимъ  $\angle CEF = \angle D$  (пред. 23). Чрезъ точку  $C$  проведемъ  $CG \parallel EF$  (пред. 31) и продолжимъ прямыя  $EF$  и  $CG$  до встрѣчи съ прямою  $AG \parallel BC$ . Параллелограмъ  $FECG = 2\triangle AEC = \triangle ABC$  (пред. 41, 37).

*Предложеніе 43.* Во всякомъ параллелограмѣ  $ABCD$  дополненія  $BK$  и  $KD$  параллелограмовъ  $AEKH$  и  $KGCF$ , построенныхъ на діагонали  $AC$ , равны (фиг. 90).

Фиг. 90.

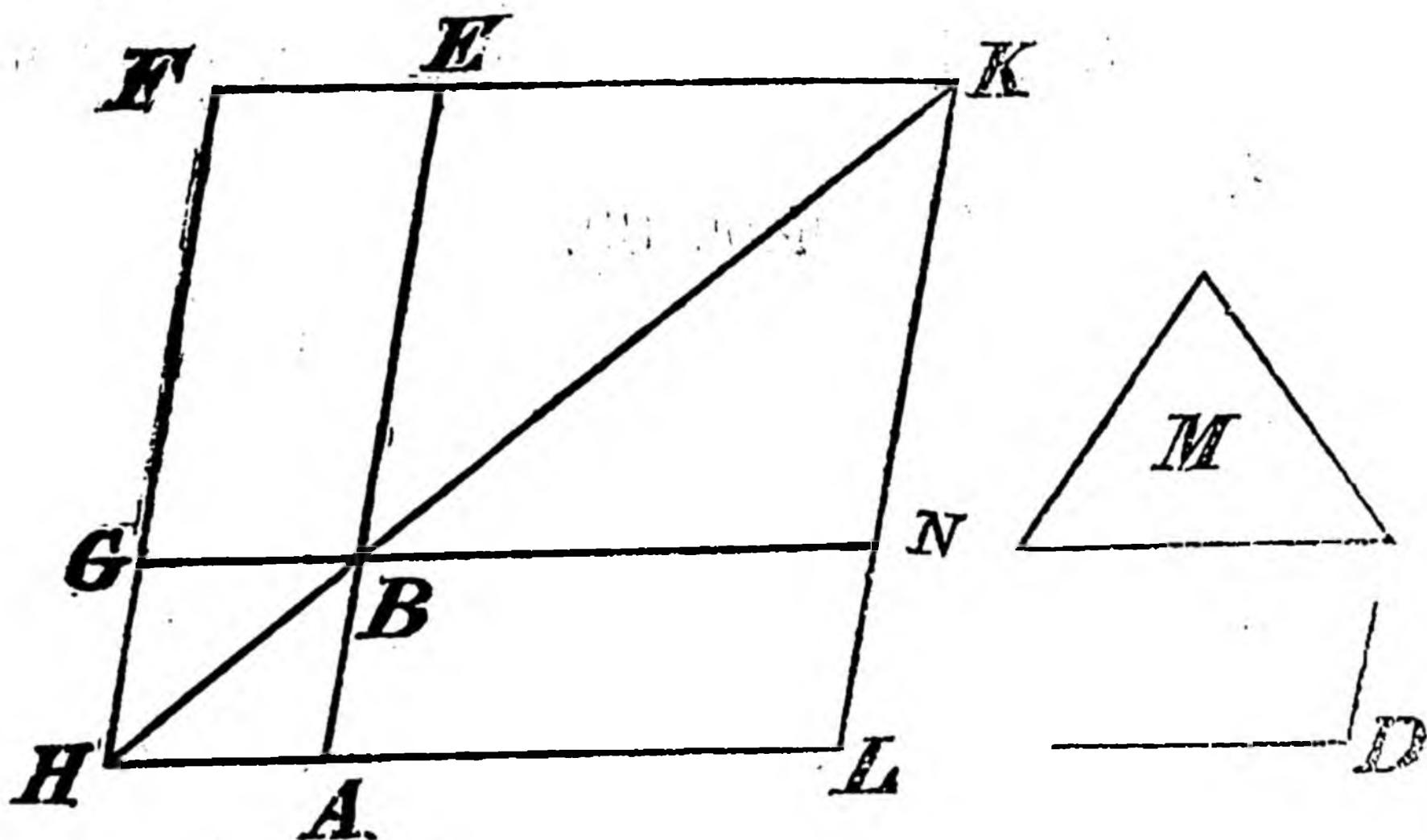


*Доказат.* Такъ какъ  $\triangle ABC = \triangle CAD$  и  $\triangle AEK = \triangle AHK$  (пред. 34), то  $EKCB = KHDC$  (акс. 3). Точно также  $\triangle KGC = \triangle KCF$  (пред. 34), слѣдовательно (акс. 3)  $BEKG = KHDF$ .

*Предложеніе 44.* На данной прямой  $AB$  построить параллелограмъ, равный данному треугольнику  $M$  и который бы имѣлъ уголъ, равный данному углу  $D$  (фиг. 91)?

*Рѣшеніе.* Построимъ параллелограмъ  $BEFG$ , равный данному треугольнику  $M$  и имѣющій  $\angle EBG = \angle D$ ; расположимъ этотъ параллелограмъ такимъ образомъ, чтобы его основаніе  $BE$  и прямая  $AB$  составляла одну прямую  $AE$ . Чрезъ точку  $A$  проведемъ  $AN \parallel EF$ , продолжимъ  $FG$  до  $N$  и проведемъ  $HB$ . Такъ какъ  $\angle ANF + \angle EFH = 2d$  (пред. 29), то  $\angle BHF + \angle EFH < 2d$ , слѣдовательно,  $HB$  и  $FE$  встрѣтятся (акс. 11), по-

Фиг. 91.



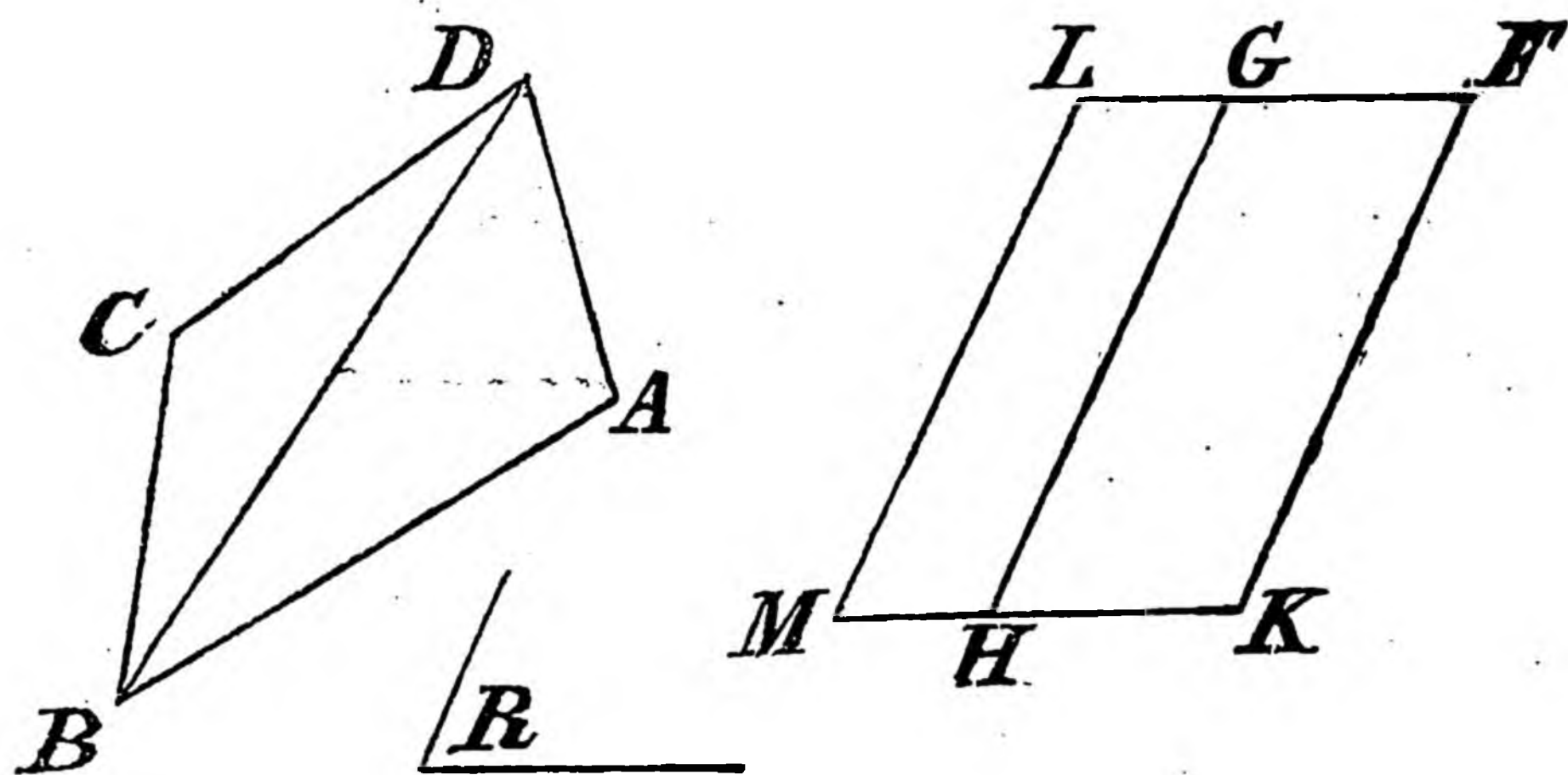
ложимъ, въ точкѣ  $K$ . Чрезъ точку  $K$  проведемъ  $KL \parallel FH$  и продолжимъ  $HA$  и  $GB$  до встрѣчи съ  $KL$  въ точкахъ  $L$  и  $N$ .  $ABNL$  будетъ требуе-

мый параллелограмъ. Въ самомъ дѣлѣ,  $HLKF$  есть параллелограмъ, коего діагональ есть  $HK$ , слѣдовательно параллелограмъ  $BL=BF$  (пред. 43). Но  $BF=\triangle M$  и  $\angle GBE=\angle D$ , слѣдовательно  $LB=\triangle M$  и  $\angle ABN=\angle GBE=\angle D$ .

*Предложеніе 45.* Построить параллелограмъ, равный данной прямолинейной фигурѣ  $ABCD$  и имѣющій уголъ, равный данному углу  $R$  (фиг. 92)?

*Рѣшеніе.* Соединимъ прямою точки  $D$  и  $B$ . Построимъ параллелограмъ  $FH=\triangle ABD$  и имѣющій уголъ  $\angle FKH=\angle R$  (пред. 42). На  $GH$  построимъ параллелограмъ  $GM=\triangle DBC$  и имѣющій уголъ  $\angle GHM=R$ ;  $KFLM$  и будетъ искомый параллелограмъ.

Фиг. 92.



Въ самомъ дѣлѣ,  $\angle GHM=\angle R=\angle FKH$ , прибавляя по углу  $GHK$  получимъ:

$$\angle GHM + \angle GHK = \angle FKH + \angle GHK = 2d \text{ (пред. 29).}$$

Слѣдовательно прямыя  $HK$  и  $HM$  лежатъ на одной прямой (пред. 14).  $FG \parallel KH$ , слѣдовательно  $\angle FGH=\angle GHM$ , откуда:

$$\angle FGH + \angle LGH = \angle GHM + \angle LGH = 2d \text{ (пред. 29).}$$

Слѣдовательно  $FG$  и  $GL$  лежатъ также на одной прямой (пред. 14). Такъ какъ  $FK \parallel GH$  и  $GH \parallel LM$ , то  $FK \parallel LM$ . Такъ какъ  $FK=GH$ ,  $GH=LM$ , то  $FK=LM$  (пред. 34). Откуда  $FL=KM$  и  $FL \parallel KM$ . Слѣдовательно фигура  $KFLM$  есть параллелограмъ, коего уголъ  $\angle FKM=\angle R$ . Но  $FH=\triangle ABD$  и  $GM=\triangle DBC$ , слѣдовательно,  $KFLM=ABCD$ .

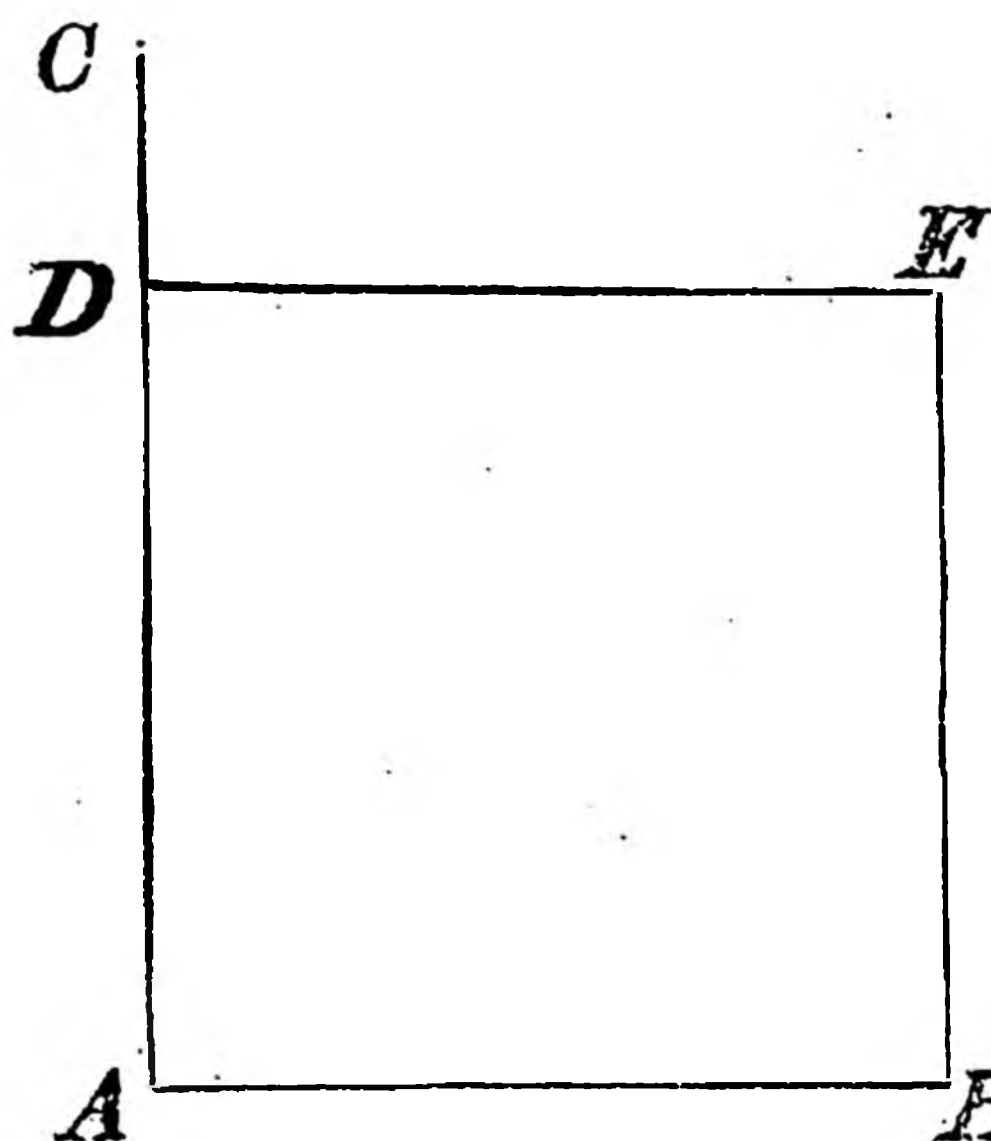
*Предложеніе 46.* На данной прямой  $AB$  построить квадратъ (фиг. 93)?

*Рѣшеніе.* Изъ точки  $A$  возставимъ перпендикуляръ  $AC$  къ  $AB$  (пред. 11). Отложимъ на немъ  $AD=AB$ . Чрезъ точку  $D$  проведемъ  $DE \parallel AB$ , а чрезъ точку  $B$  проведемъ  $BE \parallel AD$ . Полученная фигура  $ADEB$  будетъ искомый квадратъ.



Въ самомъ дѣлѣ,  $ADEB$  есть параллелограмъ, слѣдовательно противоположныя стороны равны (пред. 34). Но  $AB=AD$ , слѣдовательно построенный параллелограмъ  $ADEB$  равносторонній.

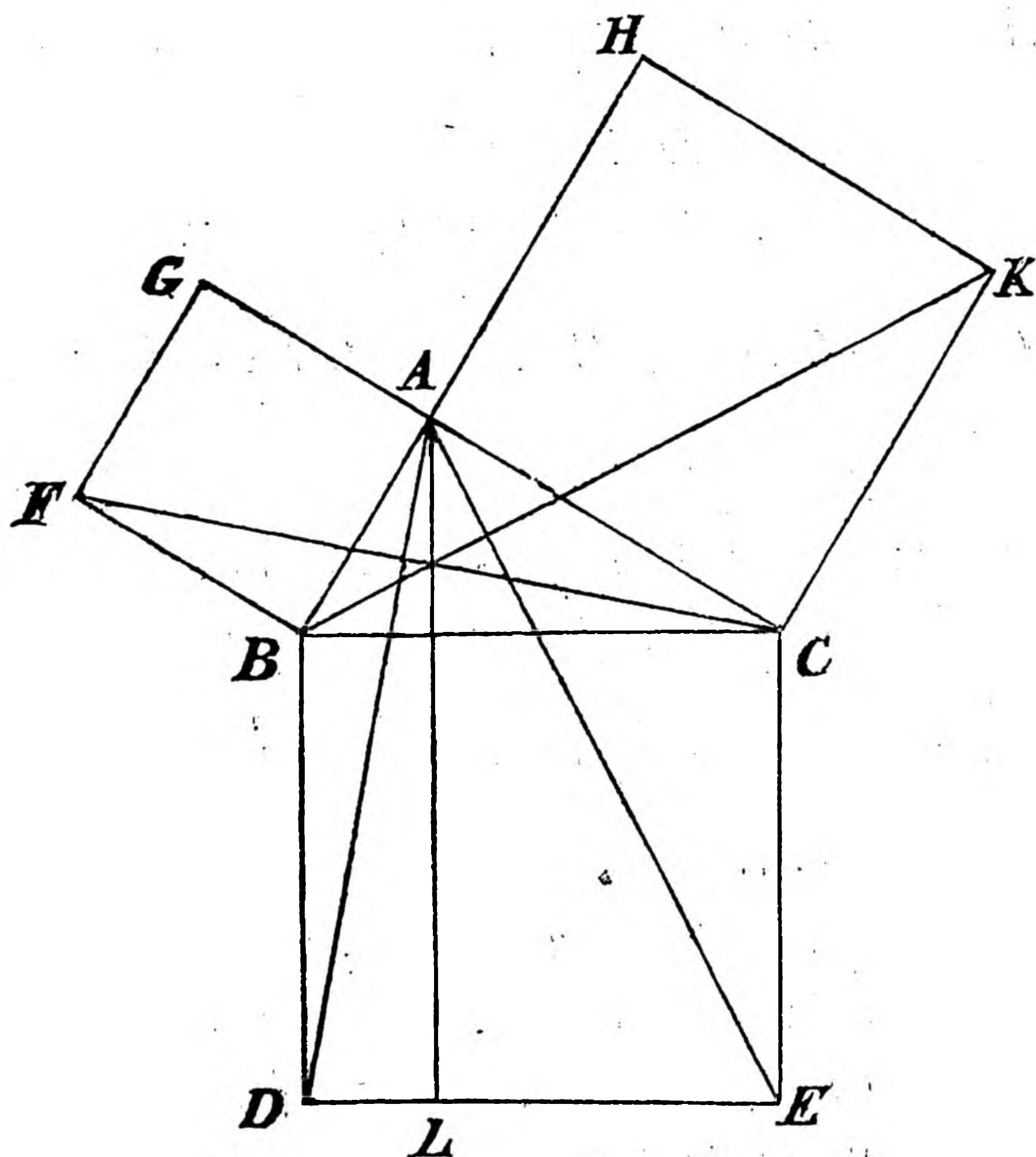
Фиг. 93.



Такъ какъ  $AB \parallel DE$ , то  $\angle A + \angle D = 2d$  (пред. 29), но  $\angle A = d$ , слѣдовательно и  $\angle D = d$ . Въ параллелограмѣ противоположные углы равны, слѣдовательно, параллелограмъ  $ADEB$  прямоугольный; но онъ и равносторонній, слѣдовательно  $ADEB$  есть квадратъ (опред. 30).

*Предложеніе 47.* Во всякомъ прямоугольномъ треугольникѣ квадратъ, построенный на сторонѣ, противолежащей прямому углу (на гипотенузѣ), равенъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на сторонахъ, заключающихъ прямой уголъ (на катетахъ) (фиг. 94).

Фиг. 94.



*Доказат.* Пусть  $ABC$  будетъ прямоугольный треугольникъ, въ кото-

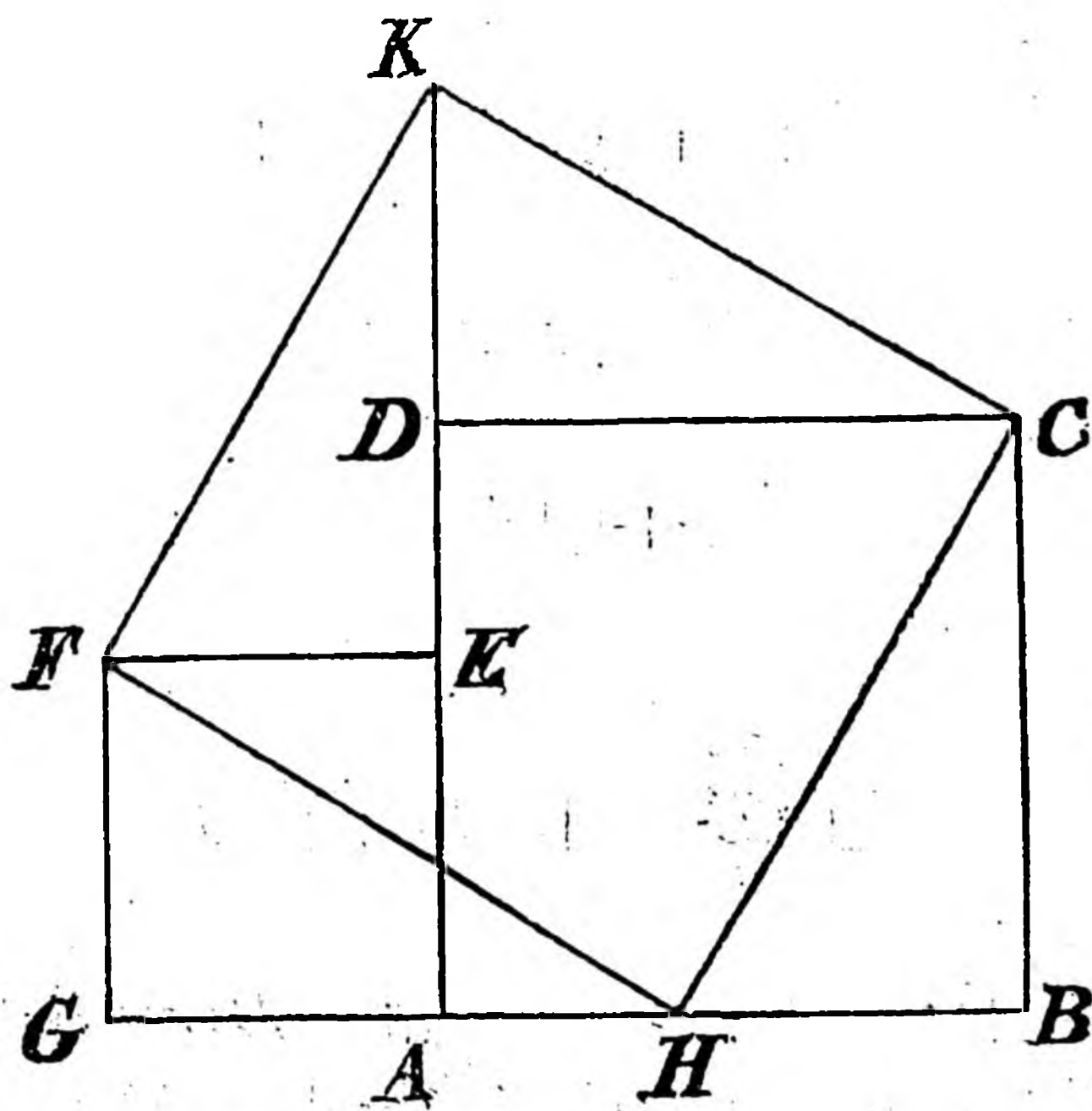
ромъ уголъ  $A$  прямой. На сторонахъ  $BC$ ,  $AB$  и  $AC$  построимъ квадраты  $BE$ ,  $BG$  и  $AK$  (пред. 46). Углы  $BAC$ ,  $BAG$ ,  $HAC$  прямые, слѣдовательно, прямая  $AC$  и  $AG$ ,  $BA$  и  $AH$  находятся первыя двѣ на одной прямой  $CG$ , а вторыя на прямой  $BH$  (пред. 14). Соединимъ  $A$  съ  $D$  и  $F$  съ  $C$  и чрезъ точку  $A$  проведемъ прямую  $AL \parallel BD$  (пред. 31). Такъ какъ  $\angle DBC = \angle FBA$  (акс. 10), то прибавляя къ обѣимъ частямъ по  $\angle CBA$ , получимъ  $\angle DBA = \angle FBC$  (акс. 2). Но  $AB = BF$ ,  $BC = BD$ , слѣдовательно,  $\triangle ABD = \triangle FBC$  (пред. 4). Замѣтивъ теперь, что  $BD \parallel AL$ ,  $BF \parallel GC$ , мы имѣемъ:  $BL = 2\triangle ABD$  и  $GB = 2\triangle FBC$  (пред. 41). Но  $\triangle ABD = \triangle FBC$ , слѣдовательно, четырехугольникъ  $BL$  равенъ квадрату  $BG$  (акс. 6). Точно также можно показать, что четырехугольникъ  $LC$  равенъ квадрату  $CH$ . Откуда (акс. 2):

$$\square BC = \square AB + \square AC.$$

*Примѣч. 29.* Преданіе приписываетъ открытіе этой важной теоремы Пизагору. Этому знаменитому предложенію было дано много доказательствъ, изъ которыхъ самое интересное есть слѣдующее:

Пусть  $ABCD$  и  $AIEFG$  будутъ два какіе нибудь квадрата, такъ расположенные, чтобы ихъ основанія  $AB$  и  $AG$  лежали на одной прямой линіи  $BG$  (фиг. 95).

Фиг. 95.



Возьмемъ отрезки  $GH$  и  $EK$ , оба равные  $AB$ , и соединимъ  $H$  съ  $C$ ,  $C$  съ  $K$ ,  $K$  съ  $F$  и  $F$  съ  $H$ .

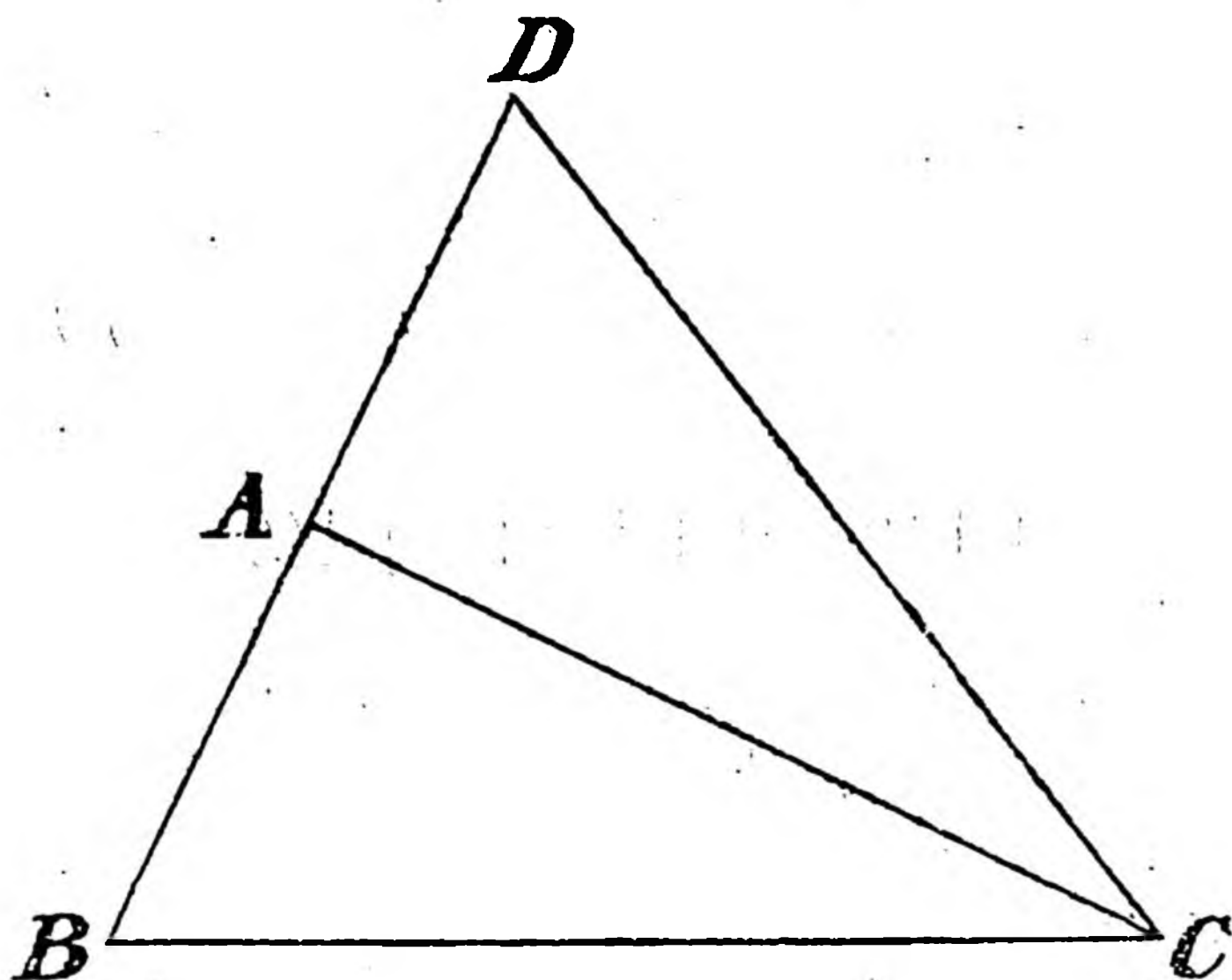
Легко доказать, что  $\triangle HBC = \triangle FEK$  и  $\triangle KDC = \triangle FGH$ . Слѣдовательно, два данные квадрата равны фигурѣ  $CKFH$ . Легко также показать, что фигура  $CKFH$  есть квадратъ (пред. 32). Сторона  $CH$  этого квадрата есть гипотенуза прямоугольнаго треугольника, коего другія стороны (катеты)  $BC$  и  $BH$  равны сторонамъ двухъ данныхъ квадратовъ. Это доказательство не требуетъ предложеній Евклида, слѣдующихъ за 32-мъ. Изъ него можно еще видѣть, какъ можно разрѣзать два квадрата, чтобы изъ полученныхъ частей составить одинъ третій квадратъ.

Большое число доказательствъ предложенія Пизагора собралъ Гоффманъ въ сочиненіи: *Der Pythagorische Lehrsatz* . . . . Mainz, 1821.

*Предложение 48.* Если въ какомъ нибудь треугольникѣ  $ABC$ , квадратъ одной изъ его сторонъ  $BC$  равенъ суммѣ квадратовъ остальныхъ его сторонъ  $AB$  и  $AC$ , то уголъ  $BAC$  треугольника, заключающійся между этими послѣдними сторонами, есть прямой (фиг. 96).

*Доказат.* Изъ точки  $A$  возставимъ перпендикуляръ  $AD$  къ  $BC$ , сдѣлаемъ  $AD=AB$  и соединимъ  $D$  съ  $C$ .

Фиг. 96.



Квадратъ, построенный на  $AB$ , равенъ квадрату, построенному на  $AD$ , т. е.  $\square AB = \square AD$ . Если къ обѣимъ частямъ прибавимъ по  $\square AC$ , то получимъ:

$$\square AB + \square AC = \square AD + \square AC.$$

Но треугольникъ  $DAC$  прямоугольный, слѣдовательно (пред. 47):

$$\square AD + \square AC = \square DC.$$

Но по условію:

$$\square AB + \square AC = \square BC$$

Слѣдовательно  $\square DC = \square BC$ , откуда  $DC = BC$ . Разсматривая треугольники  $ABC$  и  $ADC$ , мы имѣемъ  $AB = AD$ ,  $BC = DC$ ,  $AC$  есть сторона общая, слѣдовательно (пред. 8) треугольники равны и въ остальныхъ частяхъ, т. е.  $\angle DAC = \angle BAC$ , но уголъ  $DAC$  прямой, слѣдовательно и уголъ  $BAC$  также прямой.



## КНИГА II.

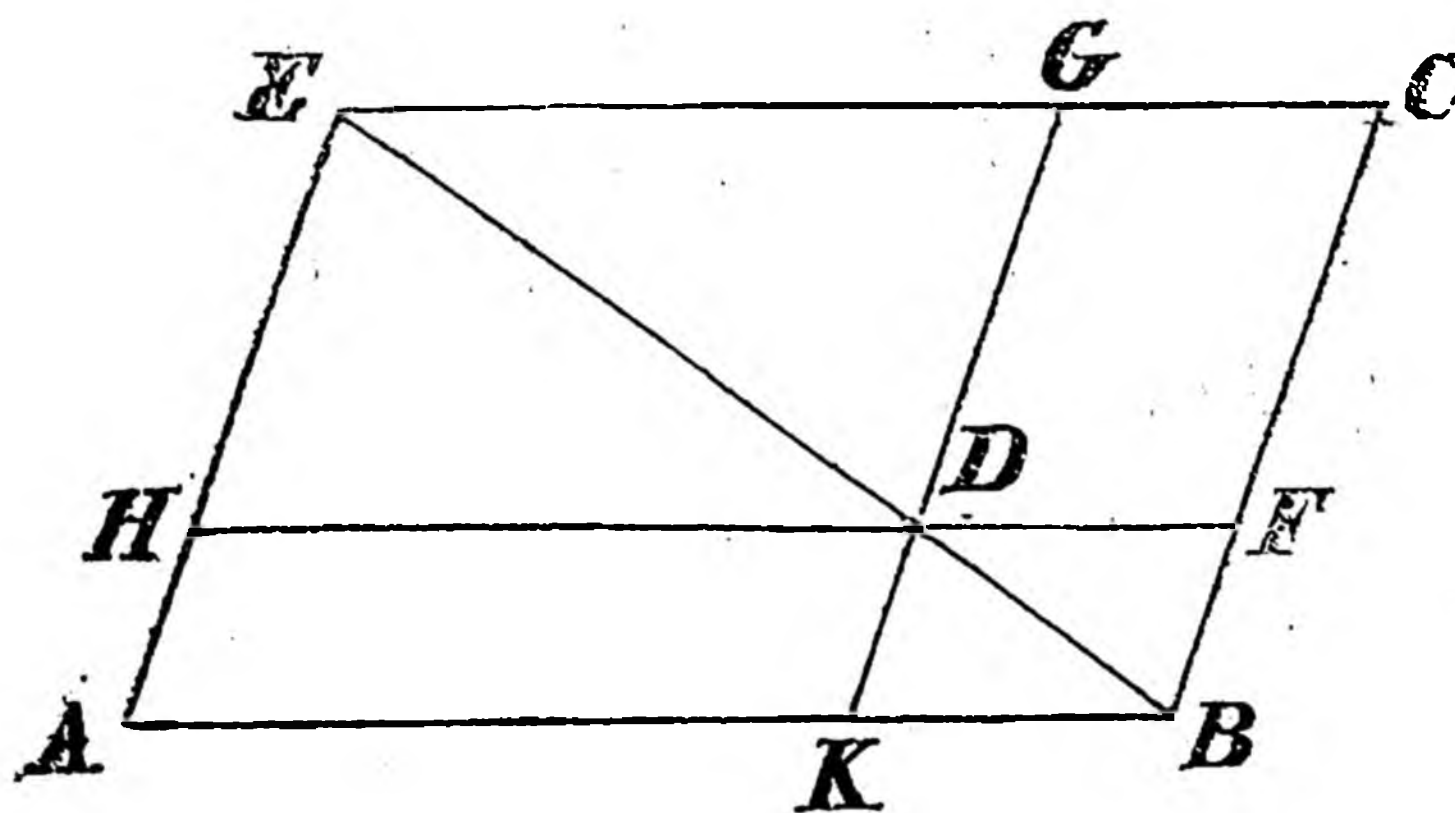
### Опредѣленія.

1. О всякомъ прямоугольномъ параллелограмѣ говорятъ, что онъ заключенъ между двумя его сторонами, составляющими прямой уголъ.

*Примѣч. 1.* Прямоугольный параллелограмъ мы будемъ называть просто *прямоугольникомъ*. Какъ только извѣстны стороны параллелограма, составляющія прямой уголъ, то прямоугольникъ вполне опредѣляется и можетъ быть построенъ. Для сокращенія мы будемъ прямоугольникъ, заключенный между какими нибудь прямыми  $AB$  и  $CD$ , изображать символомъ  $AB.CD$ .

2. Гномономъ или Екеромъ называется фигура  $ABCGDH$  (фиг. 97), составленная изъ параллелограма  $DB$ , построеннаго на діагонали  $BD$ , и двухъ дополненій  $AD$  и  $DC$ .

Фиг. 97.



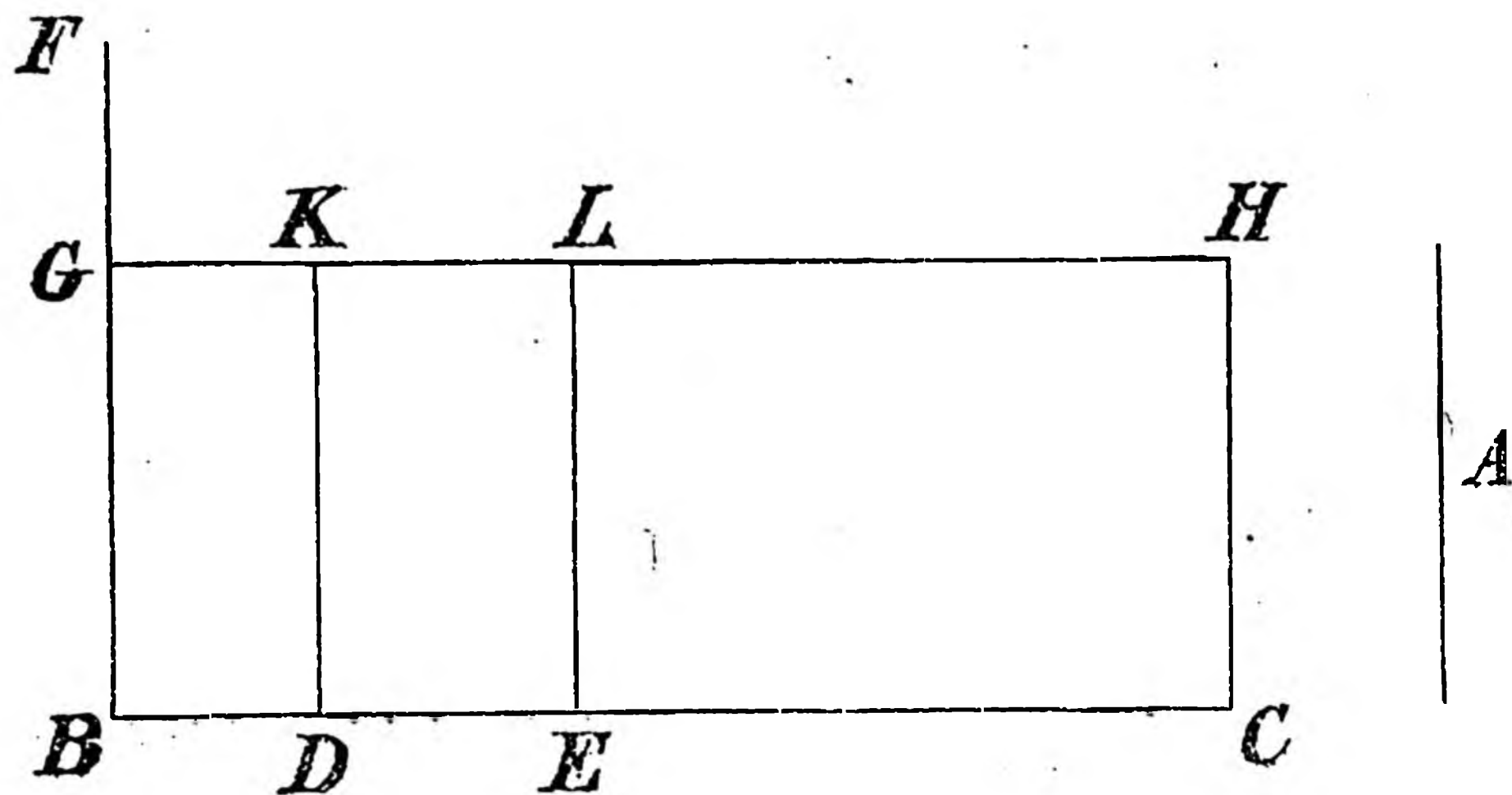
### Предложенія.

*Предложеніе 1.* Если изъ двухъ прямыхъ линій  $A$  и  $BC$  одна, на примѣръ  $BC$ , раздѣлена на нѣсколько произвольныхъ частей  $BD$ ,  $DE$ ,  $EC$ , то прямоугольникъ, заключенный между этими прямыми  $A$  и  $BC$ , равенъ суммѣ прямоугольниковъ заключенныхъ между прямою  $A$  и каждой частью  $BD$ ,  $DE$ ,  $EC$  (фиг. 98).

*Доказат.* Изъ точки  $B$  прямой  $BC$  возставимъ къ ней перпендику-

ляръ (кн. 1, пред. 11)  $BF$ , сдѣлаемъ  $BG=A$ , чрезъ точку  $G$  проведемъ  $GH \parallel BC$  (кн. 1, пред. 31), чрезъ точки  $D, E, C$  проведемъ  $DK \parallel BG$ ,  $EL \parallel BG$ ,  $CH \parallel BG$ .

Фиг. 98.



Изъ предъидущаго построения слѣдуетъ, что:

$$\text{прям. } BH = \text{прям. } BK + \text{прям. } DL + \text{прям. } EH.$$

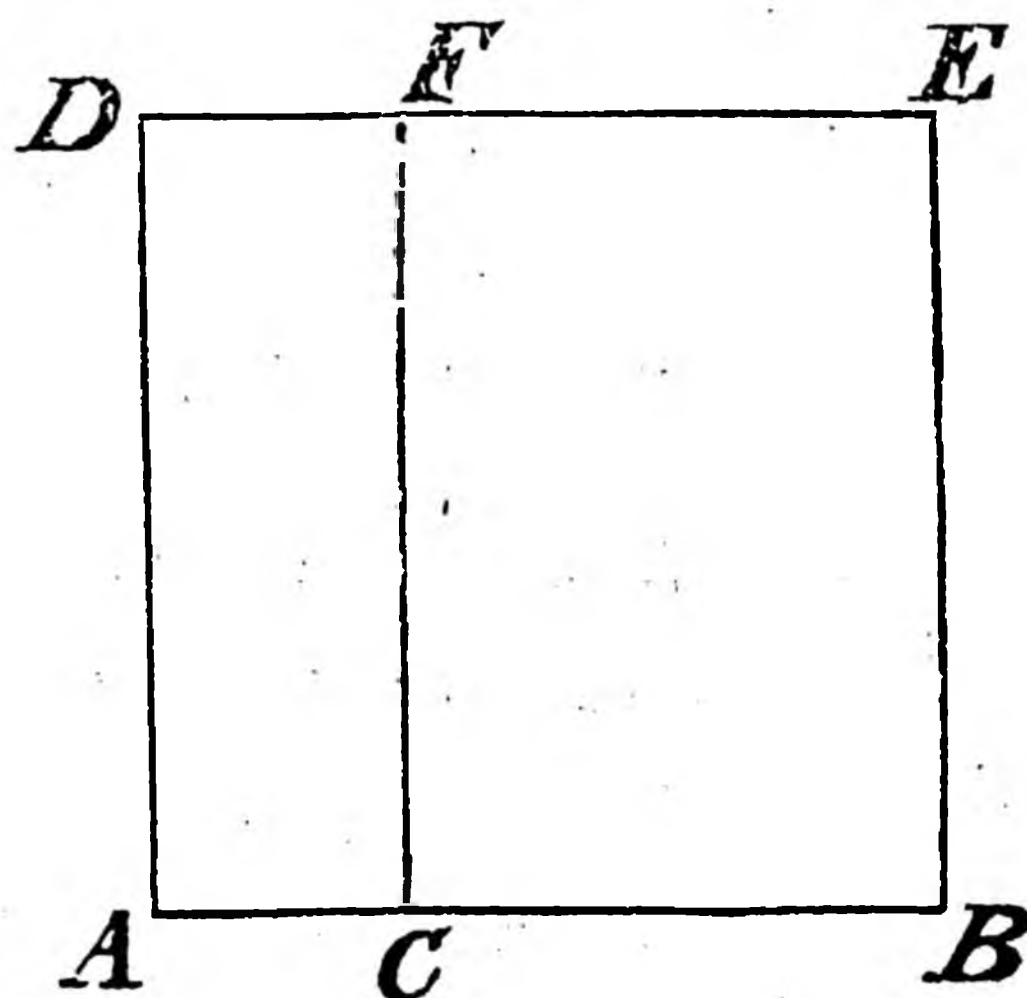
Но прямоугольникъ  $BH=BC \cdot BG=BC \cdot A$ . Точно также прямоугольники  $BK, DL, EH$  равны,  $\text{прям. } BK = BD \cdot BG = BD \cdot A$ ,  $\text{прям. } DL = DE \cdot DK = DE \cdot A$ ,  $\text{прям. } EH = EC \cdot EL = EC \cdot A$ , слѣдовательно:

$$BC \cdot A = BD \cdot A + DL \cdot A + EC \cdot A.$$

*Предложеніе 2.* Если прямую линію  $AB$  въ точкѣ  $C$  раздѣлимъ, на какія нибудь, двѣ части  $AC$  и  $CB$ , то квадратъ построенный на цѣлой линіи  $AB$  будетъ равенъ суммѣ прямоугольниковъ, заключенныхъ между прямою  $AB$  и ея отрѣзками  $AC$  и  $CB$  (фиг. 99).

*Доказат.* Построимъ на  $AB$  квадратъ (кн. 1, пред. 46)  $ADEB$  и проведемъ чрезъ точку  $C$ ,  $CF \parallel AD$ .

Фиг. 99.



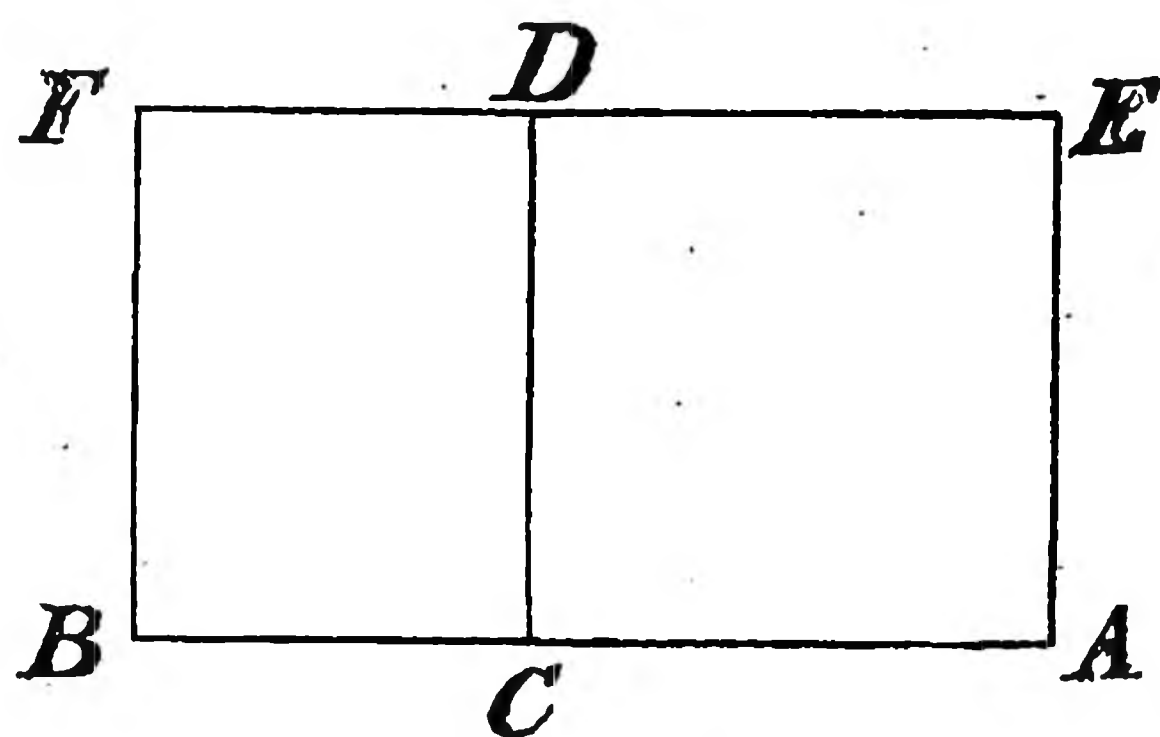
Изъ этого построения видимъ, что  $\square AE = \text{прям. } AF + \text{прям. } CE$ , но  $\text{прям. } AF = AC \cdot AD = AC \cdot AB$ ,  $\text{прям. } CE = CB \cdot CF = CB \cdot AB$ , слѣдовательно:

$$\square AB = AC \cdot AB + CB \cdot AB.$$

*Предложение 3.* Если прямую  $AB$  въ точкѣ  $C$  раздѣлимъ на какія нибудь двѣ части  $AC$  и  $CB$ , то прямоугольникъ, заключенный между цѣлою линіею  $AB$  и однимъ изъ отрѣзковъ, на примѣръ  $CA$ , будетъ равенъ суммѣ квадрата, построеннаго на  $CA$  и прямоугольника, заключеннаго между отрѣзками  $BC$  и  $AC$  (фиг. 100).

*Доказат.* Построимъ на  $CA$  квадратъ  $CE$  (кн. 1, пред. 46), продолжимъ  $ED$  такъ, чтобы она встрѣтилась въ точкѣ  $F$  съ прямою  $BF$ , проведенною параллельно  $AE$ . Изъ этого построенія видимъ, что:

Фиг. 100.



прям.  $AF$  = прям.  $BD$  +  $\square CA$ , но прям.  $BD = BC \cdot BF = AC \cdot BC$ ,

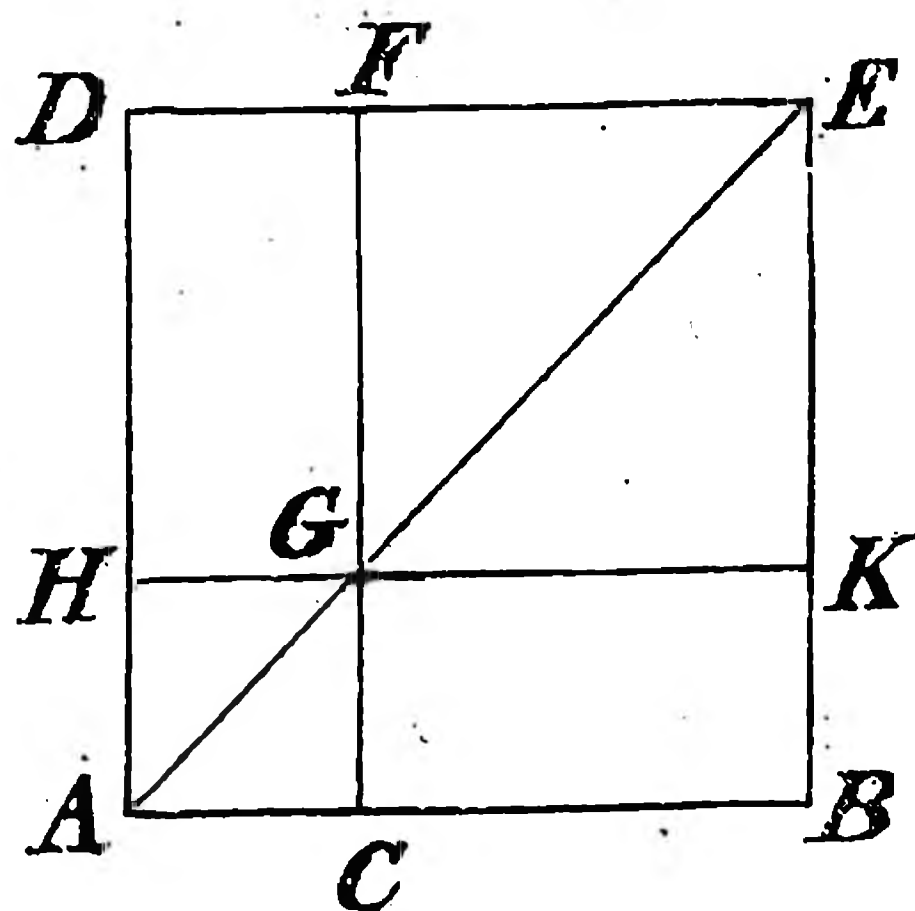
слѣдовательно:

$$AB \cdot CA = \square CA + BC \cdot AC.$$

*Предложение 4.* Если прямую  $AB$  въ точкѣ  $C$  раздѣлимъ на какія нибудь двѣ части  $AC$  и  $CB$ , то квадратъ построенный на  $AB$  равенъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на отрѣзкахъ  $AC$  и  $CB$  съ удвоеннымъ прямоугольникомъ, заключеннымъ между отрѣзками  $AC$  и  $CB$  (фиг. 101).

*Доказат.* Построимъ на  $AB$  квадратъ  $ABED$  (кн. 1, пред. 46) и проведемъ діагональ  $AE$ . Чрезъ точку  $C$  проведемъ  $CGF \parallel AD$ , и чрезъ точку  $G$  проведемъ  $HGK \parallel AB$ .

Фиг. 101.



Такъ какъ  $CF \parallel BE$ , то  $\angle AGC = \angle AEB$  (кн. 1, пред. 29). Но



$AB=BE$  (кн. 1, пред. 5), следовательно  $\angle AEB=\angle EAB=\angle AGC$ , откуда (кн. 1, пред. 6)  $AC=CG$ . Кроме того,  $AC$  и  $CG$  равны противолежащим сторонам  $GH$  и  $AN$  (кн. 1, пред. 34), следовательно  $CH$  есть равносторонний четырехугольник.

Такъ какъ  $CF \parallel HA$ , то (кн. 1, пред. 29)  $\angle HAC + \angle GCA = 2d$ . Но уголъ  $HAC$  прямой, следовательно и уголъ  $GCA$  также прямой, оба эти угла равны противолежащимъ угламъ  $HGC$  и  $ANG$  (кн. 1, пред. 34). Изъ этого видимъ, что  $CH$  есть равносторонний прямоугольникъ, следовательно квадратъ.

Точно такимъ-же образомъ легко показать, что  $FK$  есть квадратъ, коего сторона  $KG=BC$ .

Прямоугольникъ  $BG=BC \cdot CG=AC \cdot BC$ , точно также прям.  $GD=AC \cdot BC$ , но прям.  $BG$ =прям.  $GD$  (кн. 1, пред. 43), следовательно  $\text{прям. } BG + \text{прям. } GD = 2AC \cdot BC$ .

Откуда:

$$ABED = \square AB = \square AC + \square BC + 2AC \cdot BC.$$

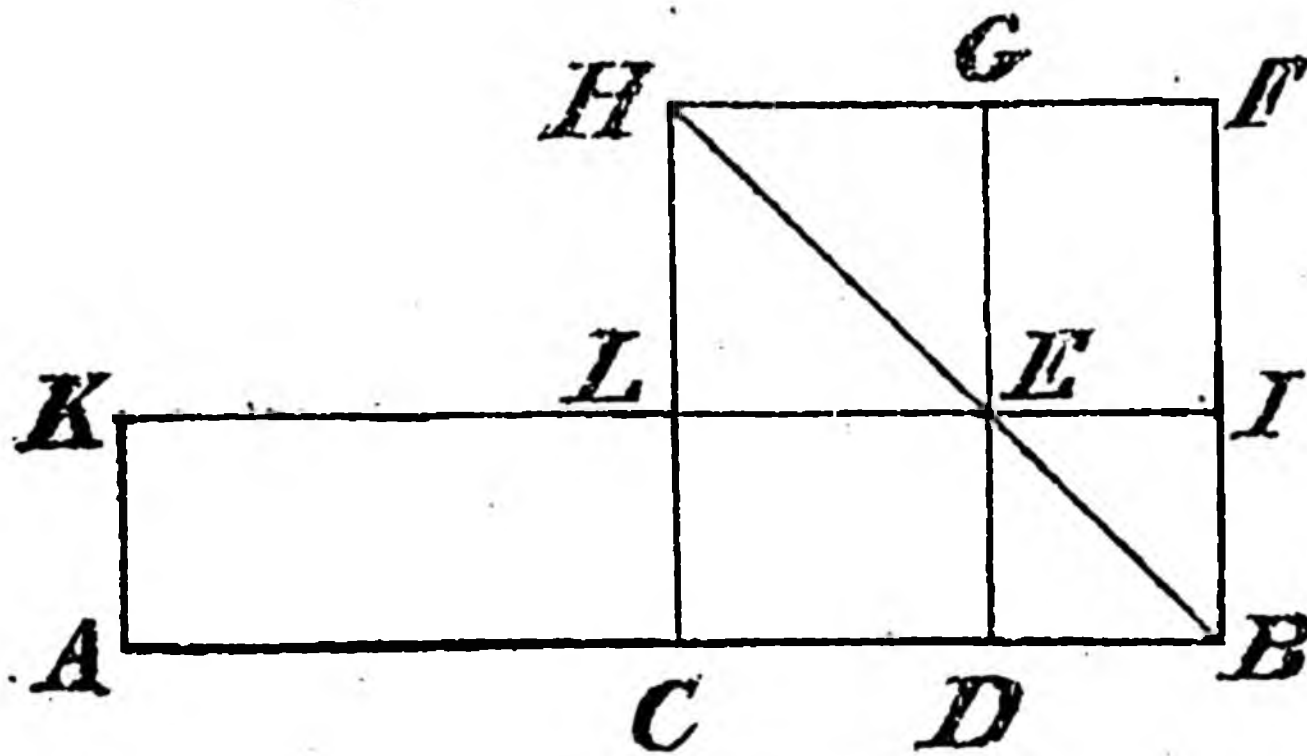
*Примѣч. 2.* Если прямая  $AB$  въ точкѣ  $C$  раздѣлена пополамъ, то  $AC=CB$ , следовательно:

$$\square AB = 4 \square AC.$$

Изъ предыдущаго также видно, что въ квадратѣ параллелограмма, построенные на діагонали, суть также квадраты. Квадратъ, построенный на суммѣ двухъ прямыхъ  $AC$  и  $CB$  равенъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на каждой изъ нихъ съ удвоеннымъ прямоугольникомъ, заключеннымъ между прямыми  $AC$  и  $CB$ .

*Предложеніе 5.* Если прямая линія  $AB$  въ точкѣ  $C$  раздѣлена на двѣ равныя части  $AC$  и  $CB$ , а въ точкѣ  $D$  на двѣ неравныя части  $AD$  и  $DB$ , то прямоугольникъ, заключенный между неравными частями  $AD$  и  $DB$  вмѣстѣ съ квадратомъ, построеннымъ на  $CD$ , равенъ квадрату, построенному на половинѣ  $AC$  или  $CB$  прямой  $AB$  (фиг. 102).

Фиг. 102.



*Доказат.* Построимъ (кн. 1, пред. 46) на  $CB$  квадратъ  $CBFH$ , коего

діагональ  $BH$ . Чрезъ точку  $D$  проведемъ  $DEG \parallel CH$ . Чрезъ точку встрѣчи  $E$  діагонали  $BH$  съ  $DG$  проведемъ прямую  $IL \parallel BC$  и продолжимъ ее до встрѣчи съ прямою  $AK$ , проведенною параллельно  $CH$ .

Такъ какъ  $\text{прям. } CE = \text{прям. } EF$  (кн. 1, пред. 43), то прибавляя по  $\square BE$ , найдемъ, что  $\text{прям. } DF = \text{прям. } BL$ . Но какъ  $AC = CB$ , то (кн. 1, пред. 36)  $\text{прям. } AL = \text{прям. } DF$ . Слѣдовательно  $\text{прям. } AE = \text{прям. } CE + \text{прям. } DF$ , т. е.:

$$AD \cdot BD = CD \cdot BD + AC \cdot BD.$$

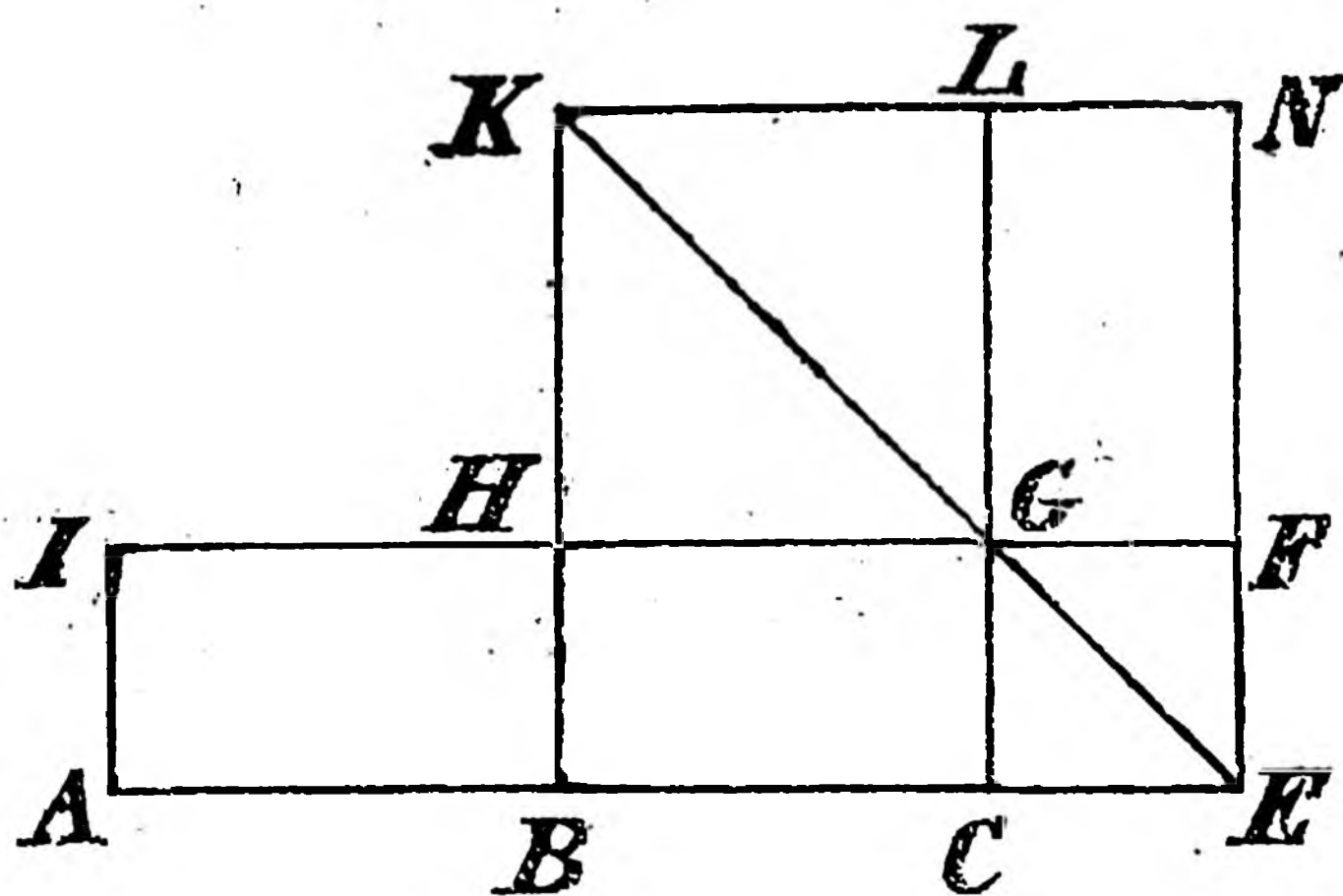
Откуда:

$$\square BC = \square DC + AD \cdot BD.$$

*Предложеніе 6.* Если прямую  $AC$  въ точкѣ  $B$  раздѣлимъ пополамъ и прибавимъ къ ней какой нибудь отрѣзокъ  $CE$ , то прямоугольникъ, заключенный между цѣлою прямою  $AE$  и прибавленнымъ отрѣзкомъ  $CE$ , вмѣстѣ съ квадратомъ, построеннымъ на половинѣ  $AC$ , равенъ квадрату, построенному на прямой  $BE$ , составленной изъ половины  $AC$  и прибавленнаго отрѣзка  $CE$  (фиг. 103).

*Доказат.* Построимъ на  $BE$  квадратъ  $BENK$  и проведемъ діагональ  $EK$ . Чрезъ точку  $C$  проведемъ  $CL \parallel BK$ . Чрезъ точку  $G$  встрѣчи діагонали  $EK$  съ  $CL$  проведемъ  $FH \parallel BE$  и продолжимъ ее до встрѣчи съ прямою  $AI$ , проведенною чрезъ точку  $A$ , параллельно прямой  $BK$ .

Фиг. 103.



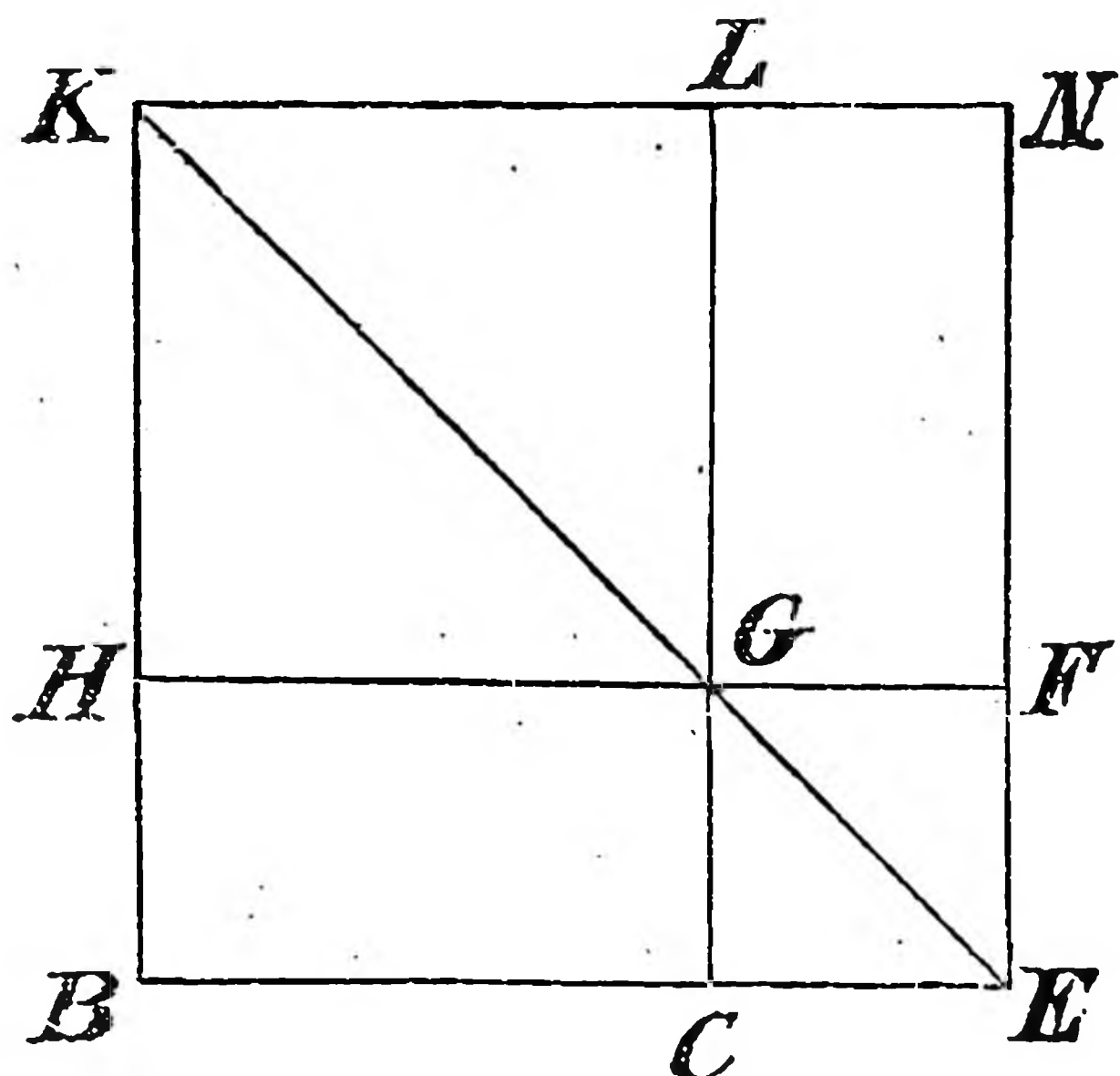
Легко видѣть, что  $\square BE = \square BC + \text{прям. } BF + \text{прям. } GN$ . Но такъ какъ  $\text{прям. } BG = \text{прям. } GN = \text{прям. } AH$  (кн. 1, 43), то  $\text{прям. } BF + \text{прям. } GN = \text{прям. } AF = AE \cdot CE$ . Слѣдовательно:

$$\square BE = \square BC + AE \cdot CE.$$

*Предложеніе 7.* Если прямую  $BE$  раздѣлимъ въ точкѣ  $C$  на двѣ части  $BC$  и  $CE$ , то квадратъ, построенный на  $BE$ , вмѣстѣ съ квадратомъ, построеннымъ на одной изъ частей, напримѣръ  $CE$ , равенъ удвоенному прямоугольнику, заключенному между цѣлою прямою  $BE$  и взятою частью  $CE$  вмѣстѣ съ квадратомъ, построеннымъ на другой части  $BC$  (фиг. 104).

*Доказат.* Построимъ на  $BE$  квадратъ  $BENK$  и проведемъ діагональ  $EK$ . Чрезъ точку  $C$  проведемъ прямую  $CL \parallel BK$ . Чрезъ точку  $G$  встрѣчи діагонали  $EK$  съ прямою  $CL$  проведемъ прямую  $FH \parallel BE$ .

Фиг. 104.



Изъ этого построения видимъ, что:

$$\square BE + \square CE = \square BC + BE \cdot CE + BC \cdot CE + \square CE.$$

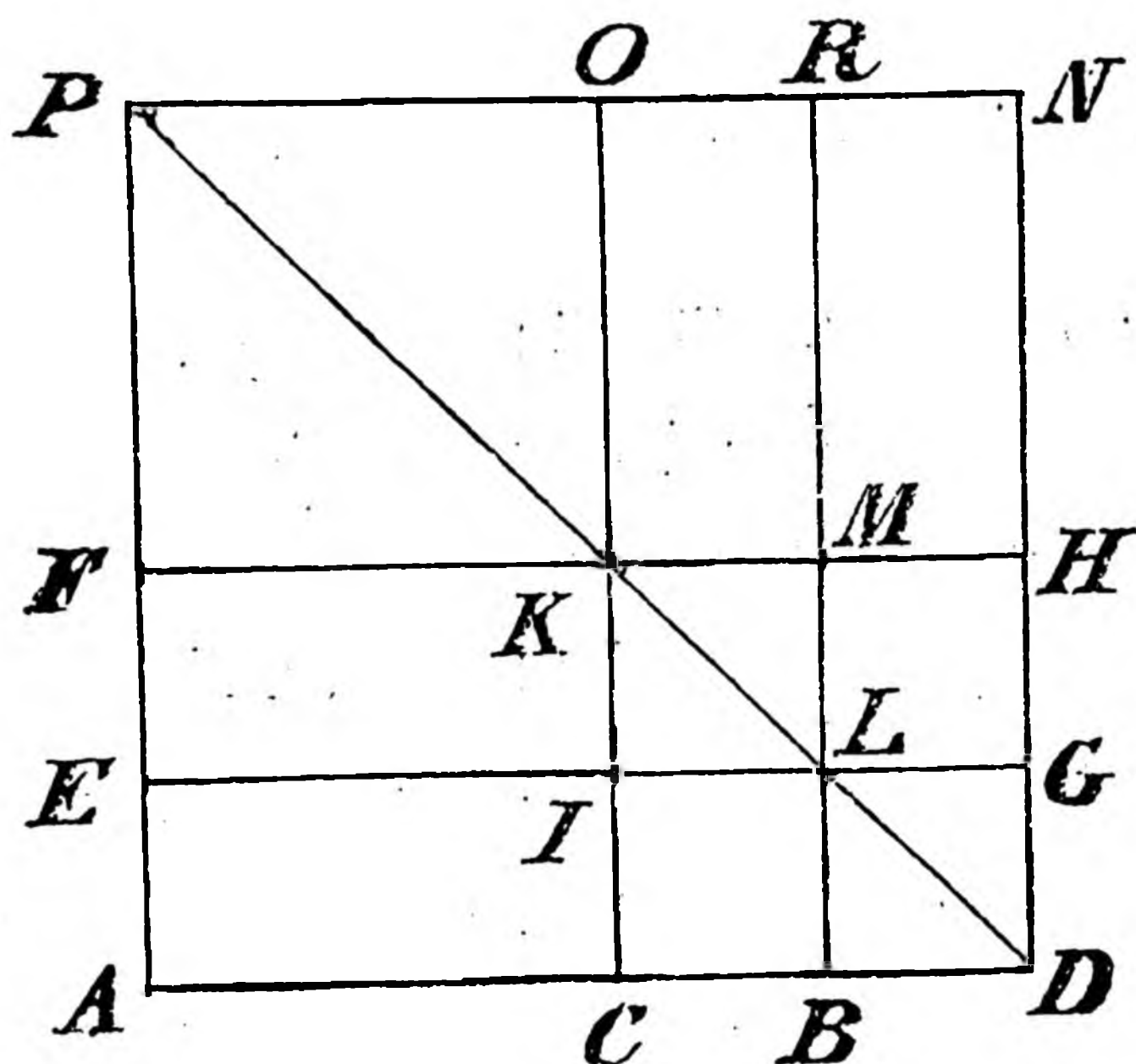
Но  $BC \cdot CE + \square CE = BE \cdot CE$ , слѣдовательно:

$$\square BE + \square CE = \square BC + 2BE \cdot CE.$$

*Примѣч. 3.* Изъ этого послѣдняго выраженія, рассматривая  $BC$  какъ разность двухъ прямыхъ  $BE$  и  $EC$ , получимъ, что квадратъ, построенный на разности двухъ прямыхъ, равенъ суммѣ квадратовъ построенныхъ на каждой изъ нихъ безъ удвоеннаго прямоугольника, заключеннаго между этими прямыми.

*Предложеніе 8.* Если прямую  $AB$  раздѣлимъ въ точкѣ  $C$  на какія нибудь двѣ части  $AC$  и  $CB$ , то квадратъ, построенный на прямой  $AD$ , составленной изъ прямыхъ  $AB$  и  $CB$ , равенъ четырежды взятому прямо-

Фиг. 105.



угольнику, заключенному между цѣлою  $AB$  и ея частью  $CB$ , вмѣстѣ съ квадратомъ, построеннымъ на другой части  $AC$  прямой  $AB$  (фиг. 105).



*Доказат.* Продолжимъ данную прямую  $AB$  такъ, чтобы продолженіе  $BD$  было равно  $CB$  и на прямой  $AD$  построимъ квадратъ  $ADNP$ . Проведемъ діагональ  $DP$ . Изъ точекъ  $C$  и  $B$  проведемъ параллельныя  $CO$ ,  $BR$  сторонѣ квадрата  $AP$ . Чрезъ точки  $L$  и  $K$  встрѣчи діагонали  $DP$  съ прямыми  $BR$  и  $CO$  проведемъ параллельныя  $GE$  и  $HF$  прямой  $AD$ .

Изъ этого построенія видно, что:

$$\square AD = \text{прям. } AL + \text{прям. } LN + \text{прям. } EM + \text{прям. } KR + \square BD + \square AC.$$

$$\text{Но прям. } AL = \text{прям. } LN = \text{прям. } EM = AB \cdot CB:$$

$$\text{прям. } KR + \square BD = AB \cdot CB.$$

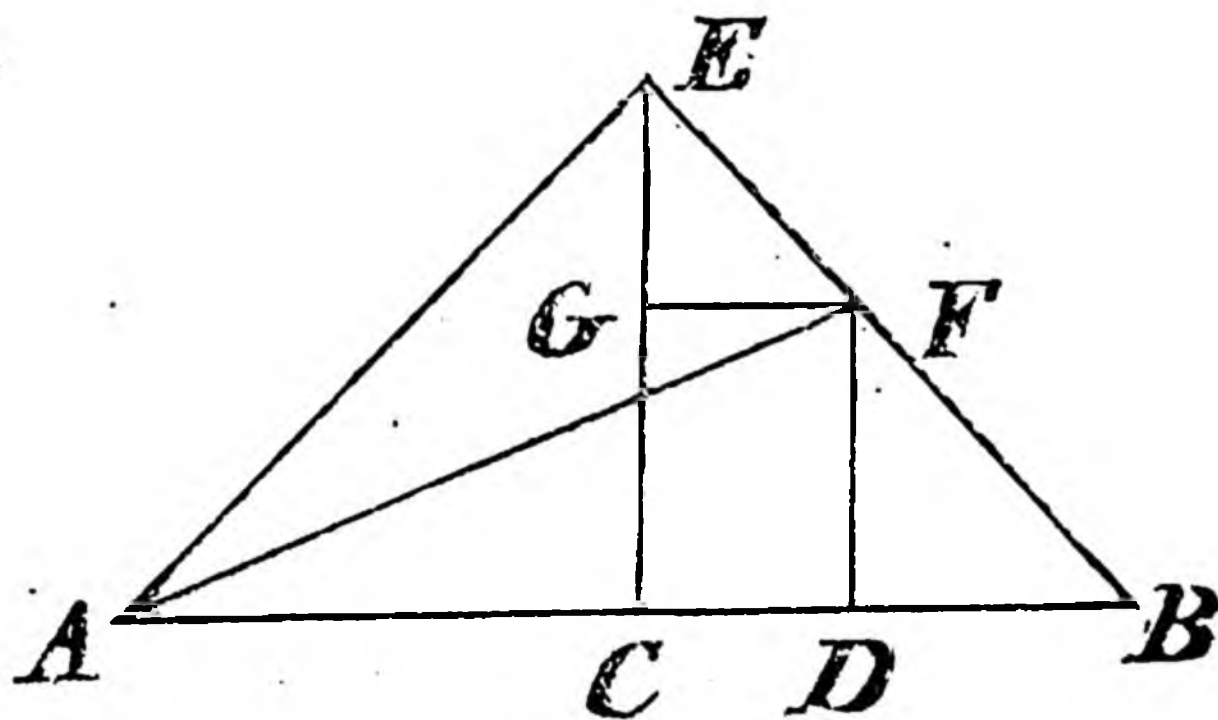
Слѣдовательно:

$$\square AD = 4AB \cdot CB + \square AC.$$

*Предложеніе 9.* Если прямая  $AB$  раздѣлена въ точкѣ  $C$  на двѣ равныя части  $AC$  и  $CB$ , и въ точкѣ  $D$  на двѣ не равныя части  $AD$  и  $DB$ , то сумма квадратовъ, построенныхъ на неравныхъ частяхъ  $AD$  и  $DB$ , равна суммѣ удвоенныхъ квадратовъ, построенныхъ на  $AC$  и  $CD$  (фиг. 106).

*Доказат.* Изъ середины  $C$  прямой  $AB$  возставимъ къ ней перпендикуляръ  $CE$  и сдѣлаемъ  $CE = AC = CB$ . Соединимъ точки  $A$  и  $B$  съ  $E$ . Чрезъ точку  $D$  проведемъ параллельную  $DF$  прямой  $CE$ , до встрѣчи съ  $BE$  въ точкѣ  $F$ , чрезъ точку  $F$  проведемъ параллельную  $FG$  прямой  $AB$ . Наконецъ соединимъ  $A$  съ  $F$  прямою  $AF$ .

Фиг. 106.



Такъ какъ  $CE = AC = CB$ , и при точкѣ  $C$  углы прямые, то  $\angle CEA = \angle CAE = \angle CEB = \angle CBE = \frac{1}{2}d$  (кн. 1, пред. 32).

Такъ какъ  $DF \parallel CE$ ,  $FG \parallel CD$ , то (кн. 1, пред. 29)  $\angle FDB$  и  $\angle EGF$  каждый равенъ прямому углу;  $\angle DEB = \angle CEB = \frac{1}{2}d$  и  $\angle GFE = \angle DBF = \frac{1}{2}d$ , слѣдовательно, (кн. 1, пред. 6)  $DF = DB$ ,  $EG = GF = CD$ .

Такъ какъ  $\angle AEC = \angle BEC = \frac{1}{2}d$ , то  $\angle AEB = d$ . Откуда (кн. 1, пред. 47).

$$\square AF = \square AE + \square EF.$$

Замѣчая еще, что углы  $D$ ,  $C$  и  $E$  прямые, мы будемъ имѣть:

$$\square AF = \square AD + \square DF = \square AD + \square BD$$

$$\square AE = \square AC + \square CE = 2\square AC$$

$$\square EF = \square EG + \square GF = 2\square CD, \dots$$

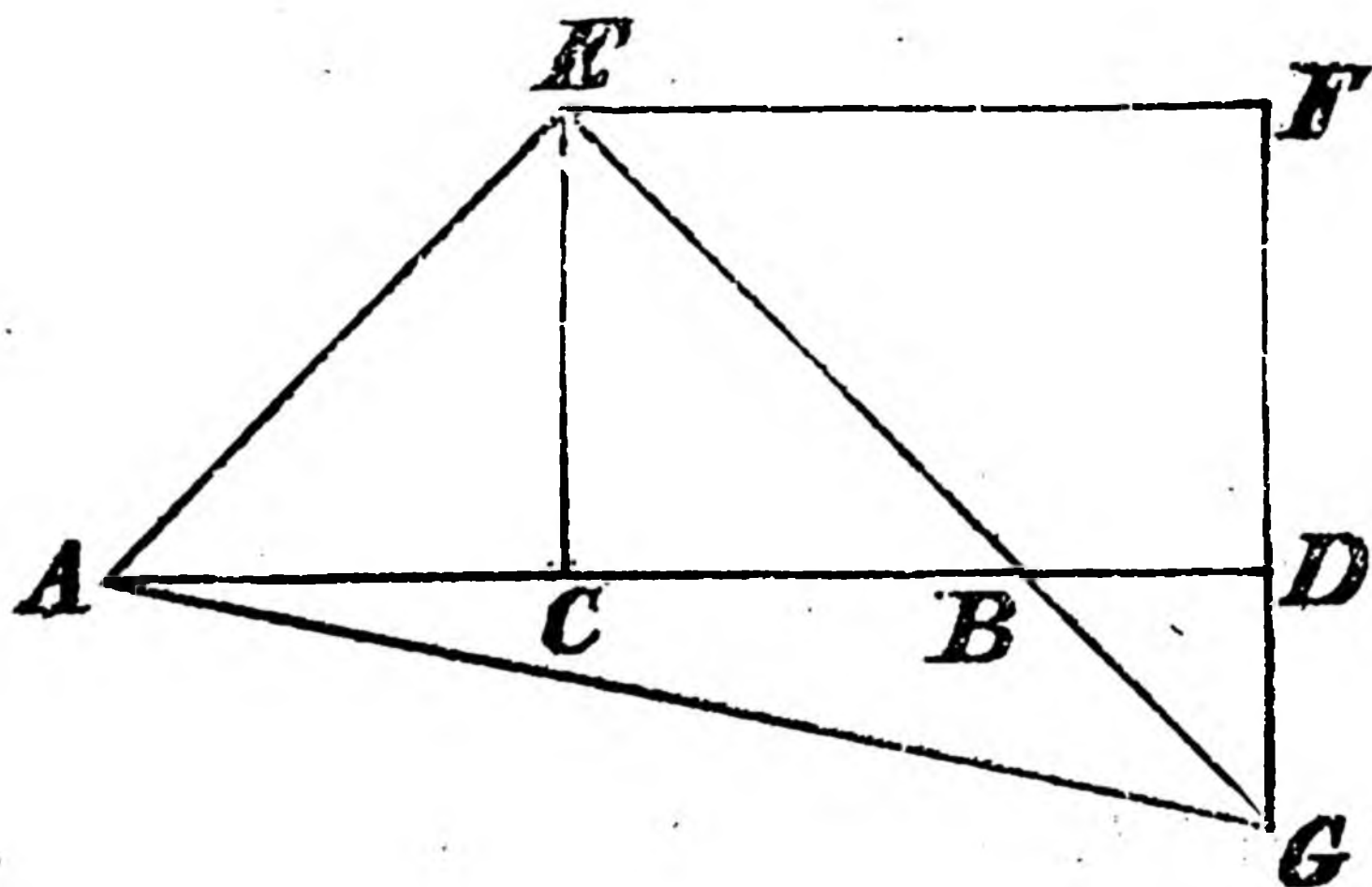
складывая два послѣднія выраженія и сравнивая съ двумя предыдущими, найдемъ:

$$\square AD + \square BD = 2\square AC + 2\square CD.$$

**Предложеніе 10.** Если прямую  $AB$  въ точкѣ  $C$  раздѣлимъ на двѣ равныя части  $AC$  и  $CB$  и если къ  $AB$  прибавимъ какую нибудь прямую  $BD$ , то квадратъ, построенный на цѣлой прямой  $AD$ , выѣстъ съ квадратомъ, построеннымъ на прибавленной прямой  $BD$ , равны удвоенной суммѣ квадратовъ, построенныхъ на  $AC$  и  $CD$  (фиг. 107).

**Доказат.** Изъ точки  $C$  прямой  $AB$  возставимъ перпендикуляръ  $CE = AC = CB$  (кн. 1, пред. 2). Проведемъ чрезъ точку  $E$  прямую  $EF \parallel AB$ . Чрезъ точку  $D$  проведемъ прямую  $DF \parallel CE$ , то (кн. 1, пред. 29)  $\angle CEF + \angle EFD = 2d$ , и  $\angle BEF + \angle EFD < 2d$ , слѣдовательно, (кн. 1, акс. 11) прямыя  $EB$  и  $FD$ , по нѣкоторомъ продолженіи, встрѣтятся, положимъ въ точкѣ  $G$ .

Фиг. 107.



Такъ какъ  $CE = AC = CB$ , а при точкѣ  $C$  углы прямые, то  $\angle CAE = \angle CEA$ ,  $\angle CBE = \angle CEB$ , и каждый изъ этихъ угловъ равенъ  $\frac{1}{2}d$ .

Прямая  $EF \parallel AD$ , а  $FG \parallel CE$ , то (кн. 1, пред. 29)  $\angle D = \angle F = \angle C = d$ ;  $\angle DGB = \angle BEC = \frac{1}{2}d$ ;  $\angle FEB = \angle DBG = \angle EBC = \frac{1}{2}d$ , слѣдовательно (кн. 1, пред. 6),  $DB = DG$  и  $FG = FE = CD$ .

Такъ какъ уголъ  $\angle AEG = d$ , то мы имѣемъ (кн. 1, пред. 47):

$$\square AG = \square AE + \square EG.$$

Замѣчая, что углы  $D, C, F$  прямые, мы имѣемъ еще:

$$\square AG = \square AD + \square DG = \square AD + \square BD$$

$$\square AE = \square AC + \square EC = 2\square AC$$

$$\square EG = \square FG + \square EF = 2\square CD.$$

Откуда наконецъ, складывая два послѣднія выраженія и сравнивая съ двумя предыдущими, найдемъ:

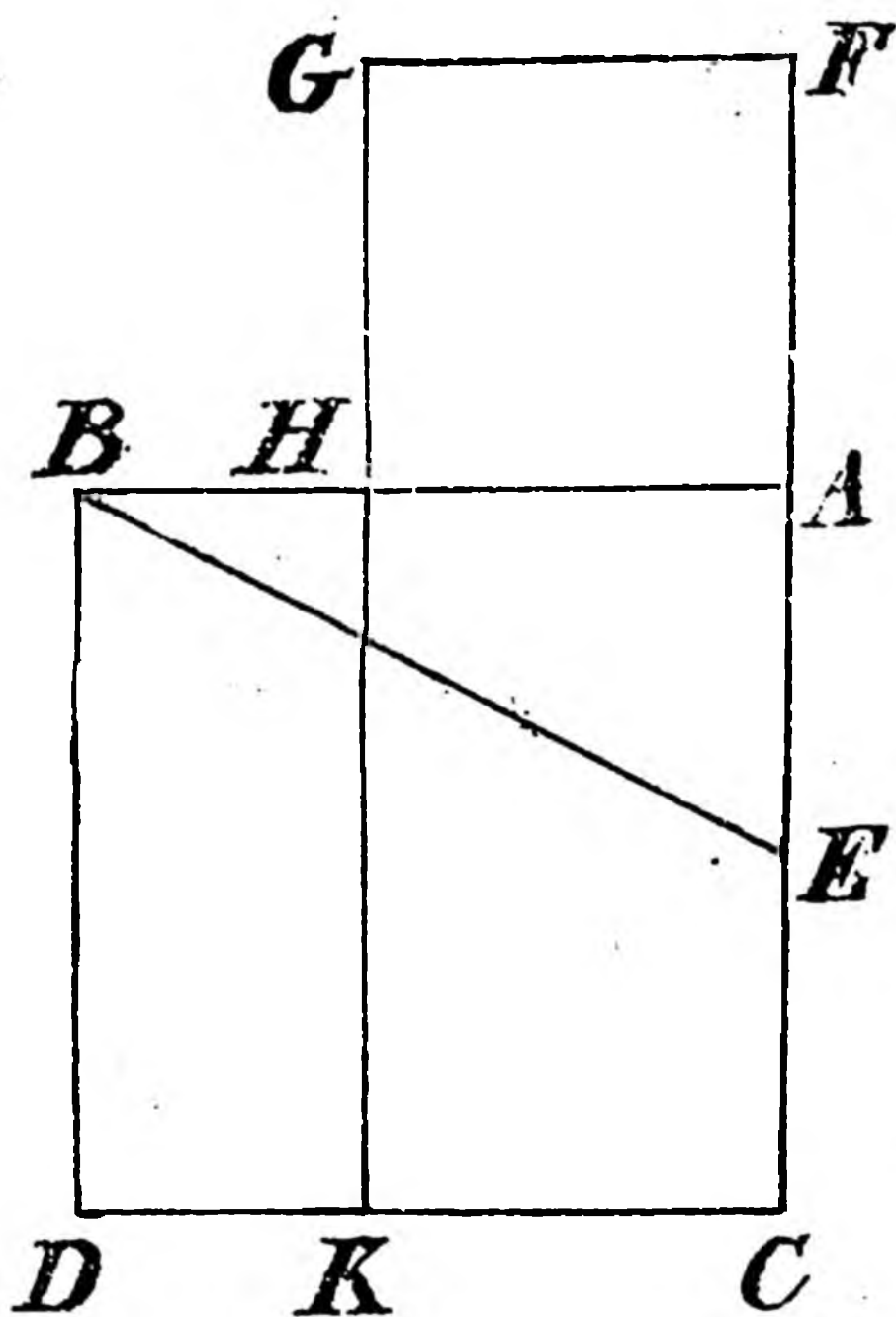
$$\square AD + \square BD = 2\square AC + 2\square CD.$$

*Предложеніе 11.* Раздѣлить прямую  $AB$  въ точкѣ  $H$  на такія двѣ части, чтобы прямоугольникъ, заключенный между цѣлою прямою  $AB$  и одною изъ ея частей, былъ равенъ квадрату, построенному на другой ея части (фиг. 108)?

*Рѣшеніе.* Построимъ на прямой  $AB$  квадратъ  $ABDC$ , раздѣлимъ сторону  $AC$  въ точкѣ  $E$  пополамъ и проведемъ прямую  $BE$ . Продолжимъ  $AC$  до точки  $F$ , такъ, чтобы  $EF = EB$ . Построимъ на  $AF$  квадратъ  $AFGH$  и продолжимъ сторону  $GH$  до встрѣчи съ  $DC$  въ точкѣ  $K$ . Прямая  $AB$  и будетъ раздѣлена такъ что:

$$\square AH = AB \cdot BH.$$

Фиг. 108.



Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ  $AC$  въ точкѣ  $E$  раздѣлена пополамъ, то (кн. 2, пред. 6) мы имѣемъ:

$$\square EF = \square EB = CF \cdot AF + \square AE.$$



Уголъ  $\angle BAE = d$ , слѣдовательно мы еще имѣемъ:

$$\square EB = \square AB + \square AE$$

откуда:

$$CF \cdot AF + \square AE = \square AB + \square AE$$

отнимая по  $\square AE$  (кн. 1, акс. 3) получимъ:

$$\square AB = CF \cdot AF = CF \cdot FG$$

Слѣдовательно прямоугольникъ  $KF = \square AB$ .

Если отъ обѣихъ частей этого равенства отнимемъ по прямоугольнику  $AK$ , то получимъ:

$$\square AH = \text{прямоугольнику } DH = BD \cdot BH,$$

но  $BD = AB$ , слѣдовательно:

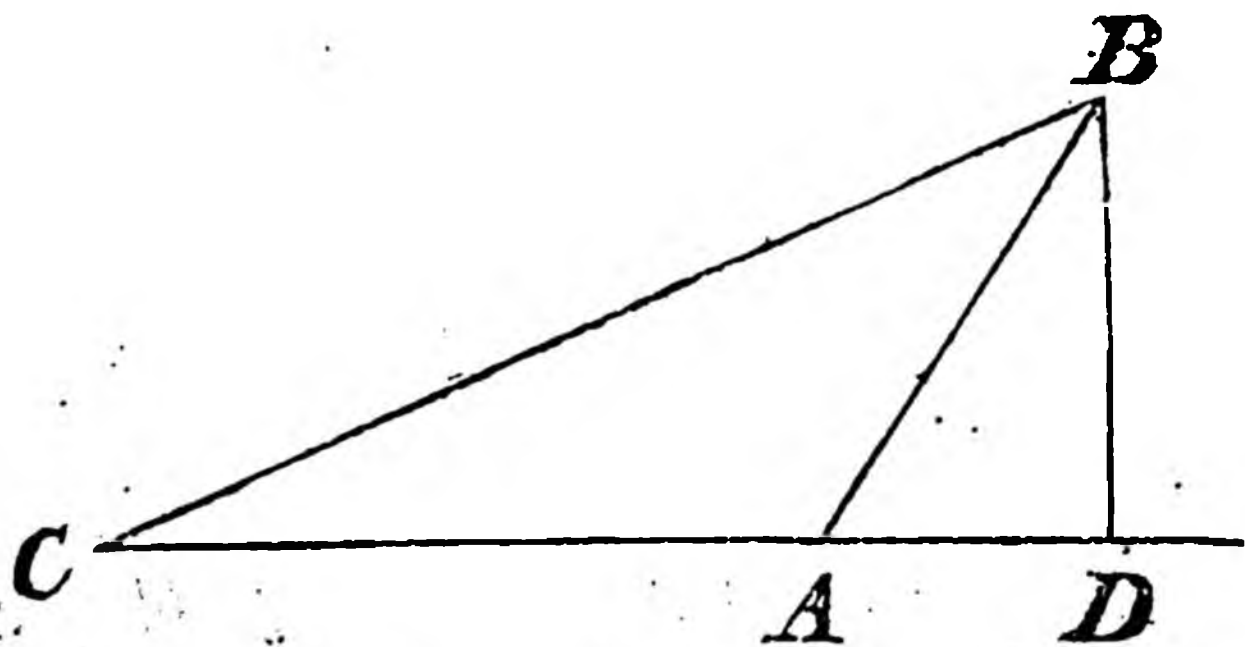
$$AB \cdot BH = \square AH.$$

*Предложеніе 12.* Во всякомъ тупоугольномъ треугольникѣ  $CBA$  квадратъ, построенный на сторонѣ  $BC$ , противолежащей тупому углу  $\angle CAB$ , больше суммы квадратовъ, построенныхъ на другихъ сторонахъ  $AB$  и  $AC$ , на удвоенный прямоугольникъ, заключенный между одною изъ сторонъ, заключающихъ тупой уголъ, на примѣръ  $AC$ , и продолженіемъ  $AD$  той же стороны  $AC$  до встрѣчи съ перпендикуляромъ  $BD$ , опущеннымъ изъ точки  $B$  на сторону  $AC$  (фиг. 109).

*Доказат.* Такъ какъ прямая  $CD$  въ точкѣ  $A$  раздѣлена на двѣ, вообще неравныя, части, то (кн. 2, пред. 4) будемъ имѣть:

$$\square CD = \square CA + \square AD + 2AC \cdot AD.$$

Фиг. 109.



Прибавляя по  $\square DB$  къ обѣимъ частямъ предыдущаго равенства (кн. 1, акс. 2), найдемъ:

$$\square CD + \square DB = \square AC + \square AD + \square DB + 2AC \cdot AD$$

но

$$\square CD + \square DB = \square CB \text{ (кн. 1, пред. 47)}$$

и

$$\square AD + \square DB = \square AB$$

слѣдовательно:

$$\square CB = \square AC + \square AB + 2AC \cdot AD.$$

*Предложеніе 13.* Во всякомъ треугольникѣ  $CBA$  квадратъ, построенный на сторонѣ  $AB$ , противолежащей острому углу  $C$ , меньше суммы квадратовъ, построенныхъ на остальныхъ сторонахъ  $CB$  и  $CA$ , на удвоенный прямоугольникъ, заключенный между одной изъ сторонъ, заключающихъ острый уголъ  $C$ , на примѣръ  $AC$  и частью  $CD$  этой стороны, лежащей между вершиною угла  $C$  и основаніемъ перпендикуляра опущеннаго изъ точки  $B$  на сторону  $AC$ .

*Доказат. Случай 1.* Перпендикуляръ  $BD$  падаетъ внутри треугольника  $ABC$  (фиг. 110)..

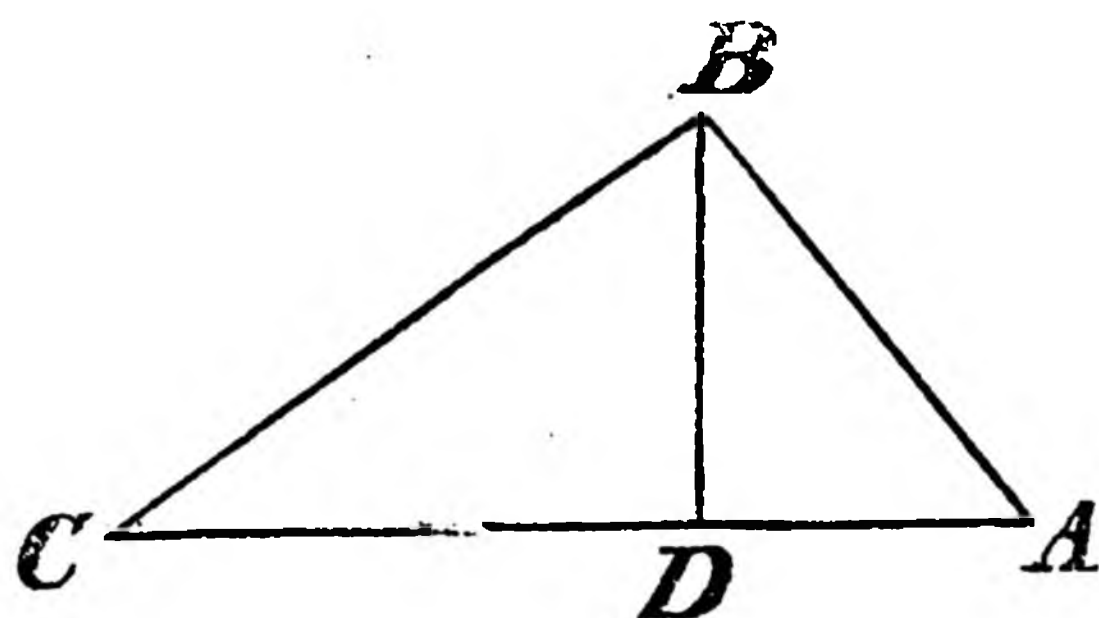
Сторона  $AC$  въ точкѣ  $D$  раздѣлена вообще на двѣ неравныя части, слѣдовательно, мы имѣемъ (кн. 2, пред. 7):

$$\square AC + \square CD = \square AD + 2AC \cdot CD.$$

Если прибавимъ къ обѣимъ частямъ этого равенства по  $\square BD$ , то найдемъ:

$$\square AC + \square CD + \square BD = \square AD + \square BD + 2AC \cdot CD.$$

Фиг. 110.



Но мы имѣемъ (кн. 1, пред. 47):

$$\square CD + \square BD = \square BC, \quad \square AD + \square BD = \square AB$$

слѣдовательно:

$$\square AC + \square BC = \square AB + 2AC \cdot CD$$

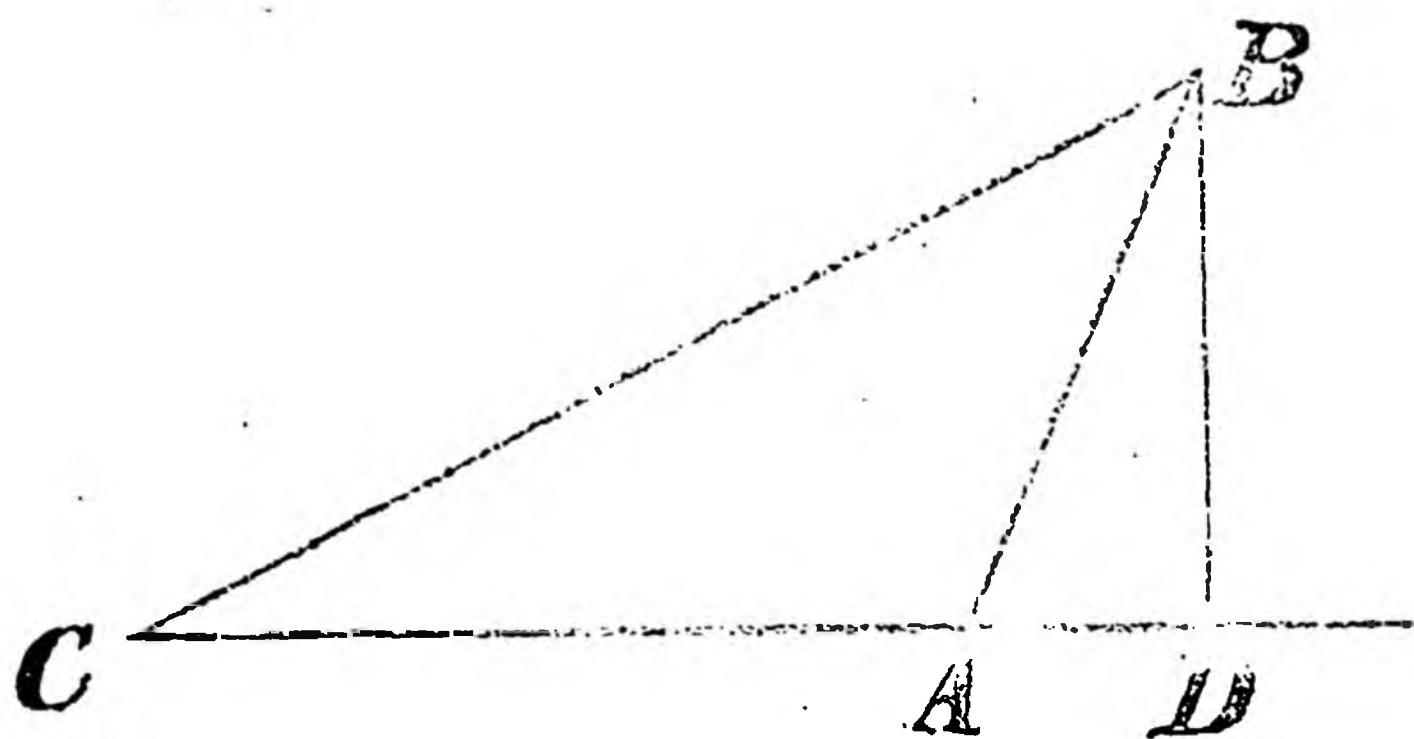
откуда видимъ что:

$$\square AB < \square AC + \square BC$$

на  $2AC \cdot CD$ .

Случай 2. Перпендикуляръ  $BD$  падаетъ внѣ треугольника  $CBA$  (фиг. 111).

Фиг. 111.



Прямая  $CD$  въ точкѣ  $A$  раздѣлена, вообще, на двѣ неравныя части, слѣдовательно мы имѣемъ (кн. 2, пред. 7):

$$\square CD + \square AC = \square AD + 2CD \cdot AC$$

придадимъ къ обѣмъ частямъ, по  $\square BD$ , то получимъ:

$$\square CD + \square BD + \square AC = \square AD + \square BD + 2CD \cdot AC$$

но (кн. 1, пред. 47):

$$\square CD + \square BD = \square CB, \quad \square AD + \square BD = \square AB$$

слѣдовательно:

$$\square CB + \square AC = \square AB + 2CD \cdot AC$$

откуда видимъ, что:

$$\square AB < \square CB + \square AC \text{ на } 2CD \cdot AC.$$

*Примѣч 4.* Теоремы, обратныя двумъ предыдущимъ, имѣютъ мѣсто.

Если квадратъ, построенный на одной изъ сторонъ треугольника, будетъ больше суммы квадратовъ, построенныхъ на остальныхъ его сторонахъ, то уголъ, противолежащій первой сторонѣ, будетъ тупой.

Въ самомъ дѣлѣ, если бы онъ былъ прямой, то квадратъ, построенный на сторонѣ, противолежащей этому углу, былъ бы равенъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на остальныхъ сторонахъ (кн. 1, пред. 47 пред). Если бы онъ былъ острый, то квадратъ, построенный на сторонѣ, противолежащей острому углу, былъ бы меньше суммы квадратовъ остальныхъ сторонъ (кн. 2, пред. 13). Слѣдовательно этотъ уголъ долженъ быть тупой. Точно также легко доказать и теорему обратную теоремѣ 13.

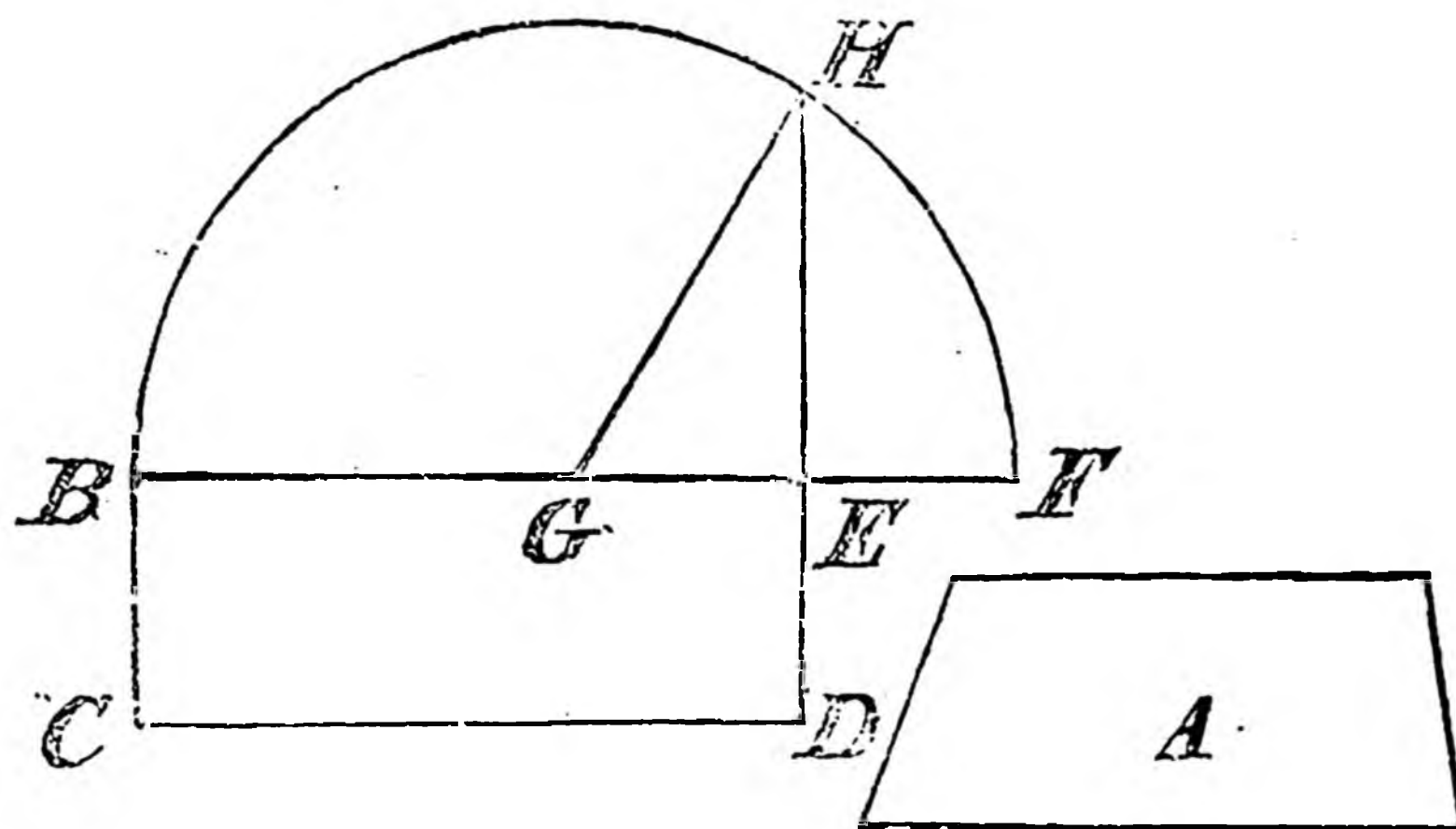
*Предложеніе 14.* Построить квадратъ, равный данной прямолинейной фигурѣ  $A$  (фиг. 112)?

*Рѣшеніе.* Построимъ прямоугольникъ  $BD$ , равный данной фигурѣ  $A$  (кн. 1, пред. 45):



Продолжимъ  $BE$  до точки  $F$  такъ, чтобы  $EF=ED$ , раздѣлимъ прямую  $BF$  въ точкѣ  $G$  пополамъ и изъ точки  $G$ , какъ изъ центра, радиу-

Фиг. 112.



сомъ  $GB$  опишемъ кругъ  $BHF$ . Продолжимъ  $DE$  до встрѣчи съ кругомъ въ точкѣ  $H$ , то  $\square HE$  будетъ требуемый.

Въ самомъ дѣлѣ, въ точкѣ  $G$  прямая  $BF$  раздѣлена пополамъ, а въ точкѣ  $E$  она раздѣлена на двѣ неравныя части, то (кн. 2, пред. 5) мы имѣемъ:

$$\square GF = \square EG + BE \cdot EF = \square GH \quad (\text{кн. 1, опред. 15}).$$

Но  $E$  есть уголъ прямой, слѣдовательно:

$$\square GH = \square EG + \square EH$$

откуда:

$$\square EG + BE \cdot EF = \square EG + \square EH$$

отнимая по  $\square EG$ , найдемъ:

$$\square EH = BE \cdot EF = BE \cdot ED.$$

*Примѣч. 5.* Теоремы этой книги суть ничто иное какъ слѣдующія алгебраическія тождества:

*Предложеніе 1.* Если  $a = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , то:

$$ab = a_1b + a_2b + \dots + a_nb.$$

*Предложеніе 2.* Если  $a = b + c$ , то:

$$a^2 = ab + ac,$$

*Предложеніе 3.* Если  $a = b + c$ , то:

$$ad = bd + cd.$$

*Предложеніе 4.*

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

*Предложеніе 5.*

$$(a-b)b + \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}.$$

*Предложеніе 6.*

$$(a+b)^2 = a^2 + (2a+b)b$$

*Предложеніе 7.*

$$(a+b)^2 + b^2 = a^2 + 2(a+b)b,$$

или, полагая  $a+b=c$ :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.$$

*Предложеніе 8.*

$$(a+2b)^2 = a^2 + 4(a+b)b.$$

*Предложеніе 9.*

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

*Предложеніе 10.*

$$(a+b)^2 + b^2 = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2} + b\right)^2.$$

Для насъ имѣютъ значеніе только предложенія 4, 7, 11, 12, 13 и 14 этой книги, всѣ остальные суть только алгебраическія преобразованія.

---

## КНИГА III.

### О п р е д ѣ л е н і я.

1. Равные круги суть тѣ, у которыхъ діаметры равны, или у которыхъ прямая, проведенная изъ центра къ окружности, равны.

*Прим. 1.* Это не опредѣленіе, а теорема, справедливость которой очевидна; въ самомъ дѣлѣ, если совмѣстить круги такъ, чтобы ихъ центры совпали, то окружности также совпадутъ, такъ какъ прямая, проведенная изъ центра къ окружностямъ, равны.

2. Говорятъ, что прямая линія *касается* круга, если она его встрѣчаетъ, но, будучи продолжена, его не пересѣкаетъ.

3. Говорятъ, что одинъ кругъ *касается* другаго, если они встрѣчаются, но не пересѣкаются.

4. Говорятъ, что прямая линія находится въ равномъ разстояніи отъ центра круга, если перпендикуляры, опущенные изъ центра на эти прямая, равны.

5. Та прямая линія, на которую падаетъ наибольшій перпендикуляръ, наиболѣе удалена отъ центра.

6. *Сегментъ круга* есть фигура, ограниченная окружностью и прямою линіею, которая ее пересѣкаетъ.

7. *Уголъ сегмента* есть уголъ, заключенный между дугою и прямою.

8. *Уголъ въ сегментѣ* называется уголъ, образуемый прямыми, проведенными изъ какой нибудь точки окружности сегмента къ оконечностямъ прямой, служащей основаніемъ сегмента.

9. Говорятъ, что *уголъ стягивается дугою*, которая заключается между его сторонами.

10. *Секторомъ* называется фигура, образуемая двумя радіусами и дугою, заключенною между ними.

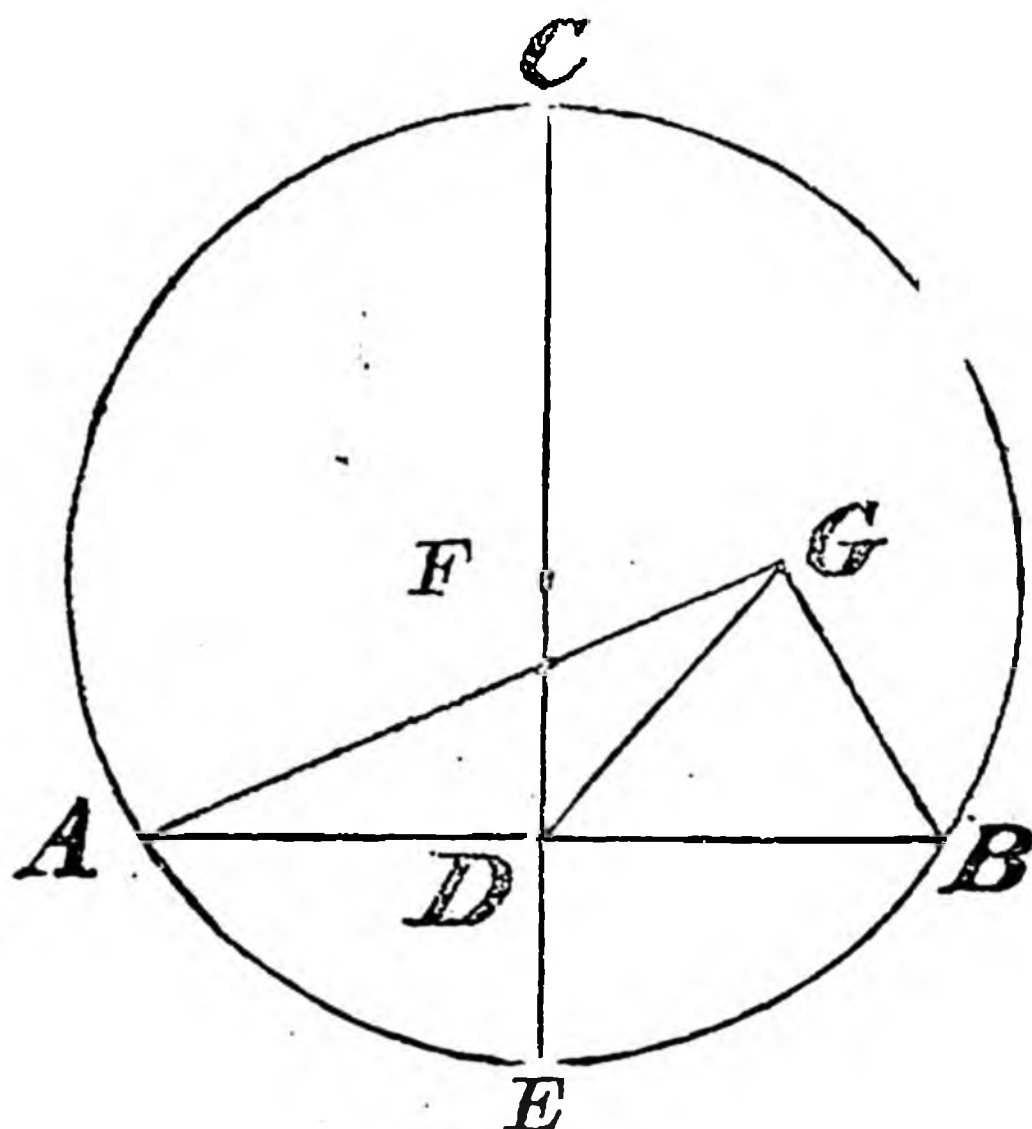
11. *Подобные сегменты* суть тѣ, въ которыхъ углы равны или которые содержатъ равные углы.



*Предложеніе 1.* Найти центръ даннаго круга  $ABC$  (фиг. 113)?

*Рѣшеніе.* Проведемъ въ кругѣ произвольную прямую линію  $AB$  и раздѣлимъ ее пополамъ въ точкѣ  $D$  (кн.1, пред. 11), изъ этой точки возставимъ къ  $AB$  перпендикуляръ  $DC$  и продолжимъ его въ обѣ стороны до встрѣчи съ окружностью въ точкахъ  $C$  и  $E$ . Раздѣлимъ прямую  $CE$  пополамъ въ точкѣ  $F$ , то  $F$  и будетъ искомый центръ круга.

Фиг. 113.



Положимъ, что точка  $F$  не есть центръ круга  $ABC$ , а центръ его есть какая-то другая точка  $G$ . Проведемъ прямыя  $GA$ ,  $GD$ ,  $GB$ . Такъ какъ  $AD=DB$ ,  $AG=GB$  (кн.1, опр. 15),  $GD$  общая, то  $\triangle ADG=\triangle BDG$  (кн. 1, пред. 8), слѣдовательно углы  $ADG$  и  $GDB$  прямые (кн. 1, акс. 10). Но уголъ  $CDB$  также прямой, слѣдовательно  $\angle CDB=\angle GDB$ , что невозможно (кн. 1, акс. 9).

Итакъ точка  $G$  не можетъ быть центромъ, какъ и всякая другая, исключая точки  $F$ .

*Слѣдствіе.* Изъ сказаннаго очевидно, что если въ кругѣ одна прямая линія встрѣчаетъ по серединѣ другую подъ прямымъ угломъ, то на этой послѣдней прямой лежитъ центръ круга.

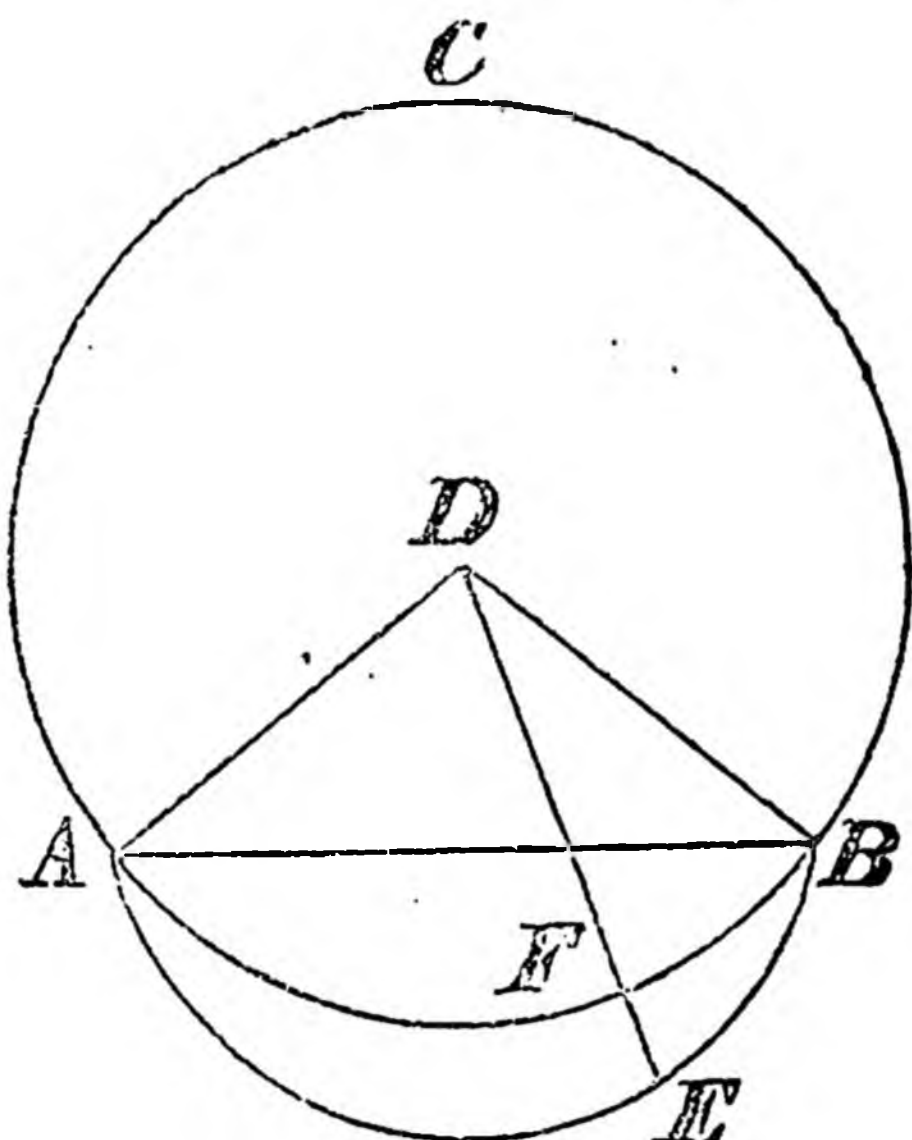
*Примѣч. 2.* Въ построеніи сказано продолжимъ  $CD$  до  $E$ : это предполагаетъ, что точка  $D$  лежитъ внутри круга, что Евклидъ доказываетъ въ слѣдующей теоремѣ.

*Предложеніе 2.* Прямая линія, которая соединяетъ двѣ произвольно взятыхъ точки  $A$  и  $B$  на окружности круга  $ABC$ , лежитъ внутри круга (фиг. 114).

*Доказат.* Если эта прямая не лежитъ внутри круга, то пусть она лежитъ внѣ, какъ на примѣръ  $AEB$ . Найдѣмъ центръ круга и пусть онъ будетъ  $D$  (кн. 3, пред. 1), проведемъ  $AD$  и  $BD$ . Между точками  $A$  и  $B$  на окружности круга возьмемъ какую нибудь точку  $F$ , соединимъ  $D$  съ  $F$  прямою  $DF$  и продолжимъ ее до точки  $E$ .

Такъ какъ  $AD=DB$ , то  $\angle DAE=\angle DBE$  (кн. 1, пред. 5). Но

Фиг. 114.



$\angle DEB > \angle DAE$  (кн. 1, пред. 16), слѣдовательно  $\angle DEB > \angle DBE$ , откуда  $DE < DB = DF$ , что невозможно (кн. 1, акс. 9).

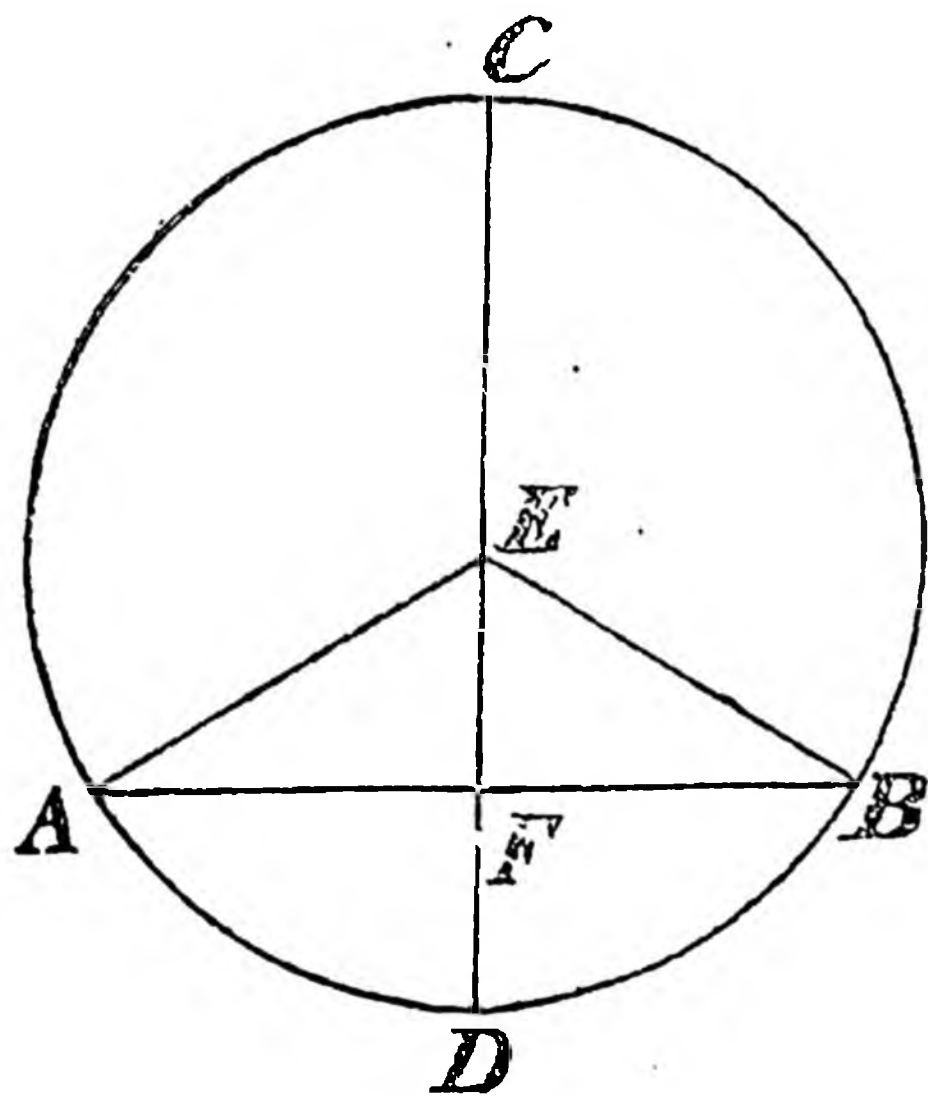
Слѣдовательно прямая линія, соединяющая точки  $A$  и  $B$  не можетъ лежать внѣ круга, точно также можно показать, что она не можетъ упасть на окружность, а слѣдовательно она лежитъ внутри круга.

*Предложеніе 3.* Если въ кругѣ  $ABC$  прямая  $CD$ , проходящая чрезъ центръ, встрѣчаетъ другую прямую  $AB$ , не проходящую чрезъ центръ, и дѣлитъ ее пополамъ, то прямая  $CD$  перпендикулярна къ  $AB$ ; или, если прямая  $CD$  встрѣчаетъ прямую  $AB$  подъ прямымъ угломъ, то  $CD$  дѣлитъ  $AB$  пополамъ (фиг. 115).

*Доказат.* Найдемъ центръ  $E$  даннаго круга (кн. 3, пред. 1) и соединимъ  $E$  съ  $A$  и  $B$ .

*Первая часть теоремы.* Если  $CD$  въ точкѣ  $F$  дѣлитъ  $AB$  пополамъ, то  $AF=FB$ .  $EF$  есть сторона общая треугольниковъ  $AEF$  и  $BEF$ ,  $AE=EB$ , слѣдовательно  $\triangle AEF=\triangle BEF$  (кн. 1, пред. 8), откуда  $\angle AFE=\angle EFB$ , слѣдовательно эти углы прямые.

Фиг. 115.



*Вторая часть теоремы.* Если прямая  $DC$  перпендикулярна къ  $AB$ ,

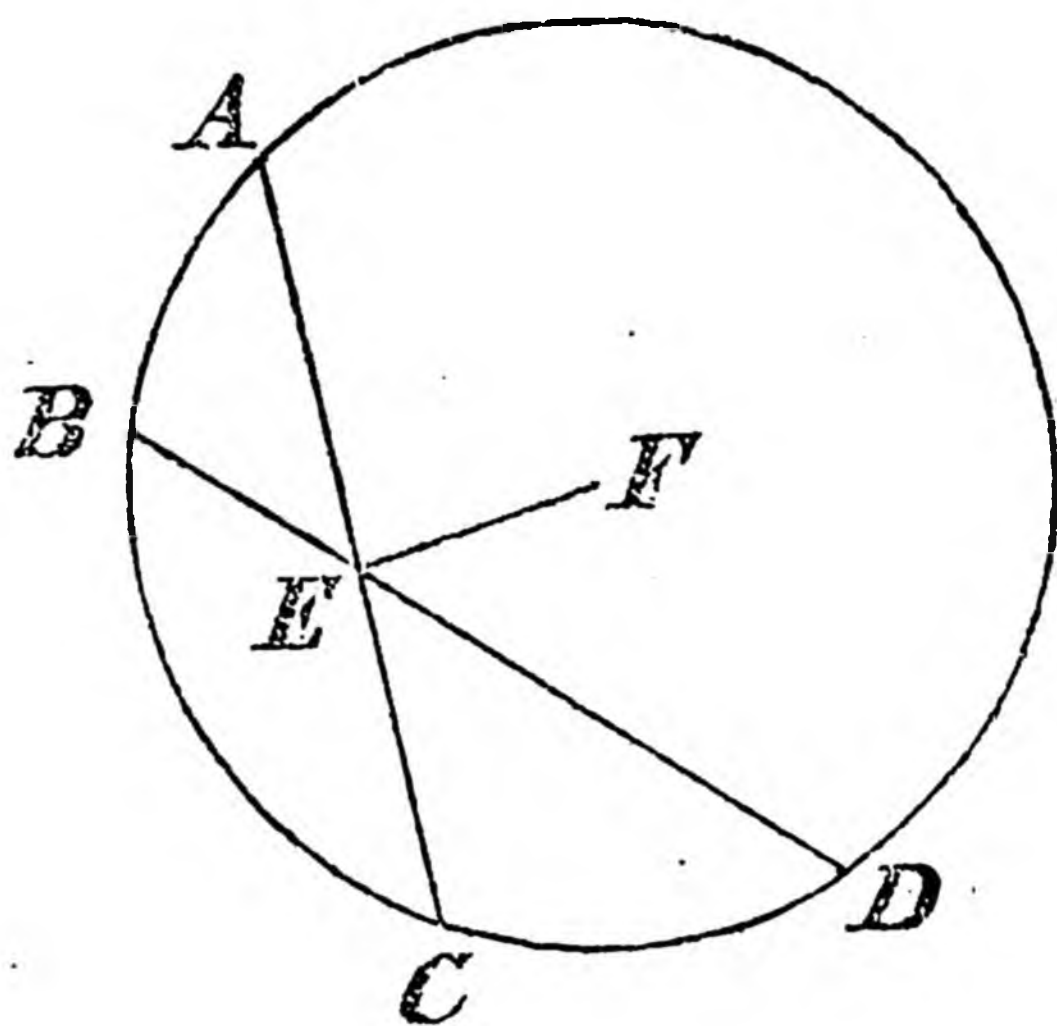
то  $\angle AFE = \angle EFB$ . Въ треугольникахъ  $AEF$  и  $BEF$  сторона  $EF$  общая,  $AE = EB$ , слѣдовательно  $\triangle AEF = \triangle BEF$  (кн. 1, пред. 26), откуда  $AF = FB$ .

*Примѣч. 3.* Обѣ части этой теоремы суть обратныя одна другой, а вся теорема есть обратная слѣдствію предложенія 1-го.

**Предложеніе 4.** Если въ кругѣ  $ABCD$  двѣ прямыя линіи  $AC$  и  $BD$ , не проходящія чрезъ центръ, встрѣчаются, то каждая изъ нихъ дѣлитъ другую на двѣ неравныя части (фиг. 116).

*Доказат.* Положимъ что каждая изъ нихъ другую дѣлитъ пополамъ, такъ что  $AE = EC$  и  $BE = ED$ .

Фиг. 116.

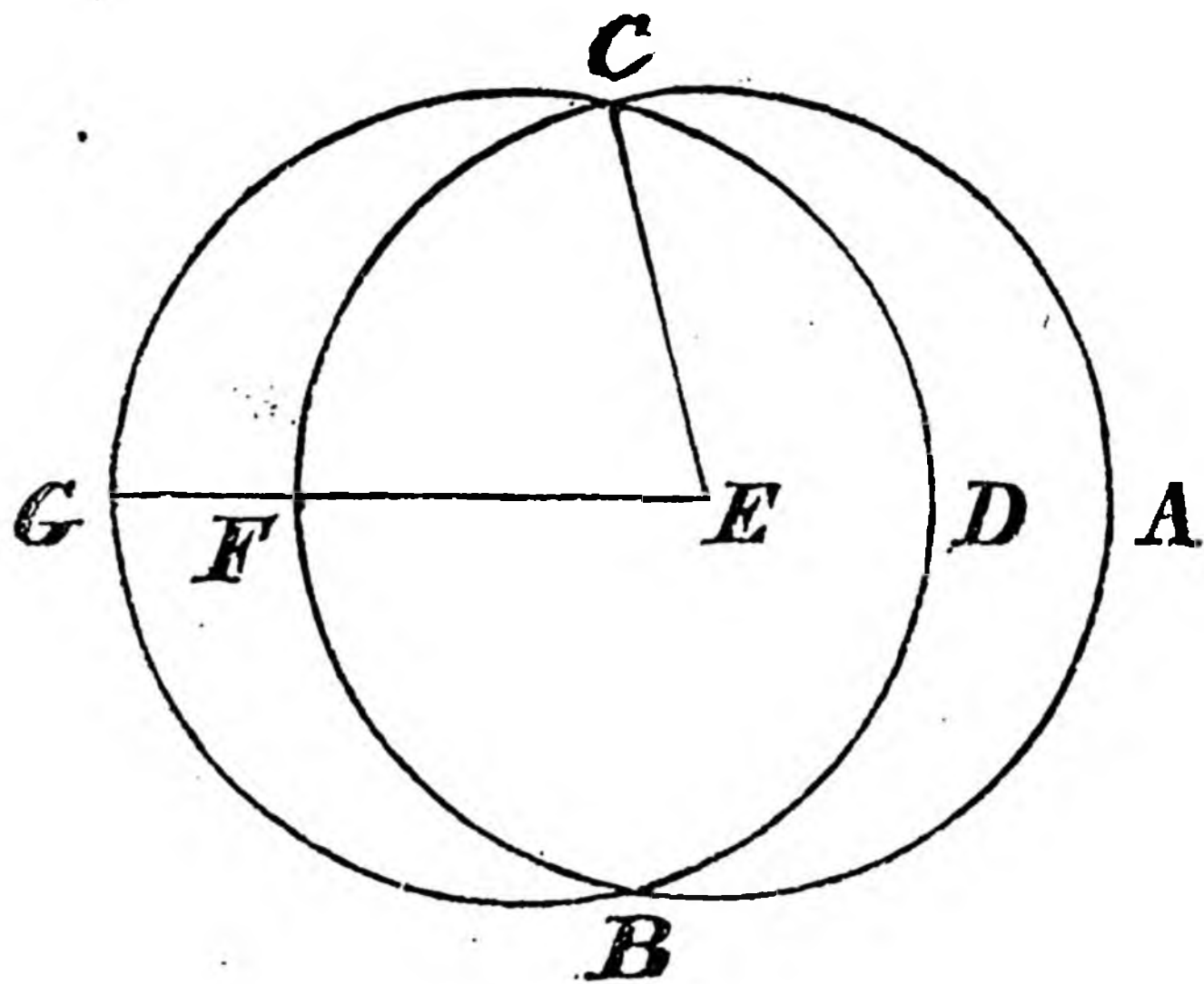


Если  $F$  есть центръ круга, то, соединяя  $E$  съ  $F$ , прямая  $EF$  будетъ перпендикулярна, какъ къ  $AC$ , такъ и къ  $BD$  (кн. 3, пред. 3), слѣдовательно  $\angle FEA = \angle FEB$ , что невозможно (кн. 1, акс. 9). Слѣдовательно и то невозможно, чтобы прямыя  $AC$  и  $BD$  одна другую дѣлили пополамъ.

**Предложеніе 5.** Два пересѣкающіеся круга  $ABC$  и  $CDG$  не могутъ имѣть общаго центра (фиг. 117).

*Доказат.* Положимъ, что эти круги, пересѣкаясь въ точкахъ  $C$  и  $B$ , имѣютъ общій центръ  $E$ . Соединимъ одну изъ точекъ пересѣченія, напри- мѣръ  $C$ , съ центромъ и проведемъ изъ центра  $E$  прямую  $EFG$  въ произ- вольномъ направленіи.

Фиг. 117.



Такъ какъ  $EC = EF$  и  $EC = EG$  (кн. 1, опред. 15), то слѣдуетъ,

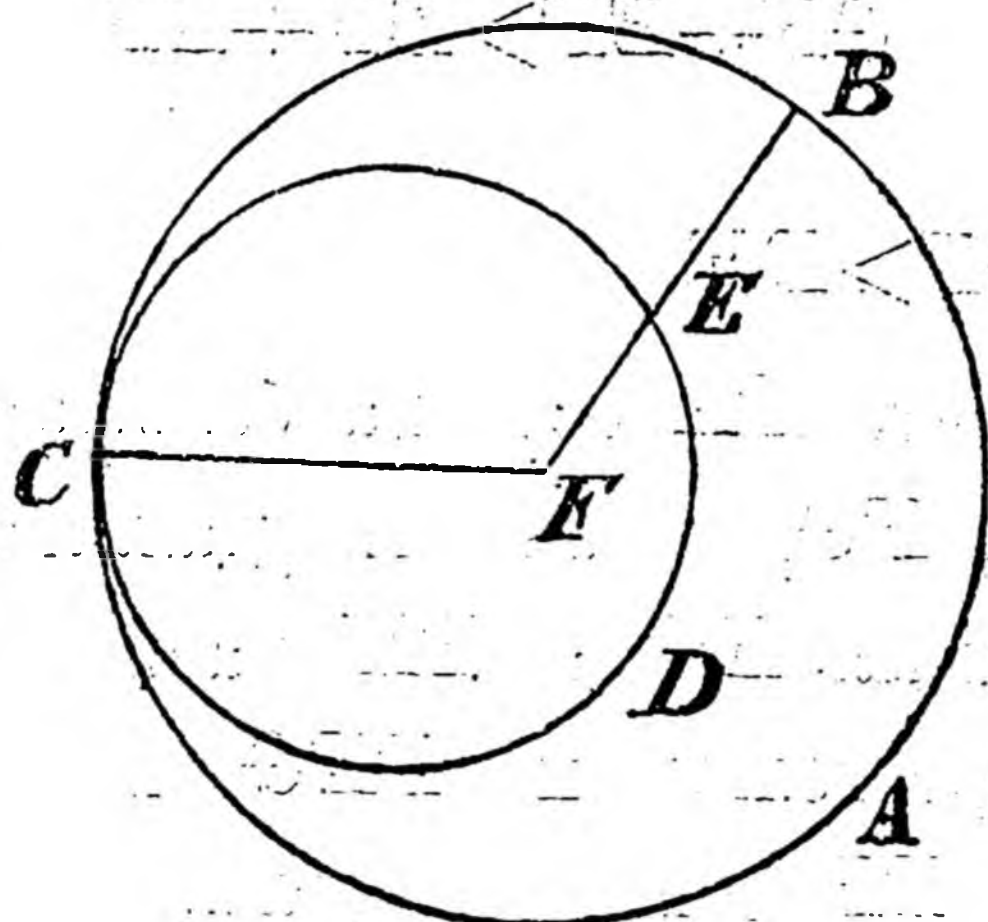


что  $EF=EG$ , что невозможно (кн. 1, акс. 9). Следовательно два пересекающихся круга не могут имѣть общаго центра.

*Предложеніе 6.* Два круга  $ABC$  и  $CDE$ , касающіеся внутренно, не могут имѣть общаго центра (фиг. 118).

*Доказат.* Положимъ, что эти круги, касающіеся внутренно въ точкѣ  $C$ , имѣютъ общій центръ  $F$ .

Фиг. 118.

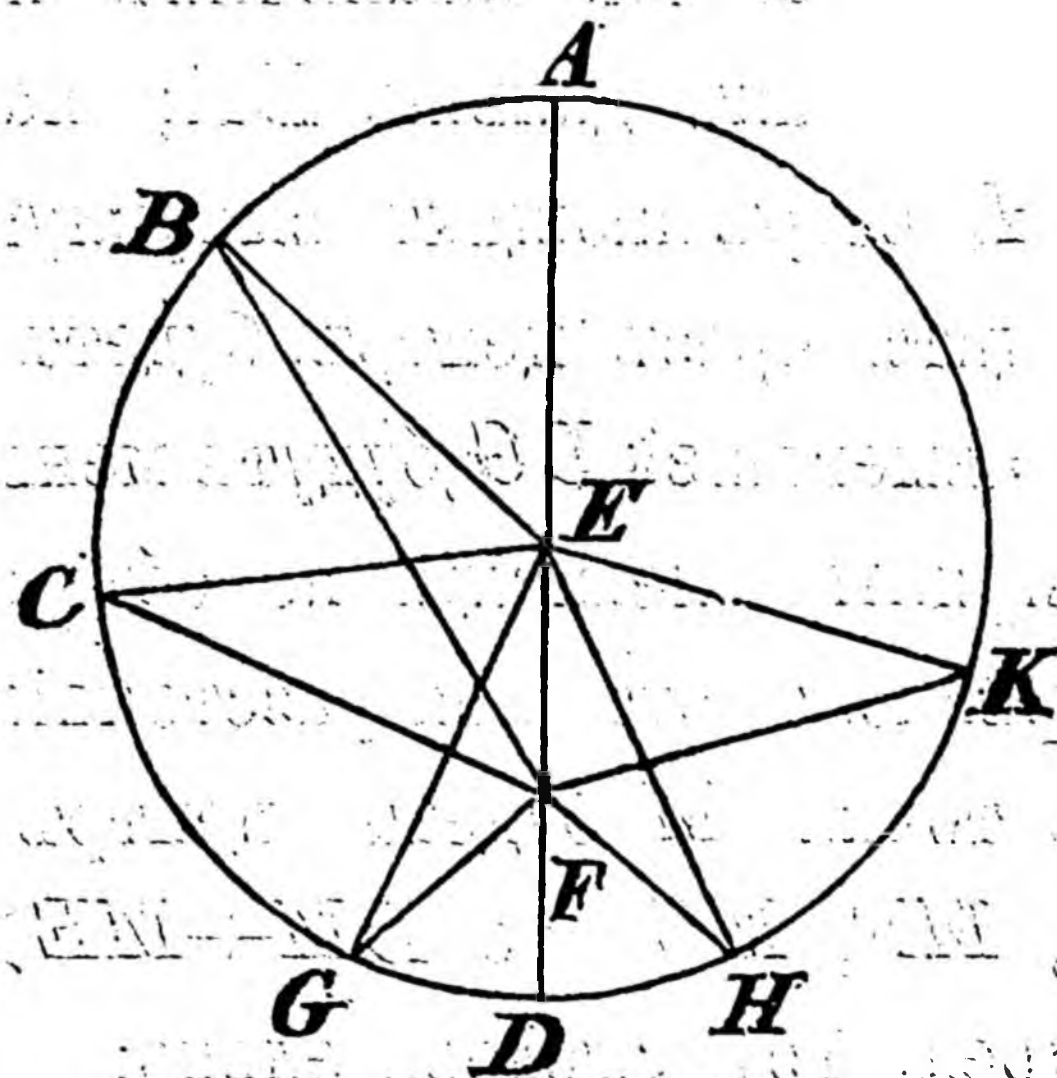


Соединимъ центръ  $F$  съ точкою касанія  $C$  и изъ центра проведемъ прямую  $FEB$  въ произвольномъ направленіи.

Такъ какъ  $FC=FE$  и  $FC=FB$  (кн. 1, опред. 15), то  $FE=FB$ , что невозможно (кн. 1, акс. 9). Следовательно невозможно, чтобы касающіеся внутренно круги имѣли общій центръ.

*Предложеніе 7.* Если внутри круга  $ABCD$  возьмемъ точку  $F$ , отличную отъ центра  $E$ , и изъ этой точки проведемъ прямыя къ окружности круга, то прямая  $FEA$ , проходящая чрезъ центръ, будетъ наибольшая, а ея продолженіе  $FD$  будетъ наименьшая; изъ остальныхъ прямыхъ тѣ, которыя ближе къ  $FA$ , будутъ больше тѣхъ, которыя дальше отъ  $FA$ ; изъ этихъ послѣднихъ, тѣ, которыя находятся на одинаковомъ разстояніи по обѣ стороны  $ED$ , будутъ равны (фиг. 119).

Фиг. 119.



*Доказат.* Проведемъ изъ точки  $F$  прямыя  $FB$ ,  $FC$ ,  $FG$  и соединимъ точки  $B$ ,  $C$ ,  $G$  съ центромъ  $E$ , то въ треугольникѣ  $BEF$  мы имѣемъ

(кн. 1, пред. 20)  $BE + EF > FB$ , но  $BE = AE$  (кн. 1, опред. 15), а  $AE + EF = AF$ , следовательно  $AF > FB$ .

Треугольники  $BEF$  и  $CEF$  имѣютъ по двѣ равныя стороны  $BE = CE$  (кн. 1, опред. 15),  $EF$  общая,  $\angle BEF > \angle CEF$ , следовательно (кн. 1, пред. 24) и  $BF > CF$ . На томъ же основаніи  $FC > FG$ .

Въ треугольникѣ  $EGF$   $GF + EF > EG$ , но  $EG = ED = DF + EF$ , следовательно:

$$GF + EF > DF + EF$$

откуда (кн. 1, акс. 5)  $GF > DF$ .

Изъ этого видимъ, что  $FA$  есть наибольшая, а  $FD$  наименьшая изъ прямыхъ линій  $FB$ ,  $FC$ ,  $FG$ , и всѣ онѣ удаляясь отъ  $FA$ , уменьшаются.

Положимъ, что прямая  $EG$  и  $EH$  равно удалены отъ  $ED$ , т. е.  $\angle FEG = \angle FEH$ , то треугольники  $FEG$  и  $FEN$  имѣютъ по двѣ стороны равныя:  $EG = EH$ ,  $EF$  общая и углы, заключенные между этими сторонами, равны, следовательно  $FG = FH$  (кн. 1, пред. 4). Предположить, что кромѣ  $FH$  есть еще другая прямая, на примѣръ  $FK$ , равная  $FG$ , невозможно по выше-доказанному.

Это послѣднее предложеніе можно еще доказать такъ: пусть  $FK = FG$ . Треугольники  $FEG$  и  $FEK$  будутъ имѣть всѣ стороны равныя:  $FK = FG$ , по положенію,  $EK = EG$  (кн. 1, опред. 15) и  $EF$  общая, следовательно  $\angle FEK = \angle FEG$ , но  $\angle FEG = \angle FEH$ , следовательно  $\angle FEK = \angle FEH$ , что невозможно (кн. 1, акс. 9). Следовательно по эту сторону наименьшей  $FD$  есть только одна  $FH = FG$ .

**Предложеніе 8.** Если изъ какой нибудь точки  $D$ , взятой внѣ круга  $ABC$ , проведемъ къ окружности произвольное число прямыхъ линій, изъ коихъ одна  $DA$  проходитъ чрезъ центръ, то наибольшая изъ прямыхъ  $DA$ ,  $DE$ ,  $DF$ ,  $DC$ , встрѣчающихъ вогнутую часть окружности, будетъ прямая  $DA$ , проходящая чрезъ центръ; изъ остальныхъ прямыхъ, лежащія ближе къ  $DA$  будутъ больше лежащихъ дальше  $DA$ ; напротивъ, та изъ прямыхъ  $DG$ ,  $DK$ ,  $DL$ ,  $DH$ , встрѣчающихъ выпуклую часть окружности, которой продолженіе проходитъ чрезъ центръ, будетъ наименьшая; изъ остальныхъ, лежащія ближе къ наименьшей  $DG$ , будутъ меньше тѣхъ, которыя лежатъ дальше  $DG$ . Наконецъ прямая, лежащія по обѣ стороны прямой, проходящей чрезъ центръ, въ равномъ отъ нея разстояніи, будутъ равны (фиг. 120).

**Доказат.** а) Пусть точка  $M$  будетъ центръ даннаго круга  $ABC$ . Проведемъ прямыя  $ME$ ,  $MF$ ,  $MC$ , то  $DM + ME > DE$  (кн. 1, пред. 20), но  $ME = MA$  (кн. 1, опред. 15), следовательно:

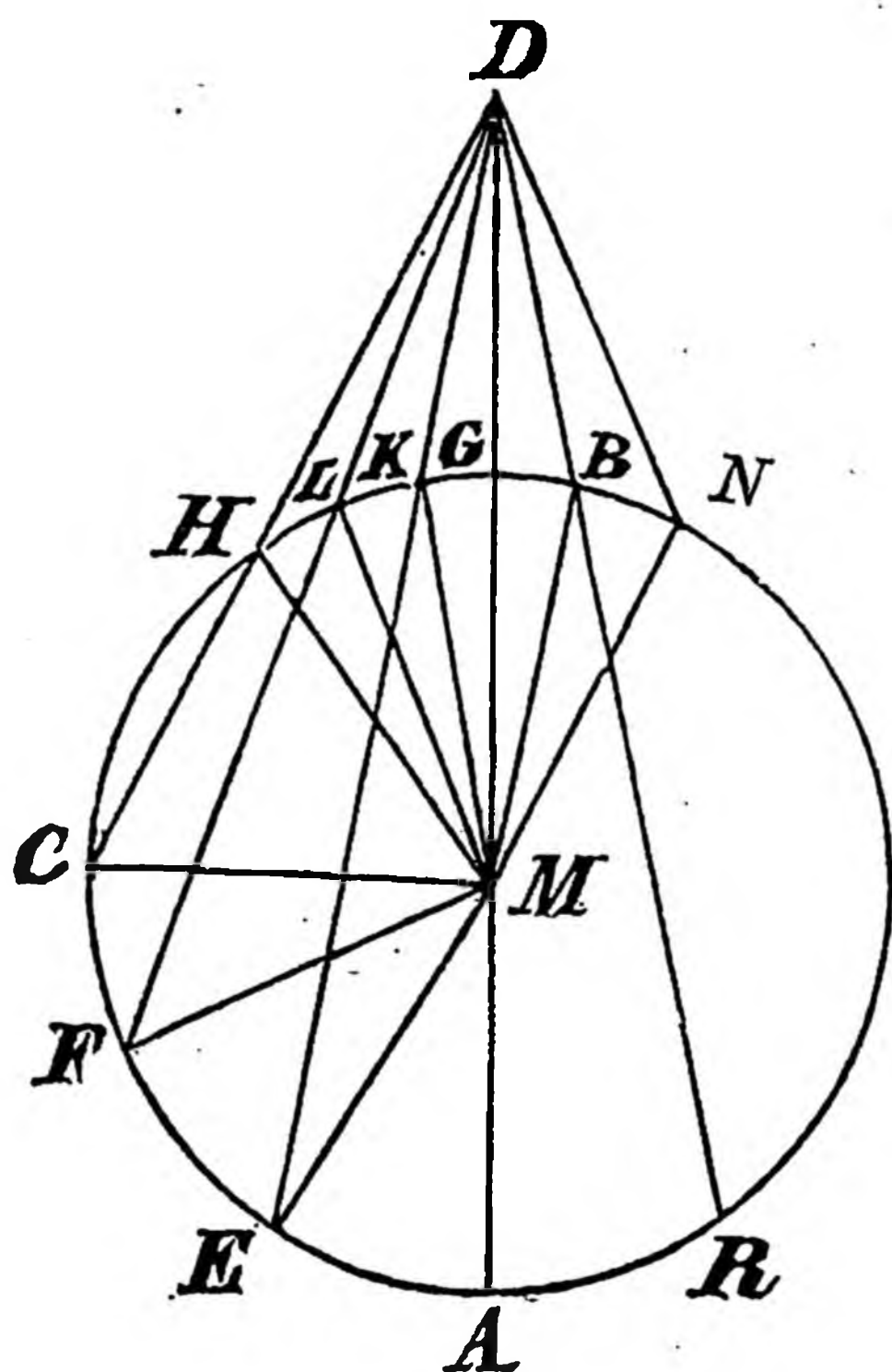
$$DM + MA > DE$$



откуда  $DA > DE$ .

Треугольники  $DME$  и  $DMF$  имѣютъ по двѣ равныя стороны:  $ME = MF$  (кн. 1, опред. 15),  $DM$  общая, уголъ  $\angle DME > \angle DMF$ , слѣдовательно (кн. 1, пред. 24)  $DE > DF$ , точно также  $DF > DC$ .

Фиг. 120.



б) Проведемъ прямыя  $MH$ ,  $ML$ ,  $MK$ , то  $MK + KD > DM$  (кн. 1, пред. 20), т. е.  $MK + KD > MG + DG$ , но  $MK = MG$ , (кн. 1, опред. 15), слѣдовательно (кн. 1, акс. 5)  $KD > DG$ .

Треугольники  $DMH$  и  $DML$  имѣютъ по двѣ равныя стороны  $MH = ML$  (кн. 1, опред. 15),  $MD$  общая, уголъ  $\angle DMH > \angle DML$ , слѣдовательно  $DH > DL$ , точно также  $DL > DK$ .

с) Положимъ теперь, что прямыя  $DK$  и  $DB$  равно удалены, т. е. что  $\angle KDM = \angle BDM$ . Треугольники  $MKD$  и  $MBD$  имѣютъ по двѣ равныя стороны  $MK = MB$  (кн. 1, опред. 15),  $MD$  общая, уголъ  $\angle KDM = \angle BDM$ , слѣдовательно, (кн. 1, пред. 4)  $DK = DB$ . Положимъ еще, что кромѣ  $DB$  есть еще другая прямая  $DN = DK$ ; если это возможно, то, замѣчая что мы имѣемъ  $DK = DB$  и  $DK = DN$ , мы найдемъ (кн. 1, акс. 1), что  $DB = DN$ , что невозможно, вслѣдствіе доказаннаго въ б).

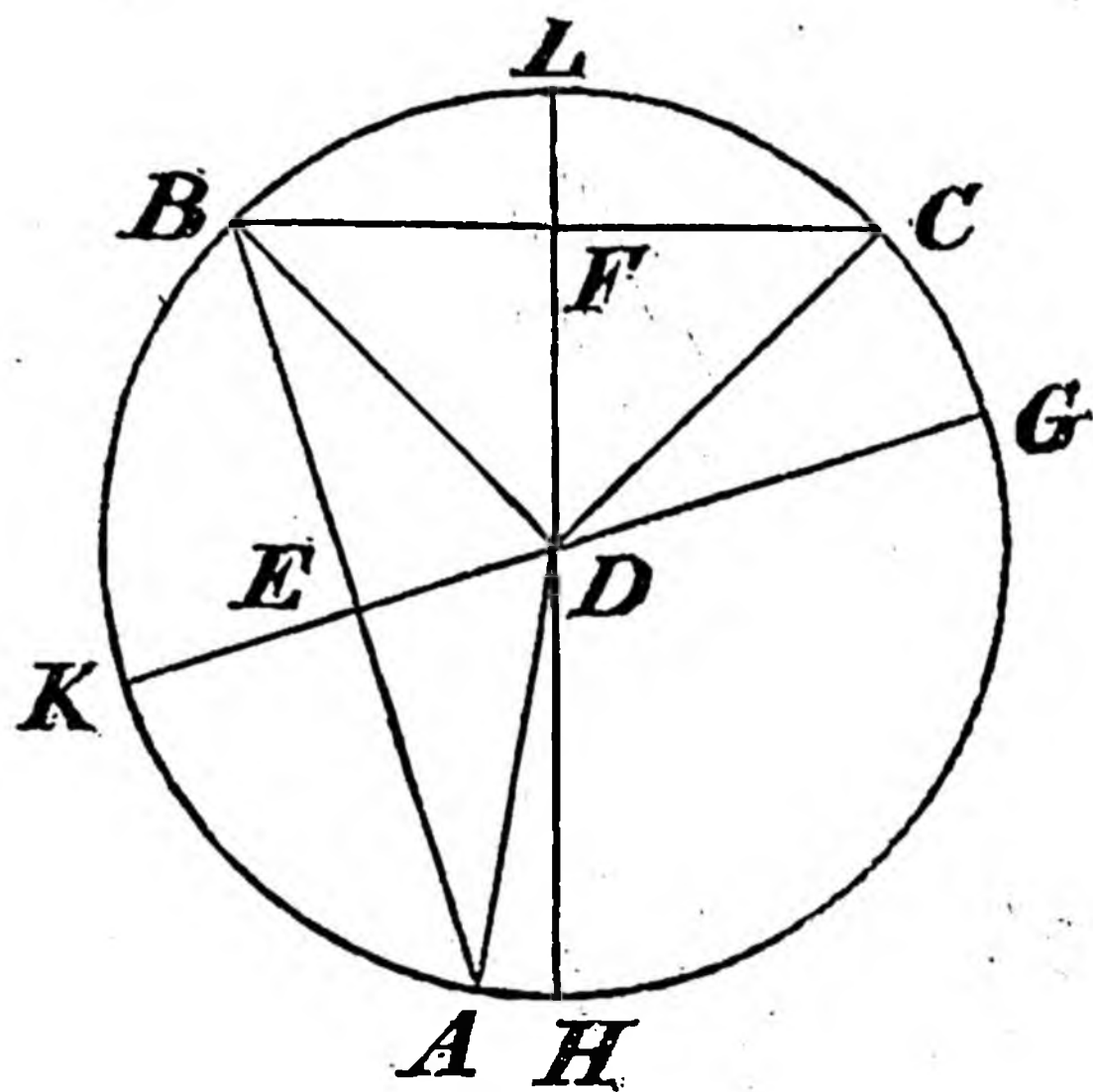
*Примѣч. 4.* Въ предположеніи 7, доказывая что  $FC > FG$ , было взято, что  $\angle BEF > \angle CEF$ , а между тѣмъ дано, что  $\angle BFD > \angle BFG$ . Въ пред. 8 было предположено, что точка  $K$  находится внутри треугольника  $DLM$ , а точка  $E$  внѣ треугольника  $DMF$ . Оба эти положенія можно доказать съ помощью предположеній 16 и 21 книги 1.

*Предложеніе 9.* Если изъ какой нибудь точки  $D$ , лежащей внутри круга  $ABC$ , можно провести къ окружности больше двухъ прямыхъ линий  $DA$ ,  $DB$ ,  $DC$  равныхъ между собою, то точка  $D$  будетъ центръ круга  $ABC$ .



*Доказат.* 1) Соединимъ точки  $A$  и  $B$ ,  $B$  и  $C$  прямыми  $AB$  и  $BC$  и раздѣлимъ  $AB$  и  $BC$  въ точкахъ  $E$  и  $F$  пополамъ (кн. 1, пред. 10). Проведемъ  $DE$  и  $DF$  и продолжимъ ихъ въ обѣ стороны до встрѣчи съ окружностью въ точкахъ  $K$ ,  $G$ ,  $L$ ,  $H$  (фиг. 121).

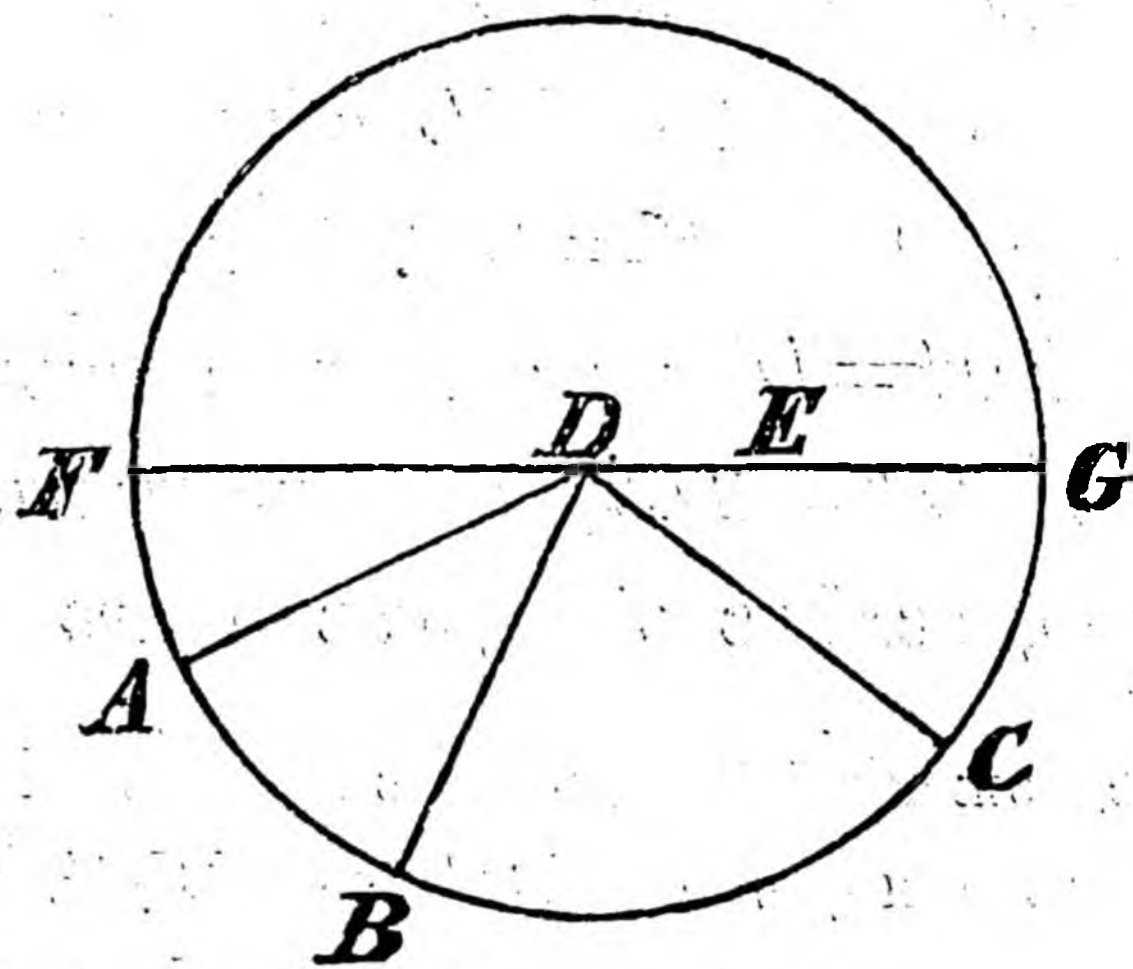
Фиг. 121.



Въ треугольникахъ  $AED$ , и  $BED$  сторона  $DE$  общая,  $BE=AE$ ,  $DA=DB$  по условию, слѣдовательно (кн. 1, пред. 8) и  $\angle DEA=\angle DEB$ . Такъ какъ эти послѣдніе углы смежны, то каждый изъ нихъ есть прямой (кн. 1, акс. 10). Слѣдовательно прямая  $GK$  перпендикулярна къ прямой  $AB$  и дѣлитъ ее въ точкѣ  $E$  пополамъ, а на такой прямой лежитъ центръ круга (кн. 3, пред. 1). На томъ же основаніи центръ круга  $ABC$  лежитъ и на прямой  $LH$ , слѣдовательно центръ круга есть точка  $D$ , общая прямыхъ  $GK$  и  $LH$ .

*Доказат.* 2) Пусть точка  $D$  не будетъ центръ круга  $ABC$ , и пусть центръ круга будетъ точка  $E$  (фиг. 122).

Фиг. 122.



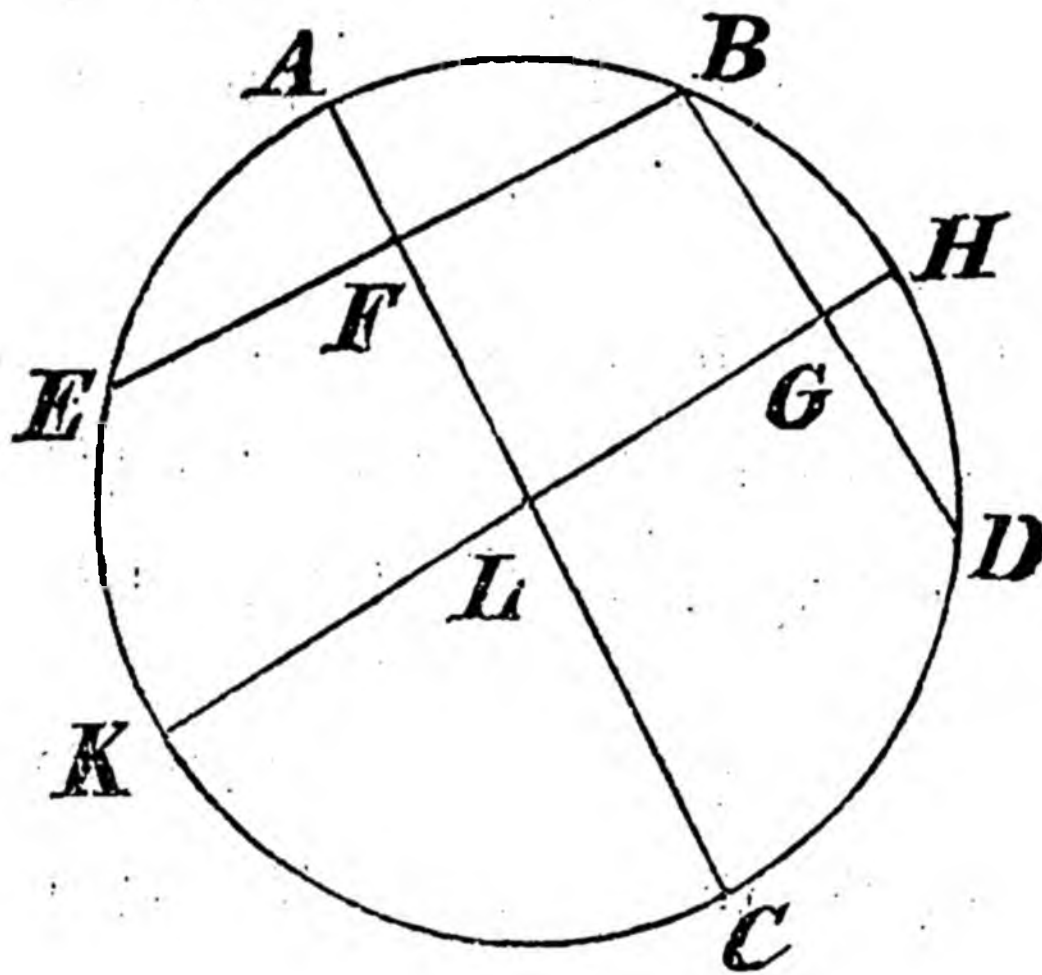
Проведемъ прямую  $DE$  и продолжимъ ее въ обѣ стороны до встрѣчи съ окружностью въ точкахъ  $F$  и  $G$ . Если точка  $D$  не есть центръ круга, то  $DC>DB>DA$  (кн. 3, пред. 8), что противорѣчитъ положенію  $DC=DB=DA$ . Слѣдовательно, исключая точки  $D$ , никакая другая точка  $E$  не можетъ быть центромъ круга.

*Примѣч. 5.* Если бы мы взяли точку  $E$  внутри угла  $ADC$ , то нельзя бы было сказать, что  $DC > DB$  и  $DB > DA$ , но можно сказать, что  $DC$  или  $DA$  меньше  $DB$ , а этого и достаточно для доказательства предположенія.

*Предположеніе 10.* Два круга, больше чѣмъ въ двухъ точкахъ, пересѣчься не могутъ.

*Доказат. 1)* Положимъ, что первый кругъ пересѣкаетъ другой кругъ  $ABC$  въ трехъ точкахъ  $D, B, E$  (фиг. 123).

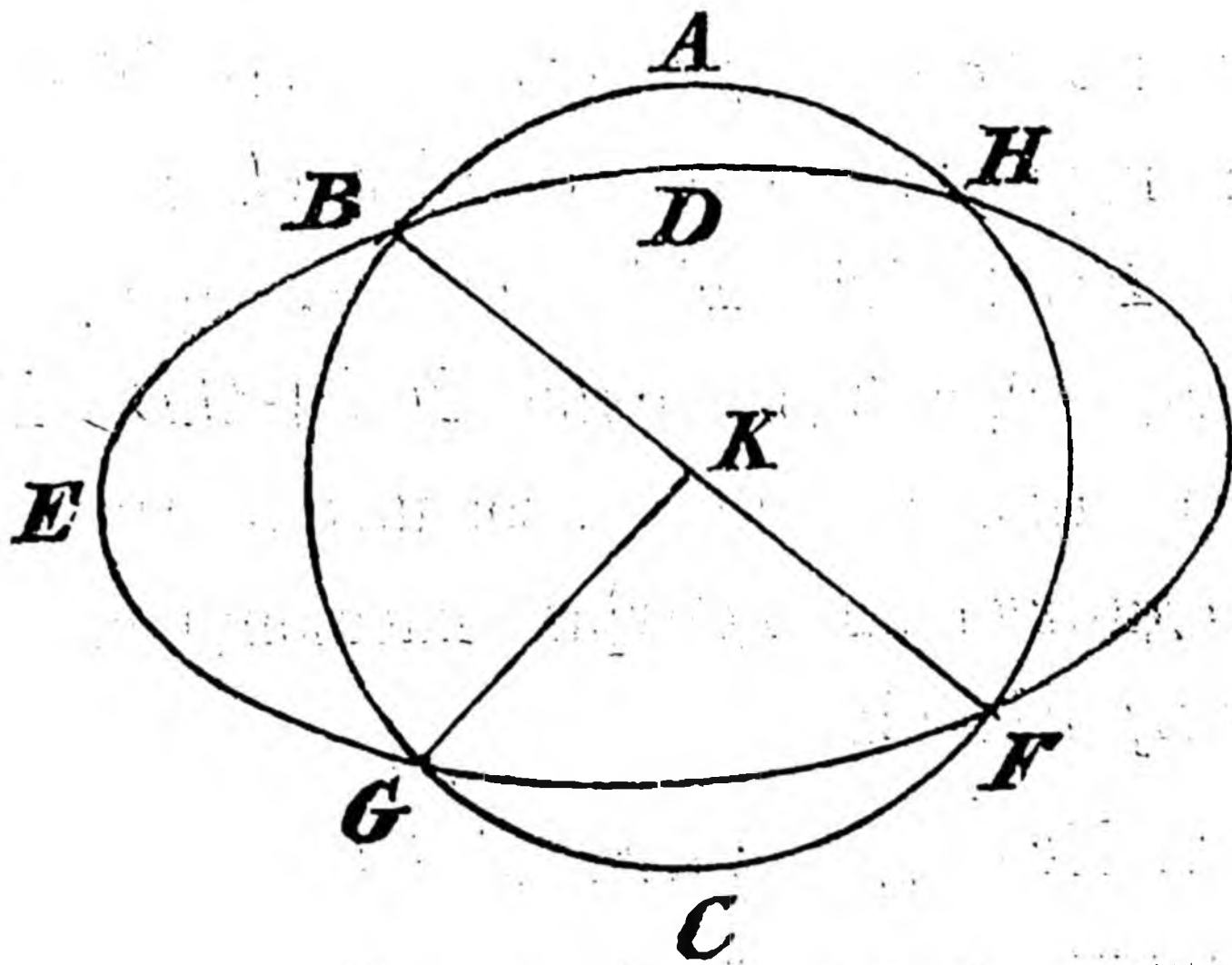
Фиг. 123.



Соединимъ точки  $E$  и  $B$ ,  $B$  и  $D$  прямыми  $EB$  и  $BD$  и въ точкахъ  $F$  и  $G$  раздѣлимъ эти прямыя пополамъ. Изъ точекъ  $F$  и  $G$  возставимъ перпендикуляры  $FC$  и  $GK$  къ прямымъ  $BE$  и  $BD$  и продолжимъ эти перпендикуляры въ обѣ стороны до встрѣчи съ окружностью въ точкахъ  $A$  и  $C$ ,  $K$  и  $H$ . Такъ какъ точки  $D, B, E$  лежатъ на обоихъ кругахъ, по положенію, то центры этихъ круговъ лежатъ на пересѣченіи прямыхъ  $KH$  и  $AC$  въ точкѣ  $L$  (кн. 3, пред. 1), что невозможно (кн. 3, пред. 5).

*Доказат. 2)* Пусть два круга  $ABC$  и  $DEF$ , если возможно, пересѣкнутся въ трехъ точкахъ  $B, G$  и  $F$  (фиг. 124).

Фиг. 124.



Пусть  $K$  будетъ центръ круга  $ABC$ , соединимъ  $K$  съ  $B, G$  и  $F$  прямыми  $KB, KG, KF$ .

Такъ какъ  $K$  есть центръ круга  $ABC$ , то  $KB = KG = KF$  (кн. 1,

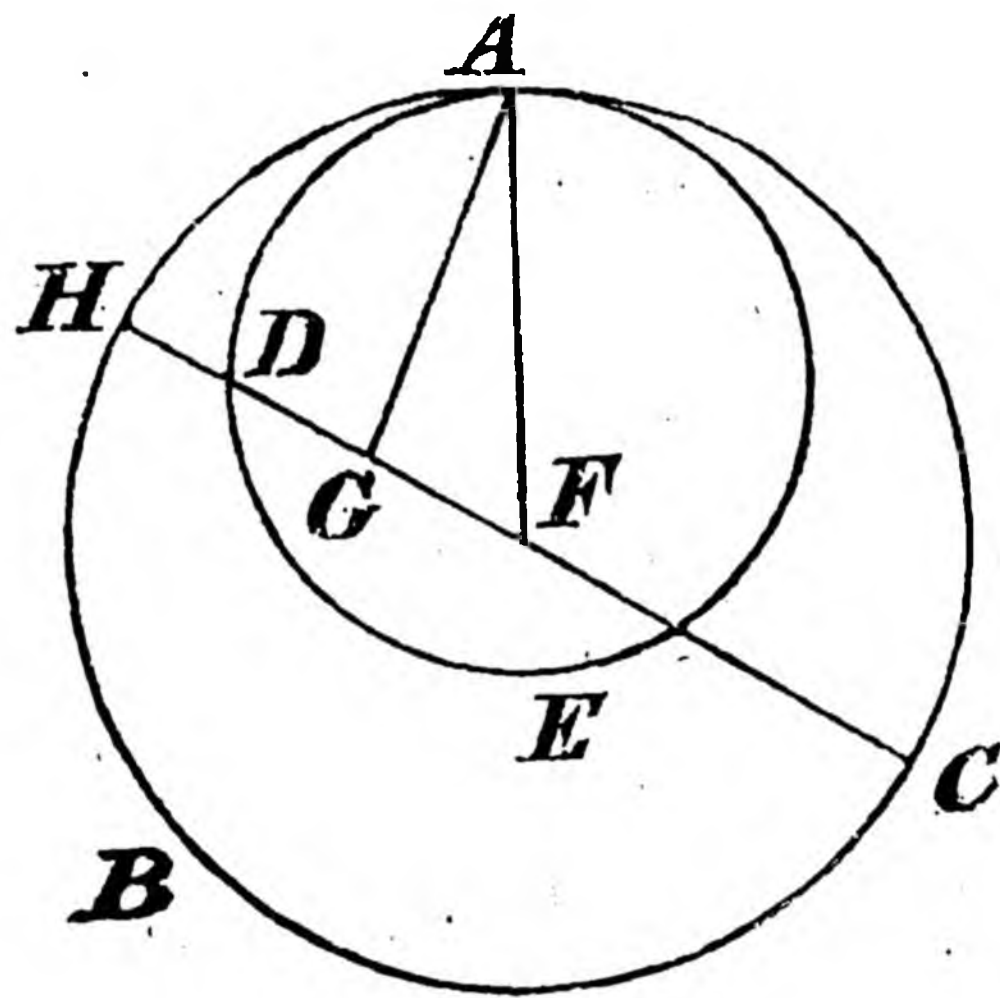
опред. 15). Но точка  $K$  находится также въ равномъ разстояніи и отъ трехъ точекъ окружности  $DEF$ , слѣдовательно она есть центръ и круга  $DEF$  (кн. 3, пред. 9). Слѣдовательно точка  $K$  есть центръ двухъ пересѣкающихся круговъ, что невозможно (кн. 3, пред. 5).

*Примѣч. 6.* Такъ какъ точка  $K$ , въ послѣднемъ доказательствѣ, можетъ быть взята: внутри круга  $DEF$ , на его окружности и внѣ его, а Евелидъ разсматриваетъ только первое ея положеніе, то это доказательство не полно. Чтобы его пополнить положимъ, что точка  $K$  лежитъ внѣ круга  $DEF$ , но это будетъ противорѣчіе предложенію 8 книги 3. Если точка лежитъ на окружности  $DEF$ , то мы получимъ такое же противорѣчіе.

*Предложеніе 11.* Если кругъ  $ADE$  касается круга  $ABC$  и лежитъ внутри этого послѣдняго, то прямая, соединяющая ихъ центры пройдетъ, будучи продолжена, чрезъ точку касанія (фиг. 125).

*Доказат.* Положимъ, что прямая проведенная чрезъ центры  $F$  и  $G$  круговъ  $ABC$  и  $ADE$  не проходитъ чрезъ точку ихъ касанія  $A$ .

Фиг. 125.



Проведемъ  $AF$  и  $AG$  и соединимъ центры  $F$  и  $G$  прямою  $HC$ , которая встрѣтитъ оба круга въ точкахъ  $H$  и  $C$ ,  $D$  и  $E$ . Въ треугольникѣ  $AFG$  мы имѣемъ  $FG + GA > FA$  (кн. 1, пред. 20), но  $GA = GD$ ,  $FA = FH$  (кн. 1, опред. 15), слѣдовательно  $FG + GD > FA = FH = FG + GH$ , или  $GD > GH$ , (кн. 1, акс. 4), что невозможно (кн. 1, акс. 9). Слѣдовательно прямая, соединяющая центры касающихся внутренно круговъ, проходитъ чрезъ точку касанія.

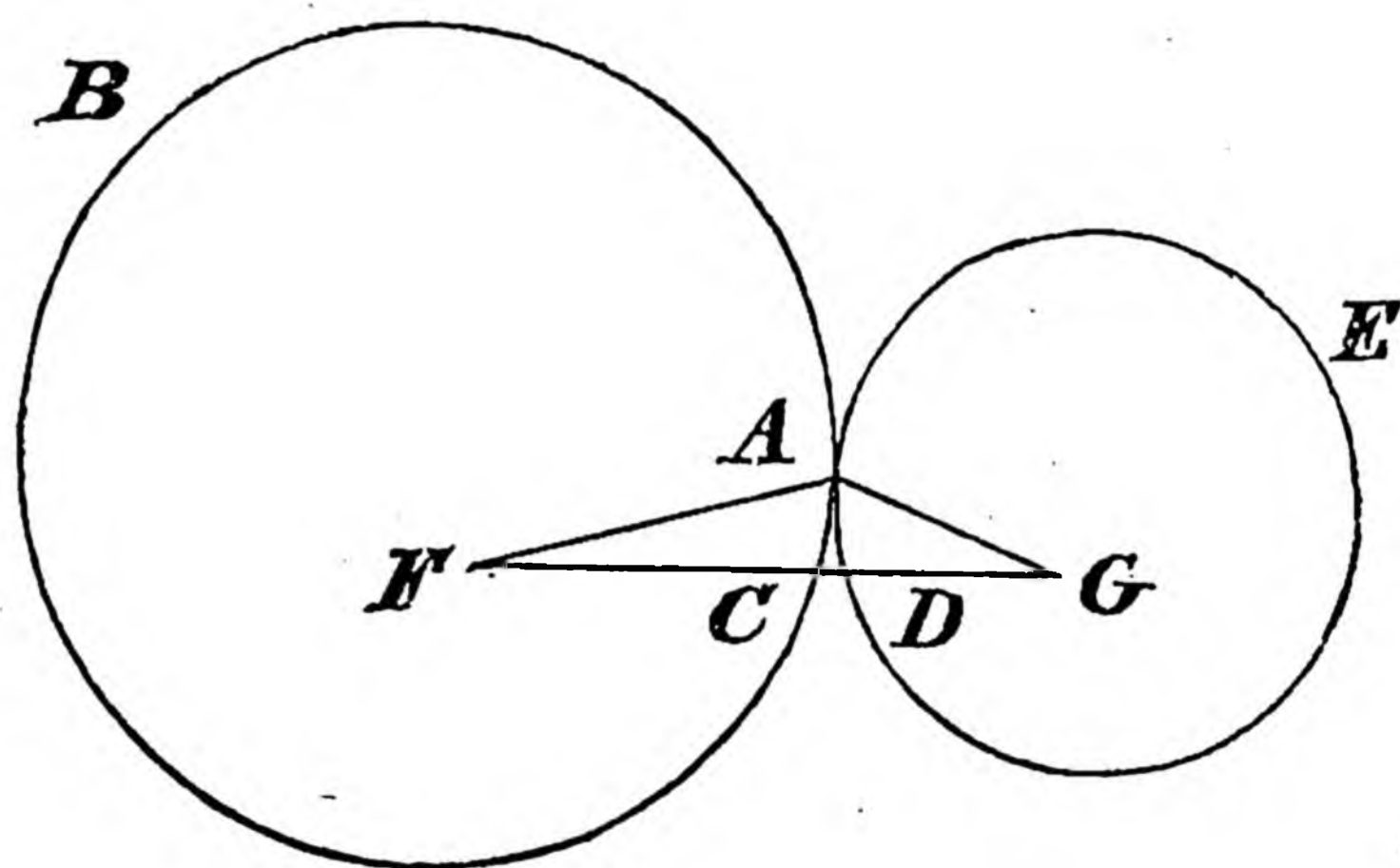
*Предложеніе 12.* Если два круга  $ABC$  и  $ADE$  касаются внѣшне, то прямая, соединяющая ихъ центры, проходитъ чрезъ точку касанія  $A$  (фиг. 126).

*Доказат.* Положимъ, что прямая  $FG$ , соединяющая центры  $F$  и  $G$ , не проходитъ чрезъ точку касанія  $A$ ,



Соединимъ точку касанія  $A$  съ центрами  $F$  и  $G$  прямыми  $AF$  и  $AG$ ,

Фиг. 126.



то мы имѣемъ  $AF=FC$  и  $AG=GD$  (кн. 1, опред. 15), слѣдовательно:

$$AF+AG=FC+GD$$

откуда  $AF+AG < FG$ , что невозможно, такъ какъ мы имѣемъ  $AF+AG > FG$  (кн. 1, пред. 20). Слѣдовательно прямая, соединяющая центры внѣшне касающихся круговъ, должна пройти чрезъ точку касанія.

*Примѣч. 7.* Въ предѣдущихъ двухъ предложеніяхъ говорится о точкѣ касанія, но только въ слѣдующемъ за этими предложеніями показано, что два круга касаются *только въ одной* точкѣ.

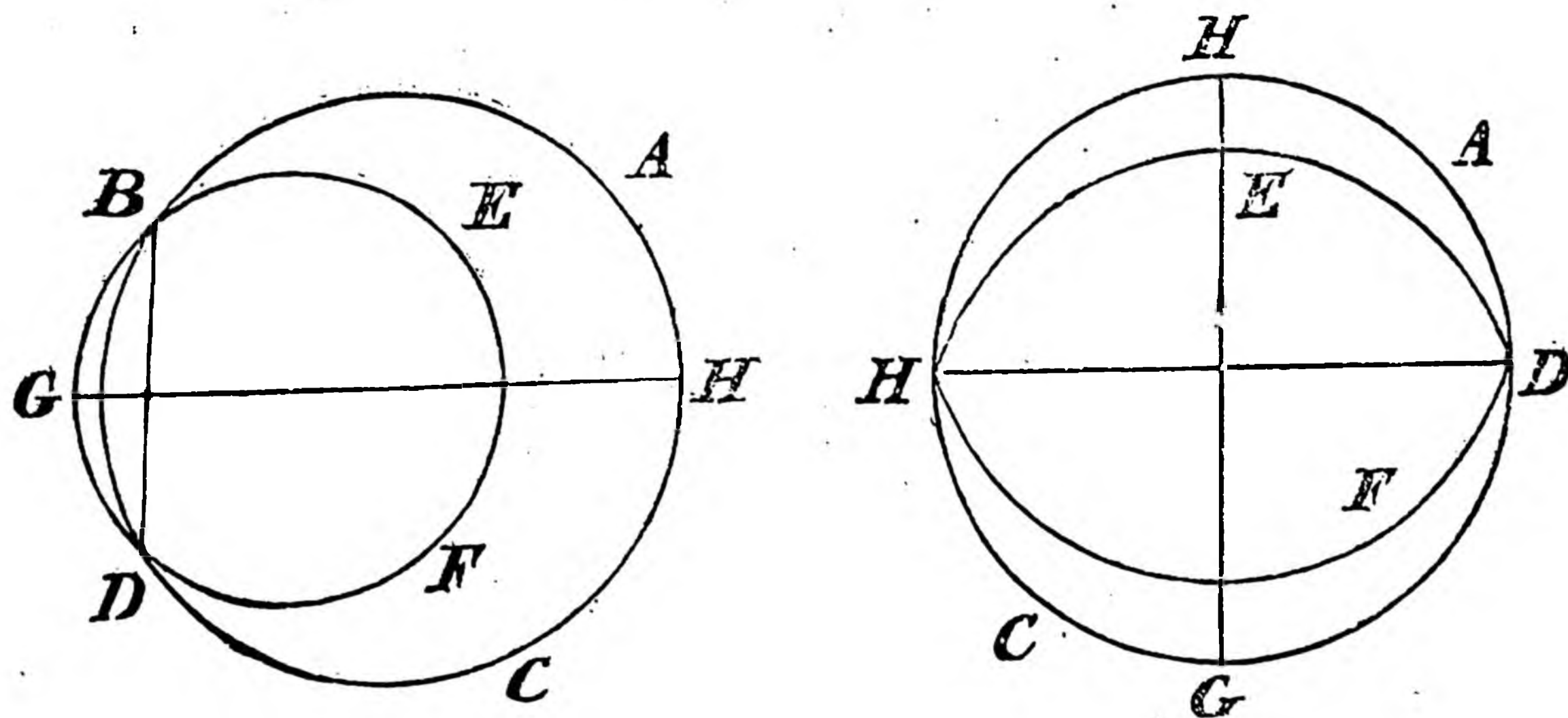
Замѣтимъ, что если въ предложеніи 11 точки  $D$  и  $H$ , и въ 12 точки  $C$  и  $D$  предположимъ совпадающими, то доказательства этихъ предложеній останутся годными. Оба эти предложенія можно соединить въ одно:

*Если два круга касаются, то ихъ окружности могутъ имѣть общую точку только на прямой, соединяющей ихъ центры.*

**Предложеніе 13.** Два круга касаются внутренно или внѣшне только въ одной точкѣ.

*Доказат. 1)* Положимъ, что кругъ  $EBF$  касается круга  $ABC$  внутренно въ двухъ точкахъ  $B$  и  $D$  (фиг. 127).

Фиг. 127.

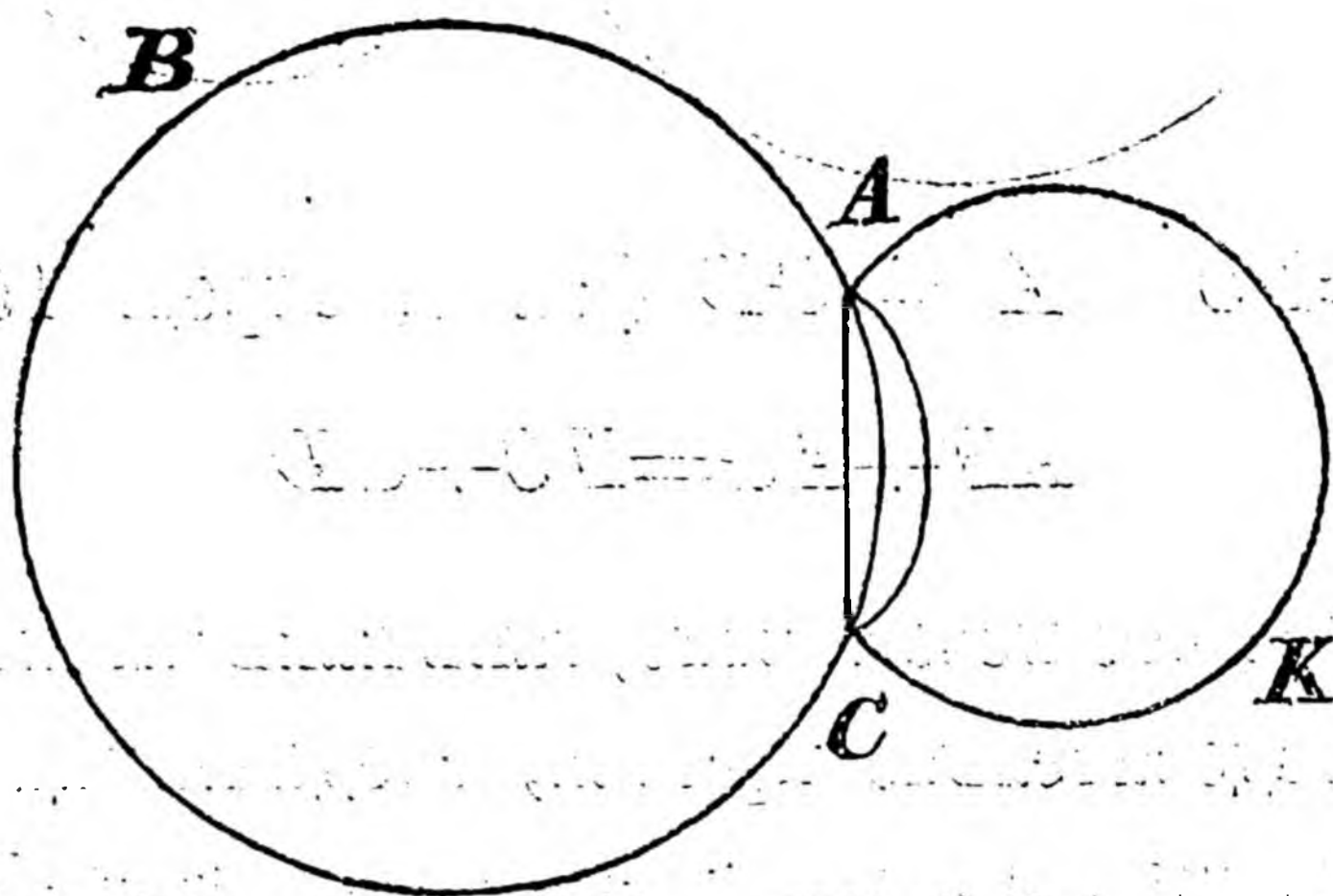


Соединимъ точки  $B$  и  $D$ , изъ середины  $BD$  возставимъ перпендикуляръ (кн. 1, пред. 10 и 11). Такъ какъ точки  $B$  и  $D$  находятся на обѣихъ

окружностяхъ, то прямая  $BD$  лежитъ внутри обоихъ круговъ (кн. 3, пред. 2). Слѣдовательно центры этихъ круговъ лежатъ на прямой  $HG$  (кн. 3, пред. 1). Но прямая, проходящая чрезъ центры касающихся круговъ, проходитъ и чрезъ точку касанія (кн. 3, пред. 11), что невозможно, такъ какъ точки касанія  $B$  и  $D$  не лежатъ на прямой  $GH$ .

*Доказат.* 2) Положимъ теперь, что два круга касаются внѣшне въ двухъ точкахъ  $A$  и  $C$  (фиг. 128).

Фиг. 128.



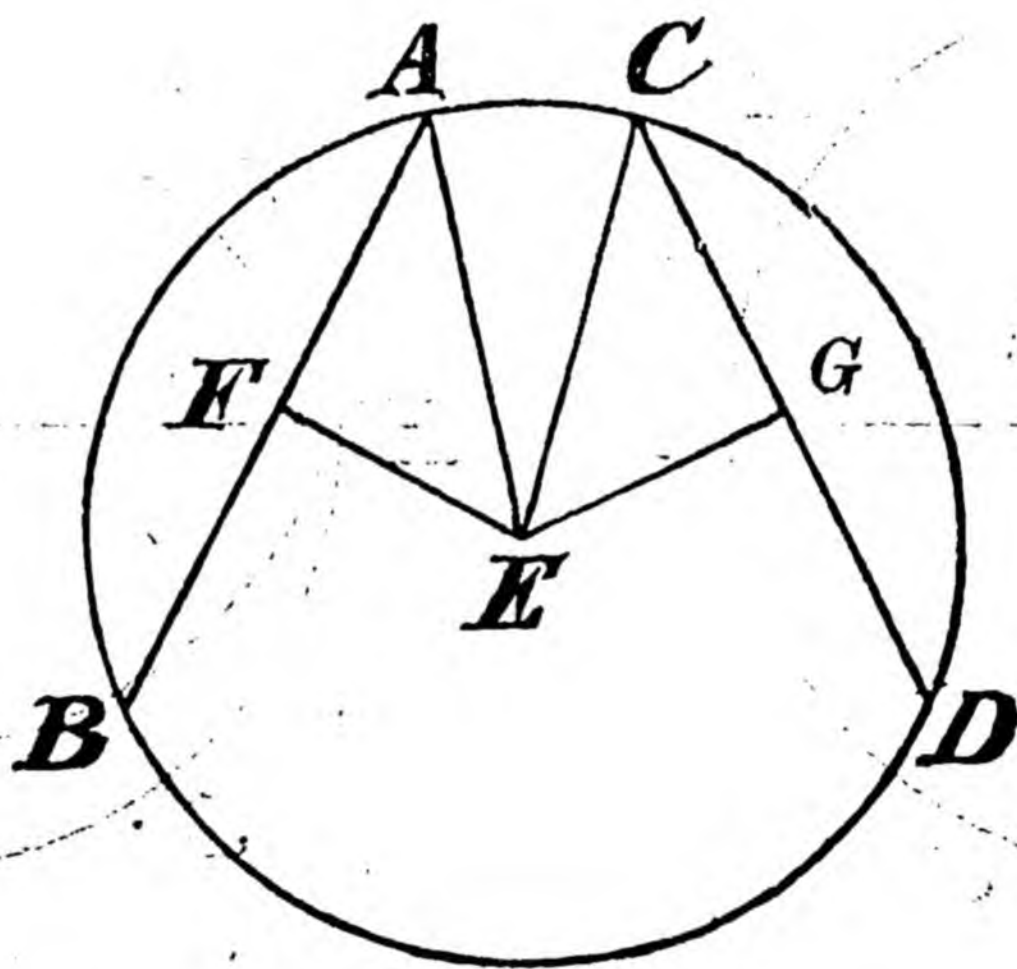
Соединимъ точки  $A$  и  $C$  прямою  $AC$ . Такъ какъ точки  $A$  и  $C$  лежатъ на окружности круга  $ACK$ , то прямая  $AC$  лежитъ внутри этого круга (кн. 3, пред. 2), но по положенію кругъ  $ACK$  лежитъ внѣ круга  $ACB$ , слѣдовательно прямая  $AC$  лежитъ внѣ круга  $ACB$ , что невозможно, такъ какъ точки  $A$  и  $C$  лежатъ на окружности  $ACB$  (кн. 3, пред. 2).

Слѣдовательно доказано, что два круга могутъ касаться только въ одной точкѣ.

*Примѣч.* 8. Предложенія 12 и 13 можно легко доказать на основаніи предложеній 7 и 8 этой книги, а слѣдовательно онѣ могутъ быть поставлены выше этихъ предложеній.

*Предложеніе 14.* Въ кругѣ  $ABDC$  равныя прямыя (хорды)  $AB$  и  $CD$  равно отстоятъ отъ центра  $E$  и прямыя  $AB$  и  $CD$  равноотстоящія отъ центра  $E$ , равны (фиг. 129).

Фиг. 129.



*Доказат.* 1) Пусть  $AB=CD$ . Изъ центра  $E$  опустимъ на эти прямыя перпендикуляры  $EF$  и  $EG$  и соединимъ точки  $A$  и  $C$  съ центромъ  $E$ .

Такъ какъ прямая  $EF$  перпендикулярна къ хордѣ  $AB$ , то  $AB=2AF$  (кн. 3 пред. 3), точно также  $DC=2CG$ . Но  $AB=DC$ , слѣдовательно и  $AF=CG$  (кн. 1, акс. 7), а также  $\square AF=\square CG$ . Но  $AE=CE$  (кн. 1, опр. 15), слѣдовательно и  $\square AE=\square CE$ . Въ треугольникахъ  $AEF$  и  $CEG$  углы  $F$  и  $G$  прямые, слѣдовательно (кн. 1, пред. 47):

$$\square AE=\square AF+\square EF \text{ и } \square EC=\square CG+\square EG.$$

Откуда (кн. 1, акс. 1):

$$\square AF+\square EF=\square CG+\square EG$$

или (кн. 1, акс. 3)  $\square EF=\square EG$ , слѣдовательно  $EF=EG$ , т. е. равныя прямыя  $AB$  и  $CD$  находятся въ равномъ разстояніи отъ центра  $E$ .

2) Если  $EF=EG$ , то  $\square EF=\square EG$ .

Но мы имѣемъ, какъ выше:

$$\square AF+\square EF=\square CG+\square EG$$

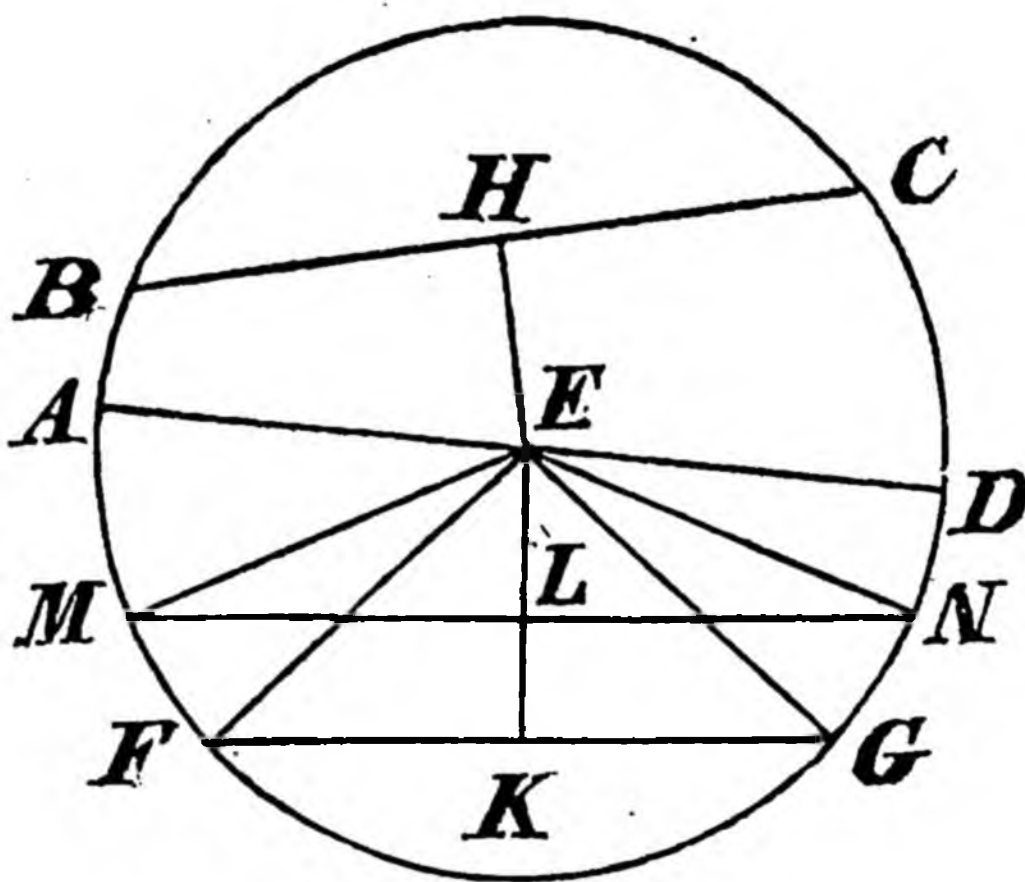
откуда  $\square AF=\square CG$  (кн. 1, опред. 3), слѣдовательно  $AF=CG$ ; но  $AB=2AF$  и  $CD=2CG$ , слѣдовательно  $AB=CD$  (кн. 1, акс. 6).

*Примѣч. 9.* Обѣ части этого предложенія можно доказать проще изъ равенства треугольниковъ  $AEF$  и  $CEG$ .

**Предложеніе 15.** Діаметръ  $AD$  круга  $ABCD$  больше каждой изъ хордъ круга и каждая хорда, лежащая ближе къ центру  $E$ , больше хорды, лежащей дальше отъ этого центра (фиг. 130).

*Доказат.* Пусть данныя хорды будутъ  $BC$  и  $FG$ . Изъ центра  $E$  опустимъ на  $BC$  и  $FG$  перпендикуляры  $EK$  и  $EN$ , и пусть  $EK > EN$ , т. е. что хорда  $BC$  ближе къ центру чѣмъ хорда  $FG$ . На перпендикулярѣ  $EK$  отъ точки  $E$  отложимъ  $EL=EN$  и изъ точки  $L$  возставимъ перпендикуляръ къ  $EK$  (кн. 1, пред. 11) и продолжимъ его до встрѣчи съ окружностью въ точкахъ  $M$  и  $N$ . Такимъ образомъ получимъ хорду  $MN=BC$  (кн. 3, пред. 14). Наконецъ соединимъ точки  $M, N, F, G$  съ центромъ  $E$  прямыми  $EM, EN, EF, EG$ .

Фиг. 130.



Такъ какъ  $AE=EM$  и  $ED=EN$  (кн. 1, опред. 15), то  $AD=EM+EN$ .



Но изъ треугольника  $MEN$  мы имѣемъ  $EM+EN>MN$  (кн. 1, пред. 20) или  $AD>MN=BC$ .

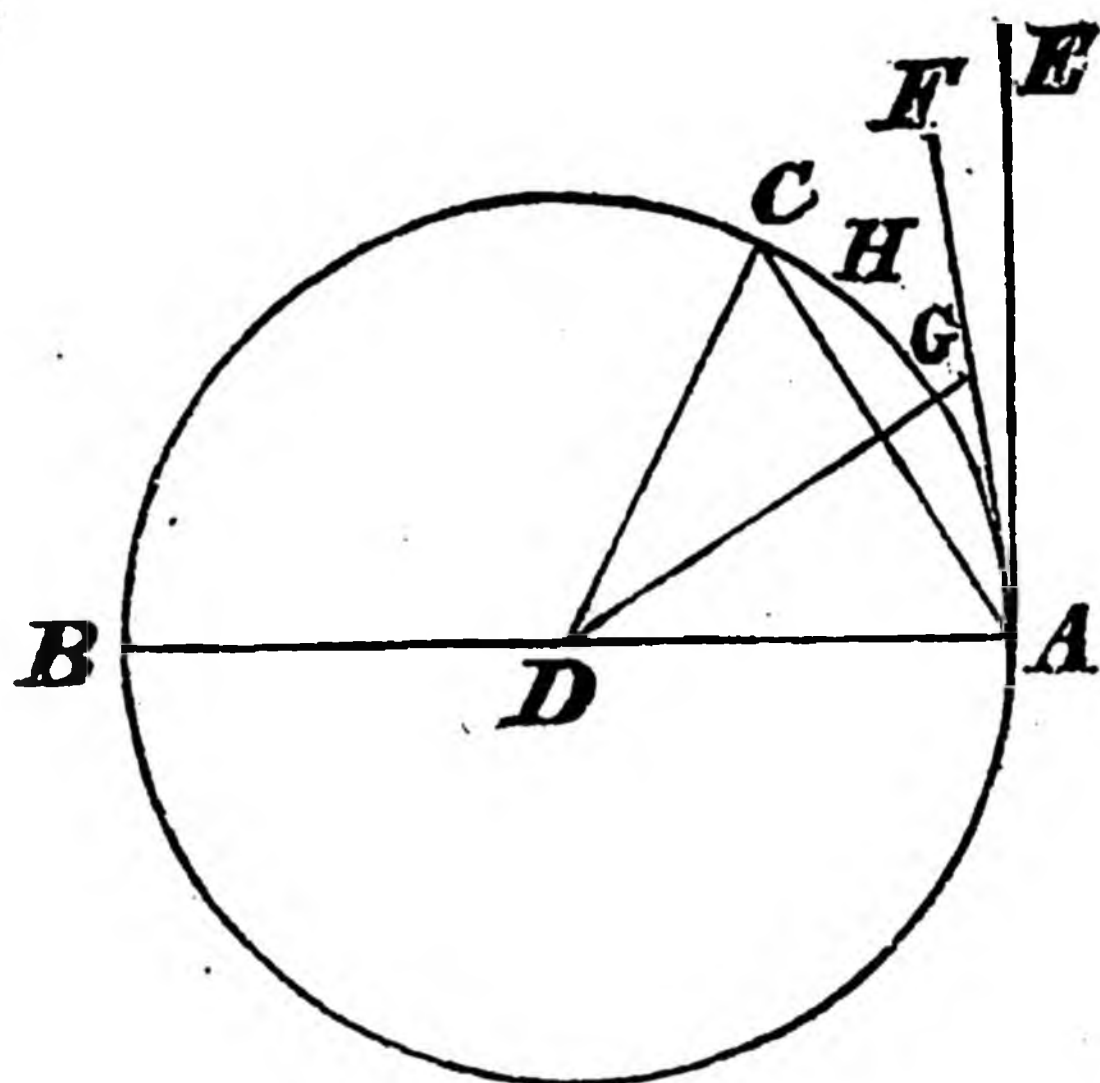
Точно также мы имѣемъ  $EM=EF$ ,  $EN=EG$  (кн. 1, опред. 15) и  $\angle MEN>\angle FEG$ , слѣдовательно (кн. 1, пред. 24)  $MN=BC>FG$ .

Итакъ доказано, что діаметръ круга есть наибольшая хорда и что хорда лежащая ближе къ центру больше той, которая лежитъ дальше отъ центра.

*Предложеніе 16.* Перпендикуляръ  $AE$ , возставленный изъ конца  $A$  діаметра  $AB$  круга  $ABC$ , находится внѣ круга, и нельзя провести ни одной прямой, чрезъ точку  $A$ , между прямою  $AE$  и окружностью, которая бы не пересѣкала окружности (фиг. 131).

*Доказат.* 1) Положимъ, что перпендикуляръ, возставленный изъ точки  $A$ , какъ на примѣръ  $AC$ , лежитъ внутри круга.

Фиг. 131.



Соединимъ центръ  $D$  круга съ  $C$ , то  $CD=AD$  (кн. 1, опред. 15), откуда  $\angle DCA=\angle DAC$  (кн. 1, пред. 5), но уголъ  $DAC$ , по положенію, прямой, слѣдовательно и уголъ  $DCA$  также прямой, что невозможно (кн. 1, пред. 17). Изъ этого видимъ, что перпендикуляръ весь лежитъ внѣ круга  $ABC$ .

2) Между перпендикуляромъ  $AE$  и окружностью нельзя провести чрезъ точку  $A$  ни одной прямой, которая бы не встрѣтила окружности.

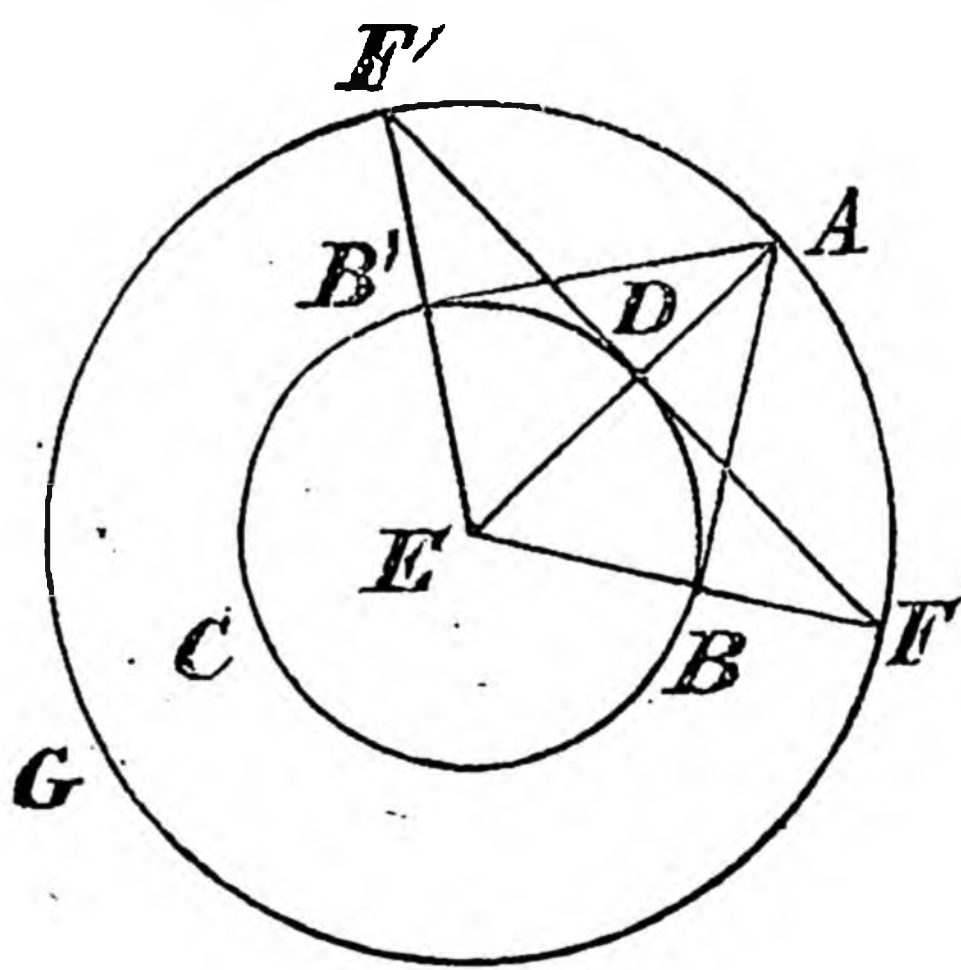
Положимъ, что возможно провести такую прямую и пусть она будетъ  $AF$ . Изъ центра  $D$  опустимъ на  $AF$  перпендикуляръ  $DG$ . Въ треугольникѣ  $DAG$  уголъ  $DGA$  прямой, по построению, слѣдовательно уголъ  $GAD$  меньше прямого (кн. 1, пред. 17), откуда  $DA>DG$  (кн. 1, пред. 19), но  $DA=DH$ , слѣдовательно  $DH>DG$ , что невозможно.

*Слѣдствіе.* Изъ этого видно, что перпендикуляръ, возставленный изъ конца діаметра круга, касается круга (кн. 3, опред. 2) только въ одной точкѣ и что въ одной точкѣ окружности только одна прямая касается ея.

*Предложение 17.* Изъ данной точки  $A$  внѣ круга  $BCD$  провести касательную къ кругу (фиг. 132)?

*Рѣшеніе.* Соединимъ центръ  $E$  круга  $BCD$  съ точкою  $A$  прямою  $AE$ , эта прямая встрѣтитъ окружность въ точкѣ  $D$ . Изъ точки  $E$  радіусомъ равнымъ  $EA$  опишемъ окружность  $AGF$ , изъ точки  $D$  возставимъ перпендикуляръ  $DF$  къ  $EA$  (кн. 1, пред. 11), который встрѣтитъ окружность  $AGF$  въ точкѣ  $F$ , соединимъ точку  $F$  съ центромъ  $E$ , прямая  $FE$  встрѣтитъ окружность  $BCD$  въ точкѣ  $B$ , которую соединимъ съ данною точкою  $A$ . Прямая  $AB$  и будетъ касательная.

Фиг. 132.



Такъ какъ точка  $E$  есть центръ круга  $AGF$ , то  $EA=EF$  (кн. 1, опред. 15). Точка  $E$  есть также и центръ круга  $BCD$ , слѣдовательно  $ED=EB$ . Уголъ  $AEF$  есть общій треугольникамъ  $EBA$  и  $EDF$ , слѣдовательно эти треугольники равны (кн. 1, пред. 4). Изъ равенства этихъ треугольниковъ слѣдуетъ равенство угловъ  $EDF$  и  $EBA$ , но уголъ  $EDF$  прямой по построению, слѣдовательно и уголъ  $EBA$  также прямой (кн. 1, акс. 11). Изъ этого видимъ, что изъ конца  $B$  прямой  $EB$ , проходящей чрезъ центръ круга  $BCD$ , возставленъ перпендикуляръ  $AB$ , слѣдовательно  $AB$  есть касательная въ точкѣ  $B$  къ кругу  $BCD$  (кн. 3, пред. 16).

Если бы данная точка  $A$  лежала на окружности  $BCD$ , напримѣръ въ точкѣ  $D$ , то чтобы провести касательную въ точкѣ  $D$  къ окружности, надобно только изъ точки  $D$  къ радіусу  $ED$  возставить перпендикуляръ  $DF$  (кн. 3, пред. 16).

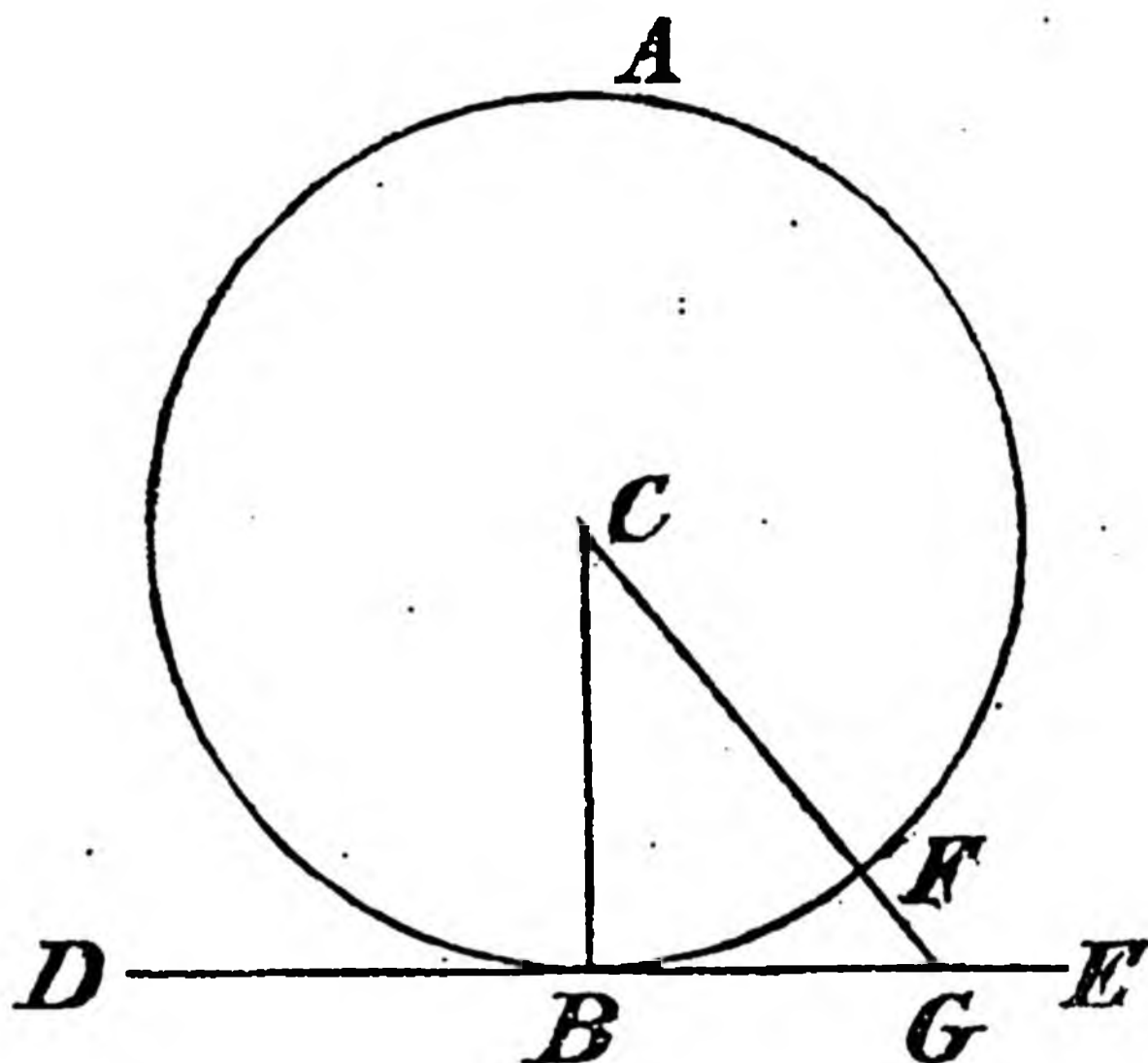
*Примѣч. 10.* Замѣтимъ еще, что перпендикуляръ  $DF$ , будучи продолженъ въ противоположную сторону, встрѣтитъ окружность еще въ другой точкѣ  $F'$ , которая такимъ же построениемъ даетъ другую касательную  $AB'$  изъ той же точки  $A$ , слѣдовательно, изъ данной точки внѣ круга можно провести двѣ касательныя къ окружности, обѣ эти касательныя равны и одинаково наклонены къ прямой  $AE$ . Есть еще другое рѣшеніе этой задачи, которое излагается во всѣхъ нашихъ руководствахъ.

*Предложение 18.* Если прямая  $DE$  касается круга  $AFB$  въ точкѣ

$B$ , то радиусъ  $CB$ , проведенный изъ центра въ точку касанія  $B$ , перпендикуляренъ къ касательной  $DE$  (фиг. 133).

*Доказат.* Положимъ, что  $CB$  не есть перпендикуляръ къ  $DE$ , а что есть другая прямая  $CG$ , перпендикулярная къ  $DE$ , слѣдовательно уголъ  $CGB$  прямой, откуда  $\angle CGB > \angle CBG$  (кн. 1, пред. 17), а изъ этого послѣдняго неравенства слѣдуетъ  $BC > CG$  (кн. 1, пред. 19), но  $BC = CF$  (кн. 1, опред. 15), слѣдовательно  $CF > CG$ , что невозможно (кн. 1, акс. 9).

Фиг. 133.



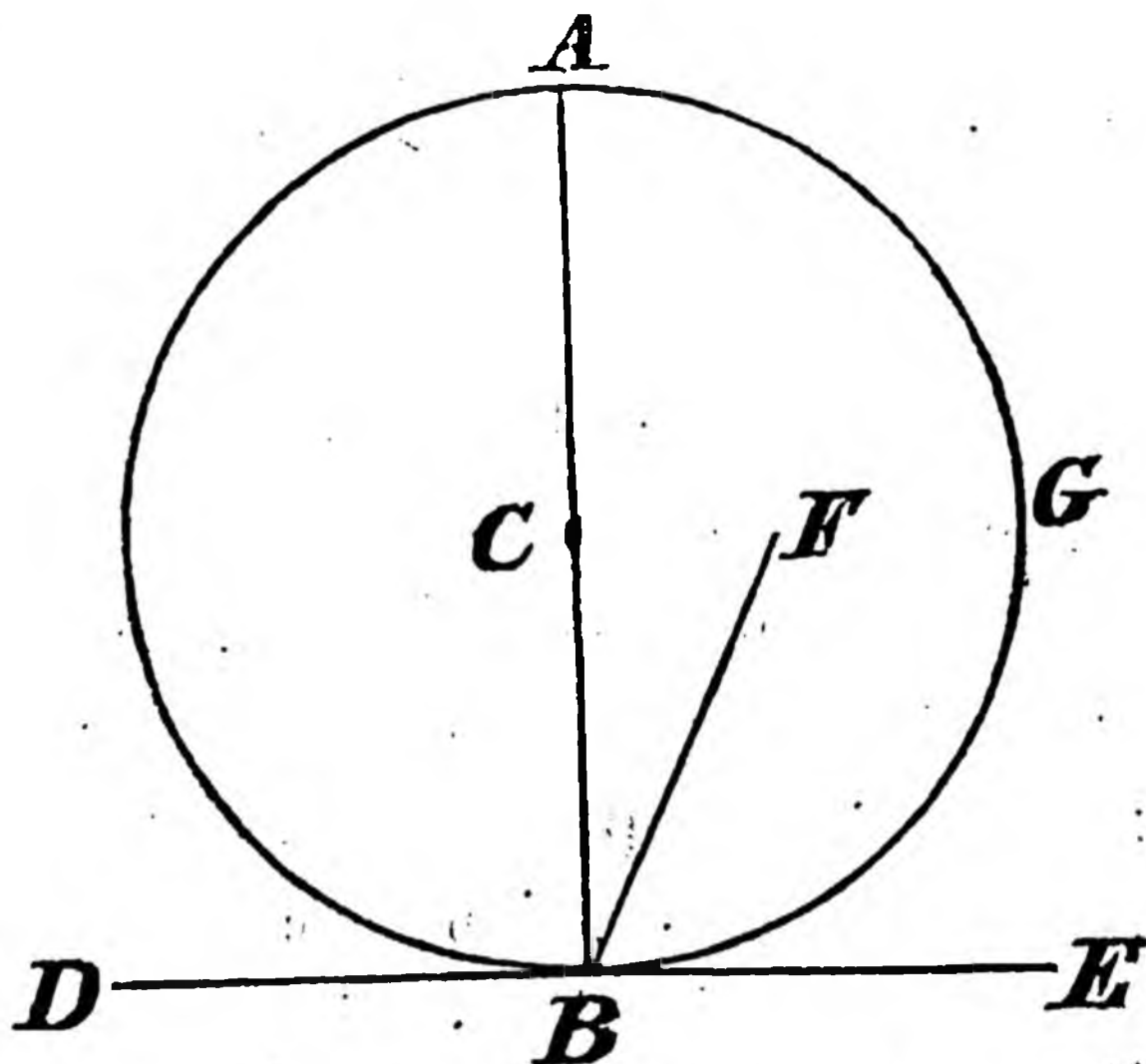
Слѣдовательно, исключая  $CB$ , никакая другая прямая, не можетъ быть перпендикулярна къ  $DE$ .

*Примѣч. 11.* Это предложеніе лишне, такъ какъ оно ничего не прибавляетъ къ предложенію 16 настоящей книги. Въ самомъ дѣлѣ, въ предложеніи 16 показано, что есть только одна прямая, касающаяся круга въ данной точкѣ, и что уголъ между этой прямой и радиусомъ, проведеннымъ въ точку касанія, есть прямой.

*Предложеніе 19.* Если прямая  $DE$  касается круга  $AGB$  въ точкѣ  $B$ , то перпендикуляръ  $BA$ , возставленный изъ точки касанія  $B$  къ касательной  $DE$ , пройдетъ чрезъ центръ  $C$  круга (фиг. 134).

*Доказат.* Положимъ, что центръ даннаго круга не находится на перпендикулярѣ  $BA$ , слѣдовательно онъ будетъ, гдѣ нибудь, въ точкѣ  $F$  внѣ этого перпендикуляра.

Фиг. 134.



Соединимъ точку  $F$  съ  $B$ , то  $FB$  будетъ перпендикуляръ къ  $DE$



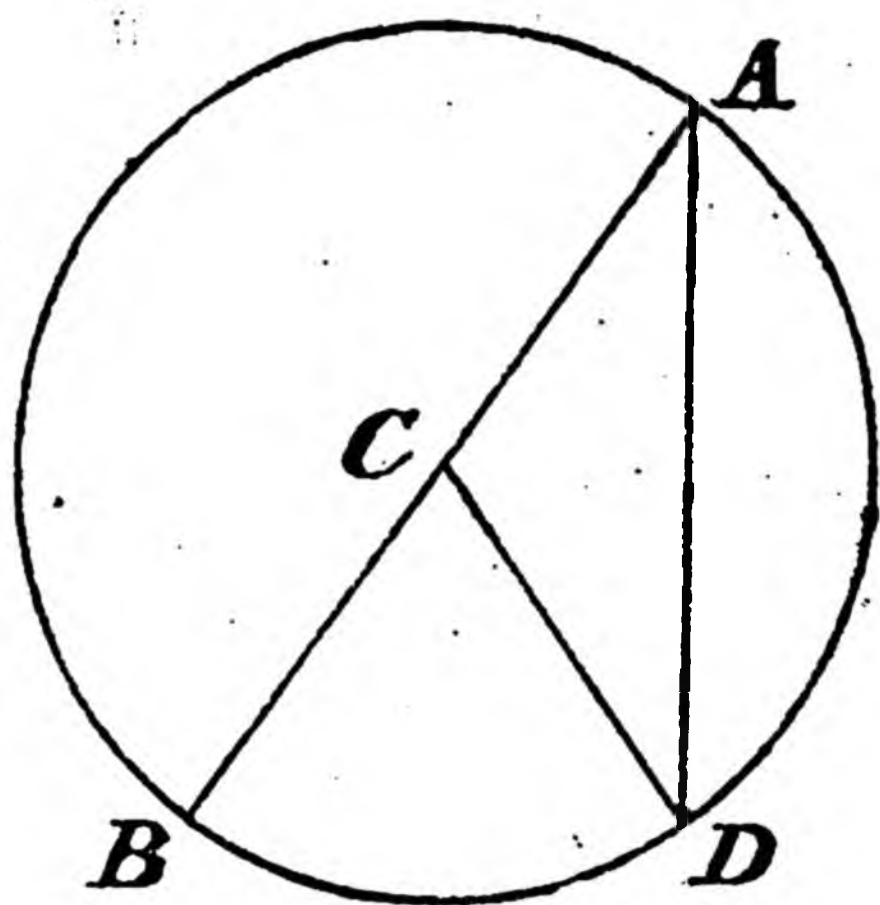
(кн. 3, пред. 18), следовательно уголъ  $FBE$  прямой, а поэтому  $\angle CBE = \angle FBE$  (кн. 1, акс. 10), что невозможно (кн. 1, акс. 9). Следовательно никакая точка, лежащая внѣ прямой  $BA$ , не можетъ быть центромъ круга  $AGB$ .

*Предложеніе 20.* Въ кругѣ  $ABD$  уголъ  $BCD$ , имѣющій вершину въ центрѣ  $C$ , равенъ удвоенному углу  $BAD$ , имѣющему вершину  $A$  на окружности круга, если эти углы упираются сторонами на одну и ту-же дугу  $BD$ .

*Доказат. Случай 1)* Положимъ, что одна изъ сторонъ  $AB$  угла  $BAD$  проходитъ чрезъ центръ круга (фиг. 135). Соединимъ центръ  $C$  съ  $D$ , то получимъ треугольникъ  $ADC$ , въ которомъ  $CA = CD$  (кн. 1, опред. 15), следовательно и  $\angle DAC = \angle CDA$  (кн. 1, пред. 5). Но уголъ  $\angle BCD = \angle DAC + \angle CDA$  (кн. 1, пред. 32), следовательно:

$$\angle BCD = 2 \angle DAC.$$

Фиг. 135.



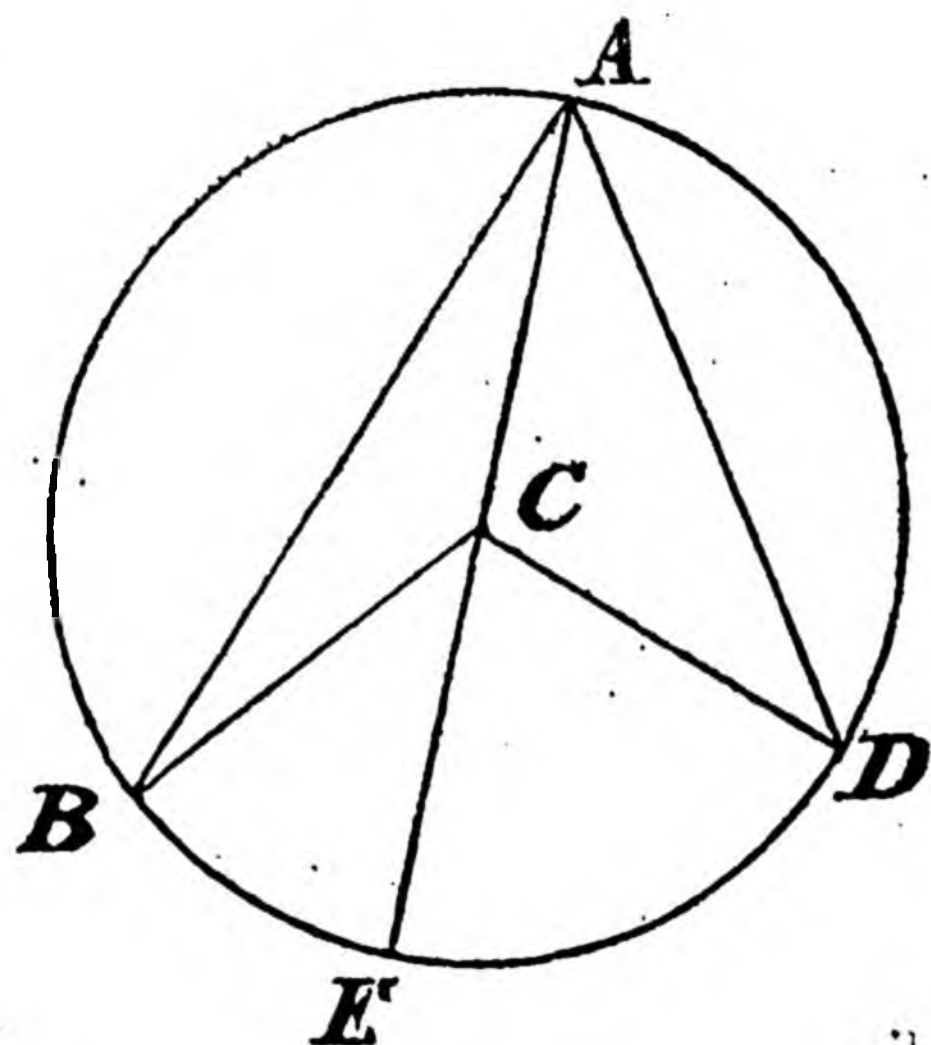
*Случай. 2)* Центръ круга лежитъ между сторонами угла  $BAD$  (фиг. 136). Соединимъ центръ  $C$  съ точками  $B$  и  $D$ , и проведемъ діаметръ  $AE$ . На основаніи предыдущаго случая получимъ:

$$\angle BCE = 2 \angle BAE, \quad \angle DCE = 2 \angle DAE,$$

складывая (кн. 1, акс. 2), получимъ:

$$\angle BCD = 2 \angle BAD.$$

Фиг. 136.



*Случай. 3)* Центръ круга лежитъ внѣ угла  $BAD$  (фиг. 137).

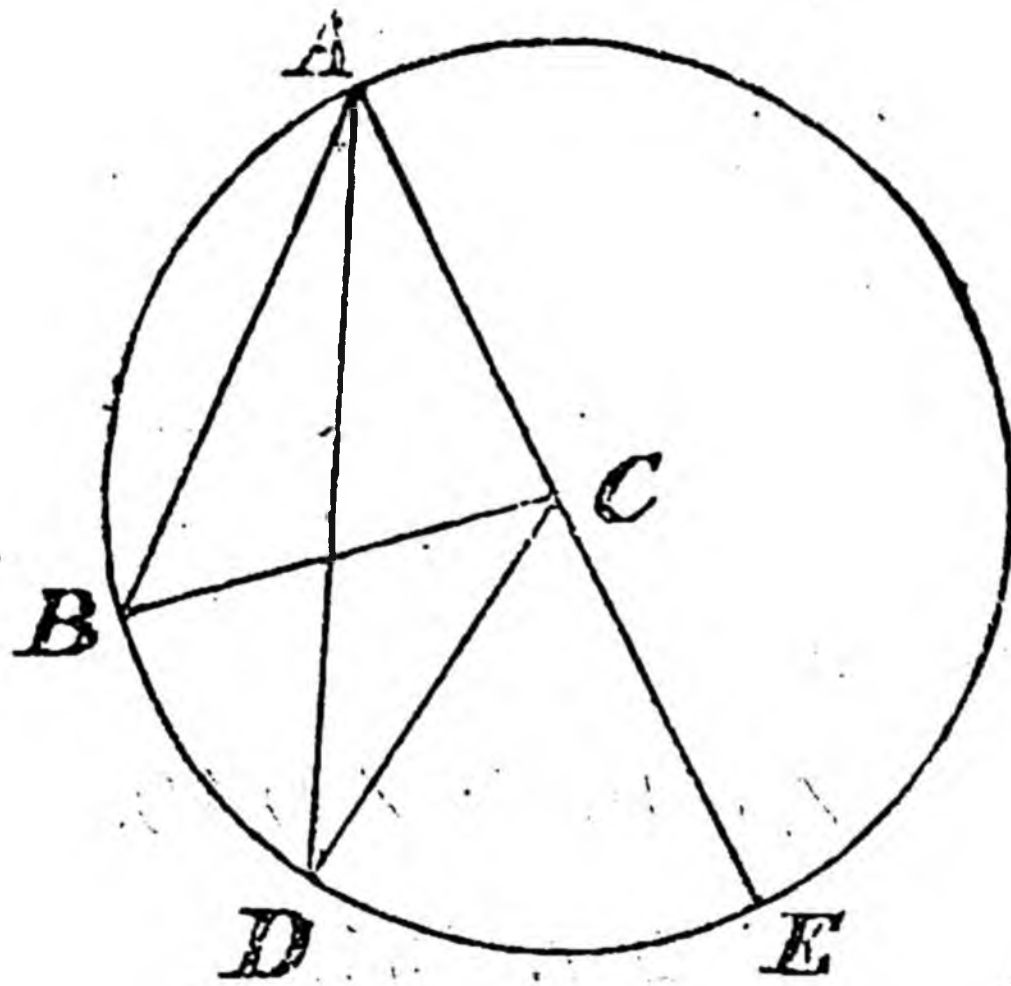
Соединимъ съ центромъ  $C$  точки  $B$  и  $D$  и проведемъ діаметръ  $AE$ , то изъ 1) получимъ:

$$\angle BCE = 2\angle BAE, \quad \angle DCE = 2\angle DAE,$$

вычитая, найдемъ (кн. 1, акс. 3):

$$\angle BCD = 2\angle BAD.$$

Фиг. 137.



*Примѣч. 12.* Въ первой книгѣ въ 5 примѣчаніи мы опредѣлили выпуклый уголъ, назвавъ *выпуклымъ* угломъ тотъ, который больше *выпрямленнаго*, или что тоже, который больше двухъ прямыхъ угловъ. Изъ этого видимъ, что если въ фиг. 136 соединимъ точки  $B$  и  $D$  съ  $E$ , то получимъ на основаніи 1):

$$\angle BCA = 2\angle BEA, \quad \angle DCA = 2\angle DEA$$

складывая найдемъ (кн. 1, акс. 2), что выпуклый уголъ  $BCD = 2\angle BED$ .

*Предложеніе 21.* Въ кругѣ  $BADH$ , всѣ углы  $BAD$ ,  $BED$ ,  $BFD$ ....., помѣщенные въ одномъ и томъ же сегментѣ  $BAEFD$ , равны между собою (фиг. 138).

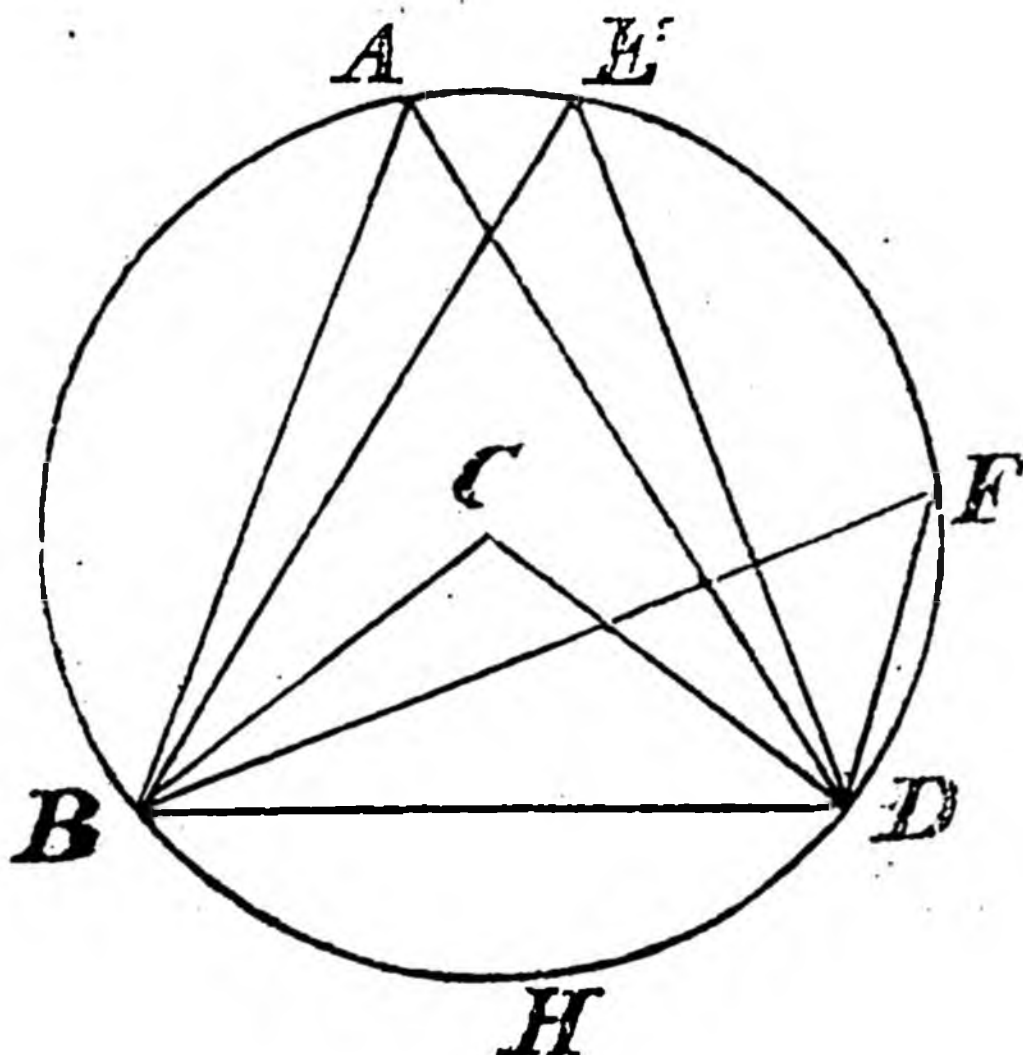
*Доказат.* Если  $C$  будетъ центръ даннаго круга, то, соединяя  $C$  съ  $B$  и  $D$ , получимъ (кн. 3, пред. 20):

$$\angle BCD = 2\angle BAD, \quad \angle BCD = 2\angle BED, \quad \angle BCD = 2\angle BFD$$

и т. д., слѣдовательно (кн. 1, акс. 1) мы имѣемъ:

$$\angle BAD = \angle BED = \angle BFD = \dots$$

Фиг. 138.

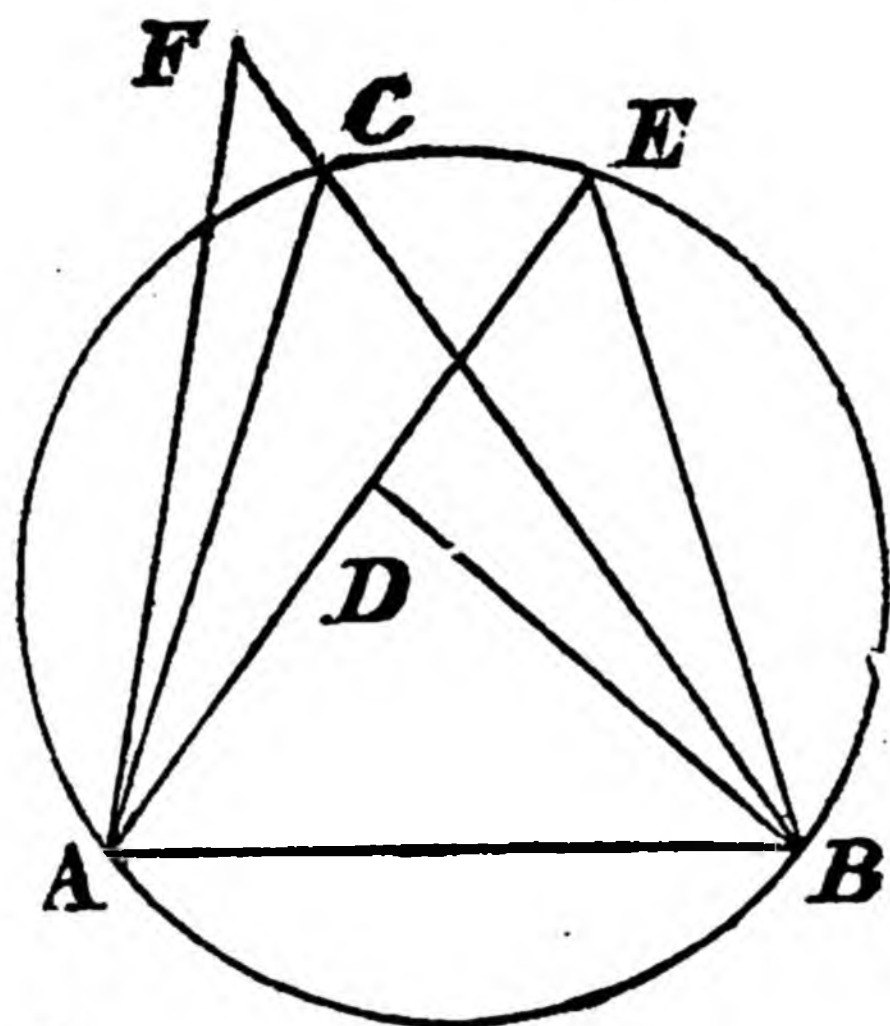


*Примѣч. 13.* Евклидъ доказалъ только этотъ случай, но не доказалъ случая, когда

углы помещены въ сегментѣ  $BHD$ . Этотъ случай прибавили Симсонъ и другіе. Доказательство его непосредственно слѣдуетъ изъ примѣч. 12 этой книги. Въ самомъ дѣлѣ всѣ углы, помещенные въ сегментѣ  $BHD$ , равны половинѣ выпуклаго угла  $BCD$ .

Всѣ углы, построенные на  $AB$ , коихъ вершины лежатъ внутри сегмента  $ACB$ , будутъ больше угловъ, помещенныхъ въ сегментѣ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть вершина  $D$  угла  $ADB$  лежитъ внутри сегмента  $ACB$  (фиг. 139).

Фиг. 139.



Продолжимъ сторону  $AD$  до встрѣчи съ окружностью въ точкѣ  $E$  и соединимъ  $E$  съ  $B$ , то  $\angle ADB > \angle AEB$  (кн. 1, пред. 16).

Всѣ углы, коихъ вершины лежатъ внѣ сегмента  $ACB$ , съ той стороны прямой  $AB$ , съ которой лежитъ сегментъ  $ACB$ , будутъ меньше угловъ, помещенныхъ въ сегментѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть вершина  $F$  угла  $AFB$  лежитъ внѣ сегмента  $ACB$ . Одна изъ сторонъ, на примѣръ  $FB$ , пересѣкаетъ окружность въ точкѣ  $C$ , соединимъ эту точку съ точкою  $A$ , то изъ треугольника  $FAC$  получимъ:

$$\angle AFB < \angle ACB.$$

Теперь легко доказать одно изъ весьма важныхъ свойствъ треугольниковъ, построенныхъ на общемъ основаніи  $AB$  съ одной его стороны и имѣющихъ равные углы, противолежащіе основанію. Это свойство состоитъ въ томъ, что вершины, такимъ образомъ построенныхъ треугольниковъ, все лежатъ на окружности одного и того-же сегмента круга. Въ самомъ дѣлѣ, если чрезъ точки  $A$ ,  $B$  и вершину  $C$ , одного изъ треугольниковъ, проведемъ окружность  $ACB$ , то всѣ углы, вписанные въ сегментъ  $ACEB$ , будутъ равны углу  $ACB$ . Но мы выше доказали, что углы, коихъ вершины лежатъ внѣ или внутри сегмента будутъ меньше или больше угла  $ACB$ , слѣдовательно вершины построенныхъ треугольниковъ не могутъ лежать внѣ окружности сегмента  $ACB$ . Задача: описать кругъ около треугольника, на которой мы основали предыдущее доказательство, рѣшена Евклидомъ только въ IV книгѣ въ 5 предложеніи.

*Предложеніе 22.* Во всякомъ четырехугольникѣ  $ABCD$ , вписанномъ въ кругъ, сумма противолежащихъ угловъ  $BAD$  и  $BCD$  равна двумъ прямымъ угламъ (фиг. 140).

*Доказат.* Соединимъ  $A$  съ  $C$  и  $B$  съ  $D$ , то мы имѣемъ  $\angle CDB = \angle BAC$   $\angle BDA = \angle ACB$  (кн. 3, пред. 21). Складывая, получимъ (кн. 1, акс. 2):

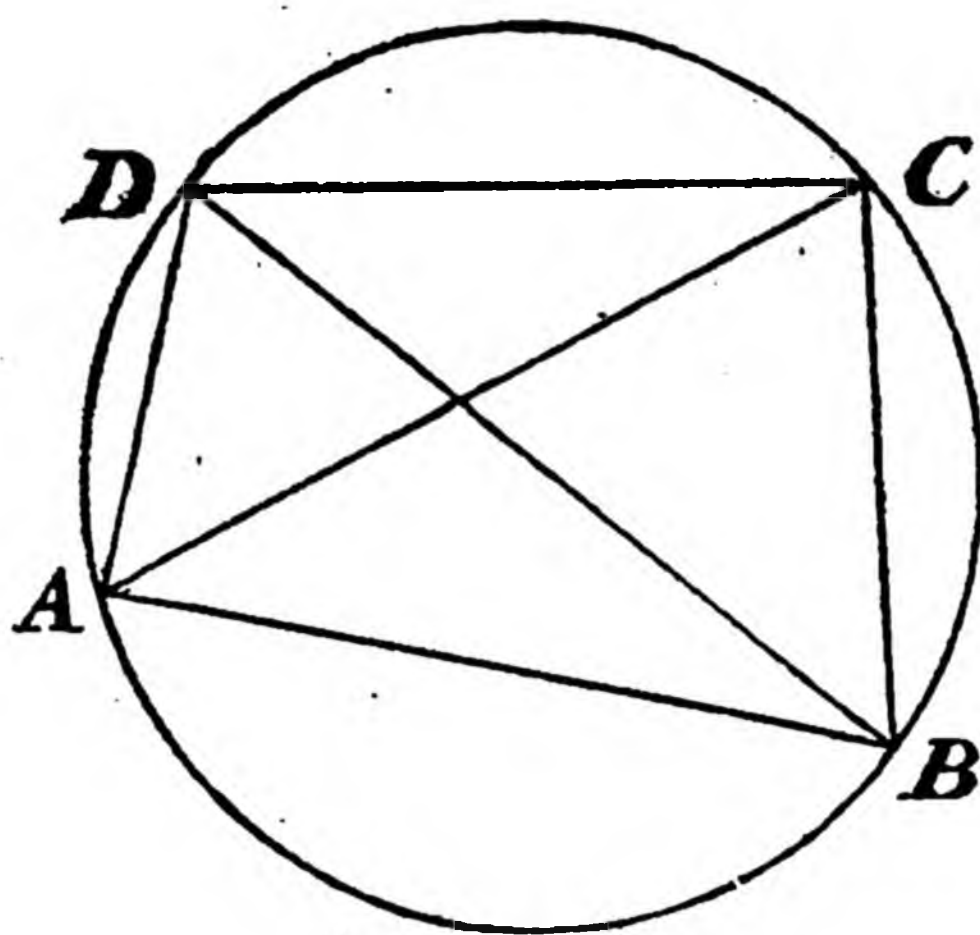
$$\angle ADC = \angle BAC + \angle ACB.$$



Придадимъ къ обѣимъ частямъ по углу  $ABC$  (кн. 1, акс. 2), то найдемъ:

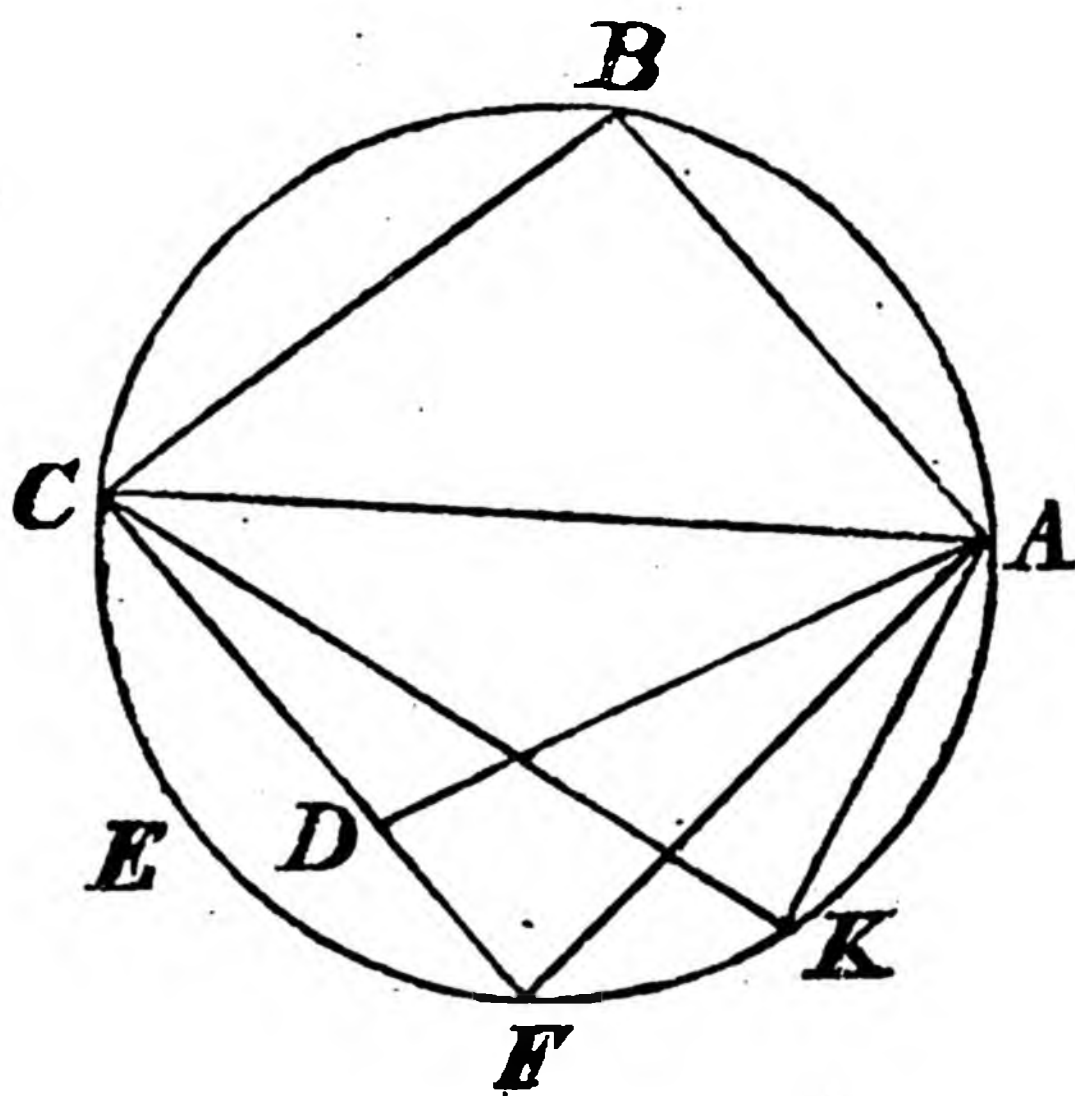
$$\angle ABC + \angle ADC = \angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = 2d \text{ (кн. 1, пред. 32).}$$

Фиг. 140.



*Примѣч. 14.* Весьма важное обратное предложеніе также имѣетъ мѣсто: если сумма противоположныхъ угловъ, въ какомъ нибудь четырехугольникѣ, равна двумъ прямымъ угламъ, то около четырехугольника можно описать кругъ. Пусть  $ABCD$  будетъ такой четырехугольникъ (фиг. 141). Опишемъ кругъ около треугольника  $ABC$  (кн. 4, пред. 5).

Фиг. 141.



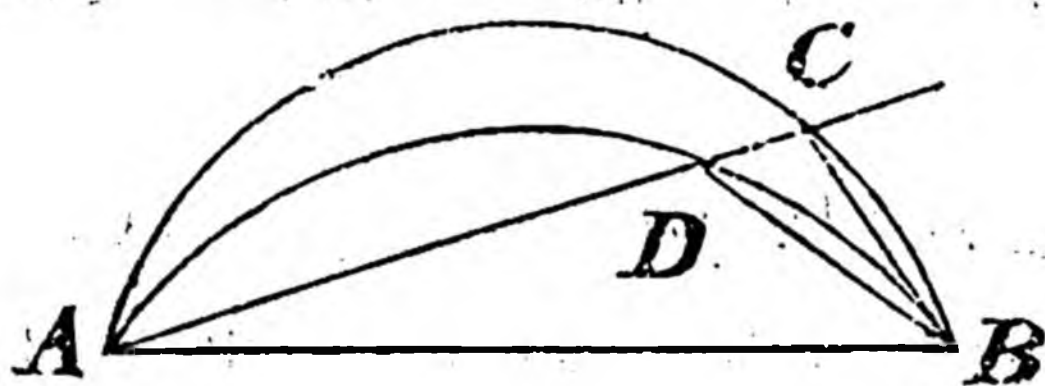
Если окружность этого круга не пройдетъ чрезъ точку  $D$ , то точка  $D$  будетъ лежать или внѣ, или внутри, сегмента  $AKEC$ . Продолжимъ сторону  $CD$  до встрѣчи съ окружностью въ точкѣ  $F$  и соединимъ ее съ  $A$ . Сумма угловъ  $B$  и  $F$  равна двумъ прямымъ угламъ (кн. 3, пред. 22). Но, по положенію, сумма угловъ  $B$  и  $D$  также равна двумъ прямымъ угламъ, слѣдовательно уголъ  $CFA$  равенъ углу  $CDA$ , что невозможно (кн. 1, пред. 16).

*Предложеніе 23.* На одной и той же прямой линіи  $AB$  и съ одной ея стороны невозможно описать два подобные и неравные сегмента (фиг. 142).

*Доказат.* Положимъ что возможно на прямой  $AB$  описать два подобные и неравные сегмента  $ACB$  и  $ADB$ .

Через точку  $A$  проведемъ прямую, встрѣчающую оба сегмента

Фиг. 142.

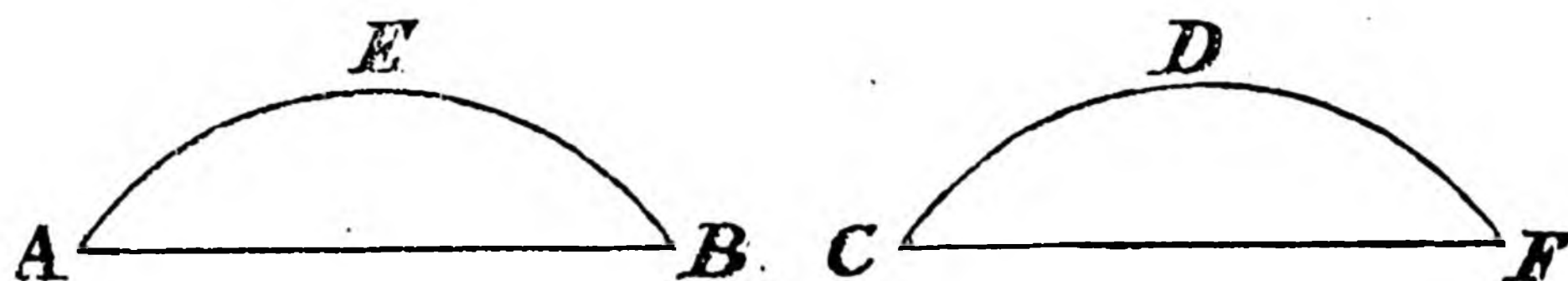


въ точкахъ  $D$  и  $C$ , соединимъ эти точки съ точкою  $B$ , то мы будемъ имѣть  $\angle ADB = \angle ACB$  (кн. 3, опред. 11), что невозможно (кн. 1, пред. 16).

*Предложеніе 24.* Подобные сегменты  $AEB$  и  $CDF$ , построенные на равныхъ прямыхъ  $AB = CF$ , равны между собою (фиг. 143).

*Доказат.* Нанесемъ сегментъ  $AEB$  на сегментъ  $CDF$ , такъ чтобы основаніе  $AB$  совпало съ основаніемъ  $CF$ . Если бы дуги  $AEB$  и  $CDF$  не совпали, то или одна дуга будетъ вся внѣ другой, или онѣ пересѣкутся еще въ третьей точкѣ. Первое предположеніе невозможно вслѣдствіе (кн. 3, пред. 23), а второе невозможно вслѣдствіе (кн. 3, пред. 10). Слѣдовательно дуги  $AEB$  и  $CDF$  совпадутъ, а слѣдовательно и сегменты совмѣстятся.

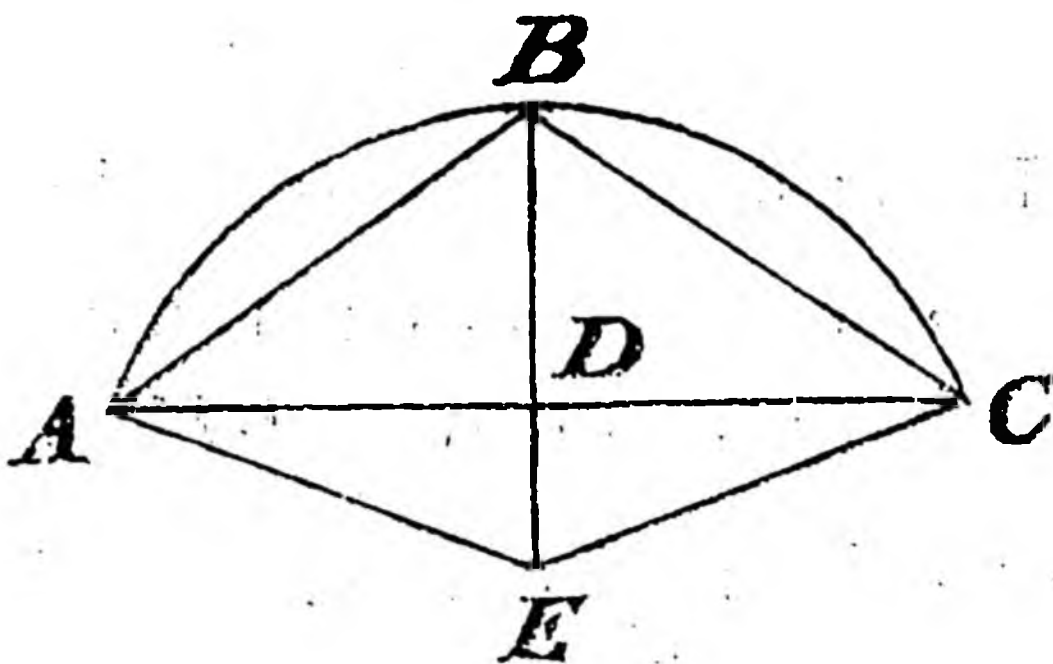
Фиг. 143.



*Предложеніе 25.* Данный сегментъ  $ABC$  дополнить до круга?

*Рѣшеніе.* Раздѣлимъ  $AC$  въ точкѣ  $D$  пополамъ (кн. 1, пред. 10). Изъ точки  $D$  возставимъ перпендикуляръ  $DB$ . Соединимъ  $A$  съ  $B$ , то уголъ  $ABD$  можетъ быть больше, равенъ, или меньше угла  $BAD$  (фиг. 144).

Фиг. 144.

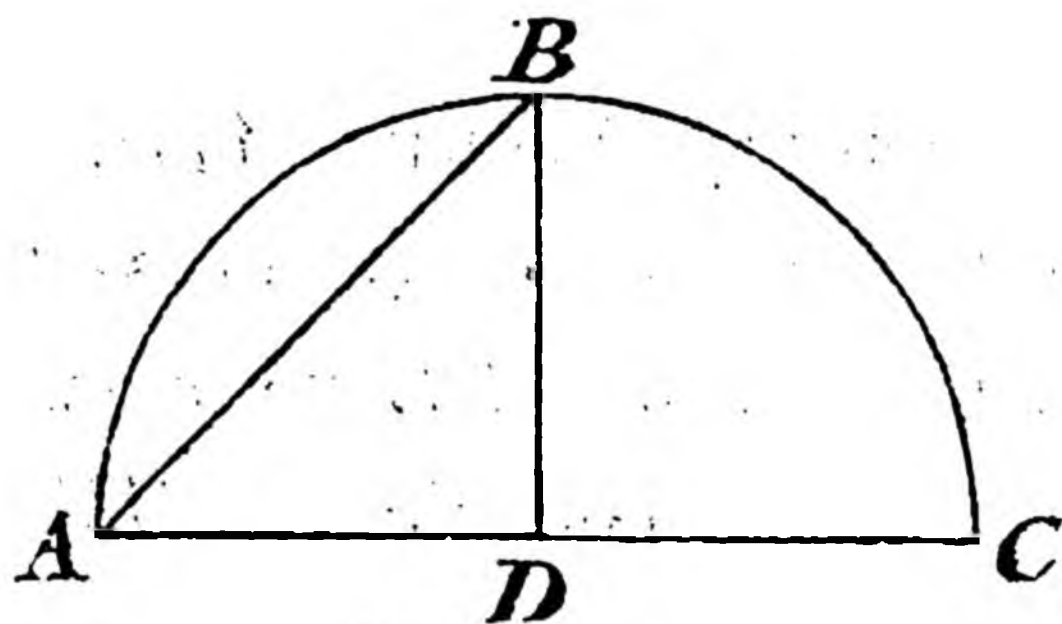


1) Уголъ  $ABD > \angle BAD$ . На прямой  $AB$  построимъ  $\angle BAE = \angle ABD$ , продолжимъ  $BD$  до встрѣчи съ  $AE$  въ точкѣ  $E$  и соединимъ  $E$  съ  $C$ . Мы имѣемъ  $BE = AE$  (кн. 1, пред. 6). Въ треугольникахъ  $ADE$  и  $CDE$ , сторона  $DE$  общая,  $AD = DC$ , по построенію, углы при  $D$  равны, слѣдо-

вательно и  $EA=EC$  (кн. 1, пред. 4). Откуда видимъ, что точка  $E$  есть центръ искомаго круга (кн. 3, пред. 9). Изъ этого ясно видно, что въ этомъ случаѣ сегментъ  $ABC$  меньше половины круга, такъ какъ центръ лежитъ внѣ сегмента.

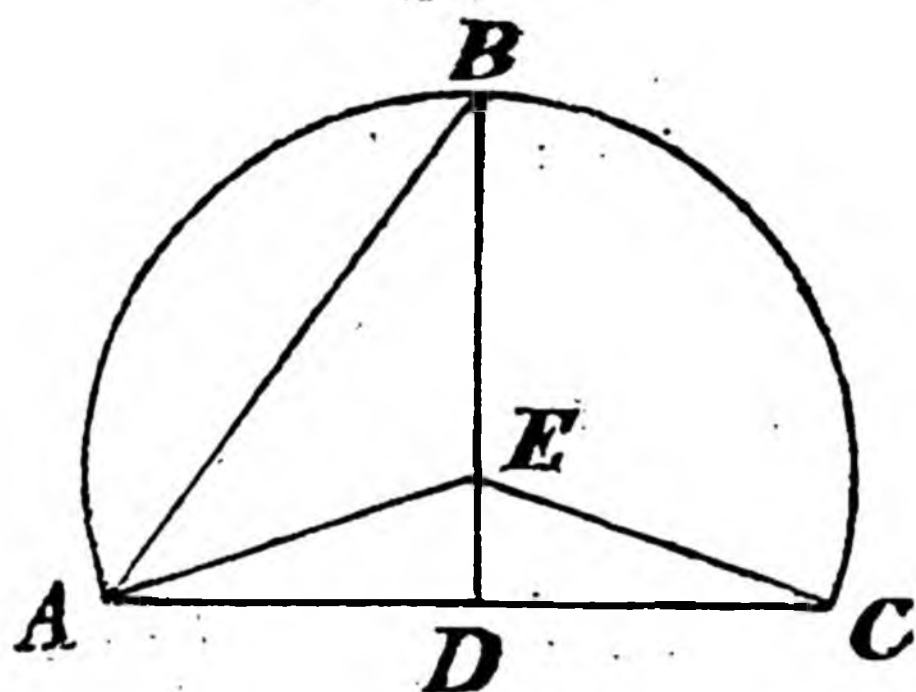
2) Уголъ  $ABD=\angle BAD$ . Въ этомъ случаѣ,  $AD=BD$  (кн. 1, пред. 6), но  $AD=DC$ , слѣдовательно точка  $D$  есть центръ искомаго круга (кн. 3, пред. 9). Въ этомъ случаѣ сегментъ равенъ половинѣ круга (фиг. 145).

Фиг. 145.



3) Уголъ  $ABD < \angle BAD$ . На прямой  $AB$  построимъ уголъ  $BAE=\angle ABD$ , соединимъ  $E$  съ  $C$  (фиг. 146).

Фиг. 146.



Въ этомъ случаѣ можетъ быть доказано, какъ и въ первомъ, что  $AE=EB=EC$ , слѣдовательно  $E$  есть центръ искомаго круга (кн. 3, пред. 9). Такъ какъ центръ  $E$  лежитъ внутри сегмента  $ABC$ , то онъ больше полукруга.

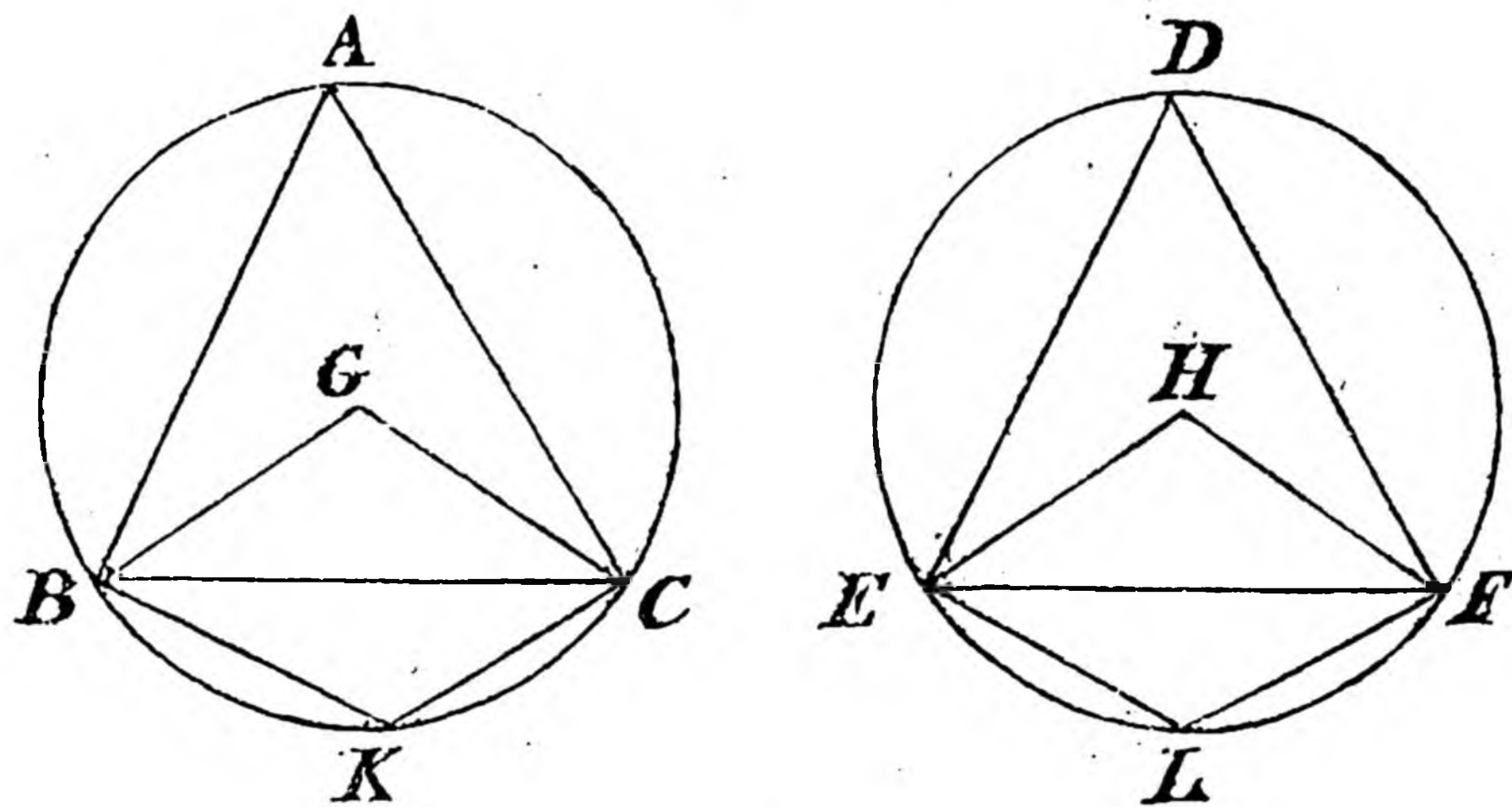
*Предложеніе 26.* Въ равныхъ кругахъ  $ABC$  и  $DEF$ , какъ равные углы  $BGC$  и  $EHF$  при центрахъ, такъ и равные углы  $BAC$  и  $EDF$  на окружностяхъ, упруаются на равныя дуги  $BKC$  и  $ELF$  (фиг. 147).

*Доказат.* Соединимъ  $B$  съ  $C$  и  $E$  съ  $F$ . Въ треугольникахъ  $BGC$  и  $EHF$ ,  $BG=EH$ ,  $CG=FH$ , какъ радіусы равныхъ круговъ,  $\angle BGC=\angle EHF$ , по положенію, слѣдовательно и  $BC=EF$  (кн. 1, пред. 4). Но по положенію углы  $A$  и  $D$  равны, слѣдовательно, въ четырехугольникахъ  $BACK$  и  $EDFL$  углы  $K$  и  $L$  также равны (кн. 3, пред. 22), а слѣдовательно сегменты  $BKC$  и  $ELF$  подобны (кн. 3, опред. 11), а если они



подобны, то и равны (кн. 3, пред. 24), откуда и дуги  $BKO$  и  $ELF$  также равны.

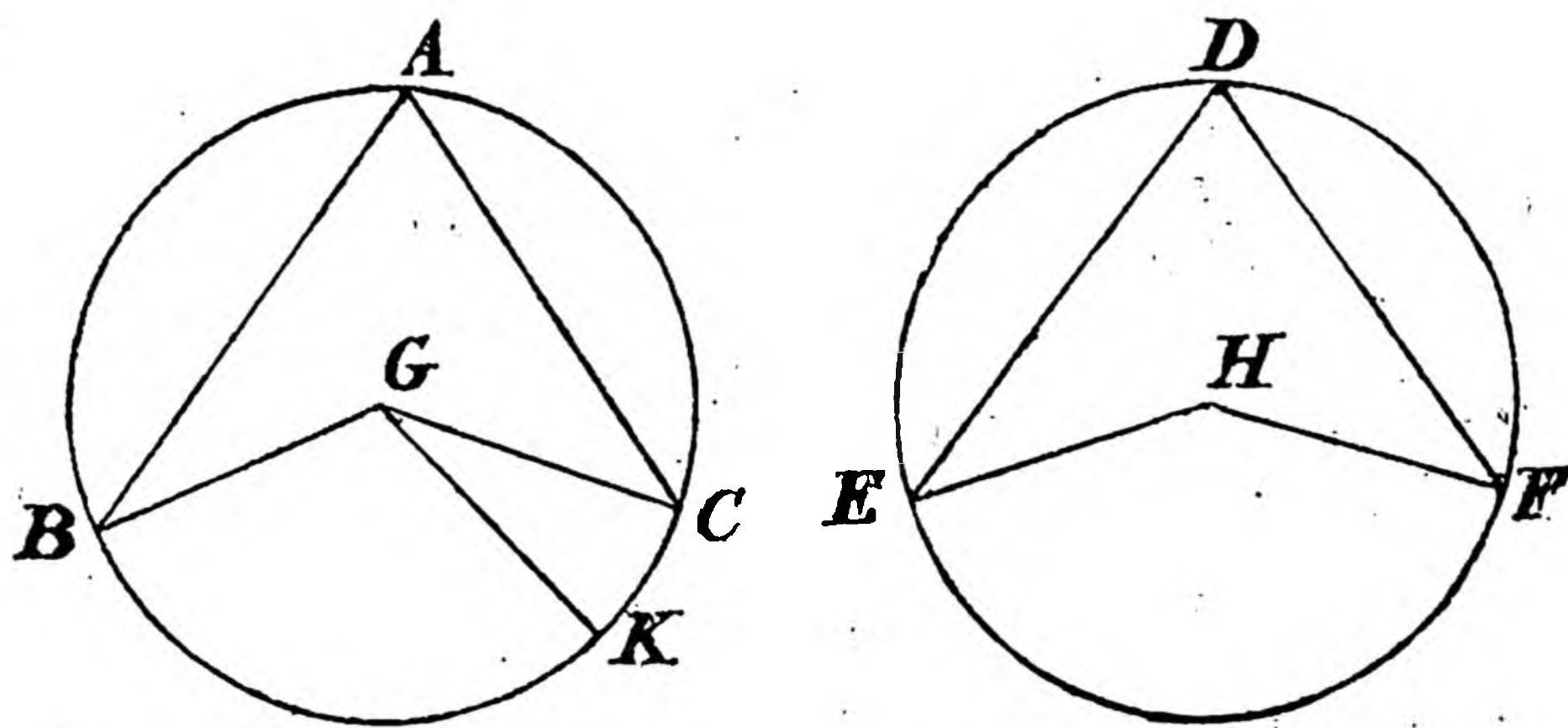
Фиг. 147.



*Предложение 27.* Въ равныхъ кругахъ  $ABC$  и  $DEF$  углы  $BGC$  и  $EHF$ ,  $BAC$  и  $EDF$ , упирающіеся на равныя дуги  $BC$  и  $EF$  и имѣющіе вершины, первые два въ центрахъ круговъ, а вторые на окружностяхъ, будутъ равны (фиг. 148).

*Доказат.* Положимъ, что углы  $BGC$  и  $EHF$  неравны, слѣдовательно одинъ изъ нихъ будетъ больше, наиримѣръ  $BGC$ . Построимъ  $\angle BGK = \angle EHF$ , то дуги  $BK = EF$  (кн. 3, пред. 26). Но по условию дуга  $BC = EF$ , слѣдовательно дуга  $BK = BC$ , что невозможно (кн. 1, акс. 9). Слѣдовательно углы  $BGC$  и  $EHF$  не могутъ быть неравными, а если они равны, то и  $\angle BAC = \angle EDF$  (кн. 3, пред. 20).

Фиг. 148.

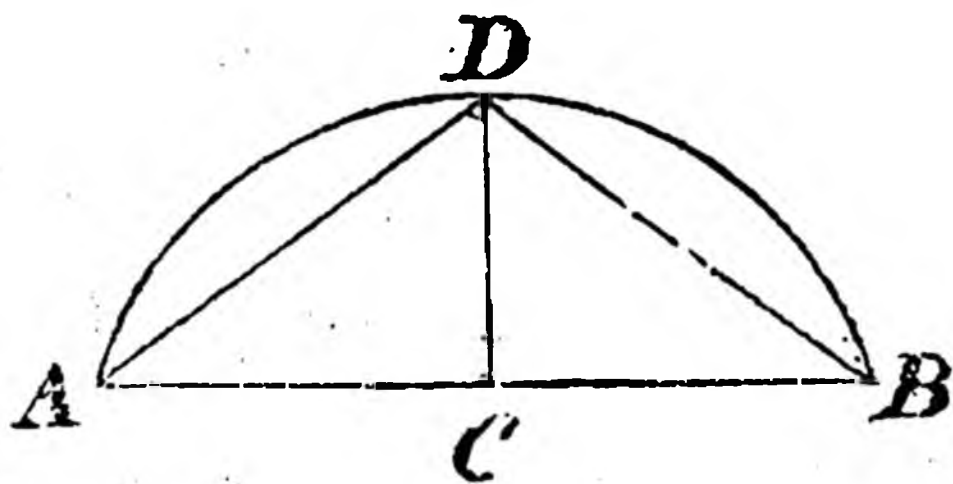


*Предложение 28.* Въ равныхъ кругахъ  $ABC$  и  $DEF$  равныя хорды  $BC$  и  $EF$  стягиваютъ равныя дуги  $BGC$  и  $EHF$  (фиг. 149).

*Доказат.* Пусть центры данныхъ круговъ будутъ  $K$  и  $L$ . Соединимъ центръ  $K$  съ точками  $B$  и  $C$  и центръ  $L$  съ точками  $E$  и  $F$ .

угольники  $ADC$  и  $BDC$  равны, такъ какъ  $AC=BC$ ,  $DC$  сторона общая, углы при  $C$  прямые, слѣдовательно и  $AD=BD$ , откуда и дуга  $AD=$ дуга  $DB$  (кн. 3, пред. 28).

Фиг. 151.



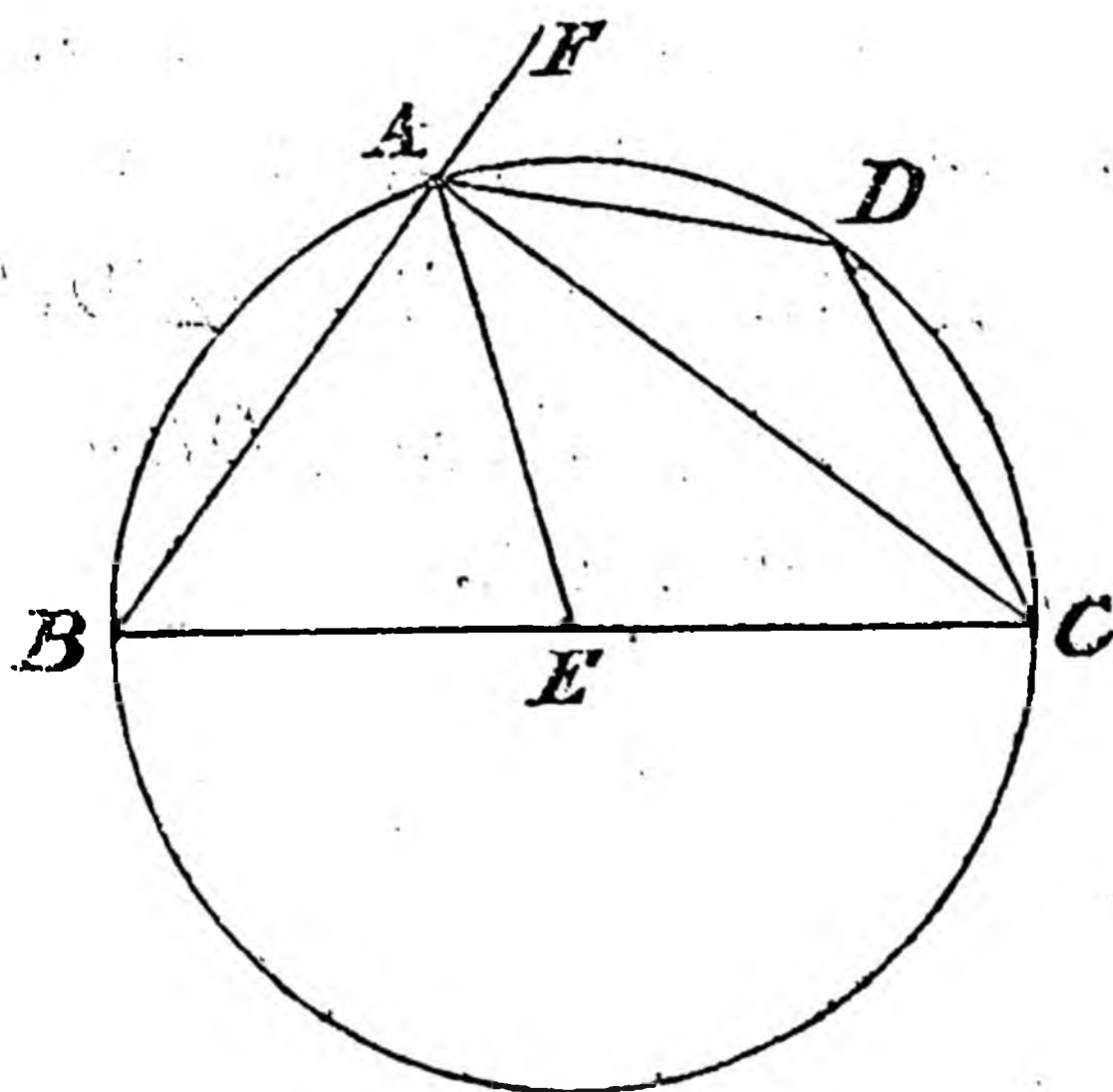
**Предложеніе 31.** Уголъ, вписанный въ полуокружность  $BAC$ , есть прямой, вписанный въ сегментъ большій полуокружности меньше прямого угла и вписанный въ сегментъ меньшій полуокружности больше прямого угла (фиг. 152).

**Доказат.** Пусть  $ABCD$  будетъ кругъ, коего діаметръ есть  $BC$ , а центръ  $E$ .

Проведемъ хорду  $AC$ , раздѣляющую кругъ на два сегмента  $ABC$  и  $ADC$ , изъ коихъ первый больше полукруга, а второй меньше. Уголъ вписанный въ полукругъ  $BADC$  будетъ прямой, вписанный въ сегментъ  $ABC$  будетъ меньше прямого и вписанный въ сегментъ  $ADC$  будетъ больше прямого.

Соединимъ  $A$  съ  $B$ ,  $A$  съ  $D$  и  $D$  съ  $C$ . Соединимъ еще  $A$  съ центромъ  $E$  и продолжимъ  $BA$  до точки  $F$  (фиг. 152).

Фиг. 152.



1) Такъ какъ въ треугольникахъ  $ABE$  и  $AEC$  углы  $\angle ABE=\angle BAE$  и  $\angle EAC=\angle ACE$  (кн. 1, пред. 5), то, складывая, получимъ (кн. 1, акс. 2):

$$\angle BAC=\angle ABC+\angle ACB.$$

Но внѣшній уголъ  $FAC=\angle ABC+\angle ACB$  (кн. 1, пред. 32), слѣдовательно  $\angle FAC=\angle BAC$ , откуда (кн. 1, опред. 10) уголъ  $BAC=d$ .

2) Въ треугольникъ  $ABC$  уголъ  $BAC = d$ , следовательно  $\angle ABC + \angle ACB = d$  (кн. 1, пред. 32), откуда уголъ  $ABC < d$ , т. е. уголъ, вписанный въ сегментъ болѣйшій полуокружности, меньше прямого угла.

3) Четыреугольникъ  $ABCD$  вписанъ въ кругъ, следовательно сумма противолежащихъ угловъ  $ABC$  и  $ADC$  равна двумъ прямымъ угламъ (кн. 3, пред. 22), т. е.:

$$\angle ABC + \angle ADC = 2d$$

но  $\angle ABC < d$ , какъ мы выше показали, следовательно  $\angle ADC > d$  (кн. 1, акс. 5), т. е. уголъ вписанный въ сегментъ меньшій полуокружности больше прямого угла.

*Примѣч. 15.* Изъ того, что въ треугольникъ  $ABC$  уголъ  $BAC = \angle ABC + \angle ACB$  можно прямо заключить, что уголъ  $BAC = d$ , безъ пособія смежнаго ему угла  $FAC$ . Въ самомъ дѣлѣ,  $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 2d$  или  $2\angle BAC = 2d$ , откуда  $\angle BAC = d$ .

*Предложеніе 32.* Если прямая линія  $EF$  касается круга  $ADCB$  въ точкѣ  $B$  и если изъ точки касанія проведемъ, какую нибудь, прямую  $BD$ , то углы  $DBF$  и  $DBE$ , образуемые ею съ касательною  $EF$ , будутъ равны угламъ вписаннымъ, первый въ сегментъ  $BAD$ , а второй въ сегментъ  $BCD$  (фиг. 153).

*Доказат.* Изъ точки  $B$  возставимъ перпендикуляръ  $BA$  къ касательной  $EF$  (кн. 1, пред. 11). На дугѣ  $BD$  возьмемъ, какую нибудь точку  $C$  и соединимъ  $A$  съ  $D$ ,  $D$  съ  $C$  и  $C$  съ  $B$ .

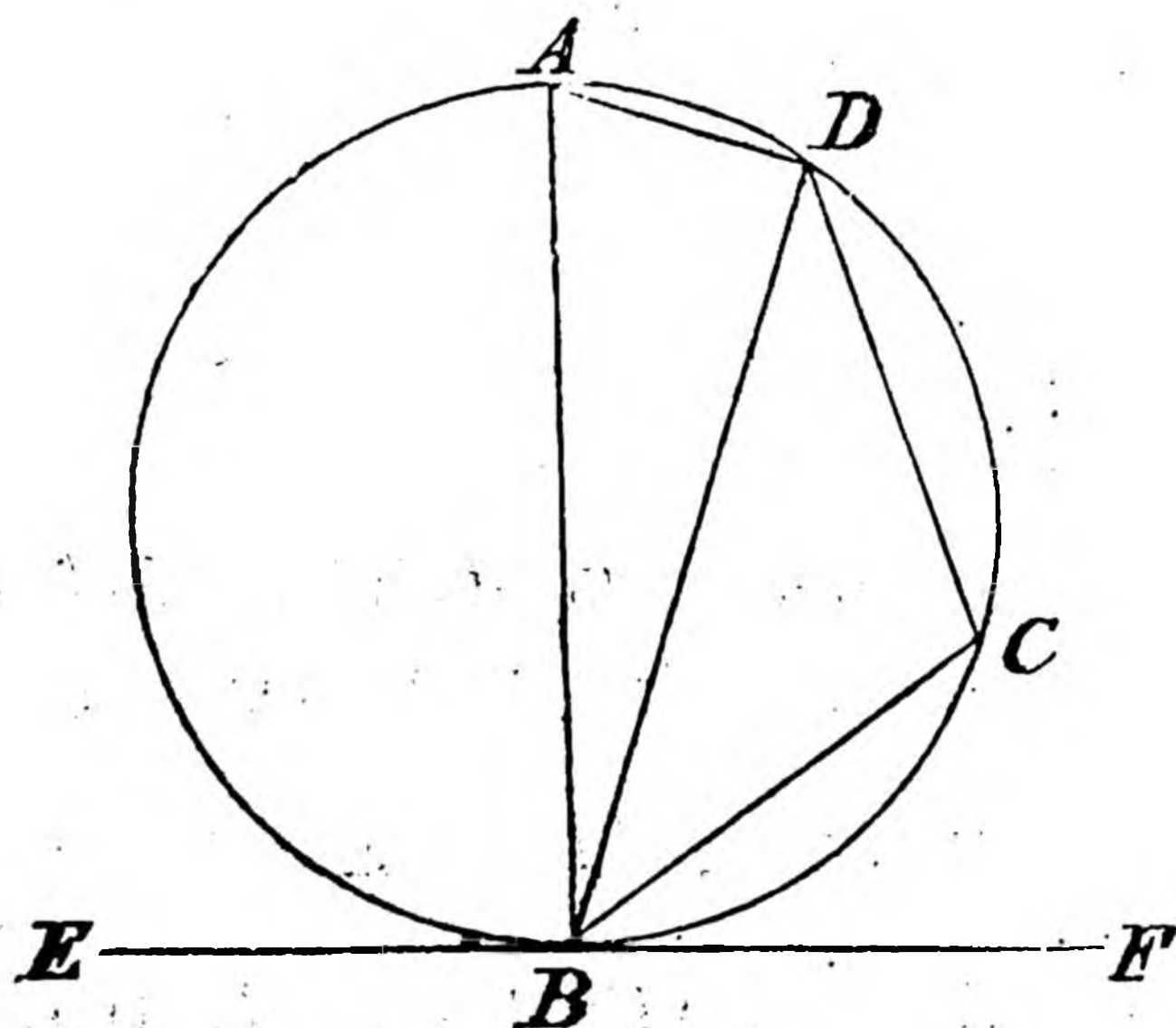
1) Такъ какъ  $BA$  есть діаметръ (кн. 3, пред. 19), то уголъ  $ADB$  есть прямой (кн. 3, пред. 31).

Если уголъ  $ADB$  есть прямой, то  $\angle DAB + \angle ABD = d$ , но  $\angle ABD + \angle DBF = d$ , следовательно (кн. 1, акс. 1):

$$\angle DAB + \angle ABD = \angle ABD + \angle DBF,$$

откуда, отнимая по углу  $ABD$ , найдемъ что  $\angle DBF = \angle DAB$  (кн. 1, акс. 3).

Фиг. 153.



2) Въ четырехугольникъ  $BADC$ , вписанномъ въ кругъ, мы имѣемъ (кн. 3, пред. 22):



$$\angle BAD + \angle DCB = 2d,$$

но

$$\angle FBD + \angle DBE = 2d,$$

Слѣдовательно (кн. 1, акс. 1):

$$\angle BAD + \angle DCB = \angle FBD + \angle DBE,$$

откуда, замѣчая, что  $\angle FBD = \angle BAD$ , найдемъ (кн. 1, акс. 3)  $\angle DBE = \angle DCB$ .

*Примѣч. 16.* Предложеніе, обратное предыдущему: Если чрезъ точку пересѣченія, какой нибудь прямой съ кругомъ, проведена прямая, пересѣкающая кругъ и составляющая съ первой прямой уголъ, равный углу, вписанному въ одинъ изъ сегментовъ круга, на которые его дѣлитъ первая прямая, то вторая прямая будетъ касательная къ кругу.

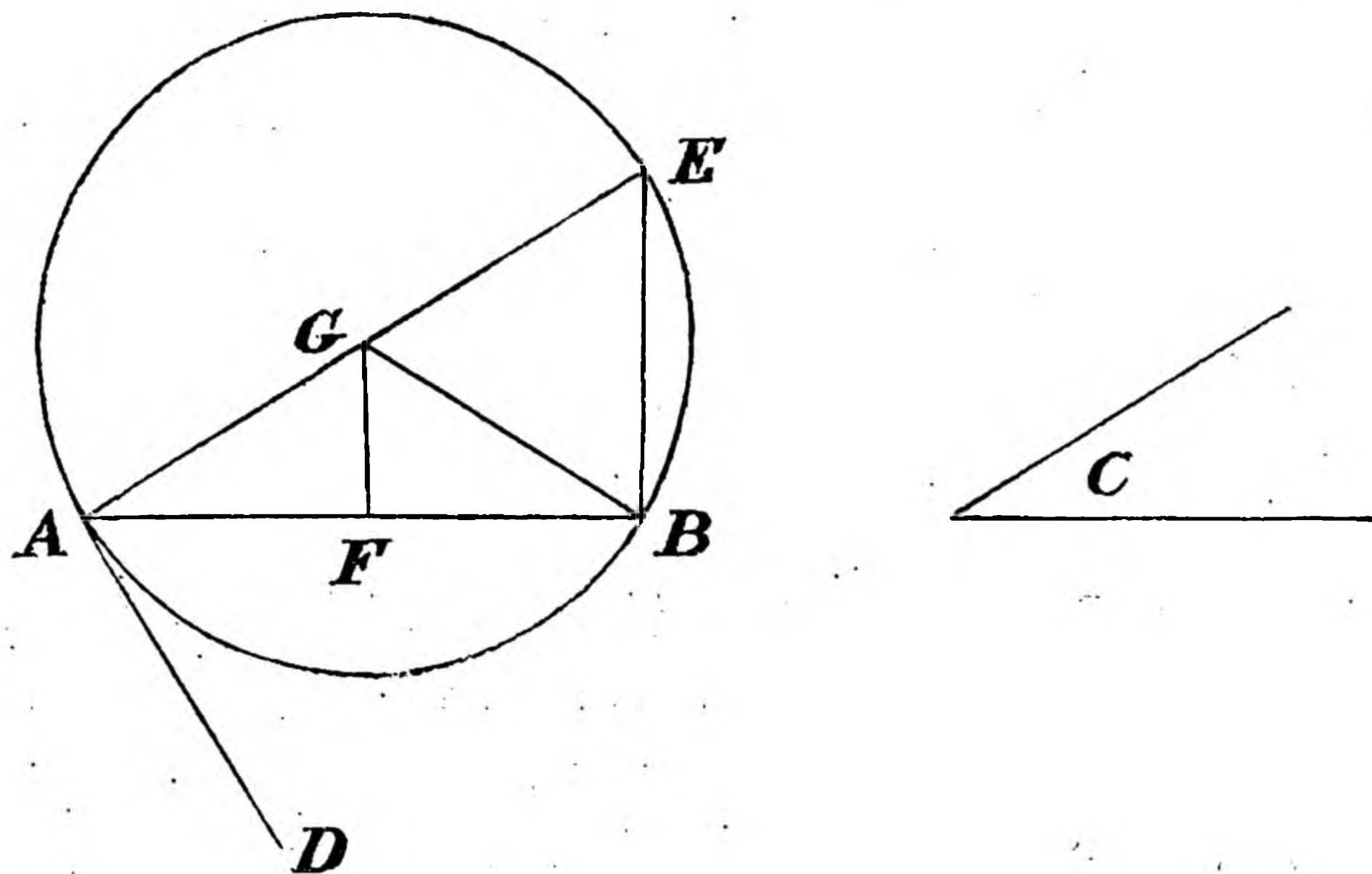
*Доказат.* Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что проведенная прямая пересѣкаетъ кругъ, но не касается его. Проведемъ чрезъ точку пересѣченія касательную къ кругу, то по пред. 32, кн. 3 и по гипотезѣ будетъ слѣдовать, что двѣ различныя прямая, проходящія чрезъ точку пересѣченія, составляютъ съ третьей прямою одинъ и тотъ-же уголъ, что невозможно.

*Предложеніе 33.* На данной прямой  $AB$  построить сегментъ, углы вписанные въ который были бы равны данному углу  $C$ ?

*Рѣшеніе.* Данный уголъ  $C$  можетъ быть острый, прямой или тупой.

1) Пусть уголъ  $C$  будетъ острый. Построимъ на данной прямой  $AB$  уголъ  $BAD = \angle C$  (кн. 1, пред. 23). Изъ точки  $A$  возставимъ перпендикуляръ  $AE$  къ  $AD$  (кн. 1, пред. 11) и раздѣлимъ  $AB$  въ точкѣ  $F$  пополамъ (кн. 1, пред. 10) (фиг. 154).

Фиг. 154.



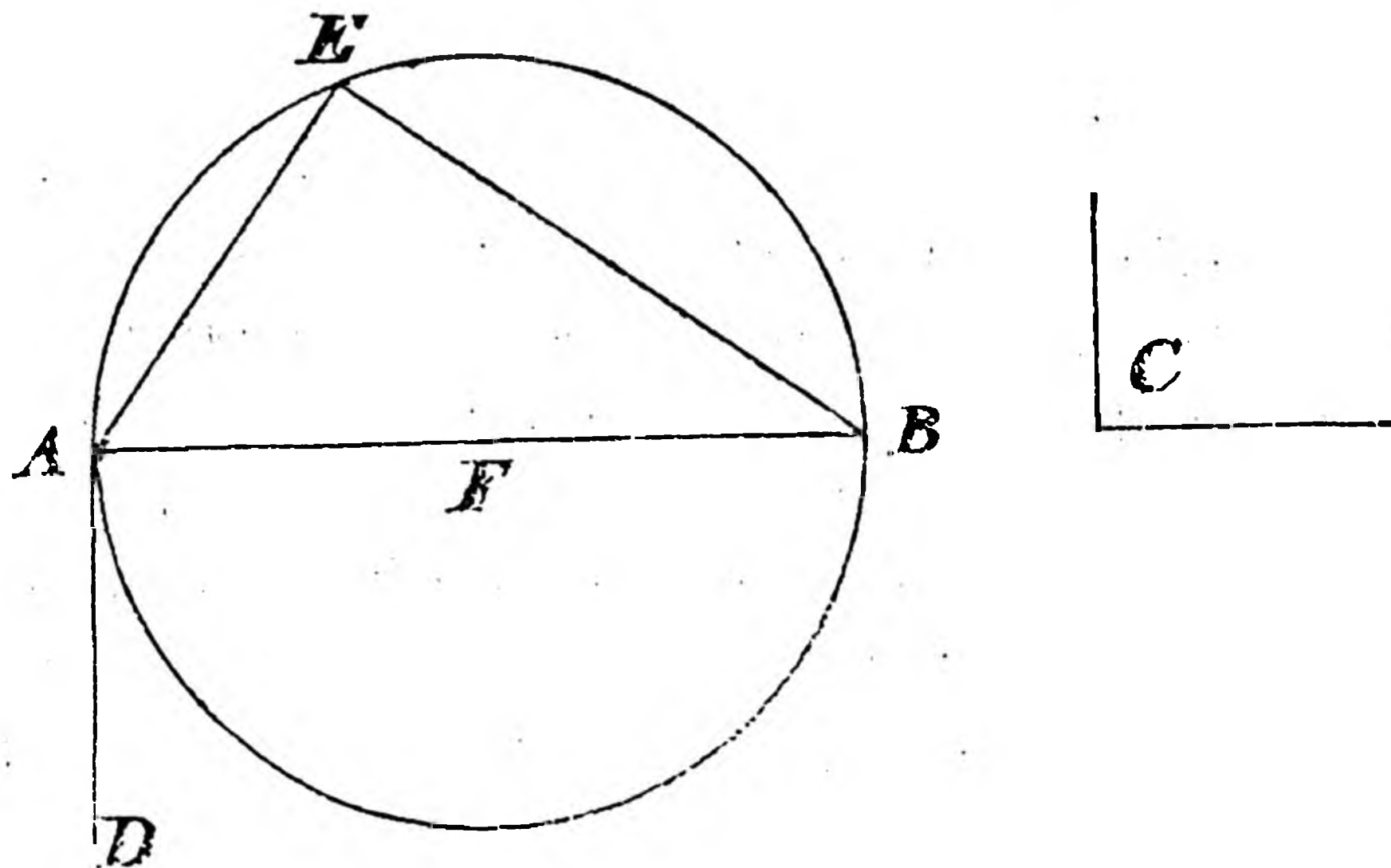
Изъ точки  $F$  возставимъ перпендикуляръ  $FG$  и точку  $G$  встрѣчи его, съ прямою  $AE$ , соединимъ съ точкою  $B$ , то изъ треугольниковъ  $AGF$  и  $BGF$  найдемъ  $AG = BG$  (кн. 4, пред. 4).

Изъ точки  $G$ , какъ изъ центра, радіусомъ  $AG$  опишемъ кругъ  $ABE$  и соединимъ  $B$  съ  $E$ . Сегментъ  $AEB$  и будетъ искомый. Въ самомъ дѣлѣ,

такъ какъ  $AE \perp AD$  и  $AE$  есть діаметръ круга  $AEB$ , то  $\angle AEB = \angle BAD = \angle C$  (кн. 3, пред. 32)

2) Пусть уголъ  $C = d$ . Построимъ на данной прямой  $AB$  уголъ  $BAD = d$ . Раздѣлимъ прямую  $AB$  въ точкѣ  $F$  пополамъ и радіусомъ  $AF$  опишемъ кругъ  $AEB$  (фиг. 155).

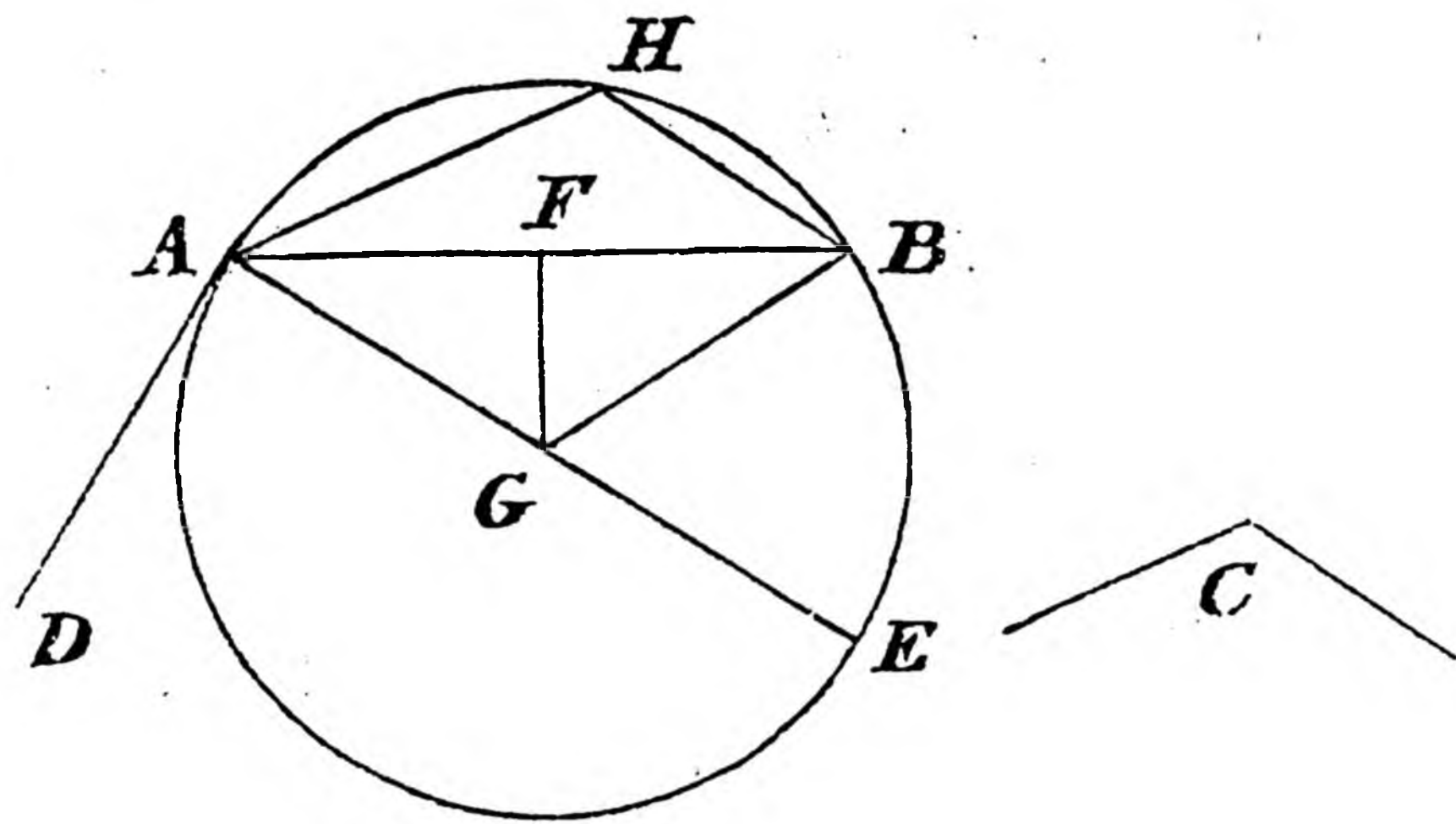
Фиг. 155.



$AEB$  и будетъ требуемый сегментъ. Въ самомъ дѣлѣ, если произвольно взятую точку  $E$  на полуокружности  $AEB$  соединимъ съ точками  $A$  и  $B$ , то уголъ  $AEB$  будетъ прямой (кн. 3, пред. 31).

3) Наконецъ пусть уголъ  $C$  будетъ тупой (фиг. 156).

Фиг. 156.

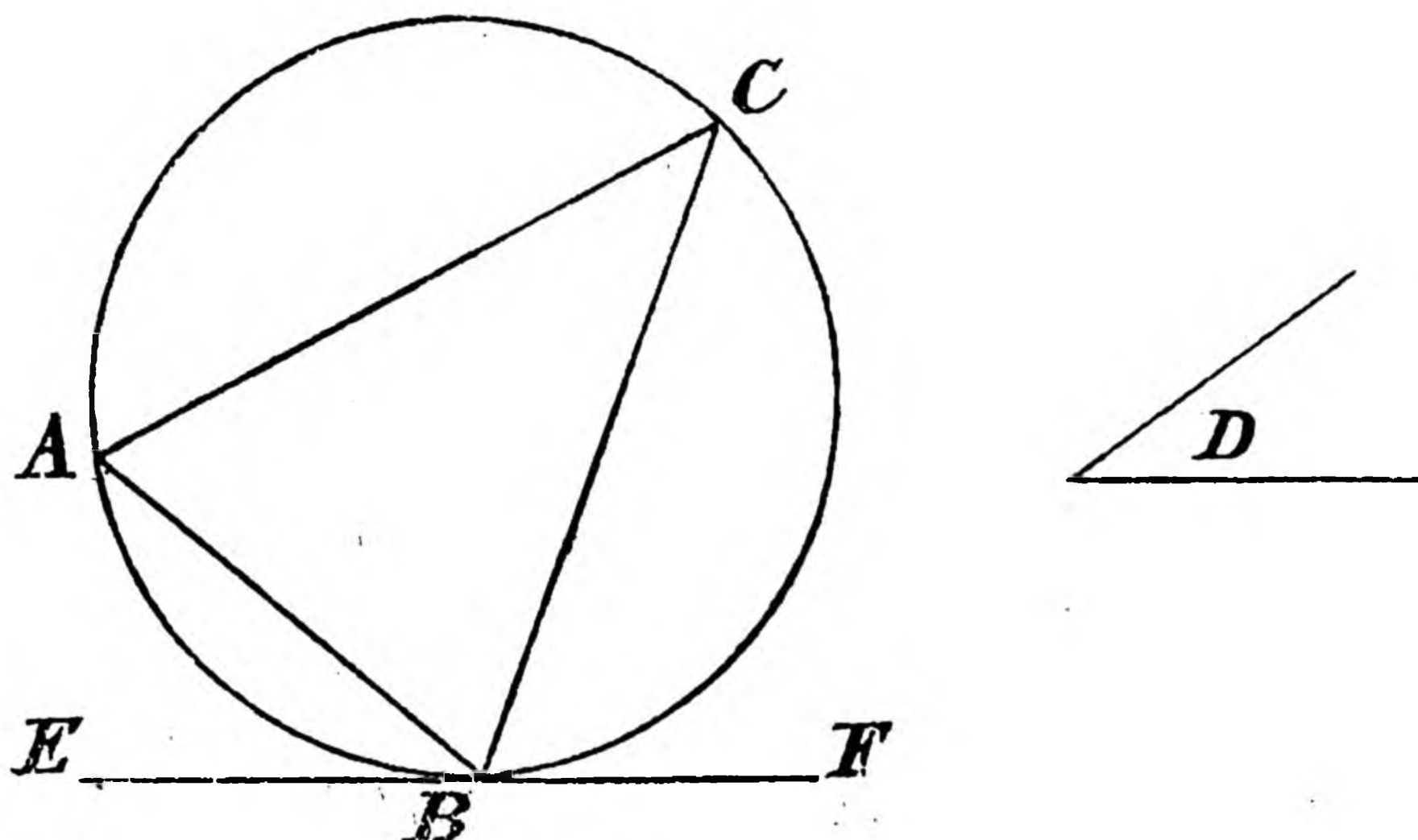


Построимъ на данной прямой  $AB$  уголъ  $BAD = \angle C$  (кн. 1, пред. 23). Изъ точки  $A$  къ прямой  $AD$  возставимъ перпендикуляръ  $AE$  (кн. 1, пред. 11) и раздѣливъ прямую  $AB$  въ точкѣ  $F$  пополамъ, возставимъ изъ этой точки къ  $AB$  перпендикуляръ  $FG$ . Точку  $G$  соединимъ съ  $A$  и  $B$ . Радіусомъ  $GA = GB$  (кн. 1, пред. 4) опишемъ кругъ  $AEB$ . Сегментъ  $AHB$  и будетъ требуемый. Въ самомъ дѣлѣ, уголъ  $AHB$ , вписанный въ этотъ сегментъ, будетъ равенъ углу  $BAD = \angle C$  (кн. 3, пред. 32).

*Предложеніе 34.* Отъ даннаго круга  $ABC$  отдѣлить сегментъ, вмѣщающій данный уголъ  $D$  (фиг. 157)?

*Рѣшеніе.* Въ точкѣ  $B$ , взятой на окружности  $ABC$ , проведемъ касательную  $EF$  (кн. 3, пред. 17).

Фиг. 157.

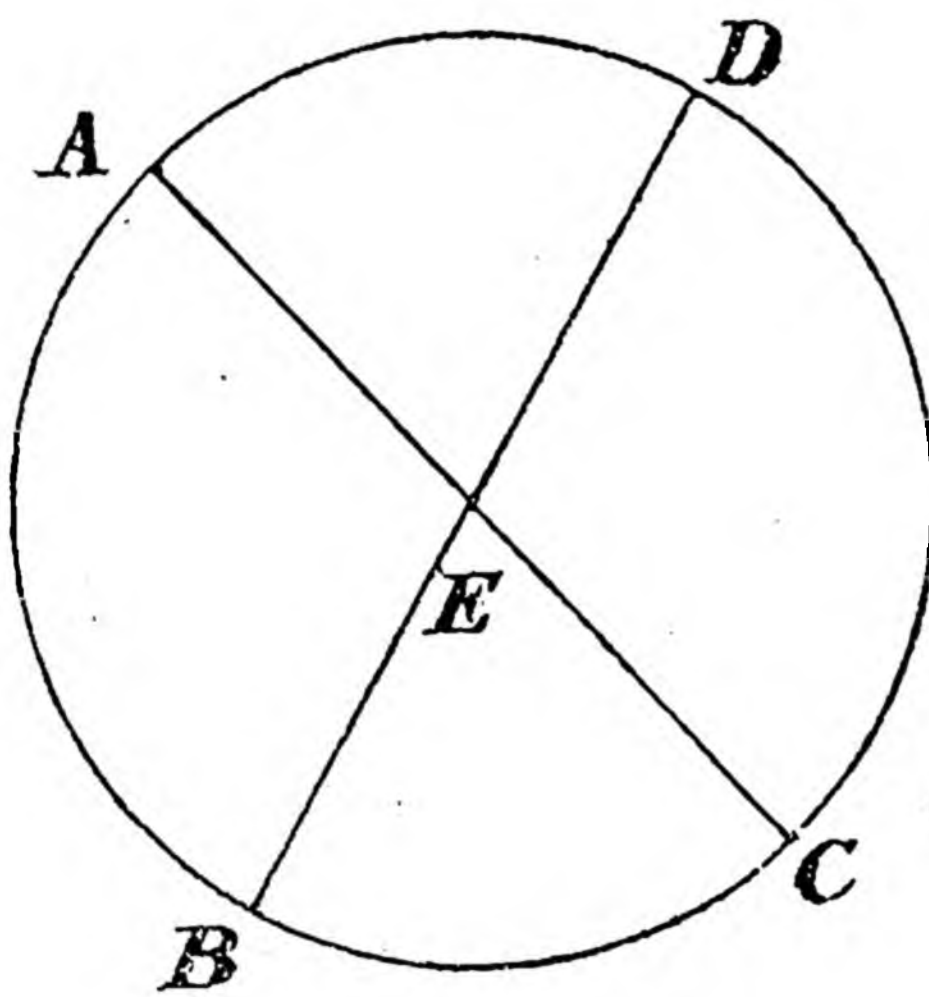


Въ точкѣ  $B$  на прямой  $EF$  построимъ уголь  $CBF = \angle D$ , то иско-  
мый сегментъ будетъ  $BAC$ , такъ какъ  $\angle BAC = \angle CBF = \angle D$  (кн. 3,  
пред. 32).

*Предложеніе 35.* Если двѣ хорды  $AC$  и  $BD$  пересѣкаются внутри  
круга  $ABCD$ , въ точкѣ  $E$ , то  $\text{прям. } AE \cdot EC = \text{прям. } BE \cdot ED$ .

*Доказат.* 1) Если точка пересѣченія двухъ хордъ есть центръ круга,  
то, очевидно, части  $AE$  и  $CE$ ,  $BE$  и  $DE$  всѣ равны и мы имѣемъ  
 $\text{прям. } AE \cdot EC = \text{прям. } BE \cdot ED$  (фиг. 158).

Фиг. 158.



2) Положимъ, что хорды  $AC$  и  $BD$  пересѣкаются не въ центрѣ круга,  
напримѣръ въ точкѣ  $E$ . Изъ центра  $F$  опустимъ перпендикуляры  $FG$  и  $FH$   
на  $AC$  и  $BD$  и соединимъ центръ  $F$  съ точками  $B$ ,  $C$  и  $E$  (фиг. 159).

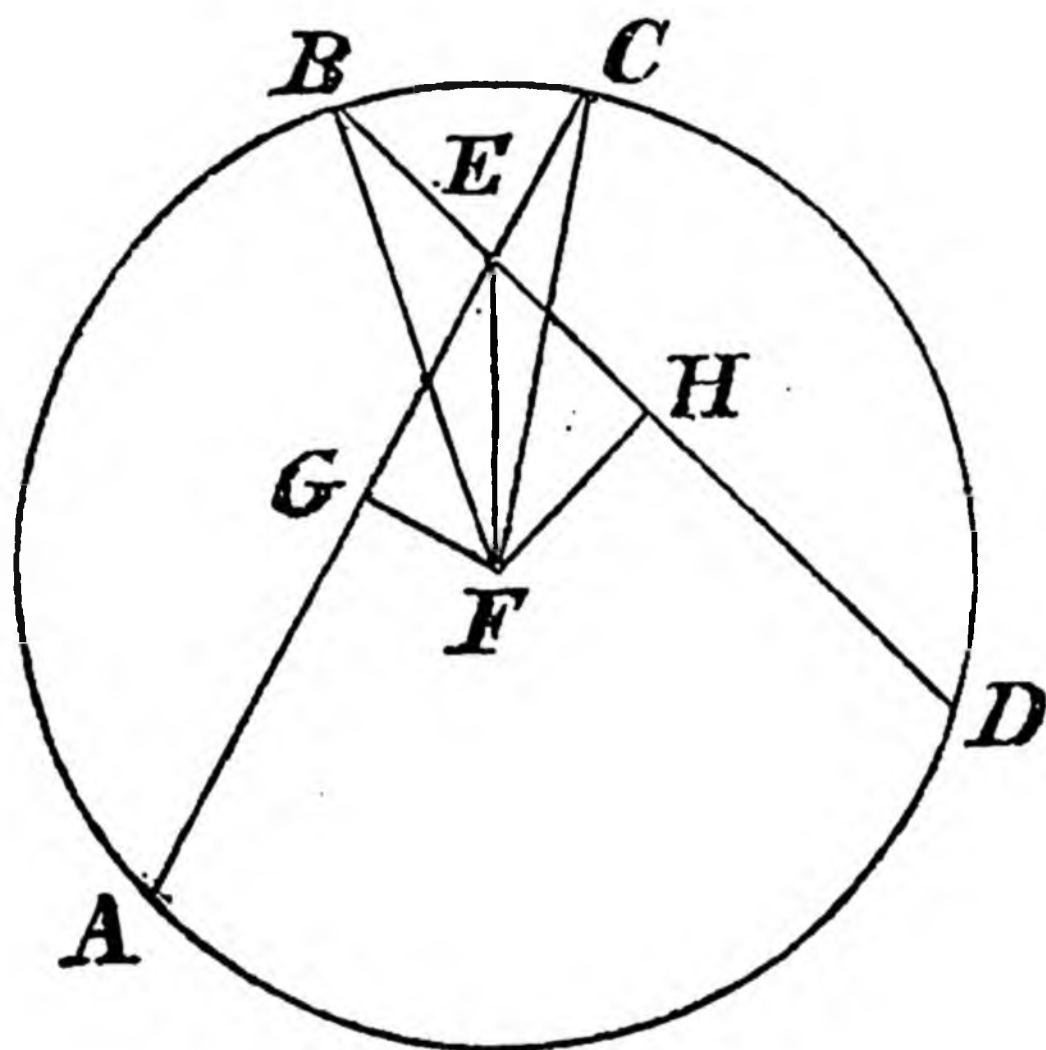
Такъ какъ  $AG = CG$  (кн. 3, пред. 3), то мы имѣемъ (кн. 2, пред. 5):

$$AE \cdot EC + \square GE = \square GC$$



прибавляя къ обѣимъ частямъ по  $\square GF$  (кн. 1, акс. 2), получимъ:

Фиг. 159.



$$AE \cdot EC + \square GE + \square GF = \square GC + \square GF.$$

Но уголъ  $FGC$  прямой, слѣдовательно (кн. 1, пред. 47):

$$\square GC + \square GF = \square FC \quad \text{и} \quad \square GF + \square GE = \square FE,$$

откуда:

$$AE \cdot EC + \square FE = \square FC = \square FB.$$

Точно также мы найдемъ, что:

$$DE \cdot EB + \square FE = \square FB$$

слѣдовательно (кн. 1, акс. 1):

$$AE \cdot EC + \square FE = DE \cdot EB + \square FE$$

откуда наконецъ (кн. 1, акс. 3):

$$\text{прям. } AE \cdot EC = \text{прям. } DE \cdot EB.$$

*Предложеніе 36.* Если изъ точки  $D$ , лежащей внѣ круга  $ABC$ , проведены двѣ прямыя  $DA$  и  $DB$ , изъ коихъ первая пересѣкаетъ кругъ въ точкахъ  $C$  и  $A$ , а вторая касается его въ точкѣ  $B$ , то квадратъ, построенный на касательной  $DB$ , равенъ прямоугольнику, построенному на  $DA$  и  $DC$ .

*Доказат.* 1) Положимъ, что сѣкущая  $DA$  проходитъ чрезъ центръ  $E$  круга  $ABC$  (фиг. 160). Соединимъ точку касанія  $B$  съ центромъ  $E$ , то уголъ  $DBE$  будетъ прямой (кн. 3, пред. 18), слѣдовательно,  $\square DE = \square DB + \square BE$  (кн. 1, пред. 47). Но какъ  $CE = AE$ , то  $AD \cdot DC + \square CE = \square ED$  (кн. 2, пред. 6) или, замѣчая что  $CE = BE$ , найдемъ:

$$AD \cdot DC + \square BE = \square ED$$

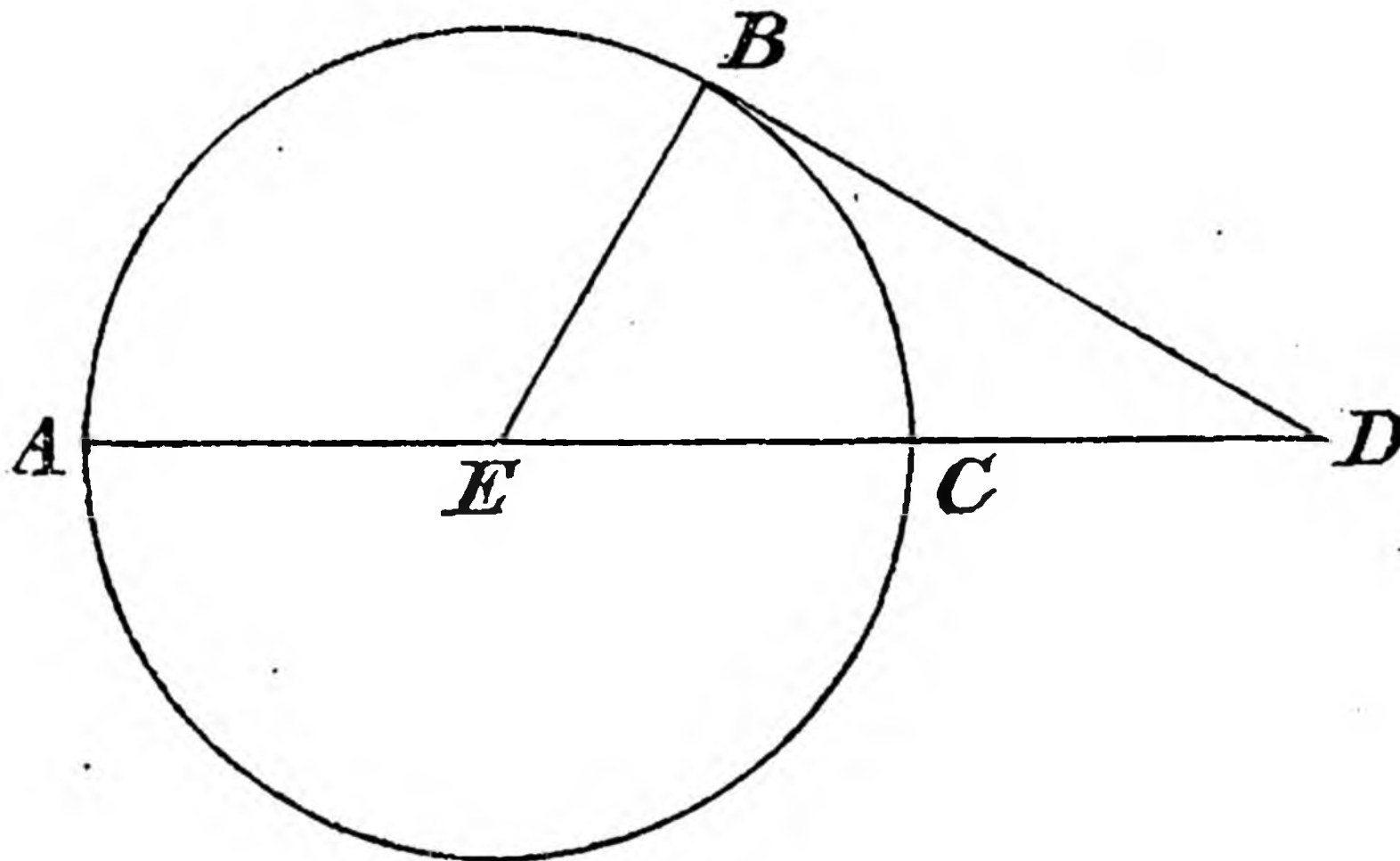
откуда:

$$AD \cdot DC + \square BE = \square DB + \square BE,$$

отнимая по  $\square BE$  (кн. 1, акс. 3), получимъ:

$$AD \cdot DC = \square DB.$$

Фиг. 160.



2) Пусть сѣкущая  $DA$  не проходитъ чрезъ центръ  $E$  (фиг. 161). Изъ центра  $E$  опустимъ перпендикуляръ  $EF$  на сѣкущую  $DA$  (кн. 1, пред. 12), и соединимъ центръ  $E$  съ  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Такъ какъ хорда  $AC$  въ точкѣ  $F$  дѣлится пополамъ (кн. 3, пред. 3), то  $AD \cdot DC + \square FC = \square FD$  (кн. 2, пред. 6), если къ обѣимъ частямъ этого равенства прибавимъ по  $\square FE$  (кн. 1, акс. 2), то получимъ:

$$AD \cdot DC + \square FC + \square FE = \square FD + \square FE.$$

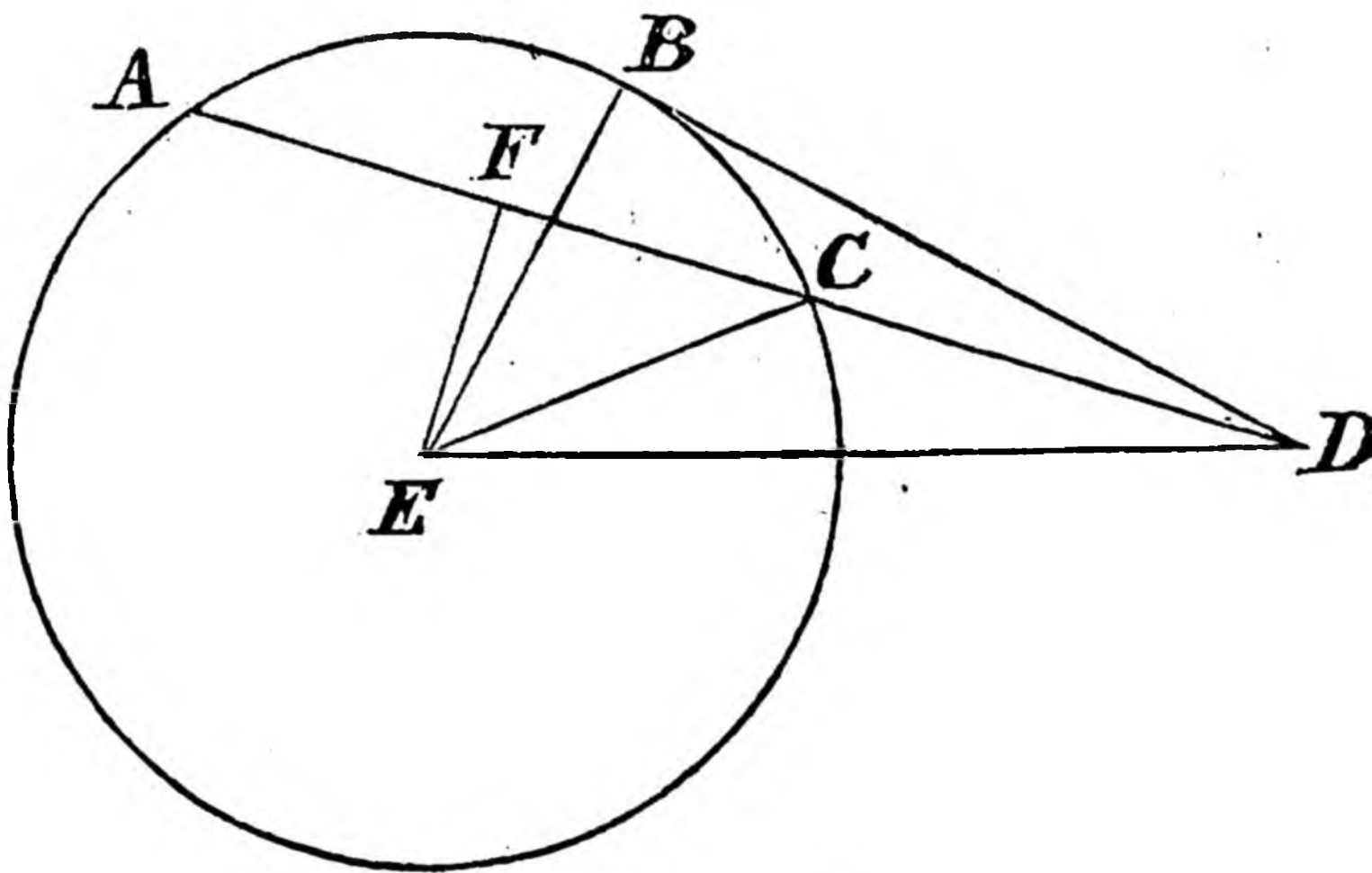
Но уголъ  $DFE$  прямой, слѣдовательно мы имѣемъ (кн. 1, пред. 47):

$$\square FC + \square FE = \square EC, \quad \square FD + \square FE = \square DE,$$

откуда:

$$AD \cdot DC + \square EC = \square DE$$

Фиг. 161.



или, замѣчая что  $EC = BE$  и что:

$$\square DE = \square BD + \square BE$$

найдемъ:

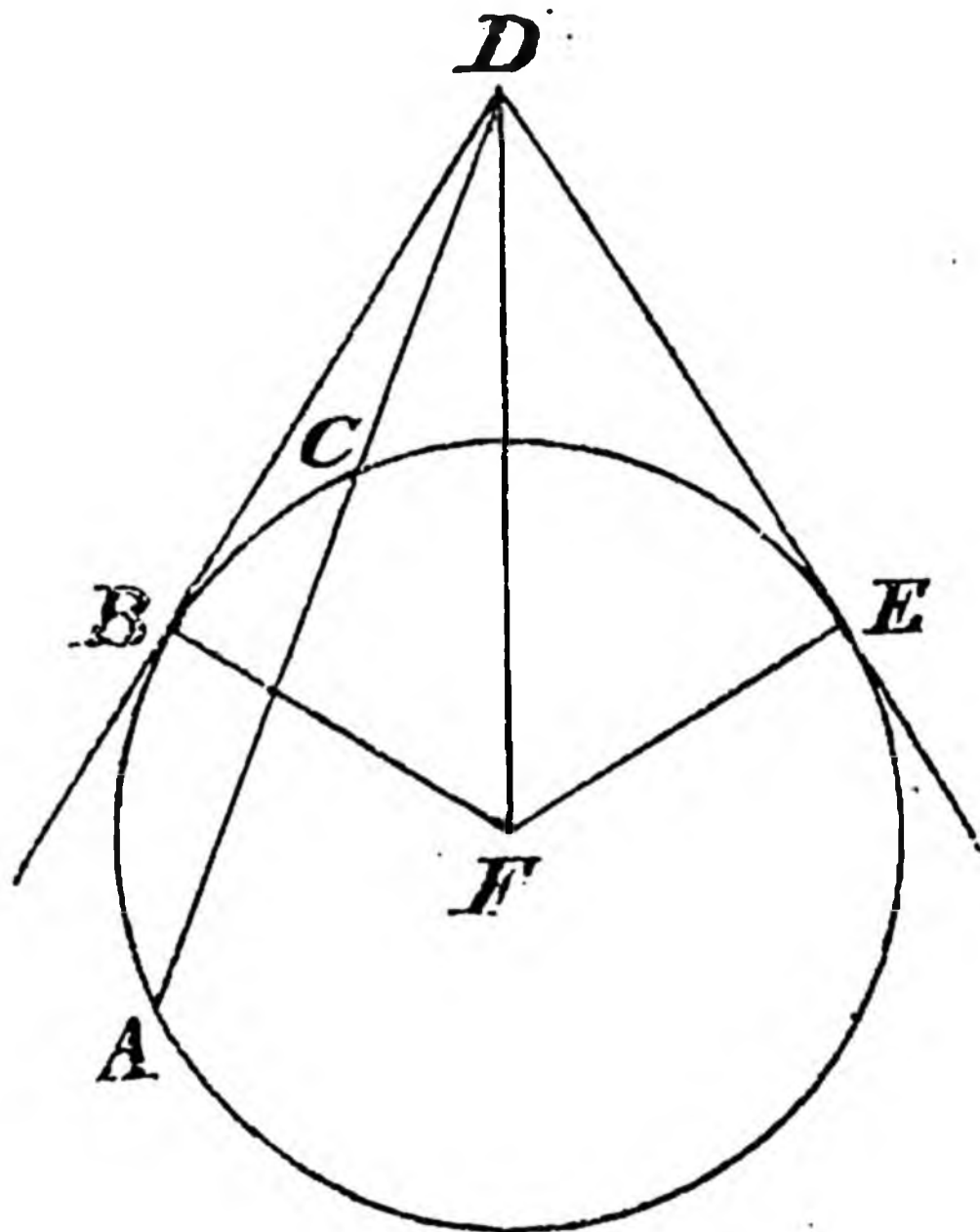
$$AD \cdot DC + \square BE = \square BD + \square BE,$$

отнимая по  $\square BE$  (кн. 1, акс. 3) найдемъ наконецъ:

$$AD \cdot DC = \square BD.$$

*Предложеніе 37.* Если изъ точки  $D$ , лежащей внѣ окружности  $ABC$ , проведена сѣкущая  $AD$  и другая прямая  $DB$ , оканчивающаяся на окружности въ точкѣ  $B$ , и если прямоугольникъ  $AD \cdot DC$  равенъ квадрату  $\square DB$ , то прямая  $DB$  будетъ касательная къ кругу (фиг. 162).

Фиг. 162.



*Доказат.* Изъ точки  $D$  проведемъ касательную  $DE$  (кн. 3, пред. 17). Соединимъ центръ  $F$  круга  $ABC$  съ точками  $B$ ,  $D$  и  $E$ . Такъ какъ  $DE$  есть касательная, а  $DA$  сѣкущая, то (кн. 3, пред. 36):

$$AD \cdot DC = \square DE$$

но по условію:

$$AD \cdot DC = \square DB,$$

слѣдовательно  $\square DB = \square DE$  (кн. 1, акс. 1), откуда  $DB = DE$ . Разсматривая треугольники  $DBF$  и  $DEF$  мы имѣемъ  $DB = DE$ ,  $FE = FB$  (кн. 1, опред. 15) и  $DF$  сторона общая, слѣдовательно  $\angle DEF = \angle DBF$ , но уголъ  $DEF = d$ , слѣдовательно и  $\angle DBF = d$ . Откуда видимъ, что  $DB$  есть касательная къ кругу, такъ какъ  $DB$  перпендикулярна къ радіусу  $FB$  (кн. 3, пред. 16).



## КНИГА IV.

### О п р е д ѣ л е н і я.

1. Говорятъ, что *прямолинейная фигура вписана* въ другую *прямолинейную фигуру*, если вершины всѣхъ угловъ первой лежатъ на сторонахъ второй.

2. Точно также говорятъ, что *прямолинейная фигура описана* около другой *прямолинейной фигуры*, если всѣ стороны первой проходятъ чрезъ вершины угловъ второй.

3. Говорятъ, что *прямолинейная фигура вписана въ кругъ*, если всѣ вершины угловъ фигуры лежатъ на окружности круга.

4. Говорятъ, что *прямолинейная фигура описана около круга*, если стороны фигуры касаются окружности.

5. Говорятъ, что *кругъ вписанъ въ прямолинейную фигуру*, если онъ касается сторонъ фигуры.

6. Говорятъ, что *кругъ описанъ около прямолинейной фигуры*, если онъ проходитъ чрезъ вершины угловъ фигуры.

7. Говорятъ, что *прямая линия  $AB$  (отрѣзокъ)* помѣщена въ *кругъ*, если ея концы  $A$  и  $B$  лежатъ на окружности.

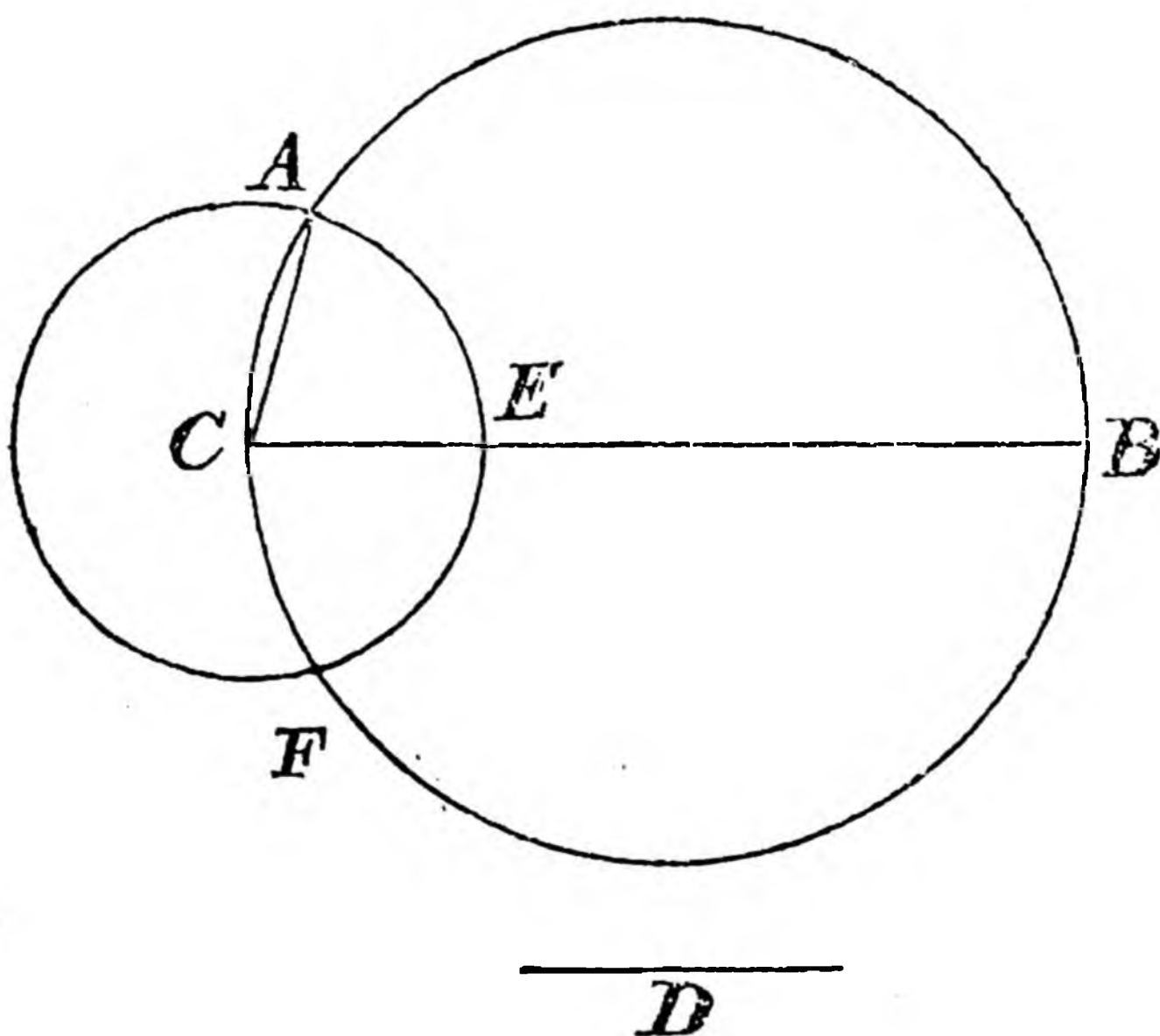
### П р е д л о ж е н і я.

*Предложеніе 1.* Помѣститъ въ данномъ кругѣ  $ABC$ , прямую линію  $AC$ , равную данной прямой  $D$ , которая не больше діаметра круга  $ABC$  (фиг. 163).

*Рѣшеніе.* Проведемъ въ данномъ кругѣ діаметръ  $BC$ . Если діаметръ  $BC=D$ , то задача и рѣшена. Если-же  $BC>D$ , то на діаметръ  $BC$  отъ точки  $C$  отложимъ  $CE=D$  (кн. 1, пред. 3). Изъ точки  $C$ , какъ изъ центра, радіусомъ  $CE$  опишемъ кругъ  $AEF$ . Точку  $A$ , пересѣченіе этого круга

съ даннымъ кругомъ, соединимъ съ точкою  $C$ , прямая  $AC$  и будетъ требуемая.

Фиг. 163.



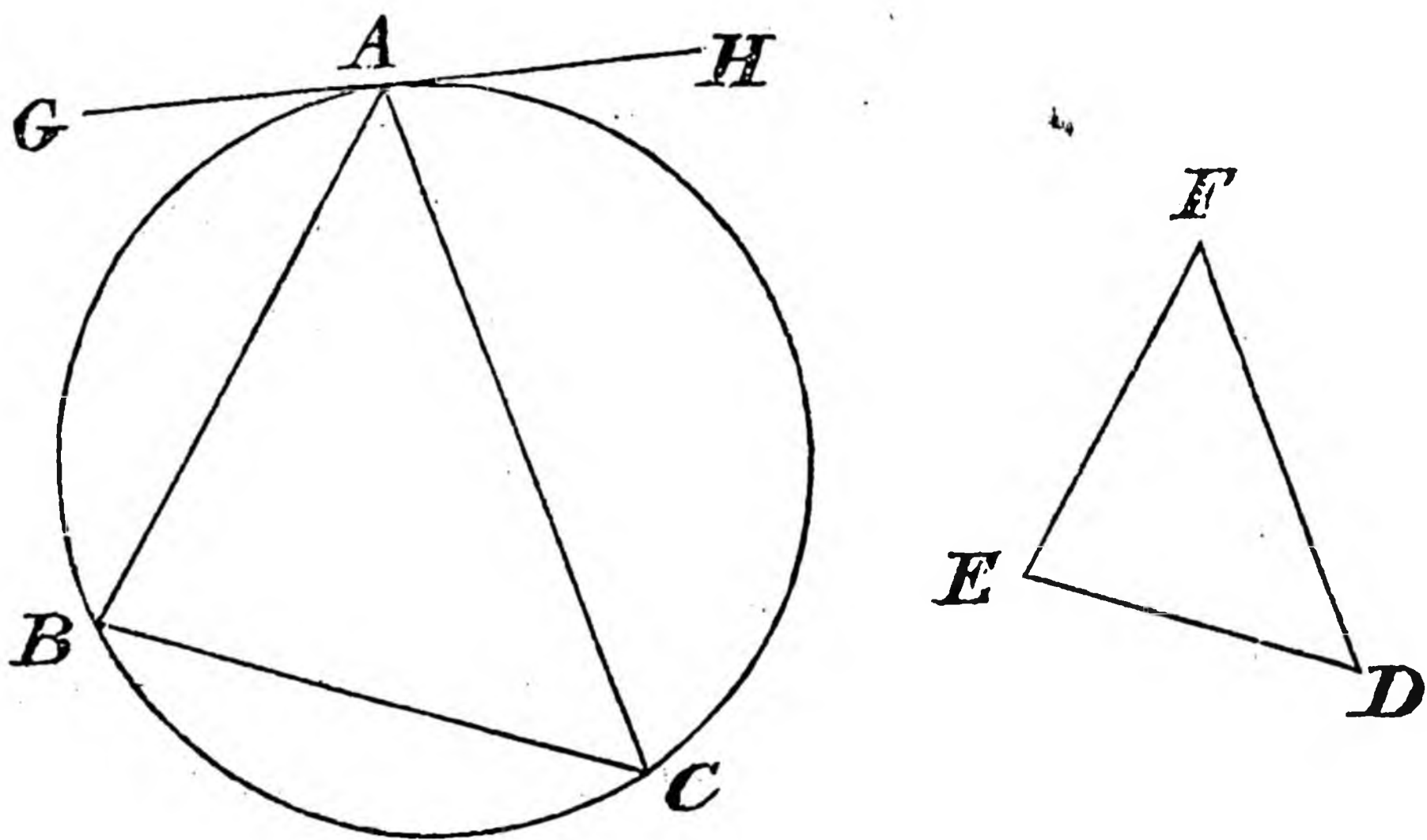
Въ самомъ дѣлѣ,  $AC=CE$  (кн. 1, опр. 15), но  $CE=D$ , слѣдовательно (кн. 1, акс. 1, кн. 4, опр. 7)  $AC=D$ .

*Предложеніе 2.* Въ данный кругъ  $ABC$  вписать треугольникъ  $ABC$ , равноугольный данному треугольнику  $DEF$  (фиг. 164)?

*Рѣшеніе.* На окружности даннаго круга возьмемъ произвольную точку  $A$  и чрезъ эту точку проведемъ касательную  $GAH$  къ кругу, въ точкѣ  $A$  построимъ уголъ  $HAC$  (кн. 1, пред. 23), равный углу  $E$  треугольника  $DEF$ , и уголъ  $GAB$ , равный углу  $D$  того же треугольника.

Точки  $B$  и  $C$ , въ которыхъ стороны построенныхъ угловъ встрѣчаютъ окружность, соединимъ прямою  $BC$ . Полученный такимъ образомъ треугольникъ  $ABC$  будетъ требуемый.

Фиг. 164.



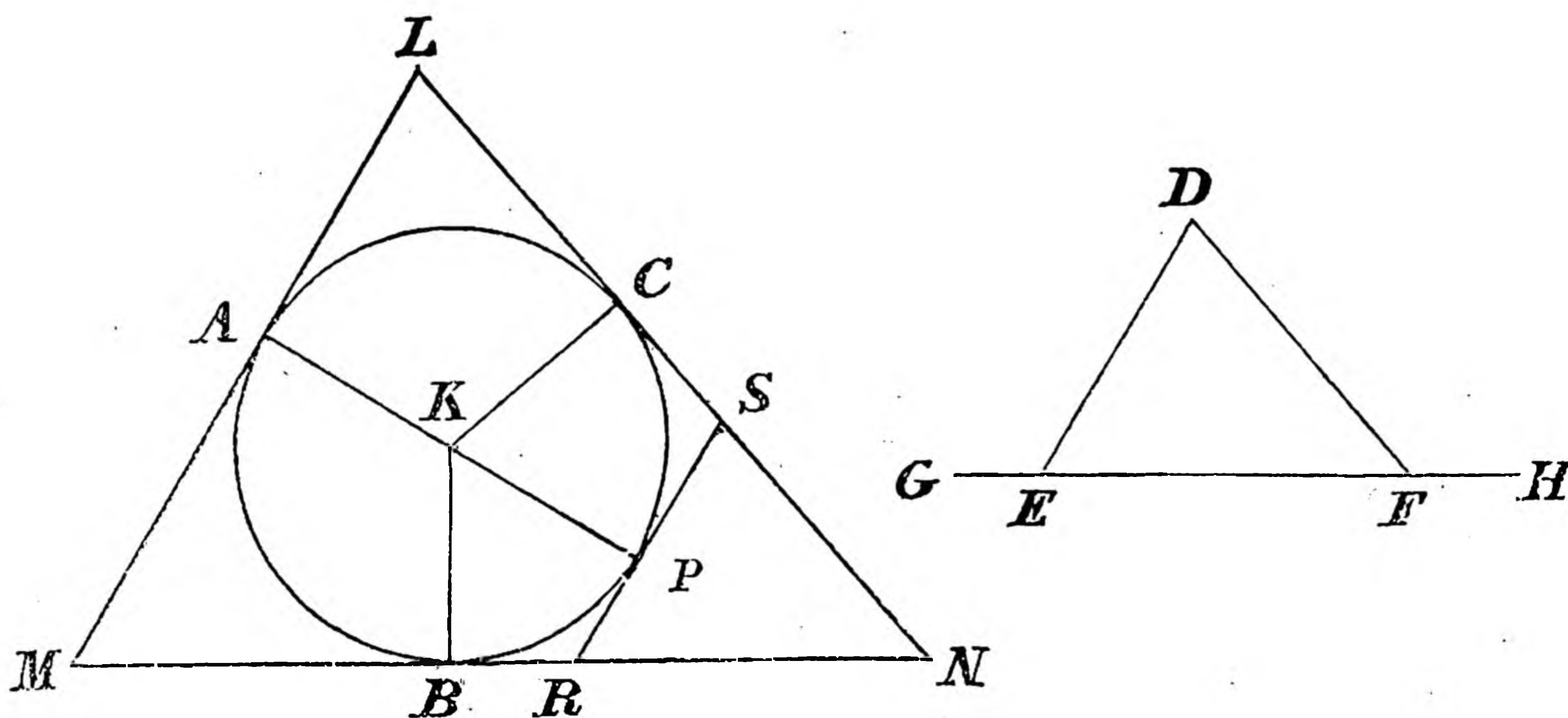
Въ самомъ дѣлѣ, уголъ  $HAC=\angle ABC=\angle E$  (кн. 3, пред. 32); на томъ же основаніи уголъ  $GAB=\angle ACB=\angle D$ , слѣдовательно и уголъ  $BAC=\angle F$  (кн. 1, пред. 32). Слѣдовательно, вписанный треугольникъ  $ABC$  (кн. 4, опр. 3) есть требуемый.

*Предложеніе 3.* Около даннаго круга  $ABC$  описать треугольникъ, равноугольный данному треугольнику  $DEF$  (фиг. 165)?

*Рѣшеніе.* Продолжимъ въ обѣ стороны сторону  $EF$  треугольника  $DEF$ .

Изъ центра  $K$ , даннаго круга, проведемъ какую нибудь прямую  $KB$  къ окружности и въ точкѣ  $K$  построимъ  $\angle BKA = \angle DEG$  и  $\angle BKC = \angle DFH$  (кн. 1, пред. 23). Чрезъ точки встрѣчи  $A$ ,  $B$  и  $C$  сторонъ, построенныхъ угловъ, съ окружностью, проведемъ касательныя  $ML$ ,  $MN$  и  $NL$ ; касательныя эти образуютъ требуемый треугольникъ.

Фиг. 165.



Въ самомъ дѣлѣ, углы при точкахъ  $A$  и  $B$  прямые (кн. 3, пред. 18). Четыреугольникъ  $AMBK$  можно разбить діагональю на два треугольника; слѣдовательно сумма угловъ въ немъ равна четыремъ прямымъ угламъ, но углы при  $A$  и  $B$  прямые, слѣдовательно:

$$\angle AMB + \angle BKA = 2d = \angle DEG + \angle DEF$$

(кн. 1, пред. 13).

Но, по построению,  $\angle BKA = \angle DEG$ , слѣдовательно  $\angle AMB = \angle DEF$  (кн. 1, акс. 3). Точно также можно показать, что  $\angle CNB = \angle DFE$ . Слѣдовательно и  $\angle ALN = \angle EDF$  (кн. 1, пред. 32). Слѣдовательно, описанный треугольникъ  $MLN$  есть требуемый (кн. 4, опр. 4).

*Примѣч. 1.* Если радіусъ  $AK$  круга  $ABC$  продолжимъ до встрѣчи съ кругомъ въ точкѣ  $P$  и изъ точки  $P$  возставимъ перпендикуляръ  $RS$ , который встрѣтитъ стороны  $MN$  и  $LN$  треугольника  $LMN$  въ точкахъ  $R$  и  $S$ , то получимъ треугольникъ  $NRS$ , который будетъ равноугольнымъ треугольникамъ  $NML$  и  $DEF$  и будетъ описанъ около даннаго круга  $ABC$  такъ, что кругъ касается стороны  $RS$  и продолженій сторонъ  $NR$  и  $NS$ .

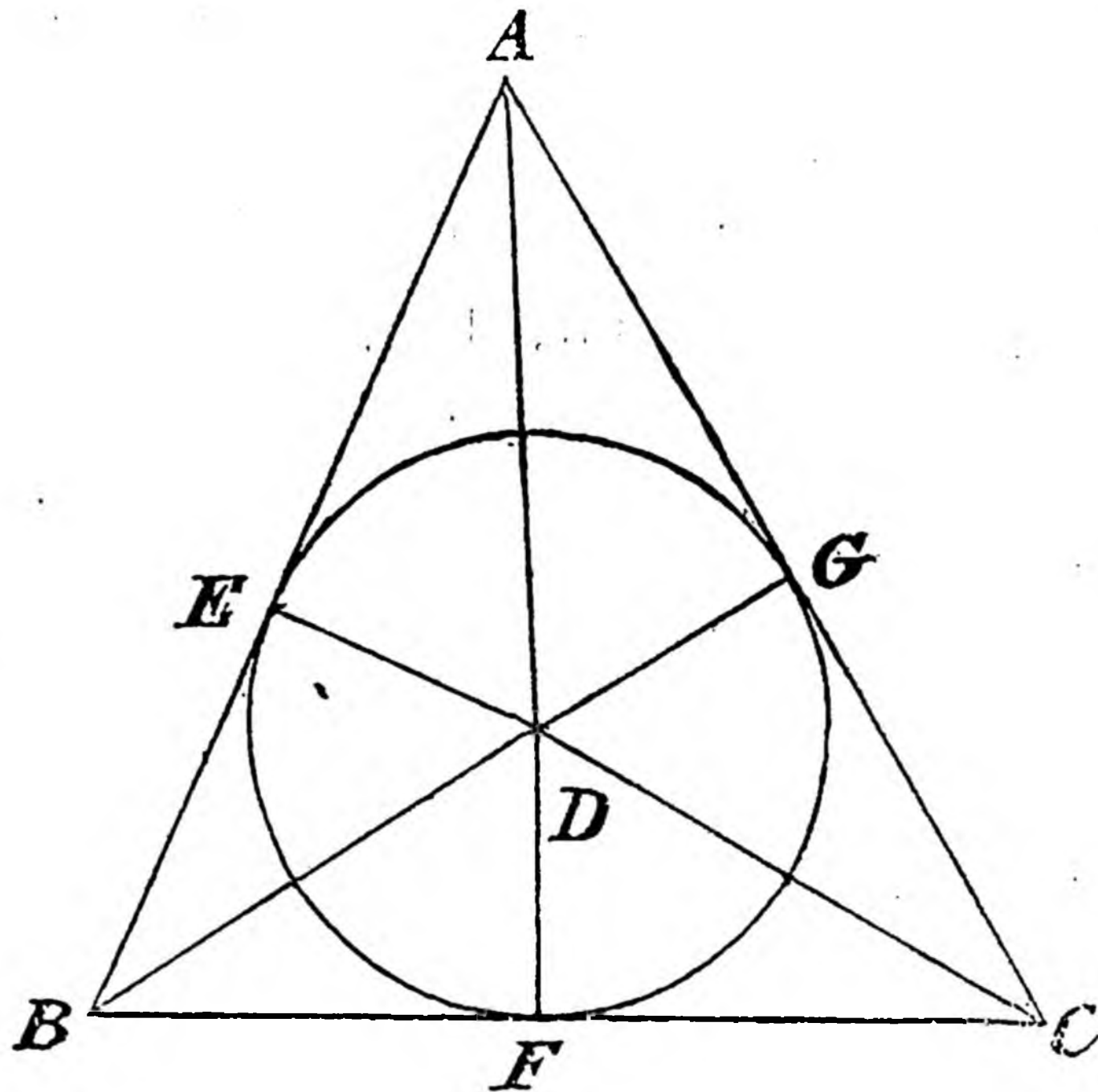
*Предложеніе 4.* Въ данный треугольникъ  $ABC$  вписать кругъ (фиг. 166)?

*Рѣшеніе.* Раздѣлимъ два какіе нибудь угла даннаго треугольника пополамъ, напримѣръ углы  $ABC$  и  $BCA$  (кн. 1, пред. 9). Прямая  $BD$  и  $CD$ ,



дѣлящія эти углы пополамъ, встрѣтятся въ точкѣ  $D$ . Изъ точки  $D$  опустимъ на стороны треугольника перпендикуляры  $DE$ ,  $DF$  и  $DG$  и однимъ изъ этихъ перпендикуляровъ опишемъ кругъ, кругъ этотъ и будетъ искомымъ.

Фиг. 166.

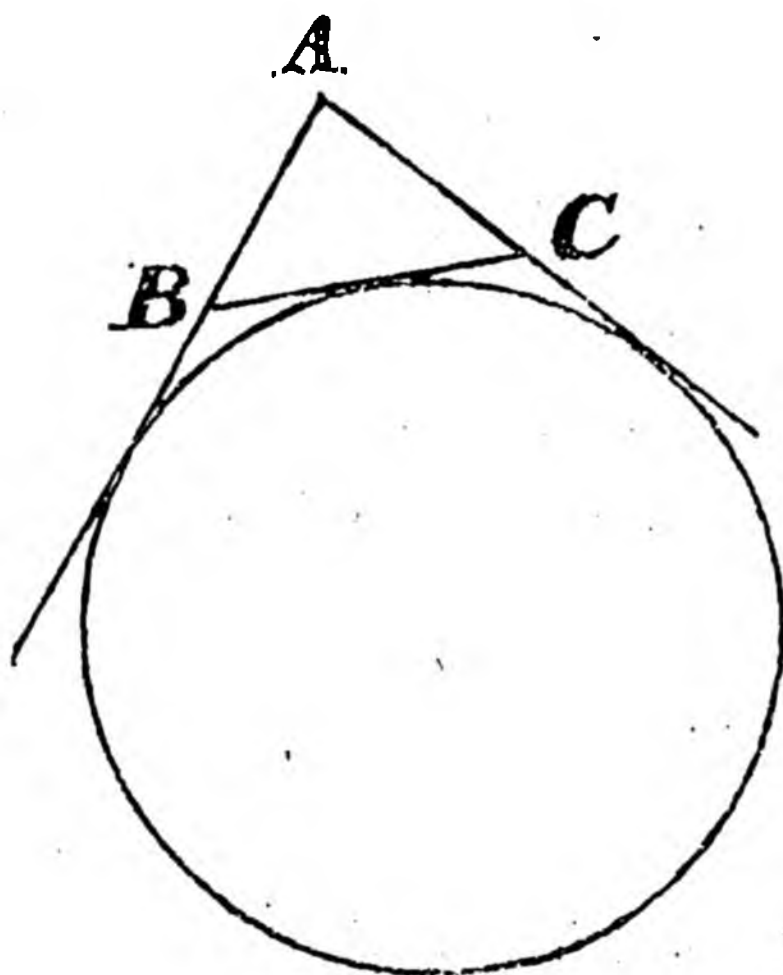


Въ самомъ дѣлѣ, въ треугольникахъ  $DEB$  и  $DFB$ ,  $\angle EBD = \angle DBF$  и  $\angle DEB = \angle DFB = d$ , по построению, и сторона  $BD$  общая, то и  $DE = DF$  (кн. 1, пред. 26). Точно также можно показать, что  $DF = DG$ . Слѣдовательно, описанный изъ точки  $D$ , какъ изъ центра, радіусомъ, равнымъ одному изъ перпендикуляровъ  $DE$ ,  $DF$ ,  $DG$ , кругъ пройдетъ чрезъ всѣ три точки  $E$ ,  $F$ ,  $G$ . Слѣдовательно, стороны треугольника  $ABC$ , будучи перпендикулярны къ радіусамъ круга  $EFG$ , будутъ касательныя къ кругу  $EFG$  (кн. 3, пред. 16), который поэтому и есть искомымъ.

*Примѣч. 2.* Такимъ же точно образомъ можно въ данный треугольникъ вписать кругъ такъ, чтобы онъ касался одной стороны треугольника и продолженій двухъ другихъ его сторонъ (фиг. 167).

Положимъ, напримѣръ, что кругъ долженъ касаться стороны  $BC$  треугольника  $ABC$  и продолженій сторонъ  $AB$  и  $AC$ ?

Фиг. 167.



Раздѣлимъ углы между стороною  $BC$  и продолженіями сторонъ  $AB$  и  $AC$  попо-

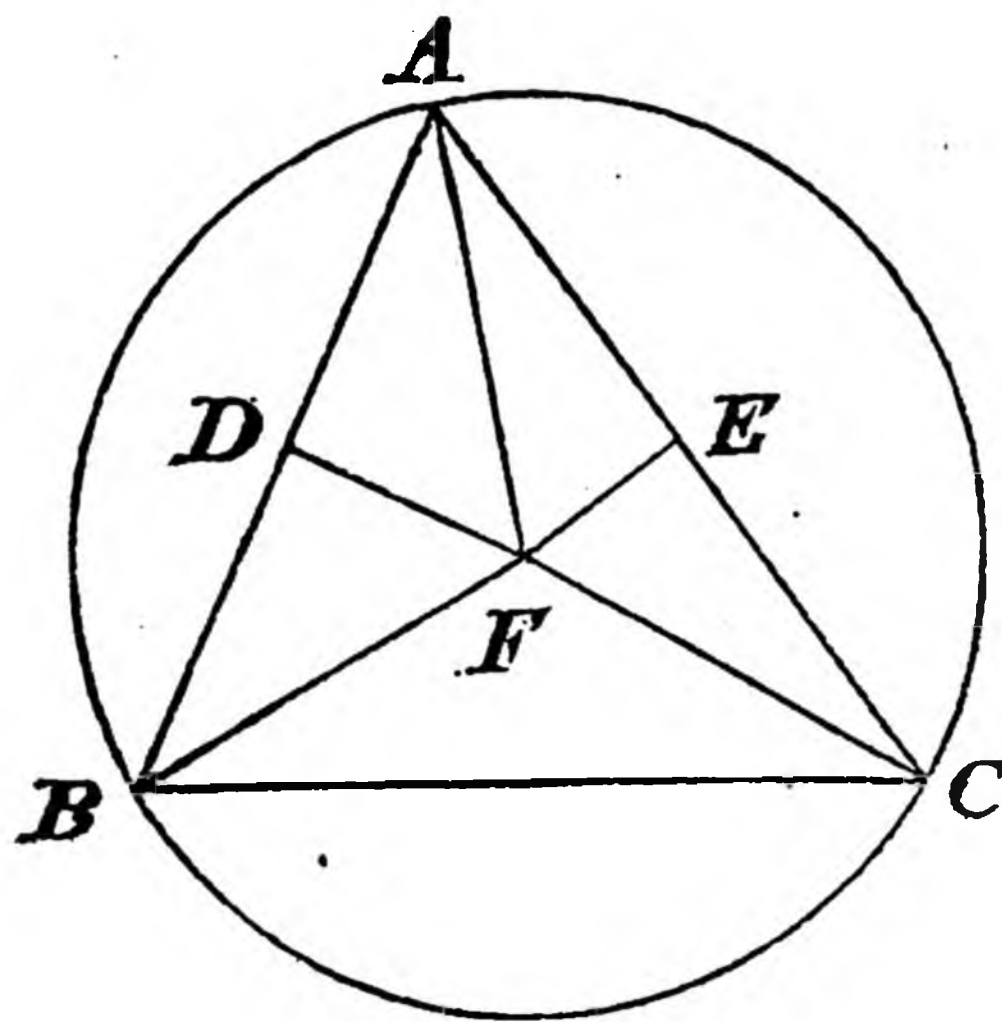
ламъ. Точка встрѣчи прямыхъ, дѣлящихъ эти углы пополамъ, будетъ центръ искомаго круга. Доказывается это совершенно какъ и въ предложеніи 4.

**Предложеніе 5.** Описать около даннаго треугольника  $ABC$  кругъ.

**Рѣшеніе.** Раздѣлимъ пополамъ какія нибудь двѣ стороны даннаго треугольника, напримѣръ  $AB$  и  $AC$  (кн. 1, пред. 10), изъ точекъ дѣленія  $D$  и  $E$  возставимъ перпендикуляры  $DF$  и  $EF$  къ сторонамъ  $AB$  и  $AC$  (кн. 1, пред. 11), которые встрѣтятся въ точкѣ  $F$ , лежащей или внутри треугольника, или на третьей сторонѣ его, или наконецъ внѣ его. Изъ точки  $F$ , какъ изъ центра, прямою  $AF$  опишемъ кругъ  $ABC$ , который и будетъ искомый.

1) Точка  $F$  лежитъ внутри треугольника  $ABC$  (фиг. 168). Проведемъ прямыя  $FA$ ,  $FB$ ,  $FC$ . Въ треугольникахъ  $AFD$  и  $BFD$  сторона  $DF$  общая,  $AD=BD$ ,  $\angle ADF=\angle BDF$ , по построенію, слѣдовательно  $AF=BF$  (кн. 1, пред. 4).

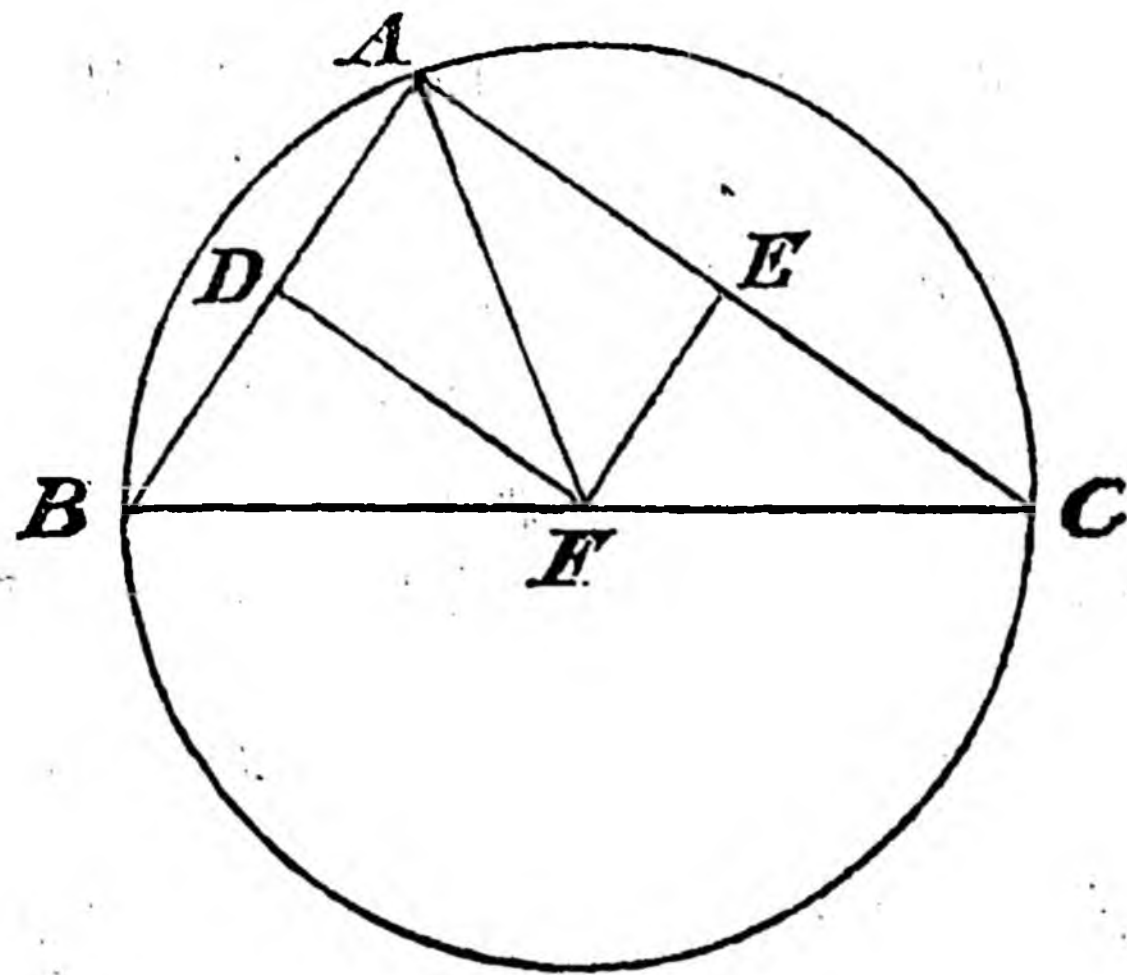
Фиг. 168.



Точно также можно показать, что  $AF=CF$ . Слѣдовательно кругъ, описанный радіусомъ  $FA$ , пройдетъ чрезъ точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  и есть искомый (кн. 4, опред. 6).

2) Точка  $F$  лежитъ на сторонѣ  $BC$  треугольника  $ABC$ . Соединимъ точку  $F$  съ  $A$ . Легко показать какъ и въ первомъ случаѣ, что  $FA=FB=FC$ , а слѣдовательно точка  $F$  есть центръ искомаго круга (фиг. 169).

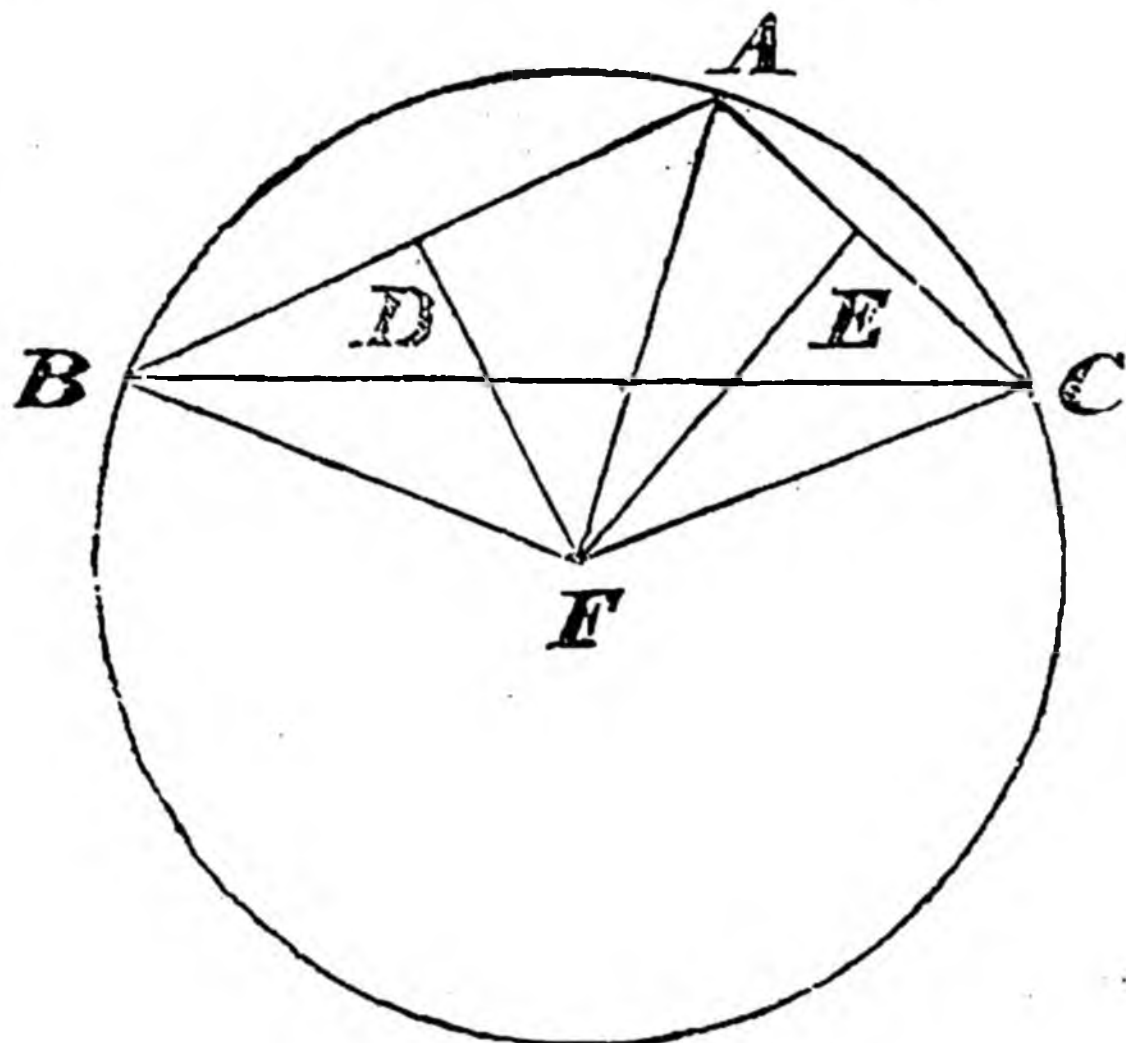
Фиг. 169.



3) Точка  $F$  лежитъ внѣ треугольника  $ABC$  (фиг. 170). Соединимъ  $F$

съ  $A$ ,  $B$  и  $C$ , то мы будемъ опять имѣть  $AF=FB$  изъ равенства треугольниковъ  $AFD$  и  $BFD$  и  $AF=CF$  изъ равенства треугольниковъ  $AFE$  и  $CFE$ . Слѣдовательно точка  $F$  будетъ центръ искомаго круга.

Фиг. 170.



*Слѣдствіе.* Очевидно, что если центръ круга падаетъ внутри треугольника, то каждый изъ угловъ треугольника будетъ меньше прямого угла, такъ какъ каждый изъ нихъ вписанъ въ сегментъ большій полу-круга; если центръ круга падаетъ на одну изъ сторонъ треугольника, то противолежащій этой сторонѣ уголъ равенъ прямому, такъ какъ онъ вписанъ въ полукругъ; наконецъ если центръ круга падаетъ внѣ треугольника, то уголъ, противолежащій сторонѣ, за которой упалъ центръ, будетъ тупой, такъ какъ онъ вписанъ въ сегментъ меньшій полукруга. Слѣдовательно, обратно, если треугольникъ будетъ остроугольный, то центръ круга упадетъ внутри его, если онъ будетъ прямоугольный, то центръ упадетъ на сторонѣ, противолежащей прямому углу, и наконецъ, если треугольникъ будетъ тупоугольный, то центръ упадетъ внѣ треугольника, за стороною, противолежащею тупому углу.

*Примѣч. 3.* Въ рѣшеніи этой задачи Симсонъ вводитъ еще доказательство, что перпендикуляры  $FD$  и  $FE$  встрѣтятся, чего у Евклида нѣтъ. Это можно доказать слѣдующимъ образомъ: соединимъ точки  $D$  и  $E$ , то мы будемъ имѣть:

$$\angle EDF + \angle DEF < \angle ADF + \angle AEF = 2d,$$

слѣдовательно прямыя  $DF$  и  $EF$  встрѣтятся (кн. 1, акс. 11). Здѣсь предположено, что углы  $ADE$  и  $AED$  оба острые, что всегда можно сдѣлать. Въ самомъ дѣлѣ,  $DE \parallel BC$ , слѣдовательно треугольники  $ABC$  и  $ADE$  равноугольны, поэтому надобно только стороны  $AB$  и  $AC$  такъ выбрать, чтобы углы  $ABC$  и  $ACB$  были оба острые.

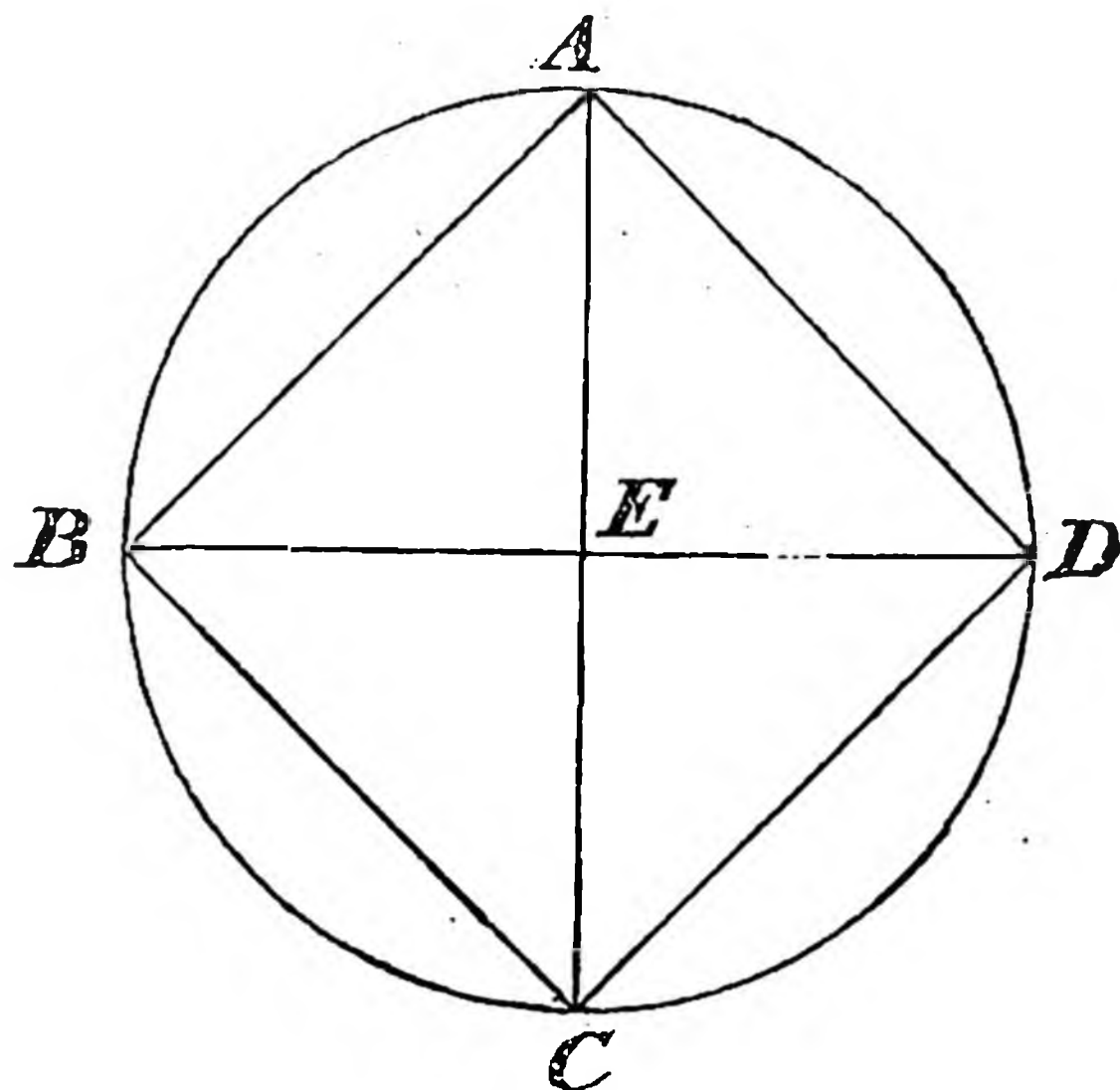
*Предложеніе 6.* Въ данный кругъ  $ABCD$  вписать квадратъ (фиг. 171)?

*Рѣшеніе.* Проведемъ два взаимно перпендикулярные діаметра  $AC$  и  $BD$  (кн. 1, пред. 11), соединимъ точки пересѣченія діаметровъ съ ок-



ружностью прямыми  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$ , полученный, такимъ образомъ, четырехугольникъ  $ABCD$  и будетъ требуемый квадратъ.

Фиг. 171.

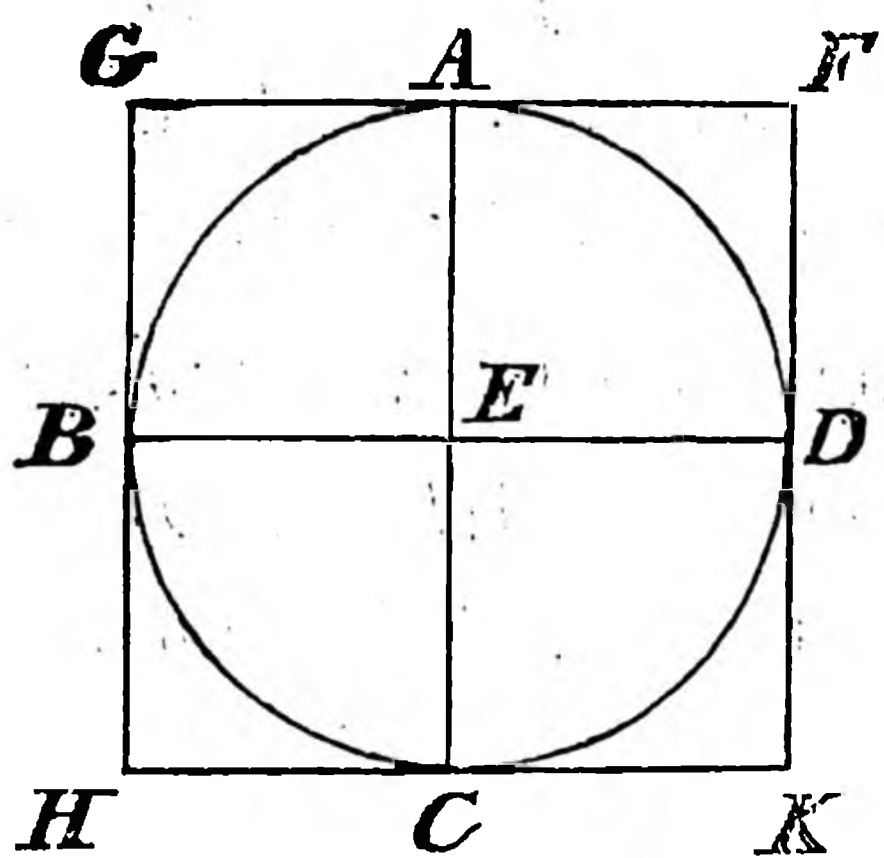


Въ самомъ дѣлѣ, въ треугольникахъ  $ABE$  и  $ADE$  сторона  $AE$  общая,  $BE=DE$  (кн. 1, опред. 15), углы при  $E$  прямые, слѣдовательно и  $AB=AD$ , на томъ же основаніи и  $CB=CD=AB$ . Слѣдовательно четырехугольникъ  $ABCD$  равносторонній. Такъ какъ  $BD$  есть діаметръ, то уголъ  $BAD=d$  (кн. 3, пред. 31), по той же причинѣ и углы  $ABC$ ,  $BCD$  и  $ADC$  также прямые. Слѣдовательно четырехугольникъ  $ABCD$  не только равносторонній, но и прямоугольный, а потому онъ есть квадратъ (кн. 1, опред. 30), вписанный въ кругъ (кн. 4, опред. 3).

*Предложеніе 7.* Около даннаго круга описать квадратъ (фиг. 172)?

*Рѣшеніе.* Проведемъ два взаимно перпендикулярные діаметра  $AC$  и  $BD$  (кн. 1, пред. 11) и чрезъ точки пересѣченія діаметровъ съ окружностью проведемъ касательныя къ кругу  $FG$ ,  $GH$ ,  $HK$  и  $KF$ , образуемый касательными четырехугольникъ  $FGHK$  и будетъ требуемый квадратъ.

Фиг. 172.



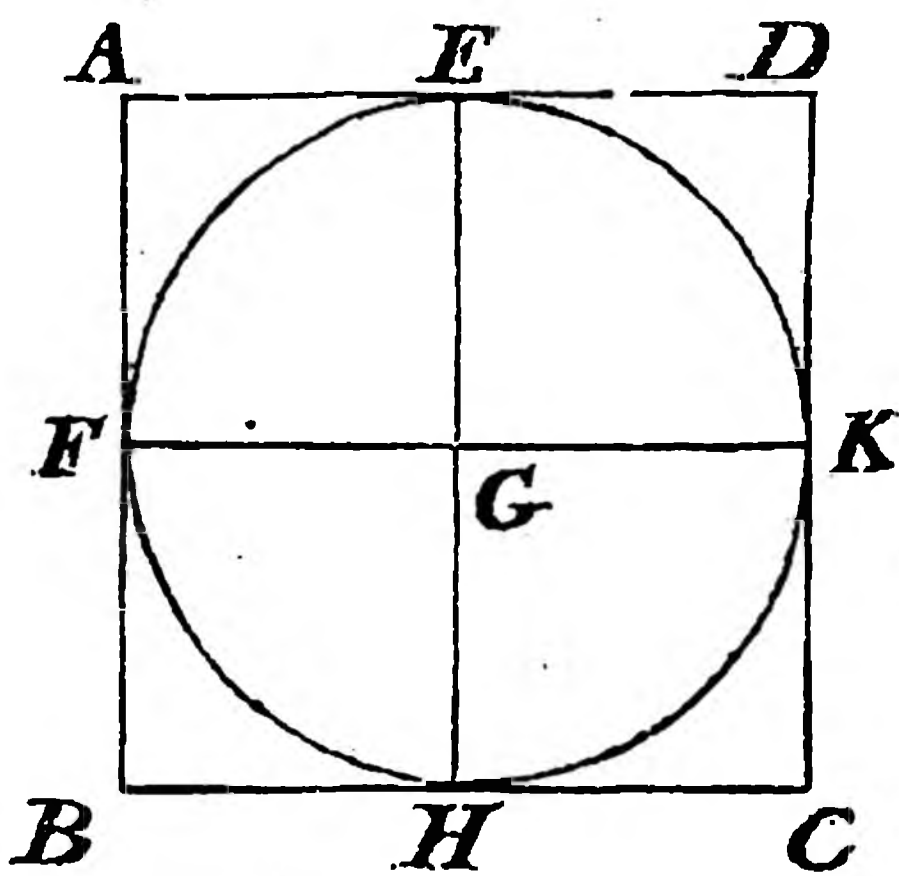
Въ самомъ дѣлѣ, углы при  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  прямые (кн. 3, пред. 16), равно какъ и при  $E$ , слѣдовательно  $GF \parallel BD \parallel HK$ , точно также  $GH \parallel AC \parallel FK$  (кн. 1, пред. 28 и 30). Слѣдовательно четырехугольникъ  $FGHK$  есть па-

параллелограмъ, точно также какъ и четырехугольники  $GD$ ,  $DH$ ,  $GC$  и  $CF$ . Слѣдовательно (кн. 1, пред. 34)  $GF=BD=HK$  и  $GH=AC=FK$ . Но  $AC=BD$  (кн. 1, опред. 15), слѣдовательно  $GF=HK=GH=FK$ , откуда четырехугольникъ  $FGHK$  равносторонній. Уголъ  $AGB=\angle AED=d$  (кн. 1, пред. 34), очевидно также что углы при  $H$ ,  $K$  и  $F$  прямые. Слѣдовательно четырехугольникъ  $FGHK$  прямоугольный, но онъ и равносторонній, слѣдовательно онъ есть квадратъ (кн. 1, опред. 30), описанный около круга (кн. 4, опред. 4).

*Предложеніе 8.* Въ данный квадратъ  $ABCD$  вписать кругъ (фиг. 173)?

*Рѣшеніе.* Раздѣлимъ двѣ пересѣкающіяся стороны  $AB$  и  $AD$  въ точкахъ  $F$  и  $E$  пополамъ. Чрезъ точку  $E$  проведемъ прямую  $EH \parallel AB$ , чрезъ точку  $F$  прямую  $FK \parallel AD$ , прямая  $EH$  и  $FK$  пересѣкутся въ точкѣ  $G$ . Если изъ точки  $G$ , какъ изъ центра, радіусомъ  $GE$  опишемъ кругъ, то онъ и будетъ искомымъ.

Фиг. 173.



Въ самомъ дѣлѣ, по предыдущему, четырехугольники  $AG$ ,  $GB$ ,  $GC$  и  $GD$  суть параллелограммы, слѣдовательно ихъ противолежащія стороны равны. Но  $AD=AB$ , слѣдовательно и  $AE=AF$  (кн. 1, акс. 7), откуда и  $GF=GE$ . Точно также можно показать, что  $GH=GK=GE$ . Слѣдовательно, описанный радіусомъ  $GE$  кругъ пройдетъ чрезъ точки  $F$ ,  $H$  и  $K$ . Но какъ углы при  $E$ ,  $F$ ,  $H$  и  $K$  прямые (кн. 1, пред. 34), то стороны даннаго квадрата касаются круга въ точкахъ  $E$ ,  $F$ ,  $H$  и  $K$ .

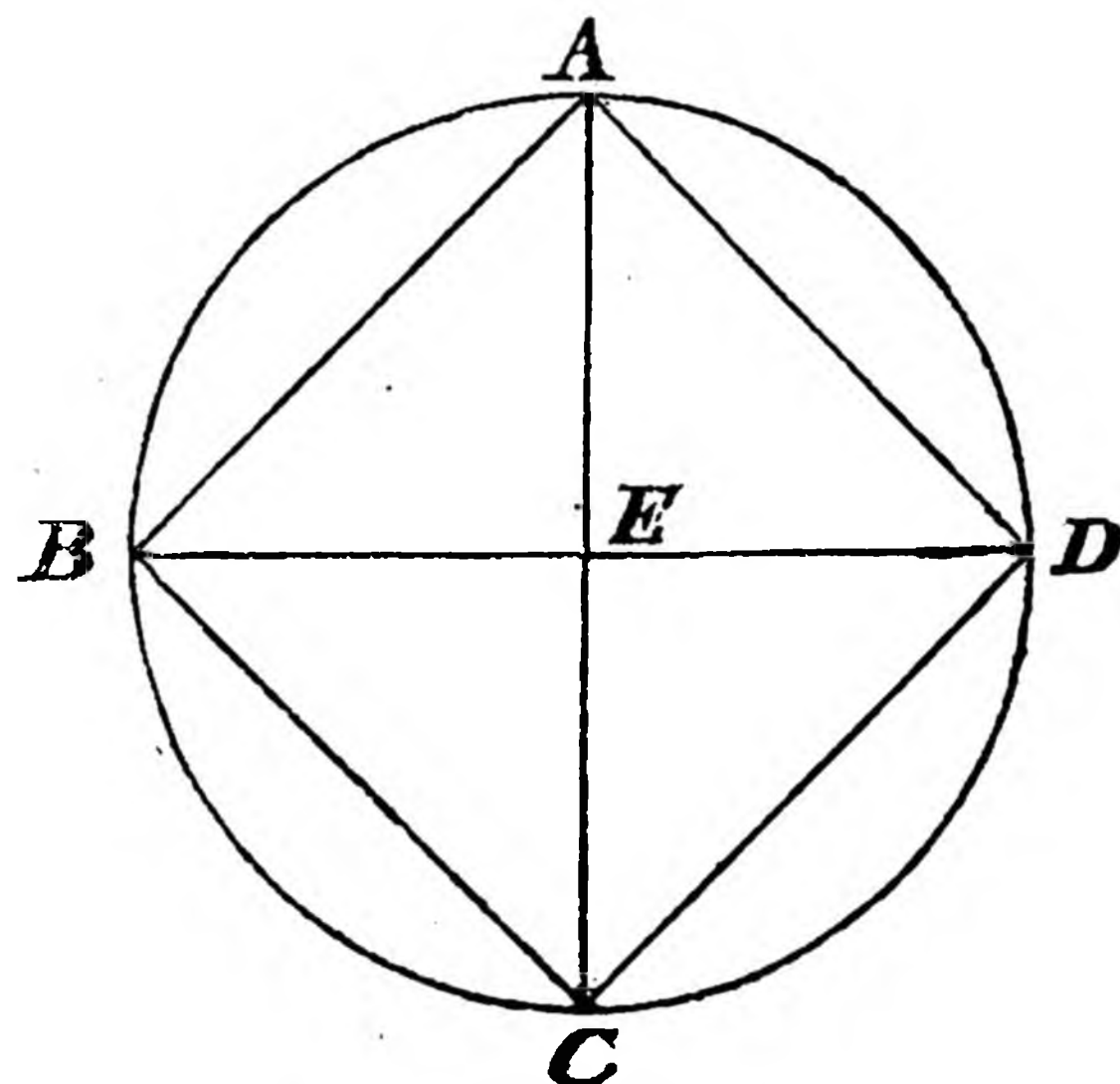
*Предложеніе 9.* Около даннаго квадрата описать кругъ (фиг. 174)?

*Рѣшеніе.* Проведемъ діагонали  $AC$  и  $BD$  и изъ точки ихъ пересѣченія  $E$ , какъ изъ центра, радіусомъ  $EA$  опишемъ кругъ, который и будетъ требуемый.

Въ самомъ дѣлѣ, въ треугольникахъ  $ABC$  и  $ADD$  сторона  $AC$  общая,  $AB=AD$  и  $BC=CD$  (кн. 1, опред. 30), слѣдовательно  $\angle BAC=\angle DAC=\frac{1}{2}d$  (кн. 1, пред. 8). Точно также можно показать, что  $\angle ABD=\angle CBD=\frac{1}{2}d$ . Откуда  $\angle BAC=\angle ABD$ , слѣдовательно  $EA=EB$  (кн. 1, пред. 6). Также

точно можно показать, что  $EC=ED=EA$ . Следовательно описанный кругъ

Фиг. 174.



пройdetъ черезъ вершины угловъ квадрата и будетъ искомый (кн. 4, опред. 4).

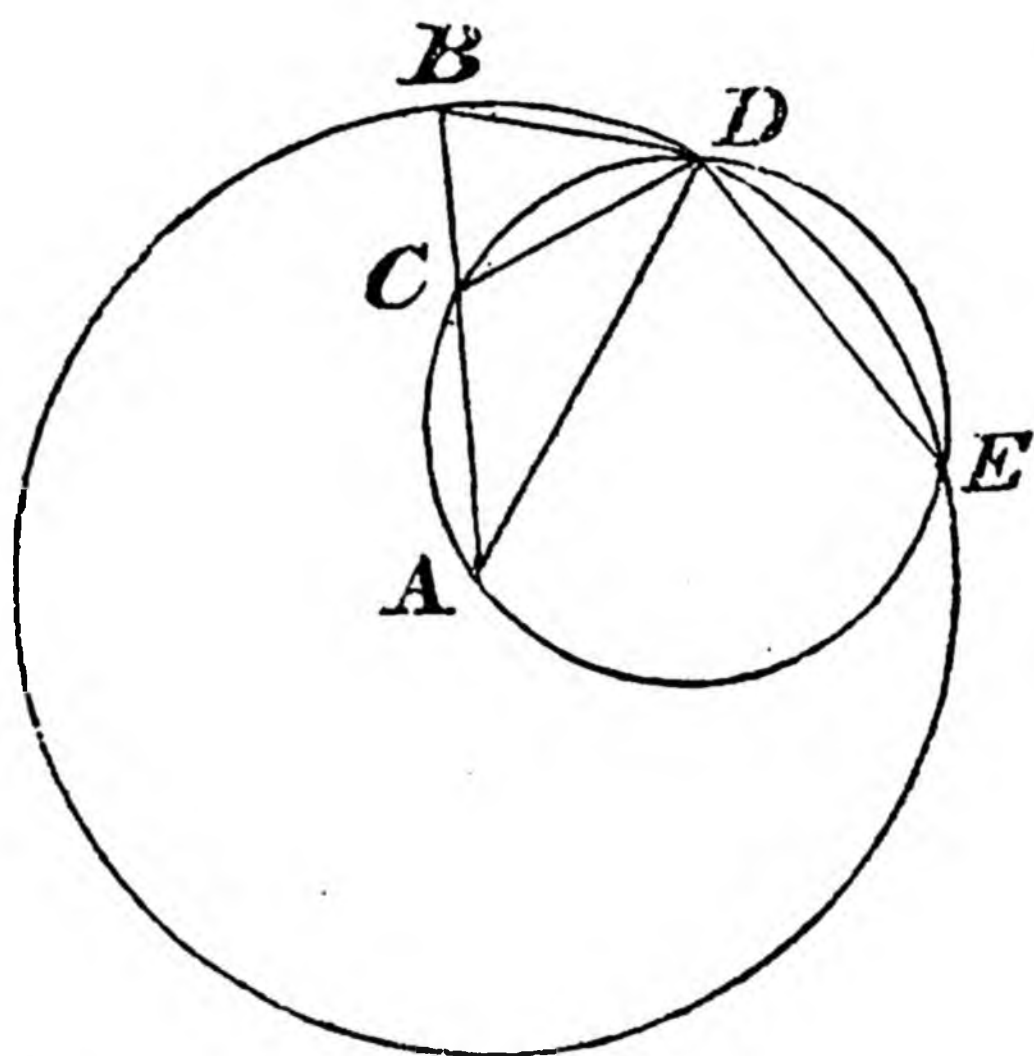
*Предложеніе 10.* Построить равнобедренный треугольникъ  $ABD$ , котораго бы каждый изъ угловъ  $ABD$  и  $ADB$  при основаніи былъ бы вдвое больше угла  $BAD$  при вершинѣ (фиг. 175)?

*Рѣшеніе.* Возьмемъ произвольную прямую  $AB$  и раздѣлимъ ее въ точкѣ  $C$  на такія двѣ части  $AC$  и  $CB$ , чтобы (кн. 2, пред. 11):

$$\square AC = AB \cdot BC.$$

Изъ точки  $A$ , какъ изъ центра, радіусомъ  $AB$  опишемъ кругъ  $BDE$ , помѣстимъ на его окружности прямую  $BD=AC$  (кн. 4, пред. 1) и соединимъ  $A$  съ  $D$ , треугольникъ  $ABD$  и будетъ требуемый.

Фиг. 175.



Въ самомъ дѣлѣ, соединимъ  $C$  съ  $D$  и около треугольника  $ACD$  опишемъ кругъ  $ACDE$  (кн. 4, пред. 5). Такъ какъ мы имѣемъ, по построенію,  $\square AC = \square BD = AB \cdot BC$ , то прямая  $BD$  будетъ касательная къ кругу  $ACDE$  (кн. 3, пред. 36), следовательно  $\angle BDC = \angle DAC$  (кн. 3, пред. 32);



если къ предыдущему равенству прибавимъ къ обѣимъ частямъ  $\angle CDA$ , то получимъ:

$$\angle ADB = \angle DAC + \angle CDA.$$

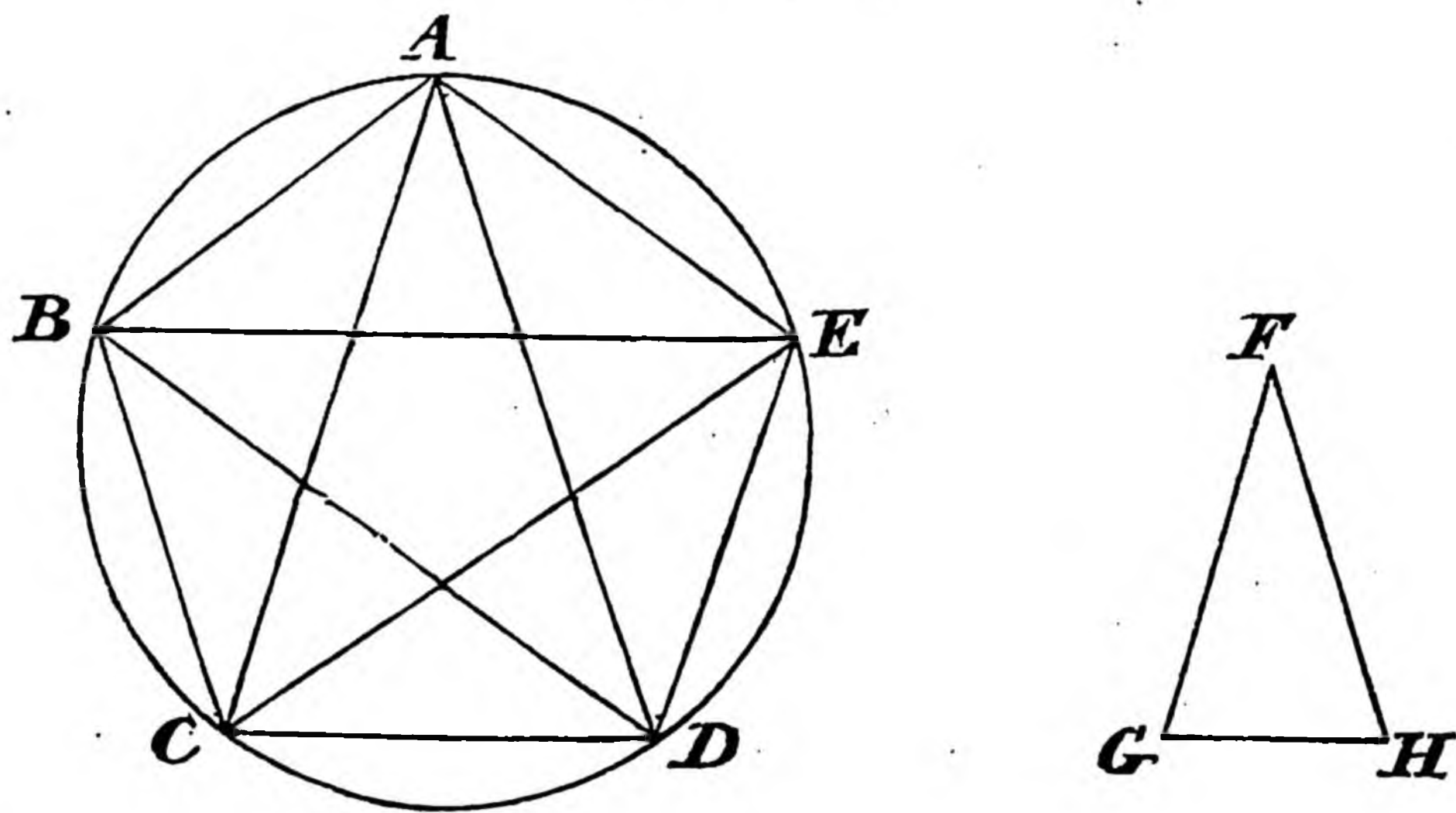
Но  $AD = AB$  (кн. 1, опред. 15), слѣдовательно  $\angle ADB = \angle ABD$  (кн. 1, пред. 5). Но мы еще имѣемъ  $\angle DAC + \angle CDA = \angle BCD$  (кн. 1, пред. 32), слѣдовательно  $\angle ADB = \angle ABD = \angle BCD$  откуда  $BD = CD = AC$  (кн. 1, пред. 6). Изъ этого послѣдняго равенства мы имѣемъ  $\angle DAC = \angle CDA$  (кн. 1, пред. 5), откуда  $\angle BCD = 2\angle DAC$ . слѣдовательно, какъ уголъ  $ADB$ , такъ и уголъ  $ABD$  равны  $2\angle DAC$ .

*Примѣч. 4.* Легко видѣть, что уголъ  $BAD$  есть пятая часть двухъ прямыхъ угловъ, а такъ какъ онъ можетъ быть раздѣленъ пополамъ (кн. 1, пред. 9), то прямой уголъ можетъ быть геометрически раздѣленъ на пять равныхъ частей.

**Предложеніе 11.** Въ данный кругъ  $ABCDE$  вписать равносторонній и равноугольный пятиугольникъ (фиг. 176)?

*Рѣшеніе.* Построимъ равнобедренный треугольникъ  $FGH$ , въ которомъ бы углы при основаніи были, каждый, вдвое больше угла при вершинѣ  $F$  (кн. 4, пред. 10). Въ данный кругъ впишемъ треугольникъ  $ACD$ , равноугольный построенному треугольнику  $FGH$  (кн. 4, пред. 2), такъ чтобы  $\angle A = \angle F$ ,  $\angle C = \angle G$  и  $\angle D = \angle H$ , то мы будемъ имѣть  $\angle CAD = \frac{1}{2} \angle ACD = \frac{1}{2} \angle ADC$ . Раздѣлимъ, наконецъ, пополамъ углы  $ADC$  и  $ACD$  (кн. 1, пред. 9) и проведемъ  $CE$  и  $DB$  до встрѣчи съ окружностью въ точкахъ  $B$  и  $E$ , соединимъ  $A$  съ  $B$ ,  $B$  съ  $C$ ,  $A$  съ  $E$  и  $E$  съ  $D$ , то получимъ искомый пятиугольникъ  $ABCDE$ .

Фиг. 176.



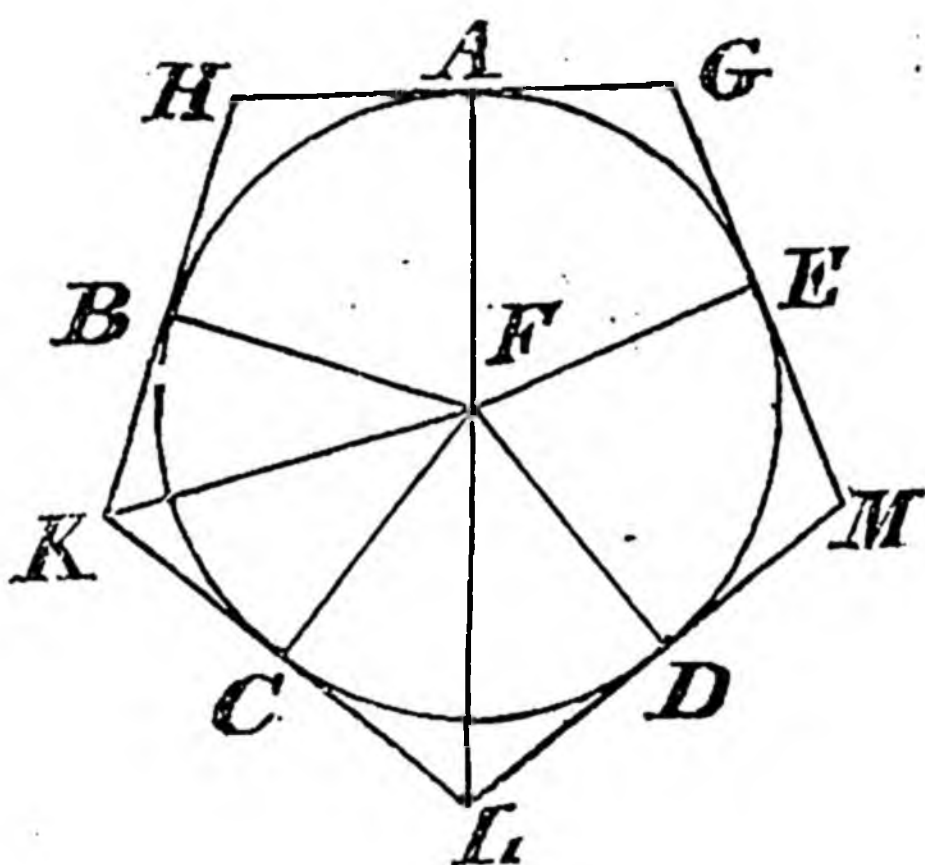
Въ самомъ дѣлѣ, по построенію пять угловъ  $CAD$ ,  $ECD$ ,  $ECA$ ,  $ADB$  и  $BDC$  равны, слѣдовательно и дуги  $CD$ ,  $DE$ ,  $EA$ ,  $AB$  и  $BC$  равны (кн. 3, пред. 26), откуда и хорды, ихъ стягивающія, также равны (кн. 3, пред. 29). слѣдовательно, построенный пятиугольникъ равносторонній.

Такъ какъ дуги  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $EA$  равны, то дуга  $BCDE =$  дуга  $CDEA$ , слѣдовательно и  $\angle BAE = \angle ABC$  (кн. 3, пред. 27), точно также можно доказать, что  $\angle BCD = \angle CDE = \angle DEA = \angle EAB$ , слѣдовательно построенный пятиугольникъ и равноугольный.

*Предложеніе 12.* Около даннаго круга  $ABCDE$  описать равносторонній и равноугольный пятиугольникъ (фиг. 177)?

*Рѣшеніе.* Положимъ, что точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $E$  суть вершины правильнаго вписаннаго въ данный кругъ пятиугольника (кн. 4, пред. 11), слѣдовательно дуги  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $EA$  будутъ равны. Черезъ точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  проведемъ касательныя къ окружности  $GH$ ,  $HK$ ,  $KL$ ,  $LM$ ,  $MG$ , касательныя эти образуютъ пятиугольникъ, который и будетъ требуемый.

Фиг. 177.



Въ самомъ дѣлѣ, пусть  $F$  будетъ центръ даннаго круга, соединимъ точки касанія съ центромъ и проведемъ прямыя  $FK$  и  $FL$ .

Углы при точкахъ  $B$  и  $C$  прямые (кн. 3, пред. 18), слѣдовательно  $\square FK = \square FB + \square BK$  (кн. 1, пред. 47) и  $\square FK = \square FC + \square CK$ , откуда (кн. 1, акс. 1):

$$\square FB + \square BK = \square FC + \square CK$$

Но  $\square FB = \square FC$ , слѣдовательно  $\square BK = \square CK$  (кн. 1, акс. 3), откуда  $BK = CK$ . Треугольники  $FVK$  и  $FCK$  имѣютъ сторону  $FK$  общую,  $FB = FC$  (кн. 1, опред. 15),  $KB = KC$ , по доказанному выше, слѣдовательно и  $\angle KFB = \angle KFC$  (кн. 1, пред. 8), откуда  $\angle BFC = 2\angle KFC$  и  $\angle BKC = 2\angle FKC$ . Точно также можно показать, что  $\angle CFD = 2\angle LFC$  и  $\angle CLD = 2\angle FLC$ . Но такъ какъ дуги  $BC$  и  $CD$  равны, то  $\angle BFC = \angle CFD$  (кн. 3, пред. 27), откуда  $\angle KFC = \angle LFC$  (кн. 1, акс. 7). Въ треугольникахъ  $FKC$  и  $FLC$   $\angle KFC = \angle LFC$ , углы при точкѣ  $C$  прямые, сторона  $FC$  общая, слѣдовательно  $KC = LC$  и  $\angle FKC = \angle FLC$  (кн. 1, пред. 4).

Такъ какъ  $CK = CL$ , то  $LK = 2CK$ , точно также легко видѣть, что  $KH = 2BK$ ; но мы выше показали, что  $CK = KB$ , слѣдовательно  $KL = KH$ .

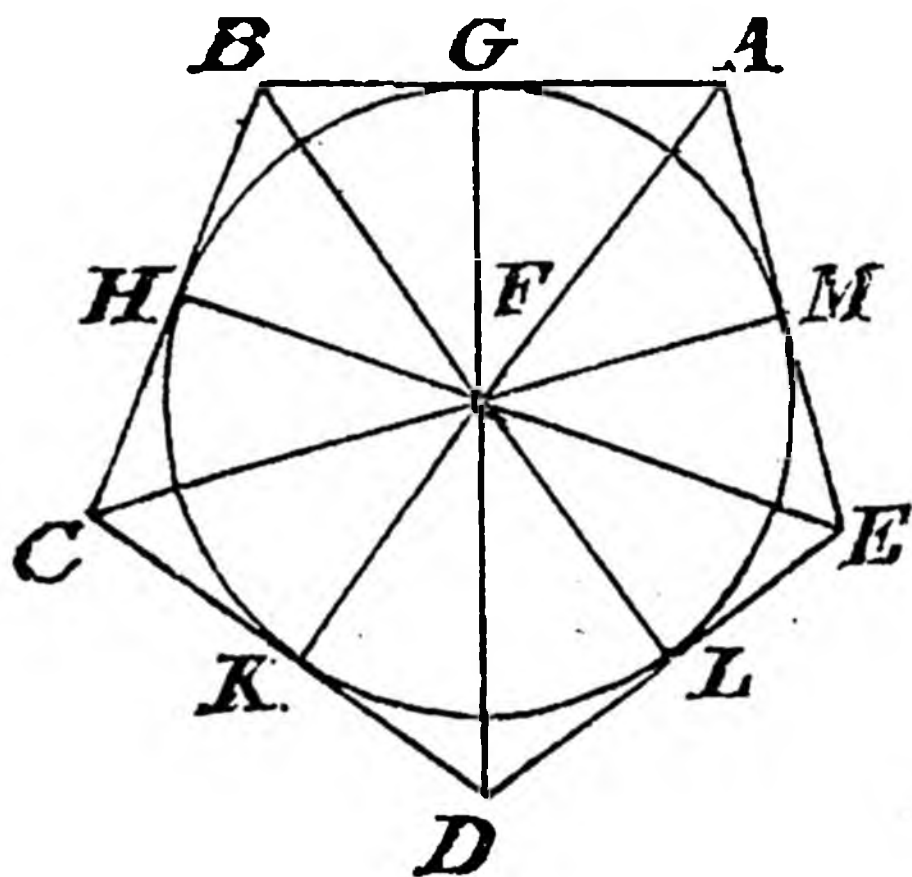
На томъ же основаніи каждая изъ сторонъ  $HG$ ,  $GM$ ,  $ML$  равны  $KL$  и  $KH$ , слѣдовательно фигура  $GHKLM$  есть равносторонній пятиугольникъ.

Мы выше показали, что  $\angle FKC = \angle FLC$ , слѣдовательно  $2\angle FKC = 2\angle FLC$ , но мы также показали, что  $2\angle FKC = \angle BKC$  и  $2\angle FLC = \angle CLD$ , слѣдовательно  $\angle BKC = \angle CLD$ . На томъ же основаніи можно показать, что углы  $BHA$ ,  $AGE$ ,  $EMD$  равны, каждый угламъ  $BKC$  и  $CLD$ . слѣдовательно фигура  $GHKLM$  и равноугольна.

**Предложеніе 13.** Въ данный равносторонній и равноугольный пятиугольникъ  $ABCDE$  вписать кругъ (фиг. 178)?

**Рѣшеніе.** Раздѣлимъ, какіе нибудь углы пятиугольника, напримѣръ углы  $BSC$  и  $CDE$  пополамъ (кн. 1, пред. 9), изъ точки  $F$  встрѣчи прямыхъ, дѣлящихъ эти углы пополамъ, опустимъ перпендикуляры  $FG$ ,  $FH$ ,  $FK$ ,  $FL$  и  $FM$  на стороны пятиугольника, изъ точки  $F$ , какъ изъ центра радіусомъ равнымъ одному изъ этихъ перпендикуляровъ опишемъ кругъ, который и будетъ требуемый.

Фиг. 178.



Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ прямыя  $FB$ ,  $FA$  и  $FE$ . Въ треугольникахъ  $FBC$  и  $FCD$ , сторона  $FC$  общая,  $BC = CD$ , по положенію,  $\angle FCB = \angle FCD$ , слѣдовательно и  $\angle CBF = \angle CDF$  (кн. 1, пред. 4). Но  $\angle CDE = 2\angle CDF$  и  $\angle ABC = \angle CDE$ , слѣдовательно  $\angle ABC = 2\angle CDF$ , откуда видимъ, что прямая  $FB$  дѣлитъ уголъ  $ABC$  пополамъ. Точно также можно показать, что углы  $AED$  и  $BAE$  прямыми  $FE$  и  $FA$  дѣлятся пополамъ.

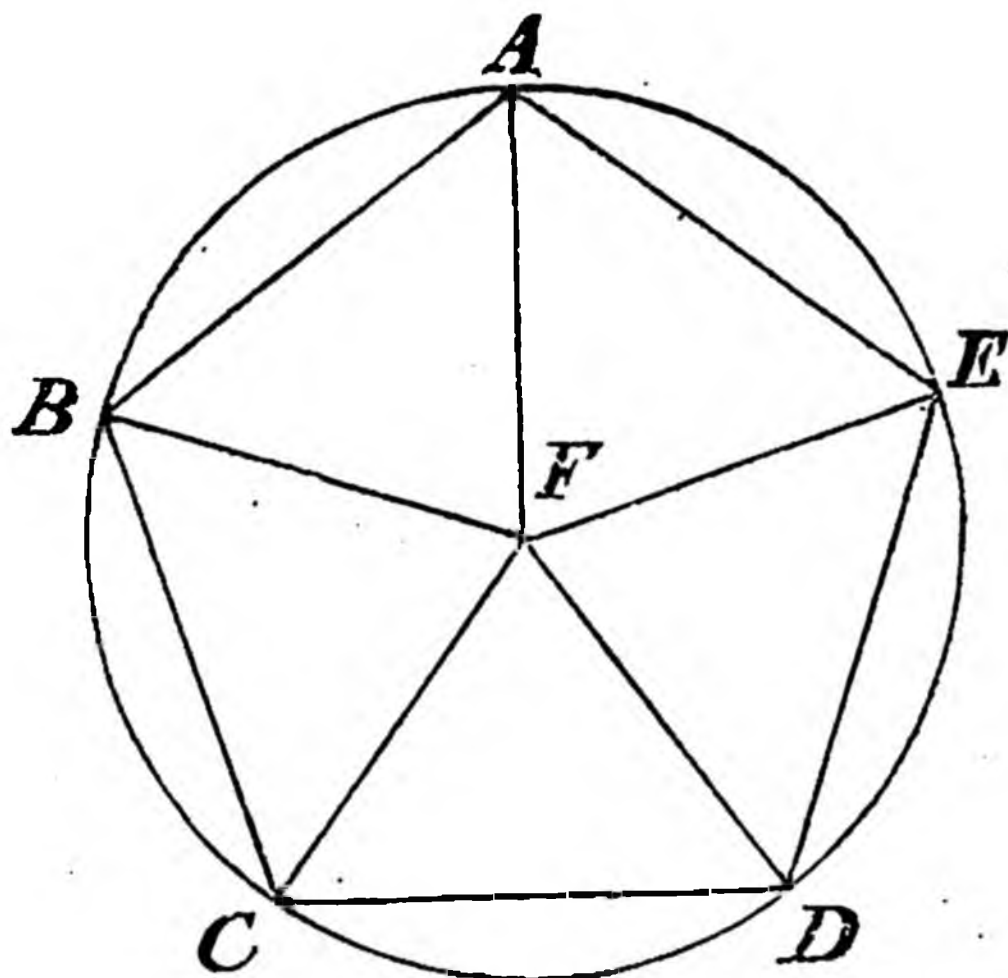
Такъ какъ  $\angle FCH = \angle FCK$ , углы при точкахъ  $H$  и  $K$  прямые,  $FC$  сторона общая треугольникамъ  $FHC$  и  $FKC$ , то  $FH = FK$  (кн. 1, пред. 26). Точно также можно показать, что  $FG$ ,  $FM$  и  $FL$  равны  $FH$  и  $FK$ . слѣдовательно, описанный кругъ проходитъ чрезъ точки  $G$ ,  $H$ ,  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и касается сторонъ  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $EA$  въ этихъ точкахъ (кн. 3, пред. 16).

**Предложеніе 14.** Около даннаго равносторонняго и равноугольнаго пятиугольника описать кругъ (фиг. 179)?



*Рѣшеніе.* Раздѣлимъ два угла, данной фигуры, напримѣръ,  $BCE$  и  $CDE$  пополамъ, изъ точки  $F$ , встрѣчи прямыхъ, дѣлящихъ эти углы пополамъ, какъ изъ центра, радіусомъ равнымъ  $FC$  или  $FD$  опишемъ кругъ, который и будетъ требуемый.

Фиг. 179.

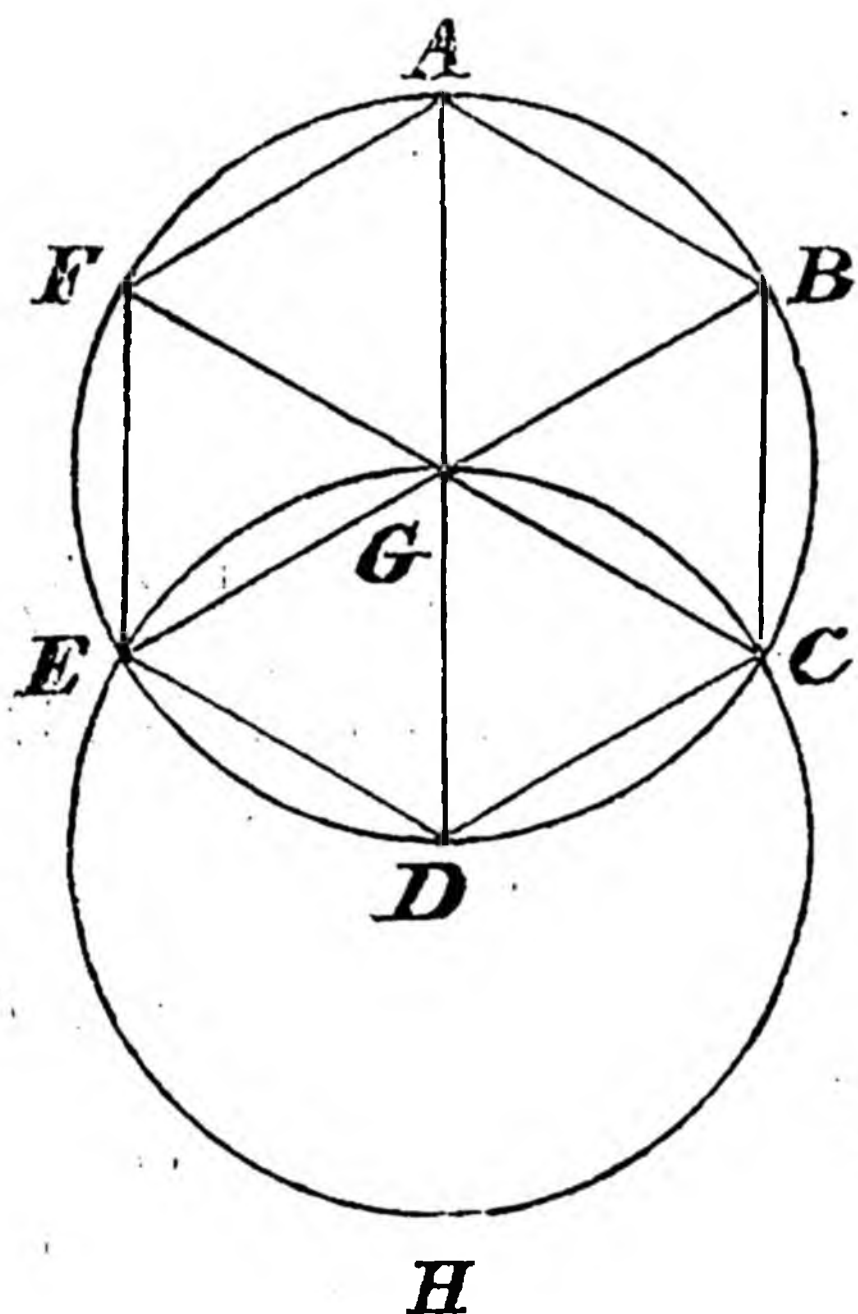


Проведемъ еще прямые  $FB$ ,  $FA$  и  $FE$ , эти прямые раздѣляютъ углы  $ABC$ ,  $BAE$  и  $AED$  пополамъ, что легко показать, какъ въ предыдущемъ предложеніи. Но въ треугольникѣ  $FCD$ ,  $\angle FCD = \angle FDC$ , слѣдовательно  $FC = FD$  (кн. 1, пред. 6). Точно также легко показать, что  $FB$ ,  $FA$  и  $FE$  равны каждой  $FC$  и  $FD$ . Слѣдовательно описанный кругъ пройдетъ чрезъ точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $E$ .

*Предложеніе 15.* Въ данный кругъ вписать равносторонній и равноугольный шестиугольникъ (фиг. 180)?

*Рѣшеніе.* Проведемъ въ данномъ кругѣ какой нибудь діаметръ  $AD$ , пусть  $G$  будетъ центръ круга. Изъ точки  $D$ , какъ изъ центра, радіусомъ

Фиг. 180.



$DG$  опишемъ кругъ  $EGCH$ . Соединимъ точки пересѣченія  $E$  и  $C$  этого круга съ центромъ  $G$ , даннаго круга, прямыми  $GE$  и  $GC$ , продолжимъ эти

прямая до встрѣчи съ даннымъ кругомъ въ точкахъ  $B$  и  $F$  и проведемъ прямая  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $EF$  и  $FA$ ; фигура, образуемая этими прямыми и будетъ требуемый шестиугольникъ.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ  $GE=GD$ , и  $GD=DE$  (кн. 1, опред. 15), то треугольникъ  $GED$  будетъ равносторонній, слѣдовательно и равноугольный (кн. 1, пред. 5), откуда уголъ  $EGD$  составляетъ одну треть двухъ прямыхъ угловъ, на томъ же основаніи и уголъ  $CGD=\frac{2}{3}d$ , но мы имѣемъ  $\angle EGC + \angle CGB = 2d$ , а  $\angle EGC = \frac{2}{3}2d$ , слѣдовательно  $\angle CGB = \frac{2}{3}d$ . Изъ этого видимъ, что три угла  $EGD$ ,  $DGC$ ,  $CVB$  равны, а слѣдовательно равны и ихъ противоположные углы  $BGA$ ,  $AGF$ ,  $FGE$ . слѣдовательно всѣ шесть угловъ около центра  $G$  равны между собою, также какъ и шесть сторонъ  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $EA$  (кн. 3, пред. 29). слѣдовательно фигура  $ABCDEF$  есть равносторонній шестиугольникъ.

По предъидущему, дуги  $FA=ED$ , слѣдовательно, если къ обѣимъ частямъ этого равенства прибавимъ по дугѣ  $ABCD$ , то получимъ, что дуга  $FABCD$  равна дугѣ  $EDCBA$ ; откуда и  $\angle DEF = \angle EFA$ . Точно также можно показать, что и углы  $ABC$ ,  $BCD$  и  $CDE$  равны угламъ  $DEF$  и  $EFA$ . слѣдовательно наша фигура есть и равноугольный шестиугольникъ.

*Слѣдствіе.* Изъ предъидущаго видно, что сторона равносторонняго и равноугольнаго шестиугольника, вписаннаго въ данный кругъ, равна радіусу круга.

Предложенія 12, 13 и 14 этой книги относительно пятиугольника могутъ быть рѣшены и относительно шестиугольника.

*Примѣч. 5.* Если точку  $A$  соединимъ съ  $E$  и съ  $C$  и точку  $E$  съ  $C$  (фиг. 180), то получимъ, очевидно, равносторонній и равноугольный треугольникъ, вписанный въ данный кругъ. Откуда легко построить равносторонній и равноугольный треугольникъ, описанный около даннаго круга.

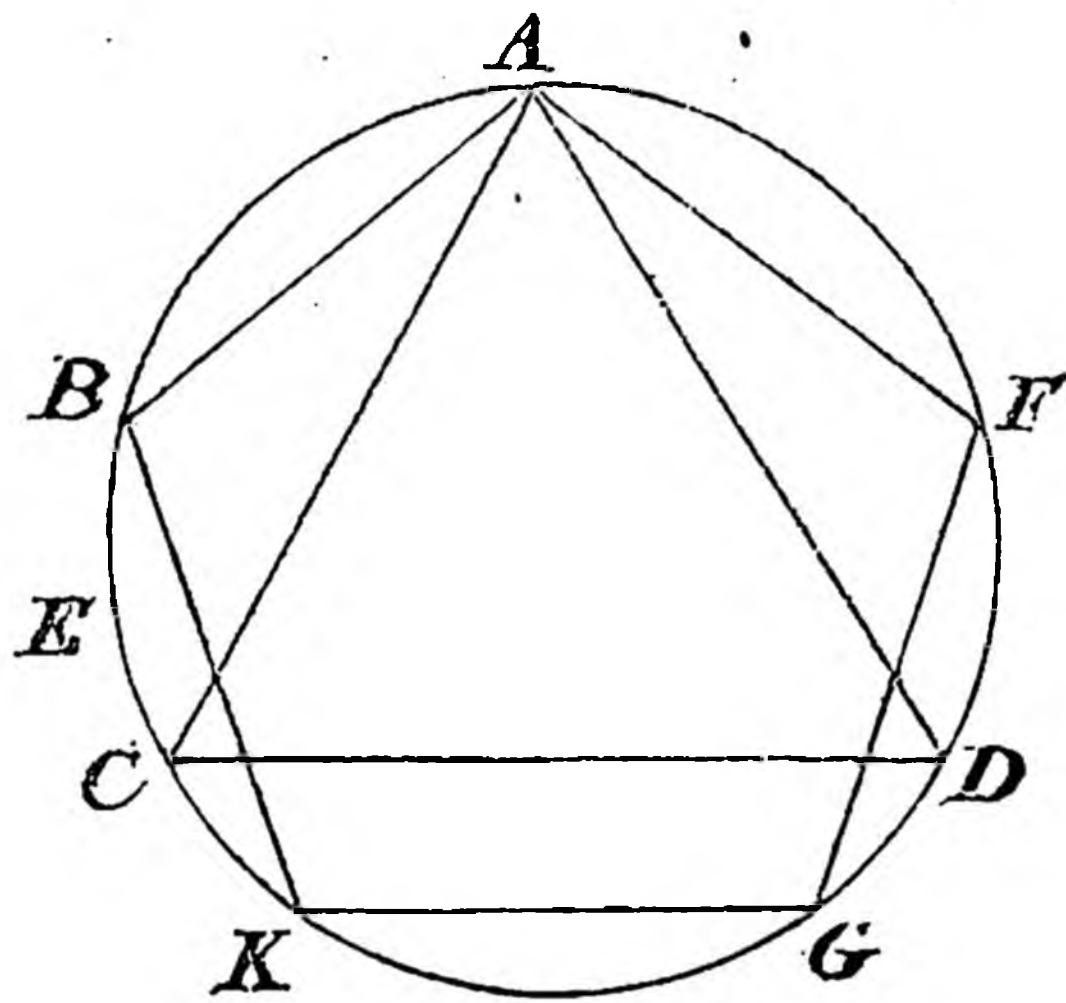
*Предложеніе 16.* Въ данный кругъ  $ABCD$  вписать равносторонній и равноугольный пятнадцатиугольникъ (фиг. 181)?

*Рѣшеніе.* Впишемъ въ данный кругъ равносторонній треугольникъ  $ACD$  и равносторонній пятиугольникъ  $ABKGF$ . Раздѣлимъ дугу  $BC$  въ точкѣ  $E$  пополамъ (кн. 3, пред. 30) и соединимъ точки  $E$  и  $C$  прямою  $EC$ , эта прямая и будетъ сторона требуемаго пятнадцатиугольника.

Въ самомъ дѣлѣ, если бы пятнадцатиугольникъ былъ вписанъ въ кругъ, то дуга  $AB$  содержала бы три пятнадцатыхъ, а дуга  $ABC$  пять

пятнадцатыхъ цѣлой окружности, слѣдовательно дуга  $BC$  будетъ составлять двѣ пятнадцатыхъ части цѣлой окружности, а половина ее  $EC$ , одну

Фиг. 181.



пятнадцатую той же окружности. Слѣдовательно хорда дуги  $EC$  и будетъ требуемая сторона пятнадцатиугольника.

*Слѣдствіе.* Относительно пятнадцатиугольника можно рѣшить предложенія соотвѣтствующія предложеніемъ 12, 13 и 14 относительно пятиугольника и при томъ тѣми-же приемами.

*Примѣч. 6.* Изъ сказаннаго въ этой книгѣ легко видѣть, что окружность круга можетъ быть раздѣлена на 3, 6, 12, 24, . . . ; на 5, 10, 20, 40, . . . ; на 15, 30, 60, 120, . . . равныхъ частей. Слѣдовательно въ кругъ можно вписать и около круга описать правильные многоугольники такого же числа сторонъ.

Это впрочемъ не даетъ намъ права заключить, что можно вписать въ кругъ правильный полигонъ какого угодно числа сторонъ, на примѣръ геометрически мы не знаемъ какъ вписать въ кругъ правильный семиугольникъ.

Въ 1801 году Гауссъ первый показалъ въ сочиненіи своемъ *Disquisitiones Arithmeticae*, что если число  $2^n - 1$  есть простое, то можно геометрически вписать въ кругъ правильный полигонъ такого-же числа сторонъ. На примѣръ  $2^4 - 1 = 17$ , слѣдовательно можно вписать, геометрически, въ кругъ правильный семнадцатиугольникъ.

Можно бы было показать, въ примѣчаніи къ предложенію 32, первой книги, что сумма внутреннихъ угловъ во всякомъ многоугольникѣ равна двумъ прямымъ угламъ, взятымъ столько разъ, сколько сторонъ безъ двухъ, а сумма вѣншихъ угловъ равна двумъ прямымъ, взятымъ столько разъ, сколько сторонъ съ двумя, т. е. если число сторонъ въ многоугольникѣ есть  $n$ , то сумма внутреннихъ угловъ  $S = 2d(n-2)$ , а сумма вѣншихъ  $S_1 = 2d(n+2)$ , но я нахожу что сказать объ этомъ здѣсь удобнѣе.

Въ самомъ дѣлѣ, если чрезъ вершину, какого нибудь угла въ многоугольникѣ проведемъ діагонали, т. е. соединимъ эту вершину съ остальными, то многоугольникъ раздѣлится на треугольники числомъ  $n-2$ , но въ каждомъ треугольникѣ сумма угловъ равна  $2d$  (см. 1, пред. 32), слѣдовательно сумма внутреннихъ угловъ въ многоугольникѣ  $= 2d(n-2)$ .

Такъ какъ сумма угловъ въ каждой вершинѣ многоугольника  $= 4d$ , то сумма угловъ при всѣхъ вершинахъ  $= 4dn$ , но сумма внутреннихъ угловъ  $= 2d(n-2)$ , слѣдовательно сумма вѣншихъ угловъ будетъ  $= 2d(n+2)$ .



Легко также видѣть, что сумма внѣшнихъ угловъ, обращенныхъ въ одну сторону, равна  $4d$ . Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ около каждой вершины, если продолжимъ всѣ стороны многоугольника въ одну сторону, сумма угловъ съ внутренними равна  $2d$ , то сумма всѣхъ будетъ  $=2dn$ , а вычитая всѣ внутренніе—найдемъ  $4d$ .

Въ примѣчаніи 4, книги 4-й я замѣтилъ, что уголъ  $BAD$  (фиг. 175) составляетъ пятую часть двухъ прямыхъ угловъ, а слѣдовательно десятую часть четырехъ прямыхъ, изъ чего видимъ, что  $BD$  есть сторона правильного десятиугольника, вписаннаго въ кругъ. Но  $BD=AC$ , а  $AC$  есть большая часть радіуса  $AB$ , раздѣленнаго въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, слѣдовательно, сторона правильного десятиугольника, вписаннаго въ кругъ, равна этой большей части радіуса.

Построивъ, такимъ образомъ, на основаніи предложенія 11-го 2-й книги, правильный десятиугольникъ въ кругѣ, мы, соединяя вершины десятиугольника чрезъ одну, построимъ правильный вписанный въ кругъ пятиугольникъ (фиг. 176). Если проведемъ всѣ діагонали  $AD, DB, BE, EC, CA$ , то онѣ образуютъ правильный звѣздный пятиугольникъ, о которомъ мы ниже будемъ говорить подробнѣе, а теперь я покажу одно замѣчательное свойство діагоналей правильного пятиугольника, вписаннаго въ кругъ. Свойство это состоитъ въ слѣдующемъ: Двѣ, какія нибудь діагонали правильного пятиугольника, вписаннаго въ кругъ, пересѣкаясь, дѣлятся каждая въ крайнемъ и среднемъ отношеніяхъ.

Прошу читателя поставить на пересѣченіи діагоналей  $BD$  и  $CE$  (фиг. 176) букву  $K$ .

Въ самомъ дѣлѣ, равнобедренные треугольники  $BDC$  и  $KDC$  имѣютъ уголъ  $BDC$  общій,  $\angle BCD=\angle CKD$ , слѣдовательно и  $\angle CBD=\angle KCD$  (кн. 1, пред. 32). Но въ равноугольныхъ треугольникахъ стороны, заключающія равные углы, пропорціональны (кн. 6, пред. 4), слѣдовательно:

$$BD : DC = DC : KD.$$

Но  $DC=CB$ , какъ сторона правильного пятиугольника,  $\angle BCE=\angle BKC$ , потому что оба равны центральному углу, соотвѣтствующему  $\frac{2}{5} 4d$ . слѣдовательно  $CD=BK$ , откуда:

$$BD : BK = BK : DK.$$

## КНИГА V.

### О п р е д ъ л е н і я.

1. *Частью—мѣрою* ( $\mu\acute{\epsilon}\rho\omicron\varsigma$ ) называется меньшая величина, измѣряющая большую.

*Примѣч. 1.* Подъ частью—мѣрою Евклидъ здѣсь разумѣетъ величину содержащуюся извѣстное число разъ безъ остатка въ другой величинѣ или которая, будучи взята два, три и т. д. разъ, даетъ другую величину. Напримѣръ два есть часть—мѣра двѣнадцати. Но 5 не есть часть—мѣра двѣнадцати. Слово *часть* у насъ имѣетъ другое значеніе, извѣстное каждому, поэтому мы, въ этой книгѣ, будемъ употреблять вмѣсто этого слова, слово *мѣра* въ смыслѣ Евклида.

2. Большая величина называется *кратною* меньшей, когда она измѣряется меньшей.

*Примѣч. 2.* Напримѣръ, число 12 есть кратное чиселъ 2, 3, 4. . . .

3. *Отношеніе* есть нѣкоторая взаимная зависимость между двумя однородными величинами, когда онѣ сравниваются по ихъ количественности. ( $\Lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$  ἐστὶ δὺο μέγεθων ὁμογενῶν ἢ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἀλλήλα ποτὰ σχέσις).

*Примѣч. 3.* Это опредѣленіе было предметомъ многихъ толкованій, такъ какъ зависимость между двумя однородными величинами можетъ быть безконечно разнообразна. Толкованія эти были обращены на уясненіе смысла выраженія *κατὰ πηλικότητα*—по количеству, или по количественности. Симсонъ даже думаетъ, что это вставка какого нибудь недущаго издателя Началъ. Нѣкоторые изъ новыхъ комментаторовъ Евклида выбрасываютъ опредѣленіе, считая его излишнимъ. Можно впрочемъ думать, что выраженіе *κατὰ πηλικότητα* у древнихъ математиковъ имѣло болѣе опредѣленный смыслъ, который намъ переданъ ни древними авторами, ни комментаторами.

Зависимость между двумя однородными величинами, какъ я сказалъ, можетъ быть конечно разнообразна, поэтому опредѣленіе Евклида, не зная точнаго смысла выраженія *κατὰ πηλικότητα*, кажется не яснымъ. Очевидно въ Началахъ подъ этой зависимостью сно разумѣть зависимость простѣйшую, а простѣйшая зависимость между двумя однородными величинами есть та, въ которую не входитъ ни какая третья величина, однород-

ная съ ними, поэтому *отношение* двухъ однородныхъ величинъ, по Лейбницу, есть такая зависимость, въ которой одна изъ величинъ служитъ для опредѣленія другой, независимо отъ какой бы то нибыло третьей, однородной съ ними.

Пусть данныя двѣ однородныя величины будутъ  $A$  и  $B$ . Чтобы опредѣлить, измѣрить одну изъ нихъ, на примѣръ  $A$ , только съ помощью другой  $B$ , помножимъ  $B$  на такое цѣлое число  $m$ , если возможно, чтобы получить  $mB=A$ , въ этомъ случаѣ говорить, что цѣлое число  $m$  есть *мѣра* (*μέρος*, часть, доля) *отношеніе* величины  $A$ , когда величина  $B$  принимается за *единицу* и что величина  $A$  есть *кратная* величины  $B$ . Отношеніе величинъ изображаютъ символомъ  $A:B$  или  $\frac{A}{B}$ .

Если  $A$  не есть величина кратная  $B$ , т. е. если нѣтъ такого цѣлаго числа  $m$ , чтобы  $mB=A$ , то выбираютъ такія два цѣлыя числа  $m$  и  $n$ , чтобы имѣть равенство  $nA=mB$ . Если это возможно, то очевидно, что  $n$ -я часть величинъ  $nA$  и  $mB$  будутъ равны и мы будемъ имѣть:

$$A = \frac{m}{n} B$$

т. е. величина  $A$  есть  $m$  разъ взятая  $n$ -ая часть величины  $B$ . Въ этомъ случаѣ число  $\frac{m}{n}$  опредѣляетъ величину  $A$ , когда величина  $B$  извѣстна, и говорить, что  $\frac{m}{n}$  есть *мѣра—отношеніе* величины  $A$ , когда величина  $B$  принимается за *единицу*. Число  $\frac{m}{n}$  называется *дробнымъ*.

Но можетъ случиться, что величины  $A$  и  $B$  находятся въ такой зависимости, что нѣтъ возможности выбрать числа  $m$  и  $n$  такъ, чтобы получить равенство  $nA=mB$ . Въ такомъ случаѣ, помноживъ величину  $A$  на произвольное число  $n$ , будемъ помножать величину  $B$  на 1, 2, 3, 4 и т. д. до тѣхъ поръ пока не дойдемъ до такого числа  $m$ , что будемъ имѣть:

$$mB < nA < (m+1)B$$

откуда, взявъ  $n$ -ую часть этого неравенства, получимъ:

$$\frac{m}{n} B < A < \frac{m+1}{n} B$$

слѣдовательно  $m$   $n$ -хъ частей величины  $B$  будутъ меньше  $A$ , а  $m+1$   $n$ -хъ частей, той же величины, будутъ больше ея,  $\frac{m}{n}$  и  $\frac{m+1}{n}$  будутъ *мѣры* двухъ величинъ, изъ коихъ одна меньше  $A$ , а другая больше ея. Если теперь, произвольно взятое число  $n$ , будемъ неопредѣленно увеличивать  $n < n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ , выбирая при этомъ числа  $m_1, m_2, m_3$ , такъ, чтобы они удовлетворяли условію, которому удовлетворяетъ число  $m$ , то мы получимъ два ряда мѣръ:

$$\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \frac{m_3}{n_3}, \dots,$$

$$\frac{m_1+1}{n_1}, \frac{m_2+1}{n_2}, \frac{m_3+1}{n_3}, \dots,$$



изъ коихъ первыя будутъ *мѣры* величинъ меньшихъ  $A$ , а вторыя будутъ *мѣры* величинъ большихъ  $A$ . Разность между этими *мѣрами* есть  $\frac{1}{n}$  и при неопредѣленномъ возрастаніи числа  $n$  можетъ сдѣлаться менѣе всякой данной величины.

Тотъ предѣлъ, къ которому приближаются при неопредѣленномъ возрастаніи числа  $n$ , *мѣры*  $\frac{m}{n}$  и  $\frac{m+1}{n}$ , есть извѣстное опредѣленное число, которое называется *мѣрою—отношеніемъ* величины  $A$ , когда величина  $B$  взята за *единицу*. Такой предѣлъ не есть число *цѣлое*, не есть и *дробное*, а есть число, которое называютъ *несоизмѣримымъ*. Такія числа подлежатъ такимъ же законамъ, какимъ подлежатъ числа *цѣлыя* и *дробныя* и надъ ними совершаются всѣ ариѳметическія дѣйствія. Это есть обобщенная идея числа, безъ которой не было бы возможности измѣрять величины, встрѣчающіяся въ геометріи.

Мы выше видѣли, что для того чтобы имѣть *мѣру* величины  $A$ , когда другая, однородная съ ней  $B$ , принимается за *единицу*, надобно отыскать два такія *цѣлыя* числа  $n$  и  $m$ , чтобы:

$$nA = mB.$$

Это послѣднее равенство показываетъ, какъ мы видѣли, что  $n$ -ая часть величины  $B$  содержится въ величинѣ  $A$   $m$  разъ безъ остатка, т. е. что  $n$ -ая часть величины  $B$  есть *общая мѣра* обѣихъ величинъ  $A$  и  $B$ .

Эту общую *мѣру* или числа  $n$  и  $m$  разыскиваютъ слѣдующимъ образомъ:

Меньшую изъ нихъ, напримѣръ  $B$ , наносятъ на большую  $A$ . Если меньшая  $B$  содержится въ  $A$  извѣстное число разъ безъ остатка, то говорятъ, что величина  $A$  есть *вратная* величины  $B$ , а число, показывающее сколько разъ  $B$  содержится въ  $A$ , называется *мѣрою* величины  $A$ , когда величина  $B$  принята за *единицу*.

Но если  $B$  содержится въ  $A$   $\alpha_0$  разъ съ остаткомъ  $r_1 < B$ , то мы будемъ имѣть:

$$A = \alpha_0 B + r_1 \quad (1)$$

Изъ этого равенства видимъ, что если бы величины  $B$  и  $r_1$  имѣли, общую *мѣру*, т. е. если бы существовала такая величина, которая содержится, какъ въ  $B$ , такъ и въ  $r_1$  безъ остатка, то эта величина будетъ содержаться и въ  $A$  безъ остатка. Поэтому надобно смотрѣть не содержится-ли само  $r_1$  въ  $B$  безъ остатка? Если бы это случилось, то мы будемъ имѣть  $B = \alpha_1 r_1$ , а изъ (1), найдемъ:

$$A = (\alpha_0 \alpha_1 + 1) r_1,$$

откуда:

$$\alpha_1 A = (\alpha_0 \alpha_1 + 1) B,$$

слѣдовательно, въ этомъ случаѣ, искомыя числа  $n$  и  $m$  будутъ  $n = \alpha_1$ ,  $m = \alpha_0 \alpha_1 + 1$ .

Но этого можетъ и не случиться, тогда:

$$B = \alpha_1 r_1 + r_2 \quad (2)$$

$r_2 < r_1$ .

Разсуждая надъ этимъ равенствомъ, какъ и надъ (1), найдемъ, что величина, которая содержится какъ въ  $r_2$  и въ  $r_1$  безъ остатка будетъ содержаться безъ остатка въ  $B$  и въ  $A$ .

Поэтому надобно опять смотрѣть не содержится ли  $r_2$  въ  $r_1$  безъ остатка, если содержится, то мы будемъ имѣть  $r_1 = a_2 r_2$ , откуда:

$$B = (a_1 a_2 + 1) r_2, \quad A = [a_0(a_1 a_2 + 1) + a_2] r_2,$$

слѣдовательно:

$$(a_1 a_2 + 1) A = [a_0(a_1 a_2 + 1) + a_2] B,$$

въ этомъ случаѣ искомыя числа  $n$  и  $m$  будутъ:

$$n = a_1 a_2 + 1, \quad m = a_0(a_1 a_2 + 1) + a_2.$$

Если бы  $r_2$  не содержалось въ  $r_1$  безъ остатка, то мы будемъ еще имѣть:

$$r_1 = a_2 r_2 + r_3,$$

$$r_3 < r_2.$$

Поступая съ этимъ послѣднимъ равенствомъ какъ и съ предыдущими, и продолжая подобнымъ образомъ, мы можемъ наконецъ дойти до такого остатка  $r_n$ , который въ предыдущемъ  $r_{n-1}$  содержится безъ остатка, т. е.  $r_{n-1} = a_n r_n$ . Дѣлая послѣдовательныя подстановленія, чтобы выразить  $B$  и  $A$  чрезъ  $r_n$ , мы найдемъ:

$$A = m r_n, \quad B = n r_n,$$

откуда:

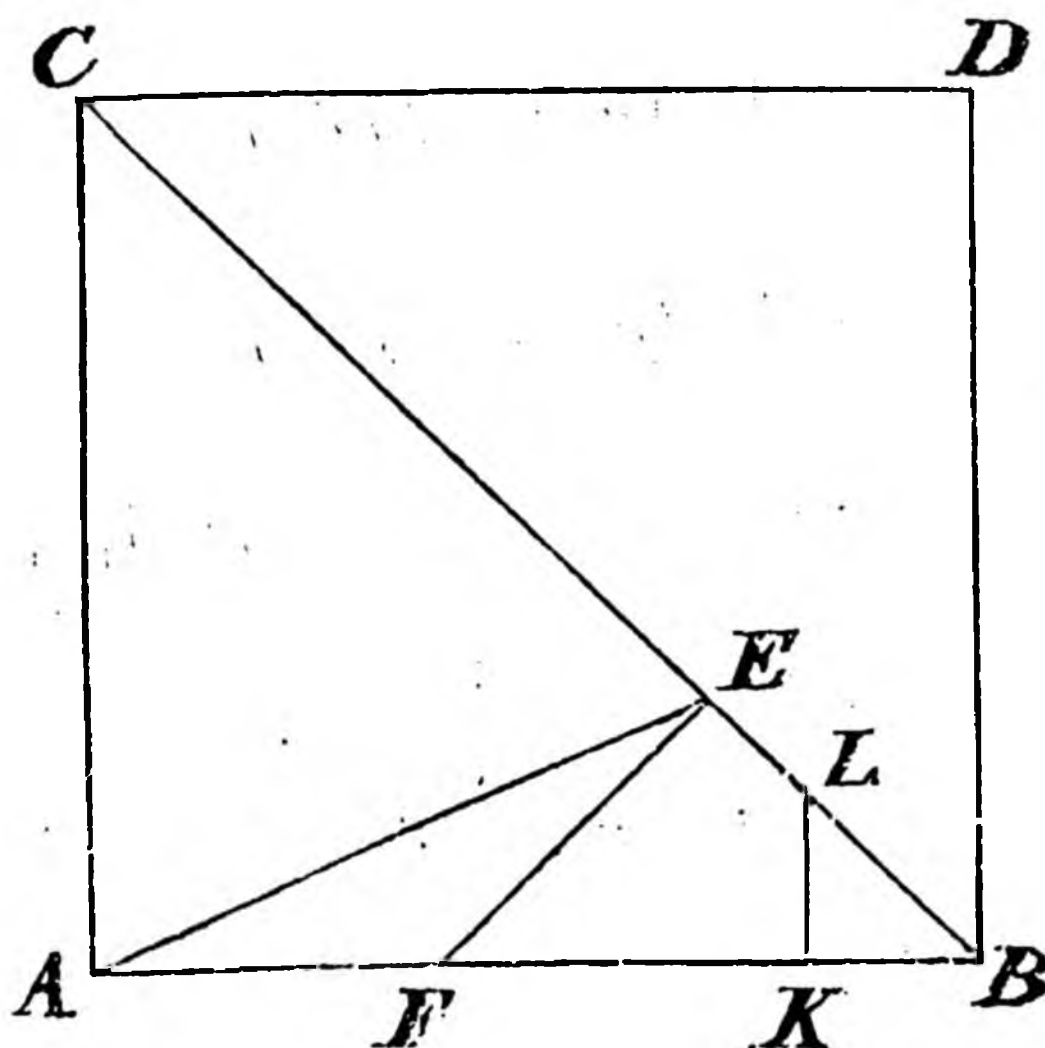
$$nA = mB.$$

Слѣдовательно  $n$ -я часть величины  $B$  содержится въ  $A$   $m$  разъ, т. е. число  $\frac{m}{n}$  будетъ мѣра величины  $A$ , когда величина  $B$  принята за единицу.

Но можетъ случиться, что подобное наложеніе, будучи продолжено до безконечности, никогда не приведетъ къ такому остатку, который бы содержался въ предыдущемъ известное число разъ безъ остатка, тогда величины  $A$  и  $B$  не имѣютъ общей мѣры и называются *несоизмѣримыми*. Мы выше показали, что надобно понимать, въ этомъ случаѣ, подъ мѣрою величины  $A$ , когда величина  $B$  принята за единицу.

Что такія несоизмѣримыя величины существуютъ въ геометріи въ этомъ легко убѣдиться на слѣдующемъ простомъ примѣрѣ: діагональ квадрата съ его стороною суть величины несоизмѣримыя.

Фиг. 182.



Построимъ квадратъ  $ABDC$ , коего сторона есть произвольно взятая прямая  $AB$ ,

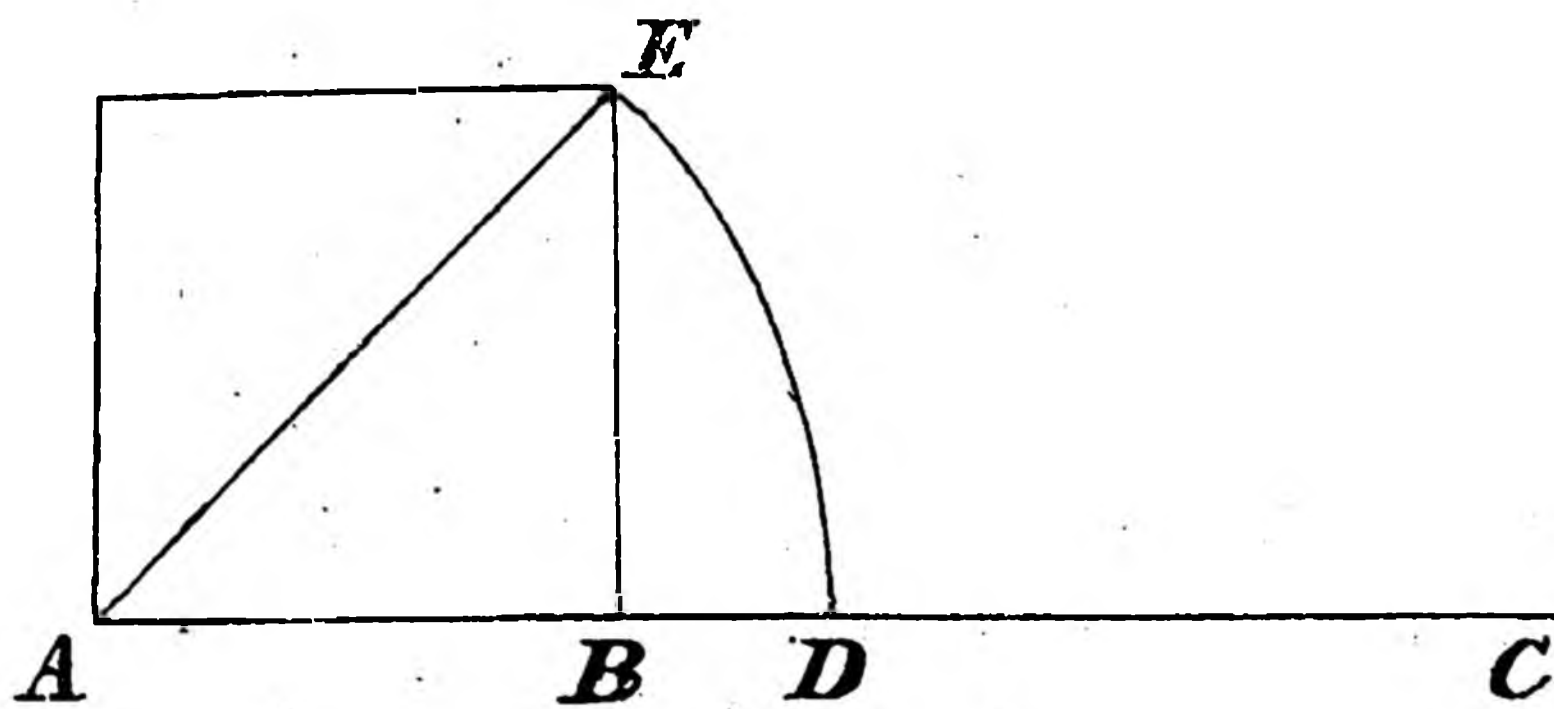
(кн. 1, пред. 46), и проведемъ діагональ  $BC$ . Эта діагональ меньше  $2AB$  (кн. 1, пред. 20) и больше  $AB$ , слѣдовательно сторона  $AB$  совмѣстится на діагонали  $BC$  одинъ разъ съ остаткомъ  $EB < AB$ . Возставимъ изъ точки  $E$  перпендикуляръ и продолжимъ его до встрѣчи съ  $AB$  въ точкѣ  $F$ . Въ треугольникѣ  $FEB$  уголъ при  $E$  прямой, уголъ  $EBF = \frac{1}{2}d$ , такъ какъ въ треугольникѣ  $ABC$   $\angle ACB = \angle CBA$  (кн. 1, пред. 5), слѣдовательно  $\angle BFE = \frac{1}{2}d$ , откуда сторона  $EF = EB$  (кн. 1, пред. 6). Соединивъ точки  $A$  и  $E$  получимъ равнобедренный треугольникъ  $ACE$ , въ которомъ  $\angle CEA = \angle CAE$ , но  $\angle CEF = \angle CAF$ , слѣдовательно  $\angle AEF = \angle EAF$  (кн. 1, акс. 3), откуда  $AF = EF$  (кн. 1, пред. 6). Изъ этого видимъ, что остатокъ  $EB$  содержится въ сторонѣ квадрата два раза съ остаткомъ  $KB$ , который меньше предыдущаго остатка  $EB$ , такъ какъ въ  $\triangle FEB$ ,  $EB = FK > \frac{1}{2} FB$ . Но треугольникъ  $FEB$  равнобедренный и прямоугольный, слѣдовательно съ нимъ можно поступить какъ и съ треугольникомъ  $ABC$ , т. е. наложить остатокъ  $KB$  на сторону  $EB$ , въ которой онъ будетъ также содержаться два раза съ остаткомъ меньшимъ  $KB$ . Продолжая подобное построение и нанося полученные остатки на предыдущіе, мы, очевидно, будемъ постоянно получать остатки, которые, уменьшаясь неопредѣленно, никогда не могутъ сдѣлаться нулемъ. Слѣдовательно діагональ квадрата съ его стороною не имѣютъ общей мѣры—суть величины несоизмѣримыя.

Если сторону квадрата примемъ за единицу, то діагональ его выражается несоизмѣримымъ числомъ  $\sqrt{2}$ .

Разсматривая предметы природы мы составляемъ понятіе о протяженіи и числѣ. О цѣломъ числѣ мы составляемъ понятіе, разсматривая собраніе одинаковыхъ предметовъ. Число одинаковыхъ предметовъ будетъ выражать *мѣру—отношеніе* всѣхъ въ одному изъ нихъ, этотъ одинъ называется *единицей*.

Объ одной какой нибудь непрерывной величинѣ, напримѣръ о длинѣ, площади, объемѣ, вѣсѣ, времени, мы составляемъ понятіе, сравнивая ее съ другою однородною, но которая намъ ближе извѣстна. Эта послѣдняя величина называется *единицею*. Отношеніе данной въ этой послѣдней можетъ быть числомъ цѣлымъ, дробнымъ и несоизмѣримымъ, какъ мы выше видѣли. Если бы мы не обобщили понятія о числѣ, то не было бы возможности измѣрять данной единицей всѣ возможныя величины: такъ, напримѣръ, пусть данная единица будетъ  $AB$ , требуется выразить числомъ разстоянія всѣхъ возможныхъ точекъ на неопредѣленной прямой  $AC$  отъ точки  $A$  (фиг. 182)?

Фиг. 182.



Если бы мы ограничились только цѣлыми числами, т. е. повтореніемъ единицы  $AB$ , и ея равными частями, то тотчасъ видимъ, что на какія бы части мы взяли единицу  $AB$  не раздробляли, ни одна изъ этихъ частей, наложенная на  $AC$ , начиная съ точки  $A$ , не упадетъ въ точку  $D$ , которой разстояніе отъ  $A$  равно діагонали  $AE$  квадрата, построеннаго на взятой единицѣ  $AB$ . Всегда случится, что точка  $D$  будетъ лежать между двумя послѣдовательными дѣленіями. Изъ этого видимъ, что если бы мы въ систему цѣлыхъ



и дробныхъ чиселъ не ввели чиселъ несоизмѣримыхъ, то выразить разстоянiе  $AD$  съ помощью единицы  $AB$  было бы невозможно.

До сихъ поръ мы рассматривали отношенiе двухъ величинъ  $A$  и  $B$  независимо отъ какой бы то нибыло третьей, однородной съ ними, но часто случается, что надобно взять третью величину  $C$ , однородную съ ними, и выразить отношенiе  $A$  къ  $B$  когда обѣ онѣ измѣряются величиною  $C$ .

Я говорю, что въ этомъ случаѣ мѣра величины  $A$ , когда  $B$  принимается за единицу, равна частному мѣры  $A$  на мѣру  $B$ , когда величина  $C$  принимается за единицу.

Въ самомъ дѣлѣ, помножимъ  $B$  на какое нибудь число  $n$  и положимъ, что это число такъ выбрано, что  $nB$  не можетъ быть меньше  $C$ . Будемъ помножать  $C$  на 1, 2, 3, 4 и т. д. пока не дойдемъ до такого числа  $m$  что  $mC = nB$ , или что  $nB$  лежитъ между двумя послѣдовательными кратными  $mC$  и  $(m+1)C$ , т. е. во всякомъ случаѣ:

$$mC \text{ не } > nB < (m+1)C.$$

Помножимъ  $A$  на какое нибудь число  $n'$  и возьмемъ такое кратное отъ  $B$ , напри-  
мѣръ  $m'$ , чтобы:

$$m'B \text{ не } > n'A < (m'+1)B.$$

Изъ двухъ предъидущихъ неравенствъ мы получимъ, помножая первое на  $m'$ , а второе на  $n$ :

$$mm'C \text{ не } > nn'B, \quad m'nB \text{ не } > nn'A$$

откуда:

$$mm'C \text{ не } > nn'A.$$

Точно также изъ тѣхъ же неравенствъ мы получимъ:

$$n(m'+1)B < (m+1)(m'+1)C$$

$$nn'A < n(m'+1)B,$$

а слѣдовательно:

$$mm'C \text{ не } > nn'A < (m+1)(m'+1)C$$

Изъ этого послѣдняго неравенства видимъ, что мѣра величины  $A$ , когда  $C$  принимается за единицу, есть предѣлъ произведенiя чиселъ  $\frac{m}{n}$ ,  $\frac{m'}{n'}$ , которыхъ предѣлы суть мѣры величины  $A$ , когда  $C$  принимается за единицу, и величины  $A$ , когда  $B$  принимается за единицу. Слѣдовательно мѣра величины  $A$ , когда  $C$  принимается за единицу, равна произведенiю мѣры величины  $A$ , когда  $B$  принимается за единицу, на мѣру величины  $B$ , когда  $C$  принимается за единицу. Откуда видимъ, что мѣра величины  $A$ , когда  $B$  принимается за единицу есть частное мѣры величины  $A$  на мѣру величины  $B$ , когда величина  $C$  принимается за единицу.

Это частное мѣръ двухъ величинъ  $A$  и  $B$ , когда за единицу принимается третья, совершенно произвольная величина  $C$ , однородная съ ними, называется *отношенiемъ* двухъ величинъ  $A$  и  $B$  и означается символомъ  $A:B$  или  $\frac{A}{B}$ .

4. Говорятъ, что двѣ величины имѣютъ отношеніе между собою, если меньшую изъ нихъ можно повторить столько разъ, чтобы результатъ былъ равенъ или больше большей.

*Примѣч. 4.* Этимъ опредѣленіемъ Евклидъ хочетъ показать, что сравниваемые величины должны быть однородны, напримѣръ длина и длина, площадь и площадь и т. д. Но длина и площадь отношенія, въ смыслѣ выше изложенномъ, имѣть не могутъ, такъ какъ, сколько бы разъ длину не повторили, площадь не получится.

5. Говорятъ, что четыре величины находятся въ томъ же отношеніи: первая ко второй и третья къ четвертой, когда равнократныя величины первой и третьей, взятая по произвольной кратности, всегда или больше, или равны, или меньше, соотвѣтственно, равнократныхъ величинъ второй и четвертой, взятыхъ также по другой произвольной кратности.

*Примѣч. 5.* Пояснимъ это примѣромъ: если величина  $A$  имѣетъ такое же отношеніе къ величинѣ  $B$ , какое величина  $C$  имѣетъ къ величинѣ  $D$ , то по Евклиду, если  $nA \begin{smallmatrix} \leq \\ > \end{smallmatrix} mB$ , то необходимо и  $nC \begin{smallmatrix} \leq \\ > \end{smallmatrix} mD$ , гдѣ  $m$  и  $n$  суть цѣлыя совершенно произвольныя числа. Отношеніе 2 къ 4 тоже, что и 10 къ 20, поэтому если  $2n \begin{smallmatrix} \leq \\ > \end{smallmatrix} 10m$ , то и  $4n \begin{smallmatrix} \leq \\ > \end{smallmatrix} 20m$ .

Числа 2 и 3, 7 и 8 не имѣютъ того же отношенія, такъ какъ, помноживъ 2 и 7 на 3, и 3 и 8 на 2, мы получимъ числа 6, 6, 21, 16 не удовлетворяющія опредѣленію Евклида.

Евклидъ выбралъ это опредѣленіе *пропорціональности* величинъ, такъ какъ оно распространяется и на величины несоизмѣримыя, и я ниже покажу, что оно тождественно съ опредѣленіемъ пропорціональности, которое даютъ новые геометры, именно:

*Пропорціональныя величины* суть тѣ, которыхъ отношенія равны. Если величины  $A$  и  $B$  пропорціональны величинамъ  $C$  и  $D$ , то это условіе, если  $A$  и  $B$ ,  $C$  и  $D$  суть величины соизмѣримыя, выразится двумя равенствами:

$$nA = mB, \quad nC = mD,$$

гдѣ числа  $m$  и  $n$  опредѣлены способомъ, изложеннымъ при разысканіи общей мѣры двухъ величинъ. Если же  $A$  и  $B$ ,  $C$  и  $D$  несоизмѣримы, то условіе пропорціональности выразится неравенствами:

$$mB < nA < (m+1)B, \quad mD < nC < (m+1)D,$$

а въ обоихъ случаяхъ:

$$mB \leq nA < (m+1)B, \quad mD \leq nC < (m+1)D.$$

Разсмотримъ послѣдній случай. Для этого раздѣлимъ одну изъ величинъ  $A$  и  $B$ , напримѣръ, меньшую  $B$ , на равныя части и нанесемъ ихъ на величину  $A$  столько разъ, сколько возможно, такъ какъ  $A$  и  $B$  несоизмѣримы, то получится остатокъ меньше одной изъ нанесенныхъ частей. Положимъ, что величину  $B$  дѣлятъ все на большее и на большее число равныхъ частей; соотвѣтственно этимъ дѣленіямъ остатокъ, при нанесеніи этихъ дѣленій на величину  $A$ , будетъ все меньше и меньше и можетъ сдѣлаться менѣ всякой данной величины. Величина  $A$ , уменьшенная на этотъ остатокъ, будетъ соизмѣрима съ  $B$  и будетъ имѣть съ нею отношеніе, которое выразится дробью, коей числитель и знаменатель

суть цѣлыя числа. Положимъ, что дѣлили величину  $B$  на  $n_1, n_2, n_3, \dots$  равныхъ частей, числа  $n_1, n_2, n_3, \dots$  возрастаютъ неопредѣленно. Положимъ, что, нанося послѣдовательно эти дѣленія на  $A$ , мы найдемъ, что онѣ въ  $A$  содержатся  $m_1, m_2, m_3, \dots$  разъ съ остатками:  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ , которые убываютъ неопредѣленно, по мѣрѣ возрастанія чиселъ  $n_1, n_2, n_3, \dots$ . Отбрасывая эти остатки отъ величины  $A$ , мы получимъ неопредѣленный рядъ величинъ  $A_1, A_2, A_3, \dots$ , соизмѣримыхъ съ  $B$ , и коихъ отношенія къ  $B$  будутъ:

$$\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \frac{m_3}{n_3}, \dots$$

Положимъ теперь, что мы имѣемъ другія двѣ несоизмѣримыя однородныя величины  $C$  и  $D$ , которыя впрочемъ съ величинами  $A$  и  $B$  могутъ быть не однородны. Если, дѣля меньшую изъ нихъ  $D$  на тоже число  $n_1, n_2, n_3, \dots$  равныхъ частей и нанося ихъ на величину  $C$ , найдемъ, что эти части, соотвѣтственно, будутъ содержаться въ  $C$   $m_1, m_2, m_3, \dots$  разъ съ остатками меньшими соотвѣтственныхъ дѣленій, и которые, при неопредѣленномъ возрастаніи чиселъ  $n_1, n_2, n_3, \dots$  неопредѣленно убываютъ, то говорятъ, что *отношеніе несоизмѣримыхъ величинъ  $A$  и  $B$  равно отношенію несоизмѣримыхъ величинъ  $C$  и  $D$ , или что несоизмѣримыя величины  $A$  и  $B$ ,  $C$  и  $D$  пропорціональны.*

И въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ мы имѣемъ всегда:

$$\frac{m}{n} B < A < \frac{m+1}{n} B$$

$$\frac{m}{n} D < C < \frac{m+1}{n} D,$$

при неопредѣленномъ возрастаніи числа  $n$ , то предѣлъ, къ которому стремятся дроби:

$$\frac{m}{n} \quad \text{и} \quad \frac{m+1}{n}, \quad (a)$$

будетъ мѣра и величины  $A$ , когда  $B$  принимается за единицу, и величины  $C$ , когда  $D$  принимается за единицу.

Остается показать только, что предѣлъ, къ которому стремятся дроби (a) независитъ отъ способа, или закона, по которому величины  $B$  и  $D$  дѣлились на равныя части.

Положимъ, что, производя дѣленія величинъ  $B$  и  $D$  по извѣстному закону, мы получимъ, какъ для величинъ  $A$  и  $B$  такъ и для величинъ  $C$  и  $D$ , равныя дроби:

$$\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \frac{m_3}{n_3}, \dots$$

Измѣнимъ законъ дѣленія на равныя части величинъ  $B$  и  $D$  и положимъ, что одно дѣленіе величины  $B$  содержится въ  $A$   $k$  разъ съ остаткомъ, а одно изъ дѣленій величины  $D$  содержится въ  $C$  больше чѣмъ  $k$  разъ съ остаткомъ. Означимъ чрезъ  $\varepsilon$  ту величину, на которую  $k+1$  дѣленій величины  $B$  превосходятъ величину  $A$ , и замѣтимъ, что  $k+1$  дѣленій величины  $D$ , по положенію, меньше величины  $C$ . Раздѣлимъ величину  $B$  на равныя части, которыя бы были меньше  $\varepsilon$  и при томъ по закону, удовлетворяющему опредѣленію равенства отношеній несоизмѣримыхъ величинъ. Слѣдовательно, соотвѣтствующихъ дѣленій величины



$D$  въ  $C$  будетъ столько, сколько дѣлений  $B$  содержится въ  $A$ . Но очевидно, что въ  $A$  будетъ меньше частей меньшихъ отъ  $\varepsilon$  чѣмъ въ  $A + \varepsilon$ , т. е. чѣмъ въ  $k+1$  дѣленіяхъ. Соответствующихъ частей величины  $D$  должно быть въ  $k+1$  дѣленіяхъ  $C$ , столько, сколько и въ  $k+1$  дѣленіяхъ  $A$ , а ихъ меньше, что противорѣчитъ предположенному закону дѣленія. Слѣдовательно, какъ только величины  $B$  и  $D$ , раздѣленные по извѣстному закону, на равное число равныхъ частей и эти части, соответственно, содержатся въ  $A$  и  $C$  одинаковое число разъ съ остатками, меньшими каждаго изъ дѣлений соответственно, то это будетъ имѣть мѣсто и при всякомъ другомъ законѣ дѣленія величинъ  $B$  и  $D$ .

Теперь остается показать, что опредѣленіе пропорціональности Евклида, совпадаетъ съ изложеннымъ выше.

Въ самомъ дѣлѣ, по Евклиду, если величины  $A$  и  $B$ ,  $C$  и  $D$  пропорціональны, то мы всегда должны имѣть совмѣстно:

$$nA \begin{matrix} \leq \\ \equiv \\ > \end{matrix} mB, \quad nC \begin{matrix} \leq \\ \equiv \\ > \end{matrix} mD,$$

или

$$\frac{m}{n} B \begin{matrix} \leq \\ \equiv \\ > \end{matrix} A, \quad \frac{m}{n} D \begin{matrix} \leq \\ \equiv \\ > \end{matrix} C,$$

для совершенно произвольныхъ цѣлыхъ чиселъ  $n$  и  $m$ .

Возьмемъ произвольное цѣлое число  $n$  и пусть  $m$  будетъ число, показывающее наибольшее число  $n$ -хъ частей  $B$ , содержащихся въ  $A$ , то легко видѣть, что:

$$\frac{m}{n} B < A, \quad \frac{m+1}{n} B > A.$$

Слѣдовательно, по опредѣленію Евклида, необходимо чтобы и

$$\frac{m}{n} D < C, \quad \frac{m+1}{n} D > C,$$

а эти неравенства и показываютъ, что отношенія величинъ  $A$  и  $B$ ,  $C$  и  $D$  суть предѣлы къ которымъ стремятся дроби  $\frac{m}{n}$  и  $\frac{m+1}{n}$  при неопредѣленномъ возрастаніи числа  $n$ , или что этотъ предѣлъ есть мѣра величинъ  $A$  и  $C$ , когда  $B$  и  $D$ , приняты соответственно за единицы. Если величины  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  пропорціональны, то пишутъ:

$$A : B = C : D \quad \text{или} \quad \frac{A}{B} = \frac{C}{D}.$$

6. Пропорціональными величинами называются такія, коихъ отношенія равны.

*Примѣч. 6.* Мы въ примѣч. 4 показали тождество опредѣленія 5 съ этимъ послѣднимъ. Многіе комментаторы, не понимая глубокаго смысла опред. 5, принимали только это послѣднее.

7. Если кратное первой величины больше кратнаго второй, а кратное третьей меньше кратнаго четвертой, то говорятъ, что отношеніе первой величины ко второй больше отношенія третьей къ четвертой.

8. Пропорціональность есть подобіе отношеній (Ἀναλογία δέ ἐστὶν ἡ τῶν ὁμοιότης, а по нѣкоторымъ спискамъ ταυτότης).

*Примѣч. 7.* Пропорціональность есть сходство, подобіе. Очевидно Евклидъ здѣсь разумѣетъ подобіе, сходство геометрическихъ фигуръ.

9. Пропорція состоитъ, по крайней мѣрѣ, изъ трехъ членовъ.

*Примѣч. 8.* Три однородныя величины пропорціональны, когда отношеніе первой ко второй будетъ равно отношенію второй къ третьей. Напр.:

$$2 : 4 = 4 : 8.$$

10. Когда три величины пропорціональны, то говорятъ, что первая къ третьей имѣетъ двойное отношеніе первой ко второй.

*Примѣч. 9.* Вторая величина называется *срѣдне-пропорціональною* между первой и третьей.

11. Если четыре величины непрерывно пропорціональны, то говорятъ, что первая къ четвертой имѣетъ утроенное отношеніе первой ко второй, учетверенное и т. д.

*Примѣч. 10.* Подъ величинами непрерывно пропорціональными Евклидъ подразумѣваетъ величины въ непрерывной пропорціи, которая составляетъ геометрическую прогрессію:

$$1 : 2 = 2 : 4 = 4 : 8 = 8 : 16 = 16 : 32 = 32 : 64.$$

Отношенія такихъ величинъ всѣ происходятъ отъ одного первоначальнаго отношенія, поэтому древніе геометры и дали имъ особенныя названія. Такъ наримѣръ отношеніе  $1 : 4$  можно разсматривать какъ результатъ перехода чрезъ два отношенія  $1 : 2$  и  $2 : 4$ , поэтому отношеніе  $1 : 4$  назвали *удвоеннымъ* отношеніемъ  $1 : 2$ . Точно также отношеніе  $1 : 64$  можно разсматривать какъ результатъ перехода чрезъ отношенія  $1 : 2$ ,  $2 : 4$ ,  $4 : 8$ ,  $8 : 16$ ,  $16 : 32$  и  $32 : 64$ , т. е. чрезъ шесть отношеній, а поэтому оно называется *ушестереннымъ* отношеніемъ  $1 : 2$ .

12. Если нѣсколько величинъ пропорціональны, то предъидущія называютъ *соотвѣтственными* предъидущимъ, а послѣдующія *соотвѣтственными* послѣдующимъ.

13. *Перемѣною отношеній* (Εναλλάξ λόγος) называется, если изъ четырехъ пропорціональныхъ величинъ заключаютъ, что первая относится къ третьей, какъ вторая къ четвертой.

*Примѣч. 11.* То есть если  $A : B = C : D$ , то мы имѣемъ  $A : C = B : D$ .

14. *Обратно* (Ἀνάπαλις λόγος), когда изъ четырехъ пропорціональныхъ величинъ заключаютъ, что вторая такъ относится къ первой, какъ четвертая къ третьей.

*Примѣч. 12.* То есть, если  $A : B = C : D$ , то мы имѣемъ  $B : A = D : C$ .

15. *Чрезъ сложение* (Σύνθεσις λόγου), если изъ четырехъ пропорціональ-

ныхъ величинъ заключаютъ, что сумма первой и второй такъ относится ко второй, какъ сумма третьей и четвертой относится къ четвертой.

*Примѣч. 13.* То есть, если  $A : B = C : D$ , то мы имѣемъ  $A + B : B = C + D : D$ .

16. *Чрезъ выдѣленіе, вычитаніе* (*Διαίρεσις λόγου*), если изъ четырехъ пропорціональныхъ величинъ заключаютъ, что разность между первой и второй такъ относится ко второй, какъ разность между третьей и четвертой относится къ четвертой.

*Примѣч. 14.* Если  $A : B = C : D$ , то:  $A - B : B = C - D : D$ .

17. *На оборотъ* (*Αναστροφὴ λόγου*), если изъ четырехъ пропорціональныхъ величинъ заключаютъ, что первая такъ относится къ разности первой и второй, какъ третья къ разности третьей и четвертой.

*Примѣч. 15.* Если  $A : B = C : D$ , то:  $A : A - B = C : C - D$ .

18. *По равенству* (*Δίσσις λόγου*), когда имѣя два ряда величинъ соответственно пропорціональныхъ, заключаютъ, что первая величина перваго ряда относится такъ къ послѣдней, какъ первая втораго ряда къ послѣдней.

*Примѣч. 16.* То есть, если мы имѣемъ два ряда величинъ:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n,$$

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n,$$

такихъ, что:

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2, \quad a_2 : a_3 = b_2 : b_3, \quad a_3 : a_4 = b_3 : b_4, \dots,$$

то

$$a_1 : a_n = b_1 : b_n.$$

19. *По прямому равенству* (*Τεταγμένη*), когда, имѣя два ряда такихъ величинъ, что въ первомъ рядѣ первая изъ нихъ такъ относится ко второй, какъ во второмъ рядѣ первая ко второй и еще въ первомъ рядѣ вторая такъ относится къ третьей, какъ вторая къ третьей во второмъ рядѣ и т. д., заключаютъ, что первая такъ относится къ послѣдней въ первомъ ряду, какъ первая къ послѣдней во второмъ ряду.

20. *По обратному* (*Τεταραγμένη* нестройный) *равенству*, когда, имѣя два ряда такихъ величинъ, что въ первомъ рядѣ, первая такъ относится ко второй, какъ предпослѣдняя къ послѣдней во второмъ рядѣ и вторая къ третьей, въ первомъ рядѣ, какъ третья съ конца ко второй съ конца втораго и т. д., заключаютъ что первая относится къ послѣдней въ первомъ рядѣ, какъ первая къ послѣдней во второмъ ряду.



Примѣч. 17. То есть, если:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n,$$

два ряда такихъ величинъ что:

$$a_1 : a_2 = b_{n-1} : b_n, \quad a_2 : a_3 = b_{n-2} : b_{n-1},$$

то

$$a_1 : a_n = b_1 : b_n.$$

Опредѣленія 19 и 20 суть частные случаи опредѣленія 18.

### Аксиомы.

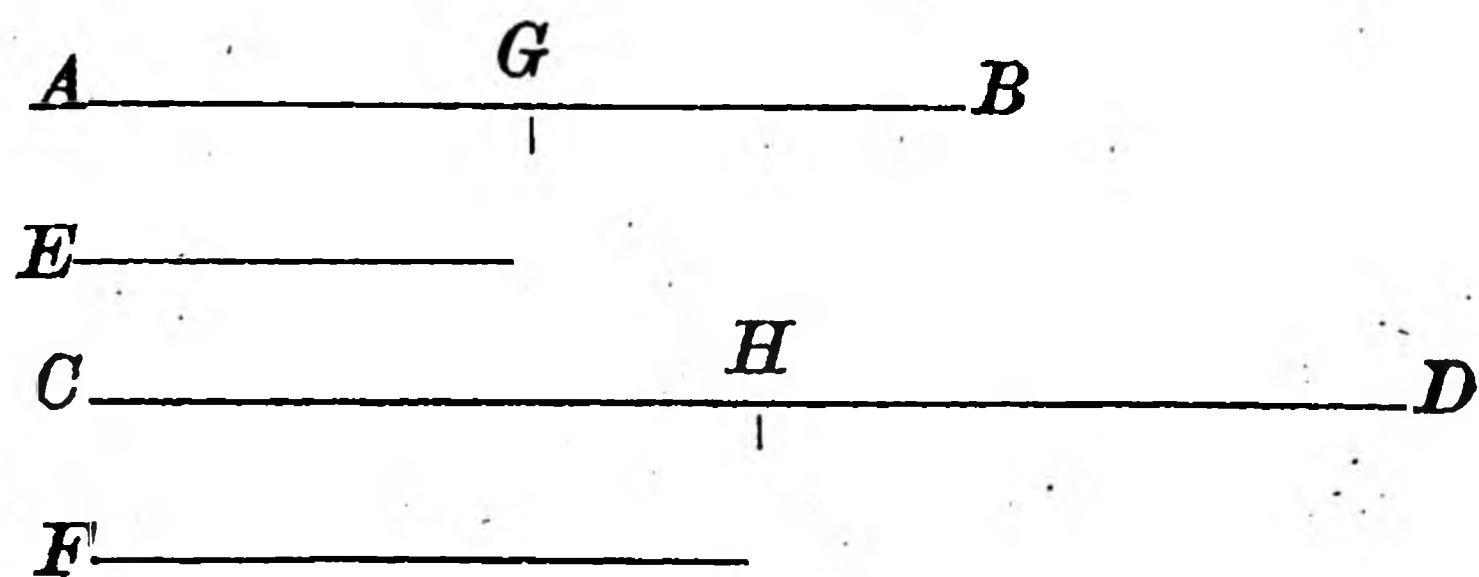
1. Величины равнократныя одной и той же величины, или равныхъ величинъ, равны между собою.
2. Величины, коихъ одна и таже величина есть равнократная, или же которыхъ равныя величины суть равнократныя, равны между собою.
3. Кратная большей величины больше кратной величины меньшей.
4. Изъ двухъ величинъ, коихъ взяты равнократныя, та больше, которой равнократная больше.

### Предложенія.

*Предложеніе 1.* Если нѣсколько величинъ суть соотвѣтственно равнократныя другихъ, въ такомъ же числѣ величинъ, по какой бы то ни было кратности, каждая каждой, то сумма первыхъ будетъ кратная величина суммы вторыхъ, по той же кратности (фиг. 183).

*Доказат.* Пусть величины  $AB$  и  $CD$  будутъ равнократныя другихъ  $E$  и  $F$ , каждая каждой, по какой нибудь кратности, то сумма  $AB+CD$ , величинъ  $AB$  и  $CD$ , будетъ равнократная величина суммы  $E+F$  величинъ  $E$  и  $F$ , по той же кратности.

Фиг. 183.



Такъ какъ величина  $AB$  такой же кратности величины  $E$ , какой величина  $CD$  величины  $F$ , то сколько величинъ равныхъ  $E$  содержится въ  $AB$ , столько величинъ равныхъ  $F$  содержится въ  $CD$ . Пусть  $AG$ ,  $GB$  суть части  $AB$  равныя  $E$  и  $CH$ ,  $HD$  суть части  $CD$  равныя  $F$ , то число

частей  $CH$ ,  $HD$  будетъ равно числу частей  $AG$ ,  $GB$ . Но такъ какъ  $AG=E$ , а  $CH=F$ , то сумма  $AG+CH=E+F$ , точно также  $GB=E$ ,  $HD=F$ , то сумма  $GB+HD=E+F$ . Слѣдовательно сколько величинъ равныхъ  $E$  содержится въ  $AB$ , столько разъ сумма  $E+F$  величинъ  $E$  и  $F$  содержится въ суммѣ  $AB+CD$ , т. е. какой кратности величина  $AB$  будетъ величины  $E$ , такой кратности и сумма величинъ  $AB$  и  $CD$  будетъ суммы величинъ  $E$  и  $F$ .

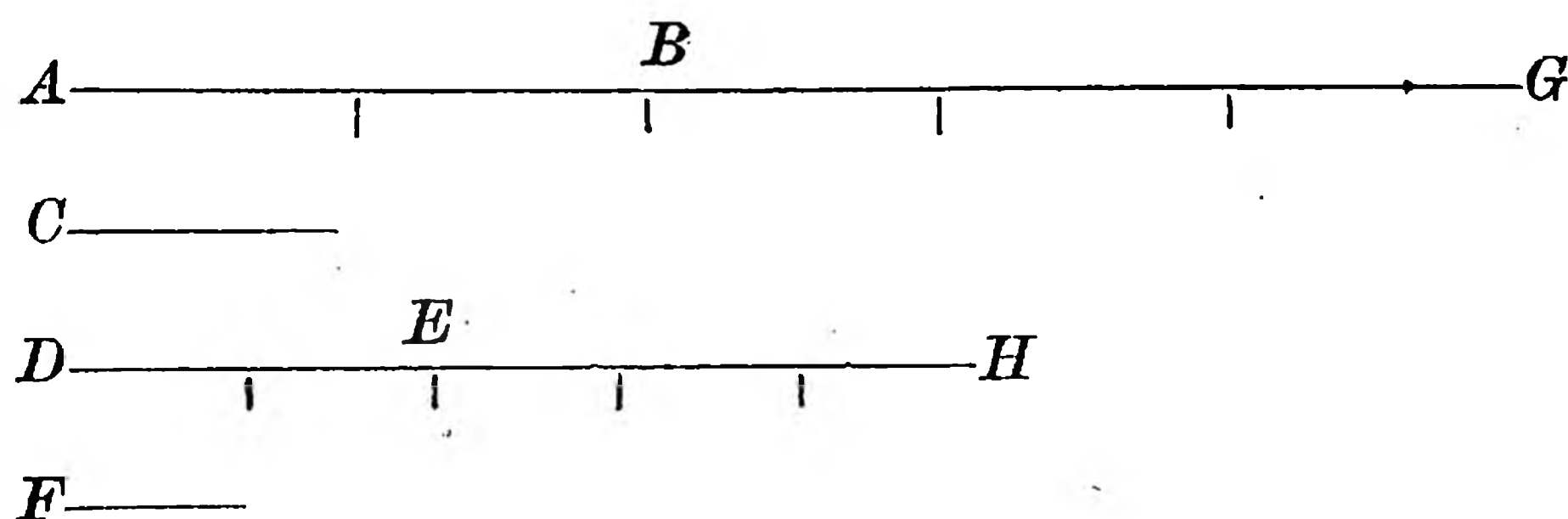
*Примѣч. 18.* Если  $a_1=nr_1$ ,  $a_2=nr_2$ ,  $a_3=nr_3$ , . . . , то:

$$a_1+a_2+a_3+\dots =n(r_1+r_2+r_3+\dots).$$

*Предложеніе 2.* Если первая величина будетъ такой же кратности второй, какой третья четвертой, а пятая величина будетъ такой же кратности второй, какой шестая четвертой, то сумма первой и пятой будетъ такой же кратности второй, какой сумма третьей и шестой четвертой (фиг. 184).

*Доказат.* Пусть первая величина  $AB$  будетъ такой же кратности второй  $C$ , какой третья величина  $DE$  четвертой  $F$ ; и пятая величина  $BG$  пусть будетъ такой же кратности второй  $C$ , какой шестая  $EH$  четвертой  $F$ ; то сумма первой и пятой будетъ такой же кратности второй  $C$ , какой сумма третьей и шестой будетъ четвертой  $F$ .

Фиг. 184.



Такъ какъ  $AB$  есть величина такой же кратности величины  $C$ , какой  $DE$  величины  $F$ , то сколько величинъ равныхъ  $C$  содержится въ  $AB$ , столько величинъ равныхъ  $F$  содержится въ  $DE$ ; по той же причинѣ, сколько величинъ равныхъ  $C$  содержится въ  $BG$ , столько величинъ равныхъ  $F$  содержится въ  $EH$ . Слѣдовательно сколько величинъ равныхъ  $C$  содержится въ цѣлой величинѣ  $AG$ , столько величинъ равныхъ  $F$  содержится въ цѣлой  $DH$ , т. е. какой кратности  $AG$  будетъ величины  $C$ , такой же кратности будетъ  $DH$  величины  $F$ .

*Примѣч. 19.* Если  $a_1=na_2$ ,  $a_3=na_4$ ,  $a_5=ma_2$ ,  $a_6=ma_4$ , то:

$$a_1+a_5=(n+m)a_2, \quad a_3+a_6=(n+m)a_4.$$

*Слѣдствіе.* Изъ предыдущаго очевидно, что если величины  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ , . . . , суть

кратныя величины  $r$ , а величины  $b_1, b_2, b_3, \dots$ , суть той же кратности величины  $q$ , то есть если мы имѣемъ:

$$a_1 = n_1 r, a_2 = n_2 r, \dots, a_m = n_m r$$

$$b_1 = n_1 q, b_2 = n_2 q, \dots, b_m = n_m q$$

то:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_m = (n_1 + n_2 + \dots + n_m) r$$

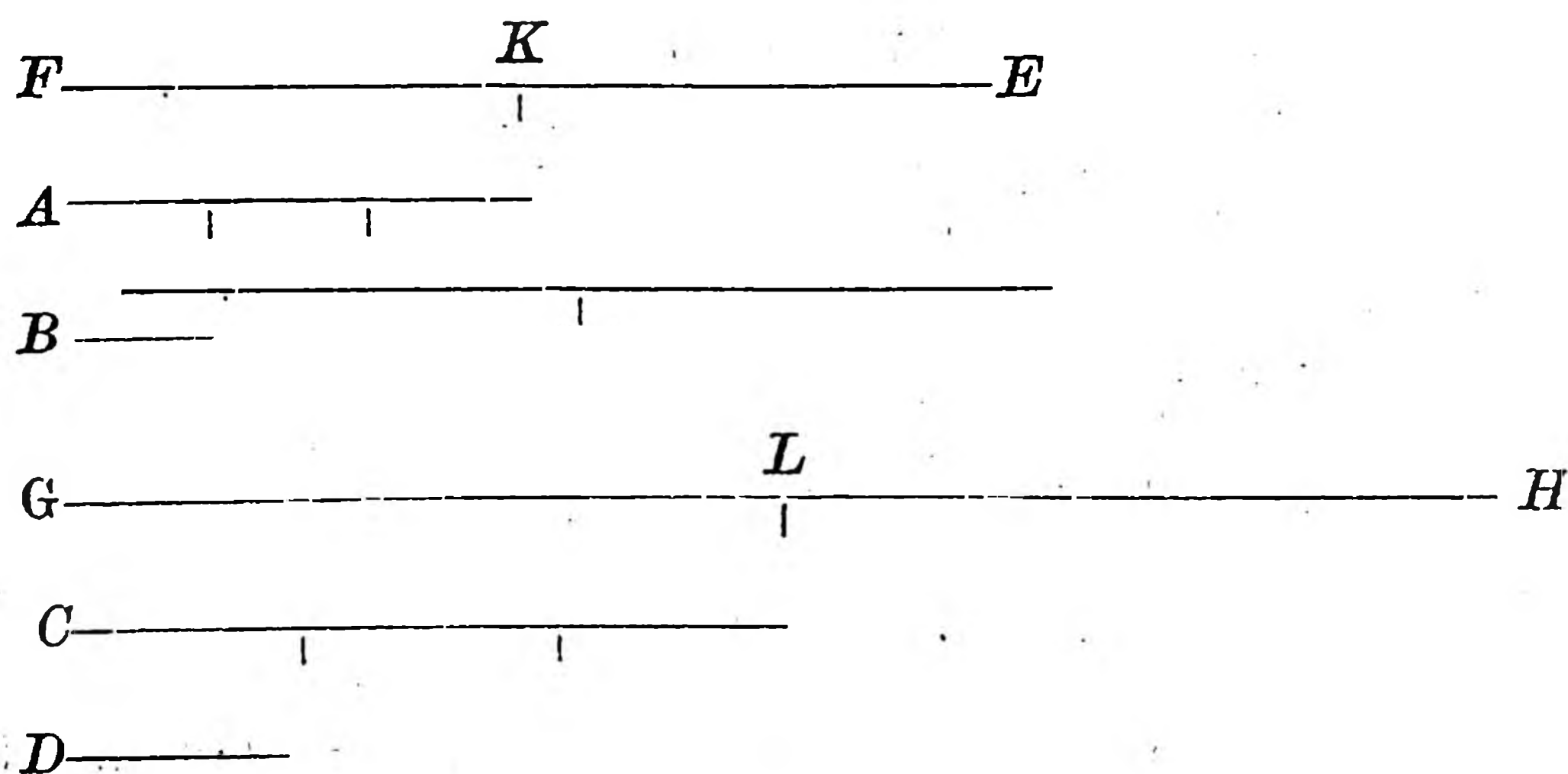
$$b_1 + b_2 + \dots + b_m = (n_1 + n_2 + \dots + n_m) q$$

*Предложение 3.* Если первая величина будетъ такой же кратности второй, какой третья четвертой и если возьмемъ равнократныя первой и третьей, то эти послѣднія будутъ равнократныя одна второй, а другая третьей (фиг. 185).

*Доказат.* Пусть первая величина  $A$  будетъ такой же кратности второй  $B$ , какой третья  $C$  четвертой  $D$ ; возьмемъ  $FE$  и  $GH$  равнократныя величины первой величины  $A$ , а вторая величины  $C$ , то  $FE$  будетъ такой же кратности величины  $B$ , какой  $GH$  будетъ величины  $D$ .

Такъ какъ  $FE$  есть величина такой же кратности отъ  $A$ , какой  $GH$  отъ  $C$ , то сколько равныхъ  $A$  содержится въ  $FE$ , столько величинъ равныхъ  $C$  содержится въ  $GH$ .

Фиг. 185.



Пусть  $FK$  и  $KE$  суть части величины  $FE$ , равныя величинѣ  $A$  и  $GL$ ,  $LH$  суть части величины  $GH$ , равныя  $C$ , то число частей  $FK$ ,  $KE$  будетъ равно числу частей  $GL$ ,  $LH$ ; но какъ  $A$  есть такой же кратности отъ  $B$ , какой  $C$  отъ  $D$ , то  $FK$ ,  $KE$  будутъ такой же кратности отъ  $B$ , какой  $GL$ ,  $LH$  отъ  $D$ , слѣдовательно сумма величинъ  $FK$  и  $KE$  или величина  $FE$  будетъ такой же кратности отъ  $B$ , какой сумма величинъ  $GL$  и  $LH$ , или величина  $GH$  будетъ отъ  $D$ .

*Примѣч. 20.* Если  $a_1 = nr_1$ ,  $b_1 = nq_1$ , то:

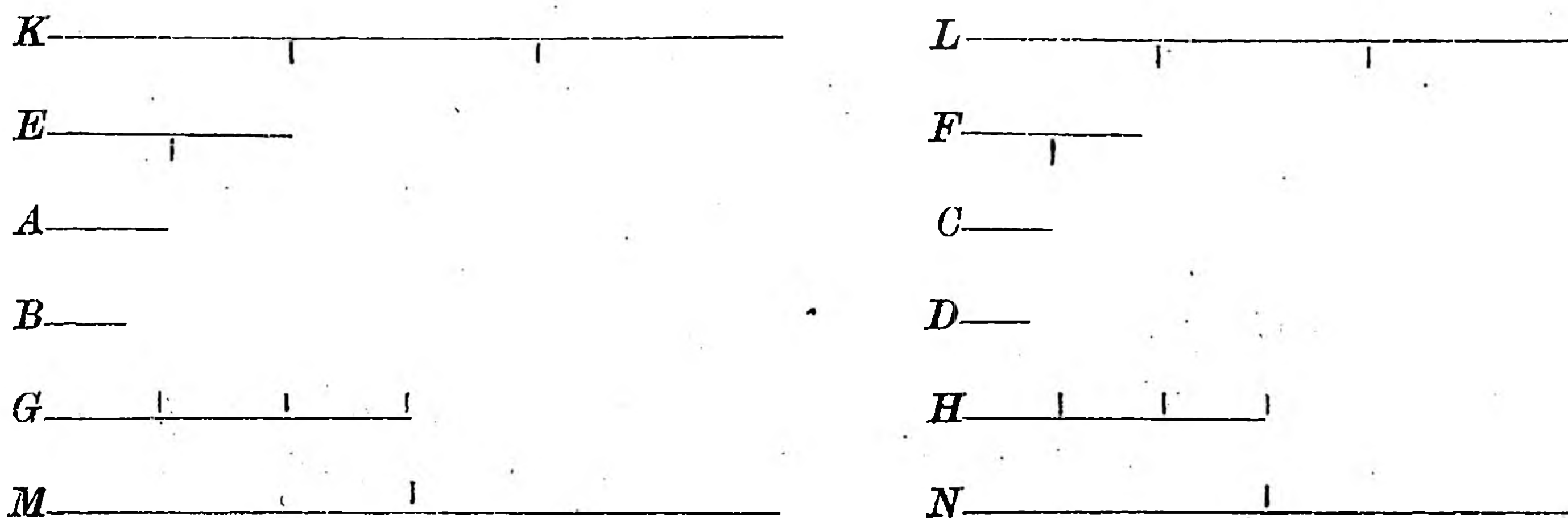
$$ma_1 = mnr_1, mb_1 = mnq_1.$$



*Предложение 4.* Если изъ четырехъ величинъ отношеніе первой ко второй равно отношенію третьей къ четвертой, то величины, равнократныя первой и третьей съ величинами, равнократными второй и четвертой, будутъ имѣть между собою тоже отношеніе (фиг. 186).

*Доказат.* Пусть первая величина  $A$  имѣетъ ко второй  $B$  такое же отношеніе, какое имѣетъ третья  $C$  къ четвертой  $D$ .

Фиг. 186.



Возьмемъ величины  $E$  и  $F$ , равнократныя величинъ  $A$  и  $C$ , и величины  $G$  и  $H$ , равнократныя величинъ  $B$  и  $D$ , но по какой нибудь другой кратности; то величина  $E$  будетъ имѣть такое же отношеніе къ величинѣ  $G$ , какое имѣетъ имѣетъ величина  $F$  къ величинѣ  $H$ .

Возьмемъ новыя величины  $K$  и  $L$ , равнократныя величинъ  $E$  и  $F$ , и  $M$  и  $N$ , равнократныя  $G$  и  $H$ . Такъ какъ  $E$  есть такой же кратности отъ  $A$ , какой  $F$  отъ  $C$ , а величины  $K$  и  $L$  взяты равнократными  $E$  и  $F$ , слѣдовательно  $K$  будетъ такой же кратности отъ  $A$ , какой  $L$  отъ  $C$  (кн. 5, пред. 3). По той же причинѣ  $M$  будетъ такой же кратности отъ  $B$ , какой  $N$  отъ  $D$ . Но отношеніе  $A$  къ  $B$  равно отношенію  $C$  къ  $D$ , а  $K$  и  $L$  суть равнократныя  $A$  и  $C$  по нѣкоторой кратности, а  $M$  и  $N$  суть равнократныя  $B$  и  $D$  по какой нибудь другой кратности, слѣдовательно, если  $K > M$ , то  $L > N$ , если  $K = M$ , то  $L = N$  и если  $K < M$ , то  $L < N$  (кн. 5, опред. 8). Но  $K$  и  $L$  суть равнократныя отъ  $E$  и  $F$ , по извѣстной кратности, а  $M$  и  $N$  суть также равнократныя отъ  $G$  и  $H$ , по какой нибудь другой кратности, слѣдовательно  $E$  относится къ  $G$ , какъ  $F$  къ  $H$  (кн. 5, опред. 5).

*Примъч. 21.* Если  $a : b = c : d$ , то:

$$ma : nb = mc : nd$$

и еще:

$$ma : b = mc : d$$

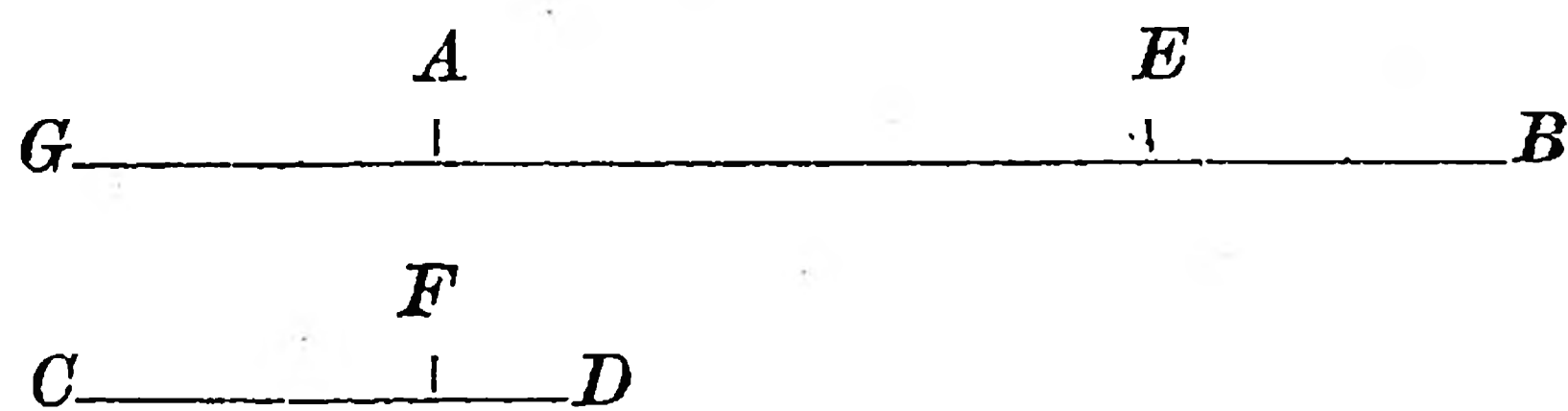
$$a : nb = c : nd.$$

*Предложение 5.* Если изъ двухъ величинъ первая будетъ извѣстной

кратности второй и некоторая часть первой будет такой же кратности некоторой части второй, то остатокъ первой будет той же кратности остатка второй (фиг. 187).

*Доказат.* Пусть величина  $AB$  будетъ кратная величины  $CD$  и часть ея  $AE$  пусть будетъ такой же кратности части  $CF$ , величины  $CD$ , какой  $AB$  отъ  $CD$ .

Фиг. 187.



Пусть  $AG$  будетъ такой же кратности отъ  $FD$ , какой  $AE$  отъ  $CF$ , то  $AE$  будетъ такой же кратности отъ  $CF$ , какой  $EG$  отъ  $CD$  (кн. 1, пред. 1). Но, по положенію,  $AE$  такой же кратности отъ  $CF$ , какой  $AB$  отъ  $CD$ , откуда  $AB$  и  $EG$  будутъ равнократныя величины  $CD$ , слѣдовательно  $EG=AB$ . Отнимая по  $AE$  найдемъ, что остатокъ  $AG$  будетъ равенъ остатку  $EB$  (кн. 1, акс. 3), но такъ какъ  $AE$  такой же кратности отъ  $CF$ , какой  $AG$  отъ  $FD$ , а  $AG=EB$ , то  $AE$  будетъ такой же кратности отъ  $CF$ , какой  $EB$  отъ  $FD$ . Но  $AE$  такой же кратности отъ  $CF$ , какой  $AB$  отъ  $CD$ , слѣдовательно  $EB$  будетъ такой же кратности  $FD$ , какой  $AB$  отъ  $CD$ .

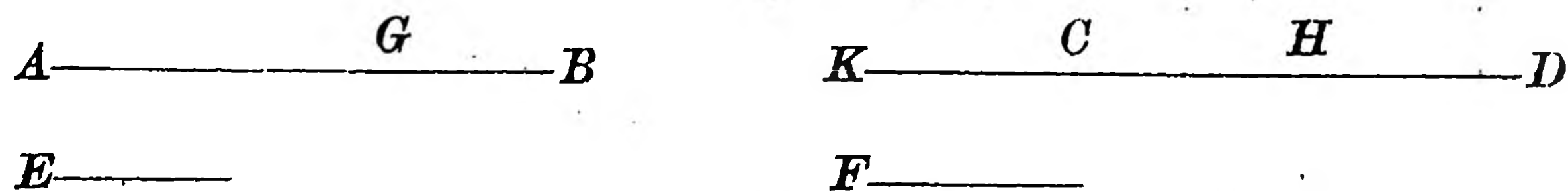
*Примѣч. 22.* Если  $a_1=nb_1$ , и если  $a_2$  и  $b_2$  суть части величинъ  $a_1$  и  $b_1$  и при томъ такія, что  $a_2=nb_2$ , то мы имѣемъ:

$$a_1 - a_2 = n(b_1 - b_2).$$

*Предложеніе 6.* Если двѣ величины будутъ равнократныя другихъ двухъ и если отъ первыхъ отымемъ равнократныя вторыхъ, то получимъ остатки, которые или будутъ равны вторымъ величинамъ, или будутъ отъ нихъ равнократныя.

*Доказат. Случай 1.* Пусть двѣ величины  $AB$  и  $CD$  будутъ равнократныя другихъ двухъ  $E$  и  $F$ . Если изъ  $AB$  и  $CD$  вычтемъ  $AG$  и  $CH$ , равнократныя тѣхъ же  $E$  и  $F$ , то остатки  $GB$  и  $HD$  будутъ или равны величинамъ  $E$  и  $F$ , или будутъ равнократныя этихъ послѣднихъ (фиг. 188).

Фиг. 188.

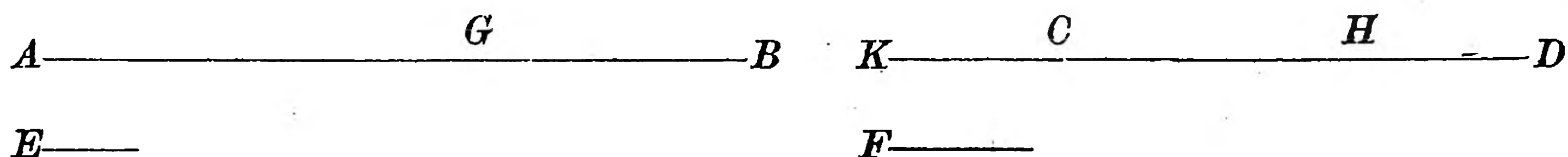


Возьмемъ во первыхъ  $GB$  и  $HD$  равныя  $E$  и  $F$  и возьмемъ еще

$KC=F$ ; такъ какъ  $AG$  такой же кратности отъ  $E$ , какой  $CH$  отъ  $F$ , то  $AB$  будетъ такой же кратности отъ  $E$ , какой  $KH$  отъ  $F$ . Но  $AB$  такой же кратности отъ  $E$ , какой  $CD$  отъ  $F$ , слѣдовательно  $KH$  и  $CD$  суть равнократныя отъ  $F$ , откуда  $KH=CD$  (кн. 5, акс. 1). Отнимая по  $CH$  мы получимъ остатокъ  $KC=HD$  (кн. 1, акс. 3), но  $KC=F$ , слѣдовательно и  $HD=F$ , откуда заключаемъ, что если  $GB=E$ , то  $HD=F$ .

*Случай 2.* Пусть теперь  $GB$  будетъ кратное отъ  $E$ , то  $HD$  будетъ равнократное отъ  $F$ . Возьмемъ величину  $CK$  такой же кратности отъ  $F$ , какой величина  $GB$  отъ  $E$  и какъ  $AG$  есть величина такой же кратности отъ  $E$ , какой  $CH$  отъ  $F$ , то  $AB$  будетъ такой же кратности отъ  $E$ , какой  $KH$  отъ  $F$  (кн. 5, пред. 2) (фиг. 189).

Фиг. 189.



Но  $AB$  такой же кратности отъ  $E$ , какой  $CD$  отъ  $F$ , слѣдовательно  $HK$  и  $CD$  суть величины равнократныя одной и той же величины  $F$ , слѣдовательно  $CD=HK$ . Отнимая по  $CH$ , получимъ равные остатки  $CK=HD$ ; и какъ  $GB$  такой же кратности отъ  $E$ , какой  $HD$  отъ  $F$  и  $CK=HD$ , то  $HD$  будетъ такой же кратности отъ  $F$ , какой  $GB$  отъ  $E$ .

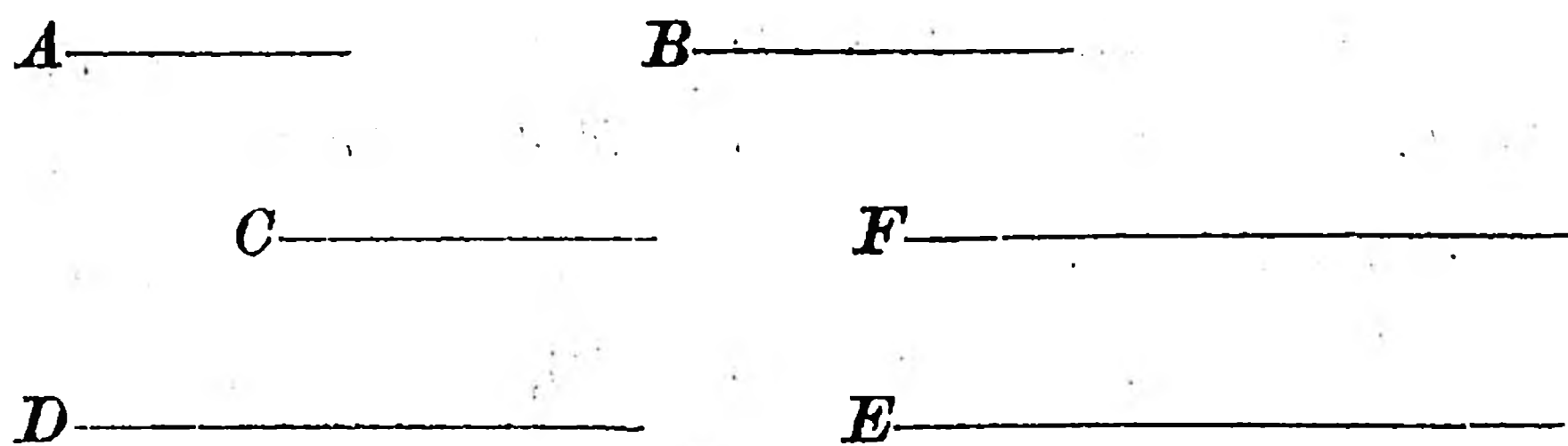
*Примѣч. 23.* Если  $a_1=nr_1$  и  $a_2=nr_2$ ,  $b_1=mr_1$ ,  $b_2=mr_2$ , то:

$$a_1-b_1=(n-m)r_1, \quad a_2-b_2=(n-m)r_2.$$

*Предложеніе 7.* Равныя величины къ одной и той же величинѣ имѣютъ одно и тоже отношеніе и одна и таже величина къ равнымъ величинамъ имѣетъ одно и тоже отношеніе (фиг. 190).

*Доказат. Случай 1.* Пусть  $A$  и  $B$  будутъ равныя величины и  $C$  другая какая нибудь величина. Я говорю, что величина  $A$  и  $B$  къ  $C$  имѣютъ одно и тоже отношеніе и что величина  $C$  къ величинамъ  $A$  и  $B$  имѣетъ одно и тоже отношеніе.

Фиг. 190.



Возьмемъ величины  $D$  и  $E$ , равнократныя величинѣ  $A$  и  $B$ , и вели-



чину  $F$  кратную отъ  $C$ , по какой нибудь другой кратности. Такъ какъ  $D$  есть величина такой же кратности отъ  $A$ , какой  $E$  отъ  $B$  и какъ по условію  $A=B$ , то мы имѣемъ также  $D=E$  (кн. 5, акс. 1). Слѣдовательно, если  $D>F$ , то также  $E>F$ , если  $D=F$ , то также  $E=F$  и если  $D<F$ , то также  $E<F$ , но  $D$  и  $E$  суть величины равнократныя величинъ  $A$  и  $B$  и  $F$  есть величина кратная величинъ  $C$ , по какой нибудь другой кратности, то (кн. 5, опред. 5)  $A:C=B:C$ .

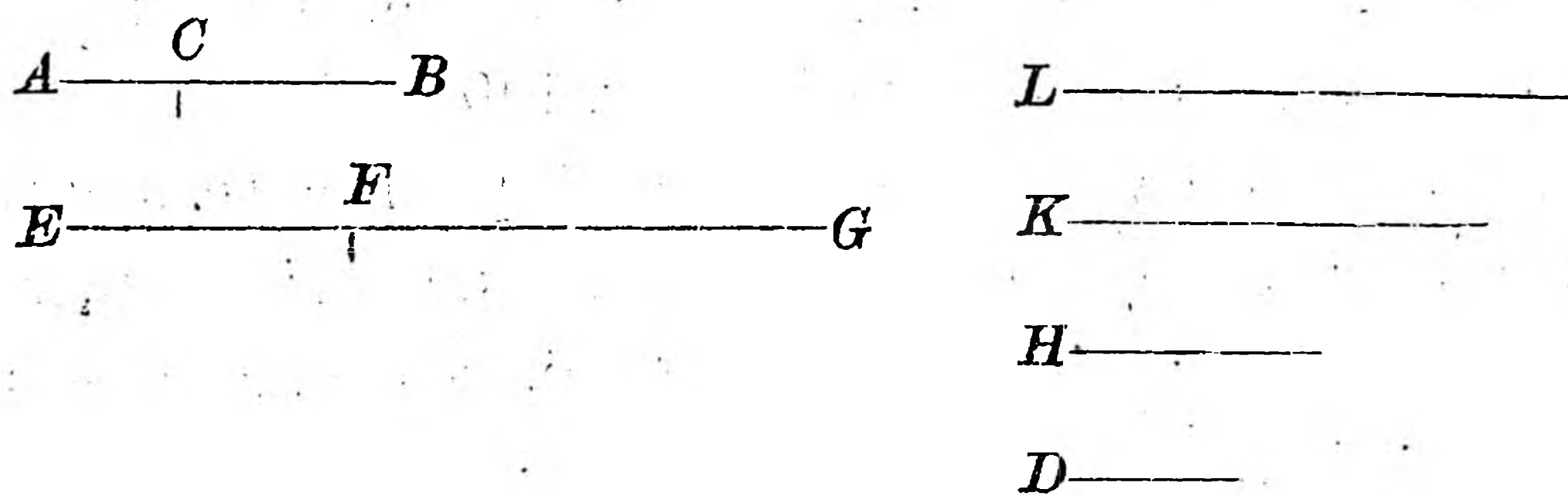
*Случай 2.* Величина  $C$  имѣетъ къ величинамъ  $A$  и  $B$  то же отношеніе. Поступая какъ выше, мы докажемъ, что  $D=E$ , слѣдовательно если  $F\geq D$ , то  $F\geq E$ ; но  $F$  есть величина кратная отъ  $C$ , а  $D$  и  $E$  суть величины равнократныя отъ  $A$  и  $B$ , по другой, какой нибудь кратности, слѣдовательно:  $C:A=C:B$  (кн. 5, опред. 5).

*Примѣч. 24.* Если  $A=B$ , то  $\frac{A}{C}=\frac{B}{C}$  и  $\frac{C}{A}=\frac{C}{B}$ .

*Предложеніе 8.* Изъ двухъ неравныхъ величинъ отношеніе большей больше отношенія меньшей къ одной и той же третьей величинѣ; и одна и та же величина къ величинѣ меньшей имѣетъ отношеніе больше отношенія ея къ величинѣ большей.

*Доказат. Случай 1.* Пусть  $AB$  и  $BC$  будутъ двѣ неравныя величины и пусть  $AB>BC$ , пусть  $D$  будетъ какая нибудь другая величина; говорятъ, что отношеніе  $AB$  къ  $D$  больше отношенія  $BC$  къ  $D$  и что отношеніе  $D$  къ  $BC$  больше отношенія  $D$  къ  $AB$  (фиг. 191).

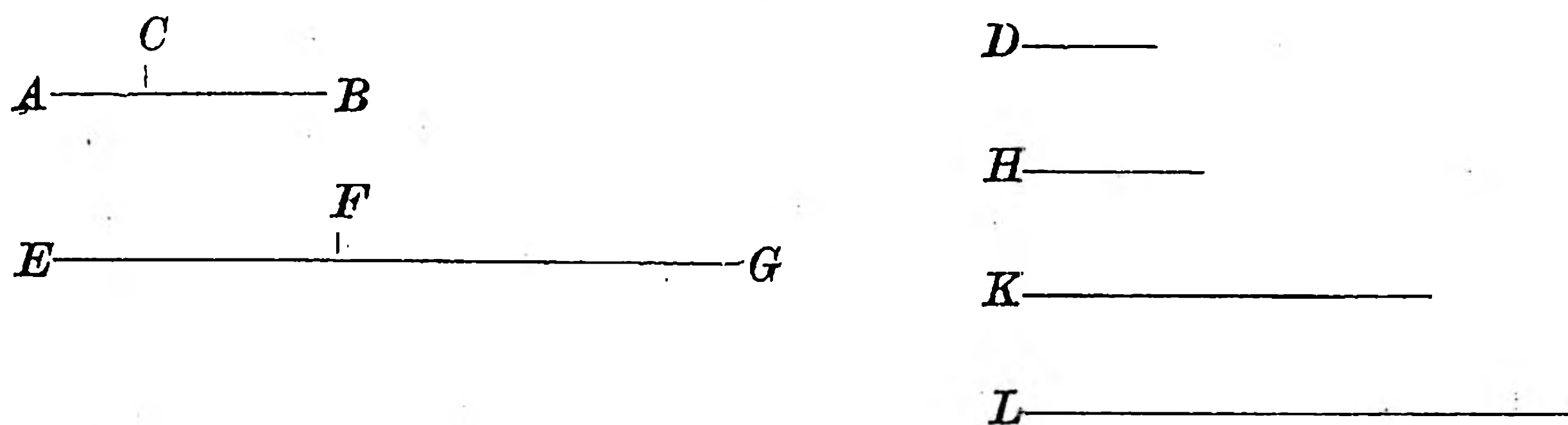
Фиг. 191.



Если та изъ величинъ  $AC$  и  $CB$ , которая не больше другой, не будетъ меньше  $D$ , то возьмемъ величины  $EF$  и  $FG$ , двойныя величинъ  $AC$  и  $CB$ . Если же та изъ величинъ, которая не больше другой будетъ меньше величины  $D$ , какъ въ фигурѣ 192, то умноженная, она можетъ превзойти  $D$ . Сколько разъ мы взяли меньшую изъ величинъ  $AC$  и  $CB$  для того, чтобы получить величину больше  $D$ , столько же разъ возьмемъ и

большую изъ нихъ. Пусть  $EF$  и  $FG$  будутъ такія кратныя величинъ  $AC$  и  $CB$ . Слѣдовательно, обѣ величины  $EF$  и  $FG$  будутъ больше  $D$ .

Фиг. 192.



Въ обоихъ случаяхъ возьмемъ  $H=2D$ ,  $K=3D$ , и т. д., пока не получимъ такую величину кратную  $D$ , которая первая будетъ больше  $FG$ . Пусть  $L$  будетъ эта первая величина и пусть  $K$  будетъ величина, кратная  $D$ , непосредственно меньше величины  $L$ .

Такъ какъ  $L$  есть первая изъ величинъ кратныхъ  $D$ , которая больше  $FG$ , а  $K$  есть величина непосредственно меньшей кратности той же  $D$ , то  $FG$  не меньше  $K$ .

Но какъ  $EF$  есть величина такой кратности отъ  $AC$ , какой  $FG$  отъ  $CB$ , то  $EG$  есть величина такой же кратности отъ  $AB$ , какой  $FG$  отъ  $CB$ , т. е.  $EG$  и  $FG$  суть равнократныя  $AB$  и  $CB$ .

Но было показано, что  $FG$  не меньше  $K$ , а  $EF$  больше  $D$ , слѣдовательно цѣлое  $EG$  больше  $K$  и  $D$  вмѣстѣ взятыхъ. Но  $K$  и  $E$ , вмѣстѣ взятые, равны  $L$ , слѣдовательно  $EG$  больше  $L$ . Но  $FG$  не больше  $L$ , а  $EG$  и  $FG$  равнократныя отъ  $AB$  и  $BC$  и  $L$  есть величина кратная отъ  $D$ , слѣдовательно отношеніе  $AB$  къ  $D$  больше отношенія  $BC$  къ  $D$  (кн. 5, опред. 7).

*Случай 2.* Отношеніе  $D$  къ  $BC$  будетъ больше отношенія  $D$  къ  $AB$ .

Сдѣлавъ тоже построеніе можно легко показать, что  $L$  больше  $FG$ , но не больше  $EG$ .

Но  $L$  есть кратное отъ  $D$ , а  $EG$  и  $FG$  кратныя отъ  $AB$  и  $CB$ , слѣдовательно отношеніе  $D$  къ  $BC$  больше отношенія  $D$  къ  $AB$ .

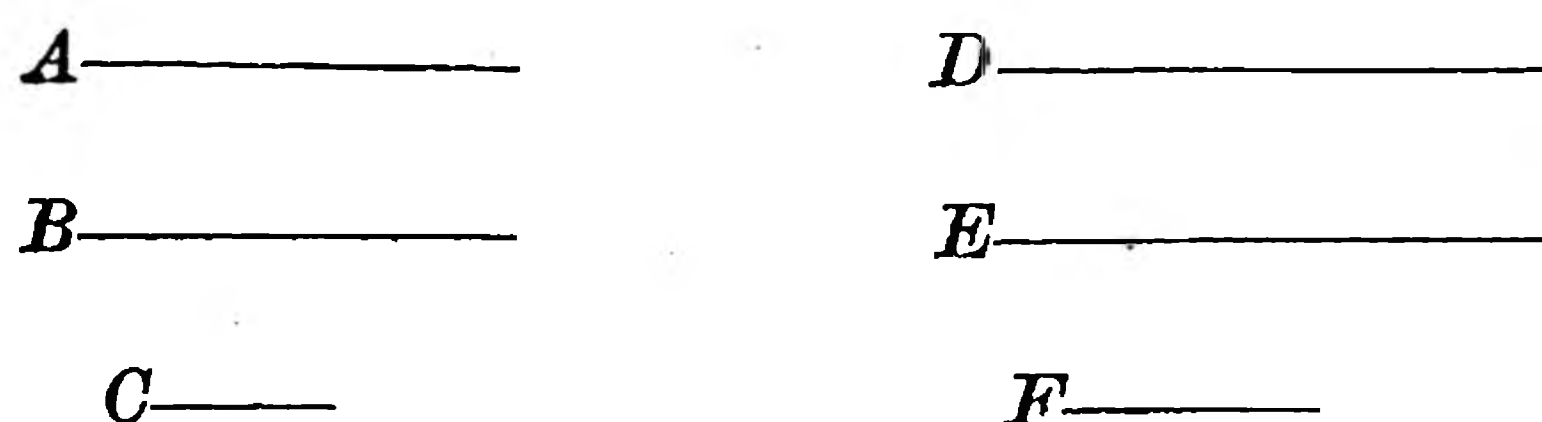
*Примѣч. 25.* Если  $A > B$ , то  $\frac{A}{D} > \frac{B}{D}$  и  $\frac{D}{A} < \frac{D}{B}$ , кака бы ни была величина  $D$ .

*Предложеніе 9.* Величины, имѣющія одно и тоже отношеніе съ одною и тою же величиною, равны между собою, и величины, къ которымъ одна и таже величина имѣетъ тоже отношеніе также равны между собою (фиг. 193).

*Доказат. Случай 1.* Положимъ, что величины  $A$  и  $B$  имѣютъ одно и тоже отношеніе къ величинѣ  $C$ , то  $A=B$ .

Въ самомъ дѣлѣ, если величины  $A$  и  $B$  не равны, то одна изъ нихъ больше другой, пусть  $A > B$ .

Фиг. 193.



Изъ того, что было показано въ пред. 8, мы всегда можемъ найти величины, равнократныя отъ  $A$  и  $B$  и величину кратную отъ  $C$  и при томъ такія, что кратное отъ  $A$  больше кратнаго отъ  $C$ , и кратное отъ  $B$  не больше кратнаго отъ  $C$ .

Пусть такія кратныя отъ  $A$  и  $B$  будутъ  $D$  и  $E$ , а кратное отъ  $C$  пусть будетъ  $F$ , слѣдовательно  $D > F$ , но  $E \text{ не } > F$ .

Но такъ какъ  $A$  къ  $C$  и  $B$  къ  $C$  имѣютъ тоже отношеніе, а  $D$  и  $E$  суть кратныя отъ  $A$  и  $B$  и  $F$  кратное отъ  $C$  и при томъ такія, что  $D > F$ , слѣдовательно должно быть  $E > F$ . Но  $E$  не больше  $F$ , слѣдовательно невозможно, чтобы  $A$  не было равно  $B$ .

*Случай 2.* Теперь пусть  $C$  имѣетъ къ  $A$  и  $B$  одно и тоже отношеніе,  $A$  будетъ равно  $B$ .

Изъ того, что было показано въ пред. 8, можно всегда найти величину  $F$ , кратную отъ  $C$ , и кратныя величины  $D$  и  $E$  отъ  $B$  и  $A$  и при томъ такія, что  $F > E$ , но не  $> D$ .

Такъ какъ  $C$  относится къ  $B$ , какъ  $C$  къ  $A$ , и  $F$  кратное отъ  $C$  больше  $D$  кратнаго отъ  $A$ , слѣдовательно  $F$ , кратное отъ  $B$ , больше отъ  $D$ , но мы имѣемъ  $F \text{ не } > D$ , что невозможно. Слѣдовательно  $A = B$ .

*Примѣч. 26.* Если  $\frac{A}{C} = \frac{B}{C}$ , то  $A = B$ , или если  $\frac{C}{A} = \frac{C}{B}$ , то также  $A = B$ .

*Предложеніе 10.* Если отношенія двухъ величинъ къ третьей неравны, то та изъ нихъ, которой отношеніе больше, больше той которой отношеніе меньше и та, къ которой одна и таже величина имѣетъ отношеніе больше, меньше той, къ которой она имѣетъ отношеніе меньшее (фиг. 194).

*Доказат. Случай 1.* Пусть отношеніе  $A$  къ  $C$  больше отношенія  $B$  къ  $C$ , то  $A > B$ .

Такъ какъ отношеніе  $A$  къ  $C$  больше отношенія  $B$  къ  $C$ , то (кн. 5, опред. 7) есть нѣкоторыя величины  $D$  и  $E$ , равнократныя величинъ  $A$  и  $B$ , и нѣкоторая величина  $F$ , кратная отъ  $C$  и при томъ такія, что  $D > F$ , но  $E \text{ не } > F$ . Но  $D$  и  $E$  суть величины, равнократныя величинъ  $A$  и  $B$ , слѣдовательно  $A > B$  (кн. 5, акс. 4).



отъ  $B, D, F$ ; то, если  $G \geq L$ , мы будемъ имѣть и  $H \geq M$ ,  $K \geq N$ , откуда, если  $G \geq L$ , то и сумма величинъ  $G, H, K \geq$  суммы величинъ  $L, M, N$ ; но  $G$  и сумма величинъ  $G, H, K$  суть равнократныя, первая отъ  $A$ , а вторая отъ суммы величинъ  $A, C, E$  (кн. 5, пред. 1), а также  $L$  и сумма величинъ  $L, M, N$  суть равнократныя первая отъ  $B$ , а вторая отъ суммы величинъ  $B, D, F$ , по другой кратности; слѣдовательно (кн. 5, опред. 5)  $A$  относится къ  $B$ , какъ сумма величинъ  $A, C, E$  къ суммѣ величинъ  $B, D, F$ .

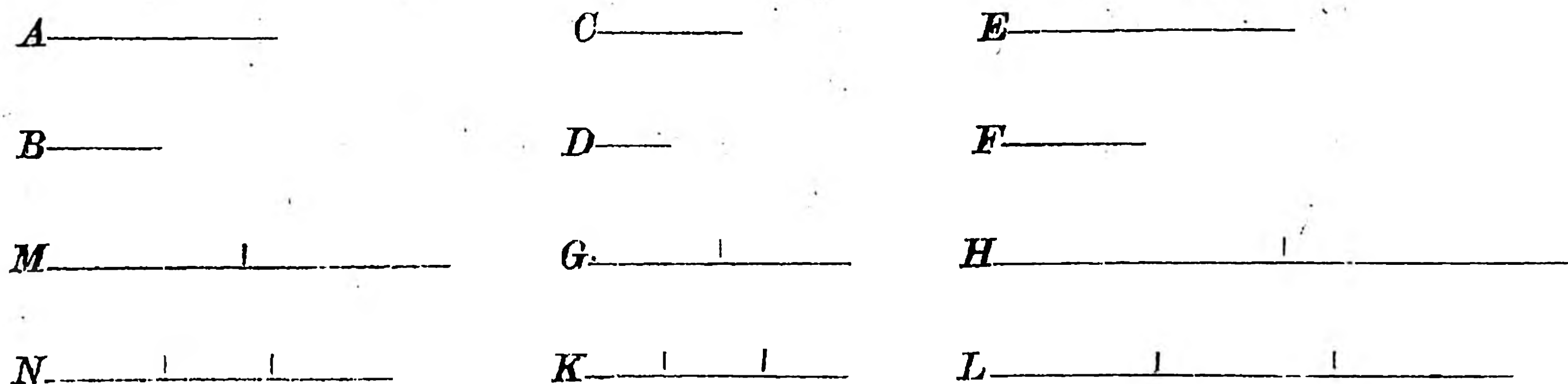
*Примѣч. 29.* Если  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ , то мы имѣемъ:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

*Предложеніе 13.* Если первая величина относится ко второй, какъ третья къ четвертой, и если отношеніе третьей къ четвертой больше отношенія пятой къ шестой, то и отношеніе первой ко второй больше отношенія пятой къ шестой (фиг. 197).

*Доказат.* Пусть первая величина  $A$  относится ко второй  $B$ , какъ третья  $C$  къ четвертой  $D$ , но пусть отношеніе третьей  $C$  къ четвертой  $D$  больше отношенія пятой  $E$  къ шестой  $F$ , я говорю, что отношеніе  $A$  къ  $B$  будетъ больше отношенія  $E$  къ  $F$ . Такъ какъ отношеніе  $C$  къ  $D$  больше отношенія  $E$  къ  $F$ , то есть (кн. 5, опред. 7) нѣкоторыя величины  $G, H$ , равнократныя величинъ  $C$  и  $E$ , и нѣкоторыя другія величины  $K, L$ , равнократныя величинъ  $D, F$ , такія, что непремѣнно  $G > K$ , но  $H \not> L$ . Возьмемъ величины  $M$  и  $N$  кратныя отъ  $A$  и  $B$ , различной кратности.

Фиг. 197.



Такъ какъ  $A$  относится къ  $B$ , какъ  $C$  къ  $D$  и взяты равнократныя  $M$  и  $G$  величинъ  $A$  и  $C$  и равнократныя  $N$  и  $K$  величинъ  $B$  и  $D$ , то,

если  $G \geq K$ , необходимо будетъ  $M \geq N$ . Но  $H$  не больше  $L$ , а  $M$  и  $H$  суть равнократныя отъ  $A$  и  $E$ , а  $N$  и  $L$  равнократныя отъ  $B$  и  $F$ , по другой кратности, слѣдовательно (кн. 5, опред. 7), отношеніе  $A$  къ  $B$  будетъ больше отношенія  $E$  къ  $F$ .

*Примѣч. 30.* Если  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$  и  $\frac{C}{D} > \frac{E}{F}$ , то:

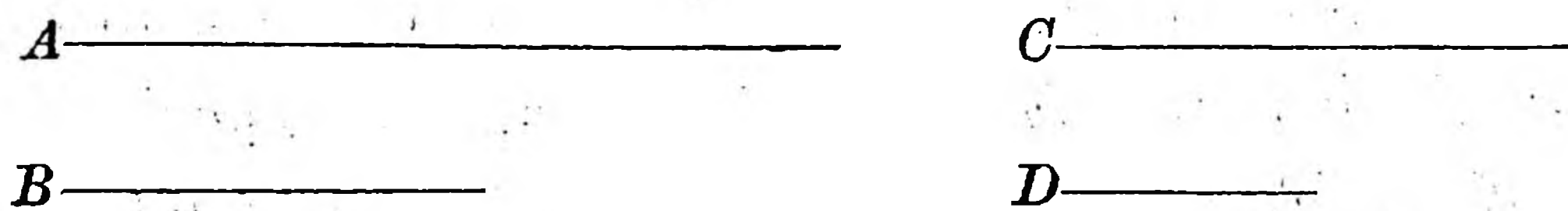
$$\frac{A}{B} > \frac{E}{F}.$$

*Предложеніе 14.* Если четыре величины пропорціональны, т. е. первая относится ко второй, какъ третья къ четвертой и если первая больше, равна или меньше третьей, то вторая будетъ также больше, равна или меньше четвертой (фиг. 198).

*Доказат. Случай 1.* Пусть  $A, B, C$  и  $D$  будутъ эти четыре величины, то если  $A > C$ , то  $B > D$ .

Такъ какъ  $A > C$ , то отношеніе  $A$  къ  $B$  будетъ больше отношенія  $C$  къ  $B$  (кн. 5, опред. 8), но  $A$  относится къ  $B$  какъ  $C$  къ  $D$ , слѣдовательно (кн. 5, пред. 13), отношеніе  $C$  къ  $D$  будетъ больше отношенія  $C$  къ  $B$ . Но та изъ величинъ, къ которой одна и таже величина имѣетъ, отношеніе больше, меньше (кн. 5, пред. 10), слѣдовательно  $D < B$ , или  $B > D$ .

Фиг. 198.



*Случай 2.* Если  $A = C$ , то  $B = D$ . Въ самомъ дѣлѣ, если  $A$  относится къ  $B$ , какъ  $C$  къ  $D$  и  $A = C$ , то  $A$  будетъ относится къ  $B$  какъ  $A$  къ  $D$ , слѣдовательно  $B = D$  (кн. 5, пред. 10).

*Случай 3.* Наконецъ если  $A < C$ , то будетъ и  $B < D$ . Такъ какъ  $C > A$ , и  $C$  относится къ  $D$  какъ  $A$  къ  $B$ , слѣдовательно, какъ въ первомъ случаѣ,  $D > B$  или  $B < D$ .

*Примѣч. 31.* Если  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$  и если  $A \geq C$ , то:

$$B \geq D.$$

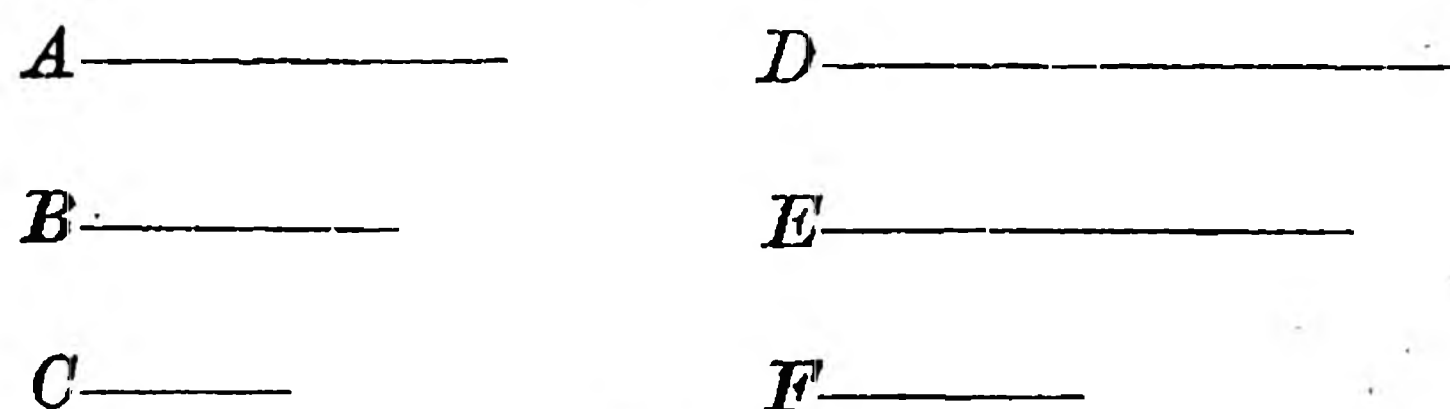
*Предложеніе 15.* Двѣ величины имѣютъ между собою такое же отношеніе, какое имѣютъ ихъ равнократныя (фиг. 199).

*Доказат.* Пусть  $AB$  будетъ такое кратное отъ  $C$ , какое  $ED$  отъ  $F$ ; я говорю, что отношеніе  $C$  къ  $F$  будетъ равно отношенію  $AB$  къ  $ED$ .

*Случай 2.* Пусть отношеніе  $C$  къ  $B$  больше отношенія  $C$  къ  $A$ , то  $A > B$ . Такъ какъ всегда есть кратное  $F$  отъ  $C$  и равнократныя  $E$  и  $D$  отъ  $B$  и  $A$ , притомъ такія, что  $F > E$ , но не  $> D$ , слѣдовательно  $E < D$  (кн. 5, опред. 7).

Но какъ  $E$  и  $D$  суть равнократныя отъ  $B$  и  $A$ , и  $E < D$ , то  $B < A$ .

Фиг. 194.



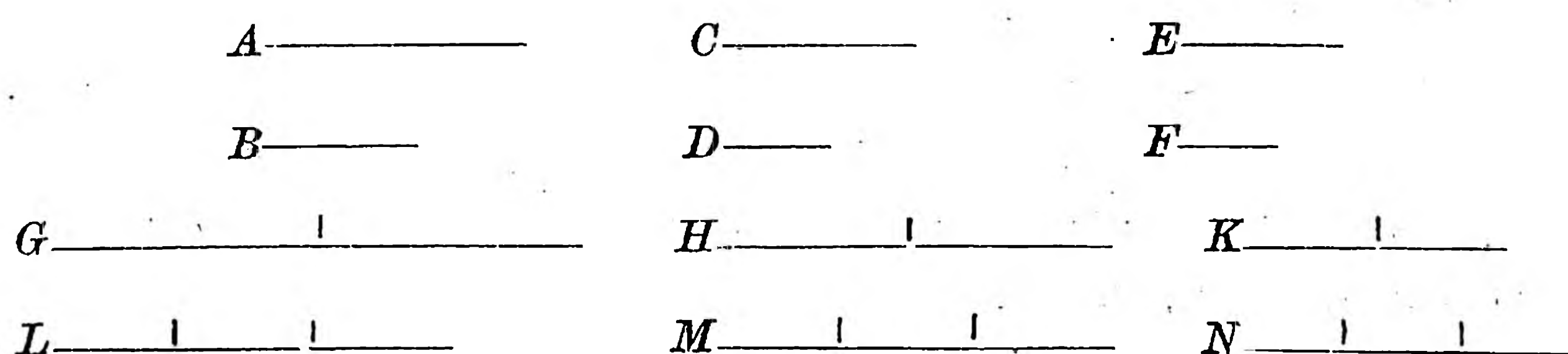
*Примѣч. 27.* Если  $\frac{A}{C} > \frac{B}{C}$ , то  $A > B$ , или если  $\frac{C}{A} < \frac{C}{B}$ , то  $B < A$ .

*Предложеніе 11.* Отношенія равныя одному и тому же отношенію равны между собою (фиг. 195).

*Доказат.* Пусть отношеніе  $A$  къ  $B$  равно отношенію  $C$  къ  $D$ , а отношеніе  $C$  къ  $D$  равно отношенію  $E$  къ  $F$ ; я говорю что отношеніе  $A$  къ  $B$  равно отношенію  $E$  къ  $F$ .

Возьмемъ равнократныя величинъ  $A$ ,  $C$ ,  $E$  и пусть онѣ будутъ  $G$ ,  $H$  и  $K$ , возьмемъ также, по какой нибудь другой кратности, равнократныя величинъ  $B$ ,  $D$  и  $F$  и пусть онѣ будутъ  $L$ ,  $M$  и  $N$ .

Фиг. 195.



Такъ какъ величина  $A$  относится къ  $B$ , какъ  $C$  къ  $D$  и взяты равнократныя  $G$ ,  $H$  величинъ  $A$ ,  $C$  и равнократныя, по другой кратности,  $L$ ,  $M$  величинъ  $B$ ,  $D$ , то, если  $G \geq L$ , мы будемъ имѣть также  $H \geq M$  (кн. 5, опред. 5). Такъ какъ  $C$  относится къ  $D$ , какъ  $E$  къ  $F$ , и взяты равнократныя  $H$ ,  $K$  величинъ  $C$ ,  $E$  и равнократныя  $M$ ,  $N$  величинъ  $D$ ,  $F$ , то, если  $H \geq M$ , мы будемъ имѣть и  $K \geq N$ . Но  $G$  и  $K$  суть величины равнократныя  $A$  и  $E$ , по какой нибудь кратности, а  $L$ ,  $N$  суть величины равнократныя  $B$  и  $F$ , по какой нибудь другой кратности, слѣдовательно  $A$  относится къ  $B$ , какъ  $E$  къ  $F$  (кн. 5, опред. 5).



Примеч. 28. Если  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ , а  $\frac{C}{D} = \frac{E}{F}$ , то:

$$\frac{A}{B} = \frac{E}{F}.$$

Здѣсь Симсонъ прибавилъ четыре предложенія, опущенныя Евклидомъ, и доказалъ ихъ по его же способу. Я приведу только предложенія, а доказательства оставляю, такъ какъ ихъ легко доказать самому.

*Предлож. А.* Если первая изъ четырехъ величинъ имѣетъ ко второй такое же отноше-  
шеніе, какъ третья къ четвертой и если первая  $\begin{smallmatrix} > \\ = \\ < \end{smallmatrix}$  второй, то третья также  $\begin{smallmatrix} > \\ = \\ < \end{smallmatrix}$  четвертой.

*Предлож. В.* Если четыре величины пропорціональны, то онѣ и *обратно* пропорціо-  
нальны, т. е. если  $A:B=C:D$ , то  $B:A=D:C$ .

*Предлож. С.* Если первая величина такой же кратности, или такая же часть второй, какой кратности, или какая часть третья четвертой, то первая будетъ такъ относиться ко второй, какъ третья къ четвертой.

Если  $A=nB$ ,  $C=nD$ , или если  $A=\frac{1}{n}B$ ,  $C=\frac{1}{n}D$ , то  $A:B=C:D$ .

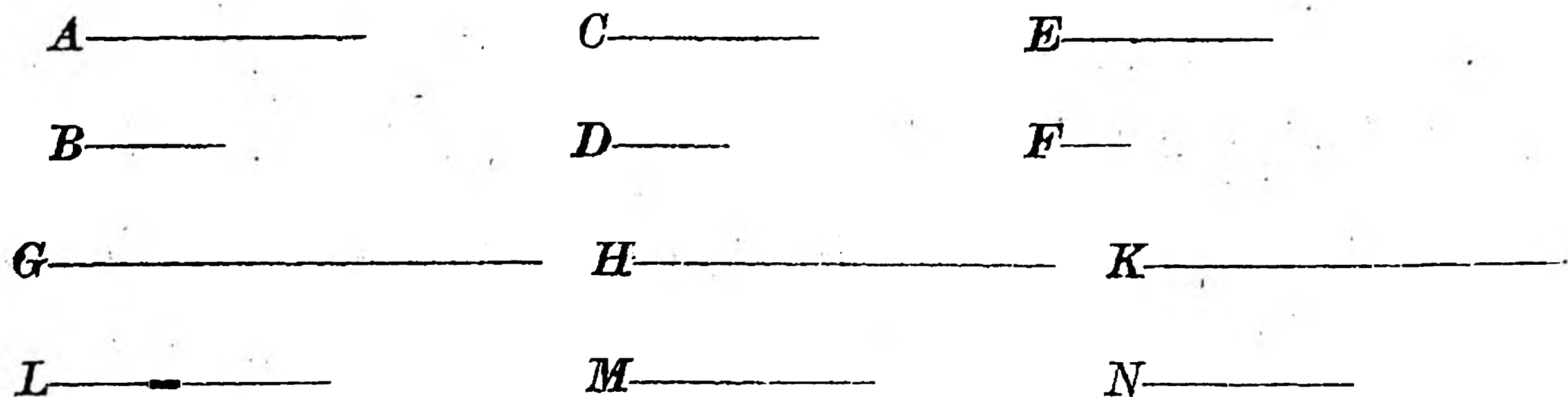
*Предлож. D.* Если первая величина относится ко второй, какъ третья къ четвертой, и если первая есть кратная, или часть второй, то третья будетъ такой же кратности, или такая же часть четвертой.

Если  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$  и если  $A=nB$  или  $A=\frac{1}{n}B$ , то  $C=nD$  или  $C=\frac{1}{n}D$ .

*Предложеніе 12.* Если какое нибудь число величинъ пропорціональ-  
ны, то одинъ изъ предъидущихъ членовъ относится къ своему послѣдую-  
щему, какъ сумма всѣхъ предъидущихъ относится къ суммѣ всѣхъ послѣ-  
дующихъ (фиг. 196).

*Доказат.* Пусть будетъ сколько угодно пропорціональныхъ величинъ  
 $A, B, C, D, E, F$ , т. е. что  $A$  относится къ  $B$ , какъ  $C$  къ  $D$ , какъ  $E$   
къ  $F$ , я говорю что  $A$  относится къ  $B$ , какъ сумма величинъ  $A, C, E$   
къ суммѣ величинъ  $B, D, F$ .

Фиг. 196.



Возьмемъ равнократныя  $G, H, K$  величинъ  $A, C, E$ , по какой ни-  
будь кратности и равнократныя  $L, M, N$  величинъ  $B, D, F$  по какой  
нибудь другой кратности.

Такъ какъ  $A$  относится къ  $B$ , какъ  $C$  къ  $D$  и какъ  $E$  къ  $F$   
и взяты  $G, H, K$  равнократныя отъ  $A, C, E$  и равнократныя  $L, M, N$

слѣдовательно (кн. 5, пред. 2), цѣлая величина  $HO$  будетъ такой же кратности отъ  $EB$ , какой цѣлая  $MP$  отъ  $FD$ , т. е.  $HO$  и  $MP$  суть величины равнократныя отъ  $EB$  и  $FD$ . Но  $AB$  такъ относится къ  $EB$ , какъ  $CD$  къ  $FD$  и взяты равнократныя  $GK$  и  $LN$  отъ  $AB$  и  $CD$  и другія равнократныя  $HO$  и  $MP$  отъ  $EB$  и  $FD$ , то, если  $GK \geq HO$ ,  $LN \geq MP$ . Но если  $GH > KO$ , то, прибавляя по  $HK$ , получимъ  $GK > HO$ , а также  $LN > MP$ , отнимая по  $MN$ , получимъ  $LM > NP$ , слѣдовательно, если  $GH > KO$ , то также  $LM > NP$ . Точно также можно показать, что если  $GH \leq KO$ , то  $LM \leq NP$ . Но  $GH$  и  $LM$  суть величины равнократныя величинъ  $AE$  и  $CF$ , а  $KO$  и  $NP$  суть равнократныя, по другой кратности, отъ  $EB$  и  $FD$ , слѣдовательно  $AE$  такъ относится къ  $EB$ , какъ  $CF$  къ  $FD$  (кн. 5, опред. 5).

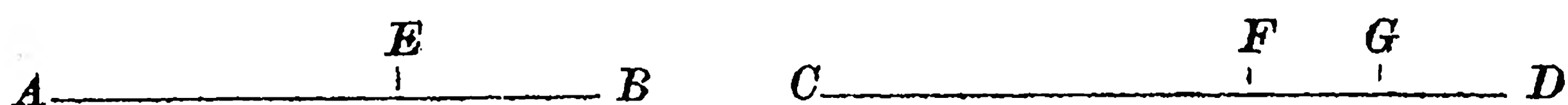
Примѣч. 34. Если  $a_1 + a_2 : a_2 = b_1 + b_2 : b_2$ , то:

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2.$$

**Предложеніе 18.** Если четыре величины отдѣльно пропорціональны, то онѣ пропорціональны и взятыя вмѣстѣ, т. е. если первая относится такъ ко второй, какъ третья къ четвертой, то первая и вторая вмѣстѣ будетъ такъ относиться ко второй, какъ третья и четвертая вмѣстѣ къ четвертой (фиг. 202).

**Доказат.** Пусть четыре величины  $AE$ ,  $EB$ ,  $CF$ ,  $FD$  будутъ пропорціональны, т. е.  $AE$  такъ относится къ  $EB$ , какъ  $CF$  къ  $FD$ , говорю, что  $AE$  и  $EB$  вмѣстѣ, т. е.  $AB$  будетъ такъ относиться къ  $EB$ , какъ  $CF$  и  $FD$  вмѣстѣ, т. е.  $CD$  къ  $FD$ .

Фиг. 202.



Если бы величина  $AB$  не относилась къ  $EB$ , какъ  $CD$  къ  $FD$ , а какъ  $CD$  къ какой нибудь другой величинѣ большей или меньшей отъ  $FD$ .

Пусть во первыхъ она будетъ  $GD < FD$ , т. е. что  $AB$  такъ относится къ  $EB$ , какъ  $CD$  къ  $GD$ , то (кн. 5, пред. 17)  $AE$  будетъ такъ относиться къ  $EB$ , какъ  $CG$  къ  $GD$ . Но по условію  $AE$  такъ относится къ  $EB$ , какъ  $CF$  къ  $FD$ , слѣдовательно (кн. 5, пред. 11)  $CG$  будетъ такъ относиться къ  $GD$ , какъ  $CF$  къ  $FD$ . Но очевидно  $CG > CF$ , слѣдовательно (кн. 5, пред. 14)  $GD > FD$ , что противурѣчитъ положенію  $GD < FD$ .

Точно также можно показать, что  $GD$  не можетъ быть и  $> FD$ , слѣдовательно  $GD = FD$ .

Примѣч. 35. Если  $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$ , то:

$$a_1 + a_2 : a_2 = b_1 + b_2 : b_2.$$

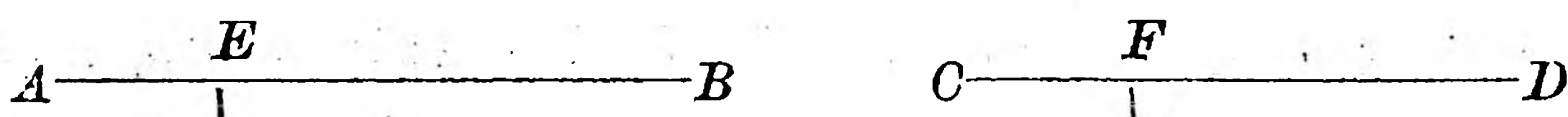
Симсонъ измѣнилъ предыдущее доказательство Евклида и замѣнилъ его другимъ подобнымъ предшествующимъ этому послѣднему.

**Предложеніе 19.** Если цѣлыя величины относятся между собою, какъ ихъ части, то и остатки будутъ относиться, между собою, какъ цѣлыя (фиг. 203).

**Доказат.** Если  $AB$  такъ относится къ  $CD$ , какъ часть  $AB$ ,  $EB$  относится къ части  $CD$ ,  $FD$ , то  $EB$  будетъ такъ относиться къ  $FD$ , какъ  $AB$  къ  $CD$ .

Такъ какъ  $AB$  относится къ  $CD$ , какъ  $AE$  къ  $CF$ , то (кн. 5, пред. 16)  $AB$  будетъ такъ относиться къ  $AE$ , какъ  $CD$  къ  $CF$ , слѣдовательно, (кн. 5, пред. 17)  $EB$  будетъ такъ относиться къ  $AE$  какъ  $FD$  къ  $CF$ , слѣдовательно (кн. 5, пред. 16)  $EB$  будетъ такъ относиться къ  $FD$ , какъ  $AE$  къ  $CF$ . Но отношеніе  $AE$  къ  $CF$  равно отношенію  $AB$  къ  $CD$  по условію, слѣдовательно  $AB$  такъ относится къ  $CD$ , какъ  $EB$  къ  $FD$ .

Фиг. 203.



Примѣч. 36. Если  $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$ , то:

$$a_1 : a_2 = a_1 - b_1 : a_2 - b_2.$$

Симсонъ здѣсь прибавилъ еще слѣдующее предложеніе:

**Предлож. E.** Если четыре величины пропорціональны, то онѣ и обратно пропорціональны, т. е. если  $AB : BE = CD : DF$  (фиг. 203), то и обратно  $AB : AE = CD : CF$  (кн. 5, опред. 17).

**Предложеніе 20.** Если есть три величины и другія три, притомъ такія, что взятая по двѣ имѣютъ тоже самое отношеніе, то если первая  $\geq$  третьей, четвертая будетъ  $\geq$  шестой (фиг. 204).

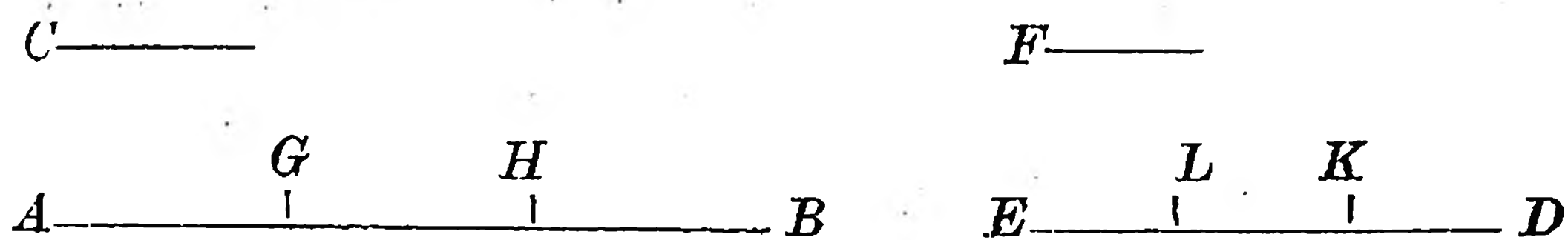
**Доказат.** Пусть первыя три величины будутъ  $A, B, C$ , а вторыя три  $D, E, F$  и при томъ такія, что  $A : B = D : E$ ,  $B : C = E : F$ , я говорю, что если  $A \geq C$ , то  $D \geq F$ .

Пусть  $A > C$ , то мы видѣли (кн. 5, пред. 8), что  $\frac{A}{B} > \frac{C}{B}$ . Но мы имѣемъ  $A : B = D : E$ , слѣдовательно (кн. 5, пред. 13)  $\frac{D}{E} > \frac{C}{B}$ . Но мы такъ



Такъ какъ величина  $AB$  такой же кратности  $C$ , какой  $ED$  отъ  $F$ , то сколько величинъ  $C$  заключается въ  $AB$ , столько величинъ  $F$  за-

Фиг. 199.



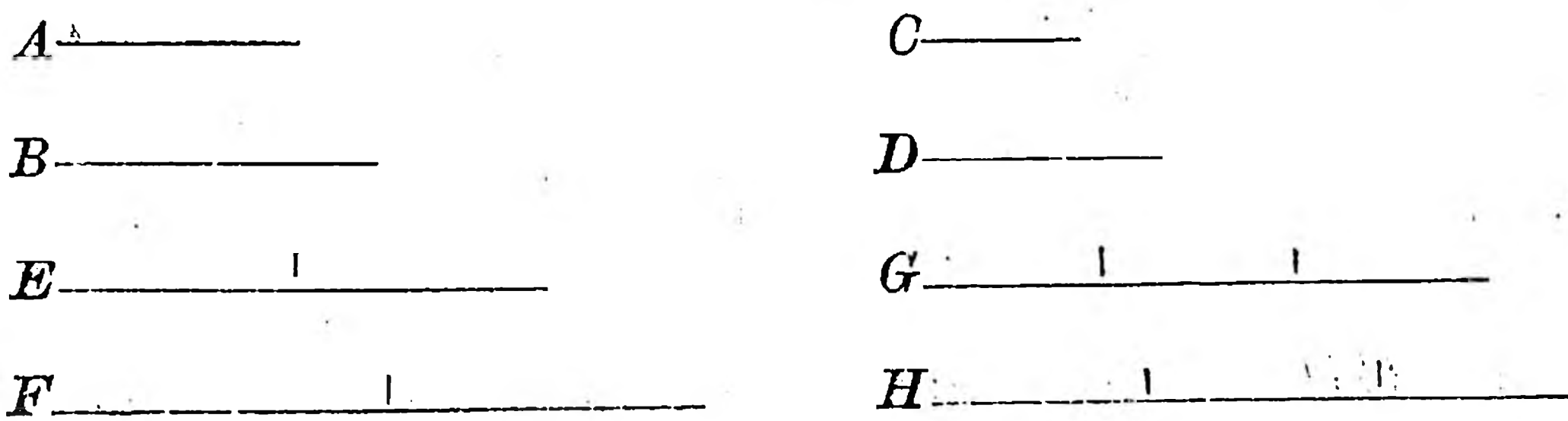
ключается въ  $ED$ . Пусть  $AG$ ,  $GH$ ,  $HB$  суть части  $AB$  равныя  $C$  и  $EL$ ,  $LK$ ,  $KD$  части  $ED$  равныя  $F$ , число частей въ  $AB$  и  $ED$  будетъ одно и тоже. Слѣдовательно (кн. 5, пред. 7), величина  $AG$  будетъ такъ относиться къ  $EL$ , какъ  $GH$  къ  $KL$ , и какъ  $HB$  къ  $KD$ . Но предъидущій относится къ послѣдующему, какъ сумма предъидущихъ къ суммѣ послѣдующихъ (кн. 5, пред. 12), слѣдовательно,  $AG$  такъ относится къ  $EL$ , какъ  $AB$  къ  $ED$ , но  $AG=C$ , а  $EL=F$ , слѣдовательно  $C$  относится къ  $F$ , какъ  $AB$  къ  $ED$ .

Примѣч. 32.  $\frac{C}{F} = \frac{nC}{nF}$ .

**Предложеніе 16.** Если четыре величины пропорціональны, то онѣ останутся пропорціональны, если перемѣстить средніе члены (фиг. 200).

**Доказат.** Пусть четыре величины  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  пропорціональны и пусть  $A$  относится къ  $B$ , какъ  $C$  къ  $D$ , я говорю, что  $A$  будетъ относиться къ  $C$ , какъ  $B$  къ  $D$ .

Фиг. 200.



Возьмемъ величины  $E$  и  $F$ , равнократныя величинъ  $A$  и  $B$ , и величины  $G$  и  $H$ , равнократныя величинъ  $C$  и  $D$ .

Такъ какъ  $E$  есть величина такой же кратности отъ  $A$ , какой  $F$  отъ  $B$ , то (кн. 5, пред. 15)  $A$  относится къ  $B$ , какъ  $E$  къ  $F$ , но  $A$  къ  $B$ , какъ  $C$  къ  $D$ , слѣдовательно (кн. 5, пред. 11),  $C$  относится къ  $D$ , какъ  $E$  къ  $F$ . Такъ какъ  $G$  и  $H$  суть величины равнократныя величинъ  $C$  и  $D$ , то (кн. 5, пред. 15)  $C$  относится къ  $D$ , какъ  $G$  къ  $H$ ; но  $C$  къ  $D$ , какъ  $E$  къ  $F$ , слѣдовательно  $E$  къ  $F$ , какъ  $G$  къ  $H$ . Но если четыре однородныя величины пропорціональны и первая будетъ  $\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}$  третьей, то вто-

рая будетъ  $\begin{smallmatrix} > \\ \equiv \\ < \end{smallmatrix}$  четвертой (кн. 5, опред. 5), слѣдовательно, если  $E \begin{smallmatrix} > \\ \equiv \\ < \end{smallmatrix} G$ , то  $E \begin{smallmatrix} > \\ \equiv \\ < \end{smallmatrix} H$ ; но  $E$  и  $F$  суть равнократныя величины  $A$  и  $B$ ,  $G$  и  $H$  суть равнократныя величины  $C$  и  $D$ , слѣдовательно  $A$  относится къ  $C$  какъ  $B$  къ  $D$ .

*Примѣч.* 33. Если  $A : B = C : D$ , то:

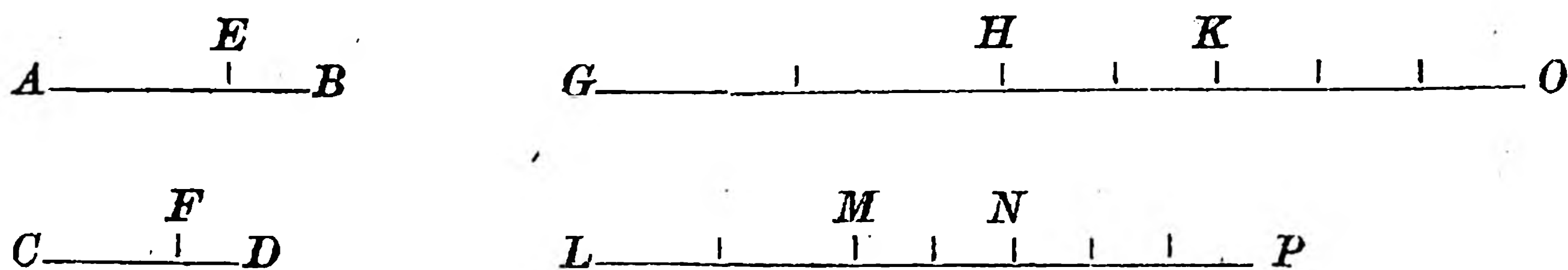
$$A : C = B : D.$$

*Предложеніе 17.* Если четыре величины, взятая вмѣстѣ, пропорціональны, то онѣ и отдѣльно будутъ пропорціональны, т. е. если сумма двухъ величинъ имѣетъ такое же отношеніе къ одной изъ нихъ, какое имѣетъ сумма другихъ двухъ величинъ къ одной изъ нихъ, то оставшая изъ первыхъ величинъ будетъ относиться къ первой, какъ оставшая изъ вторыхъ къ ихъ первой (фиг. 201).

*Доказат.* Пусть  $AB$ ,  $EB$ ,  $CD$ ,  $FD$ , четыре пропорціональныя величины; т. е.  $AB$  такъ относится къ  $EB$ , какъ  $CD$  къ  $FD$ , я говорю, что  $AE$  такъ относится къ  $EB$ , какъ  $CF$  къ  $FD$ .

Возьмемъ величины  $GH$ ,  $HK$ ,  $LM$ ,  $MN$ , равнократныя, по какойнибудь кратности, величинъ  $AE$ ,  $EB$ ,  $CF$ ,  $FD$  и величины  $KO$  и  $NP$ , равнократныя, по какойнибудь другой кратности, величинъ  $EB$  и  $FD$ .

Фиг. 201.



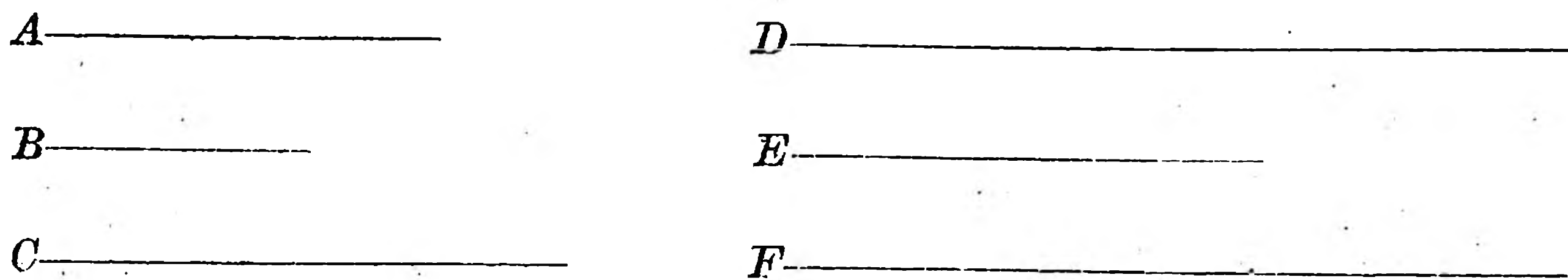
Такъ какъ  $GH$  есть величина такой же кратности отъ  $AE$ , какой  $HK$  отъ  $EB$ , то (кн. 5, пред. 1)  $GK$  будетъ такой же кратности отъ  $AB$ , какой  $GH$  отъ  $AE$ ; но  $GH$  есть величина такой же кратности отъ  $AE$ , какой  $LM$  отъ  $CF$ , слѣдовательно  $GK$  будетъ такой же кратности отъ  $AB$ , какой  $LN$  отъ  $CD$  (кн. 5, пред. 1).

Такъ какъ  $LM$  такой же кратности отъ  $CF$ , какой  $MN$  отъ  $FD$ , то  $LM$  будетъ такой же кратности отъ  $CF$ , какой  $LN$  отъ  $CD$ ; но мы показали, что  $LM$  такой же кратности отъ  $CF$ , какой  $GK$  отъ  $AB$ , слѣдовательно,  $GK$  будетъ такой же кратности отъ  $AB$ , какой  $LN$  отъ  $CD$ , откуда  $GK$  и  $LN$  суть величины равнократныя величинъ  $AB$  и  $CD$ .

Такъ какъ  $HK$  такой же кратности отъ  $EB$ , какой  $MN$  отъ  $FD$  и  $KO$  такой же кратности отъ той же величины  $EB$ , какой  $NP$  отъ  $FD$ ,

же имѣемъ  $C:B=F:E$ , слѣдовательно  $\frac{D}{E} > \frac{F}{E}$ , откуда (кн. 5, пред. 10)  $D > F$  (фиг. 203).

Фиг. 204.

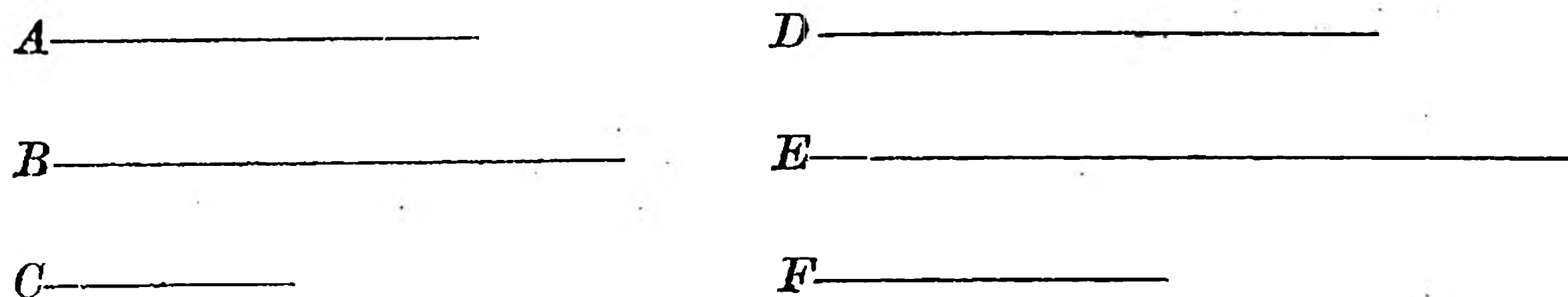


Такимъ же точно образомъ можно доказать, что если  $A \leq C$ , то  $D \leq F$ .

*Предложеніе 21.* Если есть три величины и другія три притомъ такія, что взятыя по двѣ, но по обратному порядку (кн. 5, опред. 20), имѣютъ одно и тоже отношеніе, то, если первая величина  $\geq$  третьей, четвертая будетъ  $\geq$  шестой (фиг. 205).

*Доказат.* Пусть первыя три величины будутъ  $A, B, C$ , а вторыя  $D, E, F$  и притомъ такія, что  $A:B=E:F$ , а  $B:C=D:E$ , я говорю, что если  $A \geq C$ , то  $D \geq F$ .

Фиг. 205.



Пусть  $A > C$ , то (кн. 5, пред. 8)  $\frac{A}{B} > \frac{C}{B}$ . Но  $A:B=E:F$ , слѣдовательно (кн. 5, пред. 13)  $\frac{E}{F} > \frac{C}{B}$ ; но  $C:B=E:D$ . Слѣдовательно  $\frac{E}{F} > \frac{E}{D}$ , откуда  $D > F$  (кн. 5, пред. 10).

Точно также можно показать, что если  $A \leq C$ , то  $D \leq F$ .

*Предложеніе 22.* Если нѣсколько величинъ и нѣсколько другихъ въ такомъ же числѣ, взятыя по двѣ, имѣютъ одно и тоже отношеніе, то онѣ будутъ и по равенству (кн. 5, опред. 18) имѣть одно и тоже отношеніе, т. е. первая будетъ относиться къ послѣдней перваго ряда, какъ первая къ послѣдней втораго ряда (фиг. 206).

*Доказат.* Пусть величины перваго ряда будутъ  $A, B, C$ , а величины втораго ряда  $D, E, F$ , притомъ такія, что:



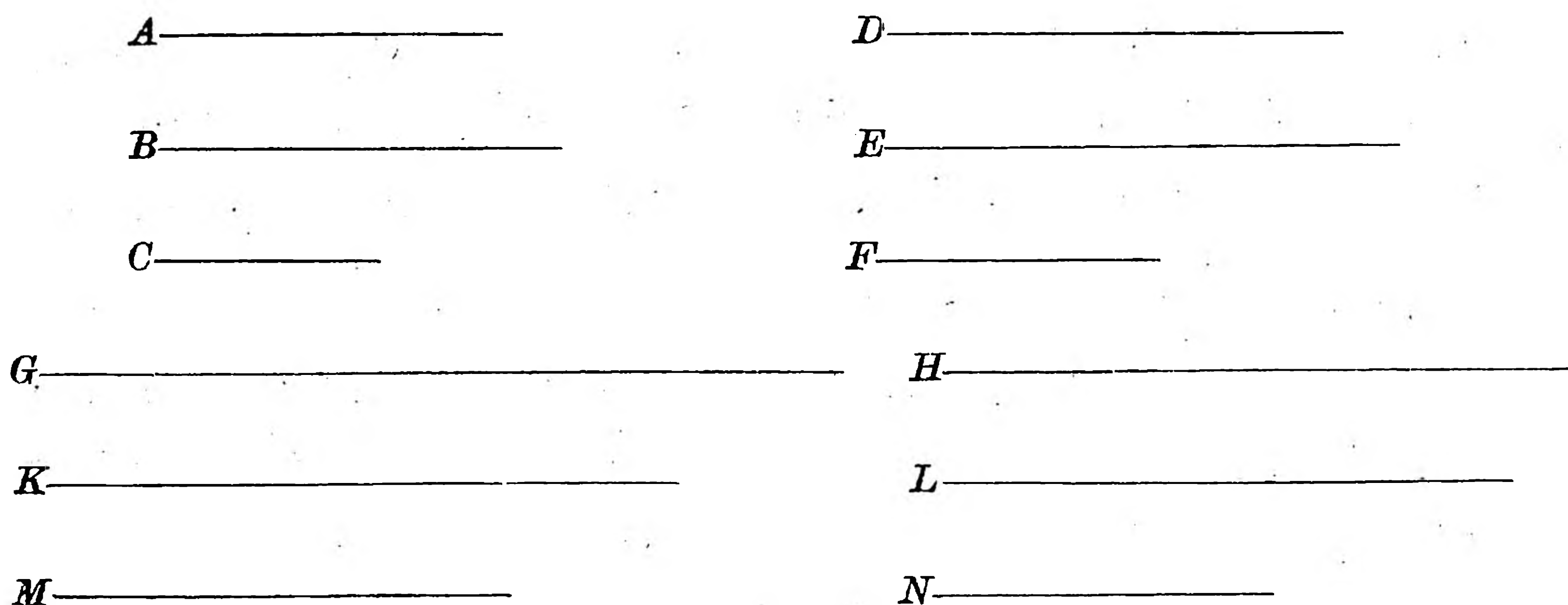
$$A : B = D : E, \quad B : C = E : F$$

я говорю, что мы будемъ имѣть также:

$$A : C = D : F.$$

Возьмемъ  $G$  и  $H$  равнократныя величинъ  $A$  и  $D$ , по какой нибудь кратности и  $K$  и  $L$  равнократныя отъ  $B$  и  $E$ , по другой какой нибудь кратности и наконецъ  $M$  и  $N$  равнократныя отъ  $C$  и  $F$  также по произвольной кратности.

Фиг. 206.



Такъ какъ мы имѣемъ:

$$A : B = D : E \quad \text{и} \quad B : C = E : F,$$

то (кн. 5, пред. 4):

$$G : K = H : L \quad \text{и} \quad K : M = L : N,$$

откуда, если  $G \geq H$ , то  $K \geq L$ , и если  $K \geq L$ , то  $M \geq N$ , следовательно если  $G \geq H$ , то  $M \geq N$ .

Но,  $G$  и  $H$  суть равнократныя  $A$  и  $D$ , а  $M$  и  $N$  равнократныя  $C$  и  $F$ , следовательно (кн. 5, опред. 5):

$$A : C = D : F.$$

**Предложеніе 23.** Если нѣсколько величинъ перваго ряда къ такому же числу величинъ втораго ряда, взятыхъ по двѣ, имѣютъ тоже самое от-

ношеніе, но въ обратномъ порядкѣ (кн. 5, опред. 20), то онѣ будутъ и по равенству (кн. 5, опред. 19) имѣть тоже самое отношеніе, т. е. первая къ послѣдней, перваго ряда, будетъ находится въ такомъ же отношеніи, въ какомъ первая къ послѣдней втораго ряда (фиг. 207).

*Доказат.* Пусть величины перваго ряда будутъ  $A, B, C$ , а величины втораго ряда  $D, E, F$  и при томъ такія, что:

$$A : B = E : F \quad \text{и} \quad B : C = D : E.$$

Я говорю, что мы будемъ имѣть:

$$A : C = D : F.$$

Возьмемъ величины  $G, H, K$  равнократныя величинъ  $A, B, D$  по какой нибудь кратности и  $L, M, N$  равнократныя отъ  $C, E, F$  по другой какой нибудь кратности.

Но мы имѣемъ  $A : B = E : F$  и  $B : C = D : E$ , слѣдовательно (кн. 5, пред. 4):

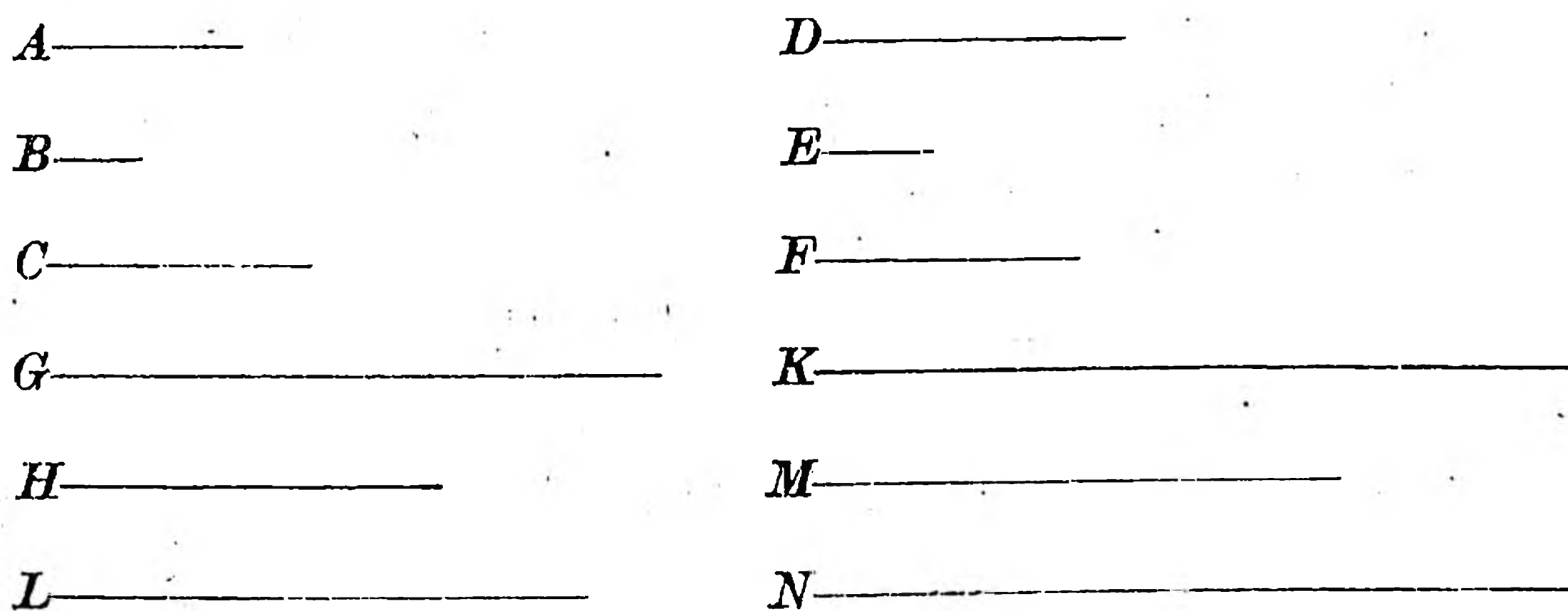
$$G : H = M : N \quad \text{и} \quad H : L = K : M,$$

откуда, если  $G \geq K$ , то  $L \geq N$ .

Но  $G$  и  $K$  суть равнократныя отъ  $A$  и  $D$ , а  $L$  и  $N$  равнократныя отъ  $C$  и  $F$ , слѣдовательно (кн. 5, опред. 5):

$$A : C = D : F.$$

Фиг. 207.

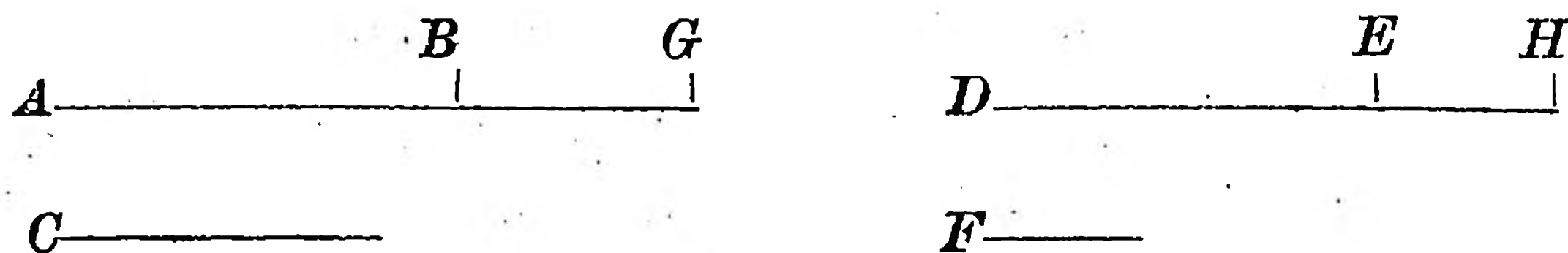


*Предложеніе 24.* Если первая величина относится ко второй, какъ третья къ четвертой и пятая ко второй, какъ шестая къ четвертой, то сумма первой и пятой будетъ такъ относится ко второй, какъ сумма третьей и шестой къ четвертой (фиг. 208).

*Доказат.* Если первая величина  $AB$  относится ко второй  $C$ , какъ третья  $DE$  къ четвертой  $F$  и пятая  $BG$  ко второй  $C$ , какъ шестая  $EH$

къ четвертой  $F$ , то  $AG$ , сумма  $AB$  и  $BG$  будетъ относиться къ  $C$ , какъ  $DH$ , сумма  $DE$  и  $EH$ , относится къ  $F$ .

Фиг. 208.



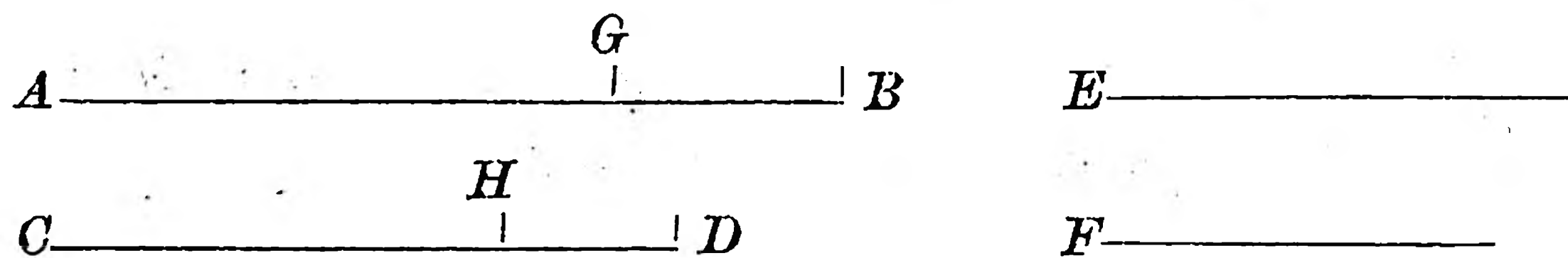
Такъ какъ  $BG : C = EH : F$ , то  $C : BG = F : EH$ ; но  $AB : C = DE : F$ , слѣдовательно (кн. 5, пред. 22)  $AB : BG = DE : EH$ , откуда (кн. 5, пред. 18)  $AG : BG = DH : EH$ . Но мы имѣемъ также  $BG : C = EH : F$ ; слѣдовательно (кн. 5, пред. 22):

$$AG : C = DH : F.$$

*Предложеніе 25.* Если четыре однородныя величины пропорціональны, то сумма наибольшей и наименьшей изъ нихъ будетъ больше суммы двухъ остальныхъ (фиг. 209).

*Доказат.* Пусть эти величины будутъ  $AB$ ,  $CD$ ,  $E$ ,  $F$  и пусть  $AB : CD = E : F$ , если  $AB$  будетъ наибольшая величина, то  $F$  будетъ наименьшая (кн. 5, пред. 14), я говорю, что сумма  $AB + F > CD + E$ .

Фиг. 209.



Возьмемъ  $AG = E$  и  $CH = F$ , то, такъ какъ  $AB : CD = E : F$ , мы имѣемъ  $AB : CD = AG : CH$ , слѣдовательно (кн. 5, пред. 19)  $GB : HD = AB : CD$ . Но  $AB > CD$ , слѣдовательно  $GB > HD$ . Но мы имѣемъ  $AG + F = CH + E$ , слѣдовательно, (кн. 1, акс. 2):

$$GB + AG + F > HD + CH + E$$

т. е. :

$$AB + F > CD + E.$$

*Примѣч. 37.* Симсонъ въ концѣ этой книги прибавилъ четыре предложенія, относительно сложныхъ отношеній, но которыя для нашей цѣли не имѣютъ значенія, поэтому я ихъ опускаю.



## КНИГА VI.

### О п р е д ъ л е н і я.

1. Прямолинейными *подобными* ( $\delta\eta\acute{o}\iota o\varsigma$ ) фигурами называются такія, которыя имѣютъ равные углы, каждый каждому, и стороны, заключающія равные углы, пропорціональныя.

2. Говорятъ что двѣ величины *обратно* пропорціональны другимъ двумъ, когда одна изъ первыхъ относится къ одной изъ вторыхъ, какъ оставшая изъ вторыхъ относится къ оставшей изъ первыхъ.

*Примѣч. 1.* Если величины  $A$  и  $B$  обратно пропорціональны величинамъ  $D$  и  $C$ , то:

$$A : D = C : B \quad \text{или} \quad A : C = D : B.$$

3. Говорятъ, что прямая *раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ* отношеніи, когда цѣлая прямая относится къ большему отрѣзку ея такъ, какъ этотъ послѣдній отрѣзокъ, относится къ меньшему.

*Примѣч. 2.* Если прямая  $AB$  въ точкѣ  $C$  раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то мы будемъ имѣть:

Фиг. 210.



$$AB : AC = AC : CB.$$

4. *Высотой* ( $\upsilon\psi o\varsigma$ ) фигуры называется перпендикуляръ, опущенный изъ *вершины* ( $\chi o\rho\upsilon\phi\eta$ ) на *основаніе* ( $\beta\acute{\alpha}\sigma\iota\varsigma$ ).

5. Отношеніе называется *составленнымъ* изъ отношеній, когда эти отношенія, будучи перемноженны, даютъ отношеніе ( $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma \acute{\epsilon} x \lambda\acute{o}\gamma o\upsilon \sigma\upsilon\gamma\epsilon$ ).

κείσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πληκτότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσι τινὰς λόγον).

*Примеч. 3.* Это опредѣленіе означаетъ, что если мы имѣемъ отношенія:

$$\frac{A}{B} = \frac{K}{L}, \frac{B}{C} = \frac{M}{N}, \frac{C}{D} = \frac{S}{R}$$

то:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{B}{C} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A}{D} = \frac{K}{L} \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{S}{R}.$$

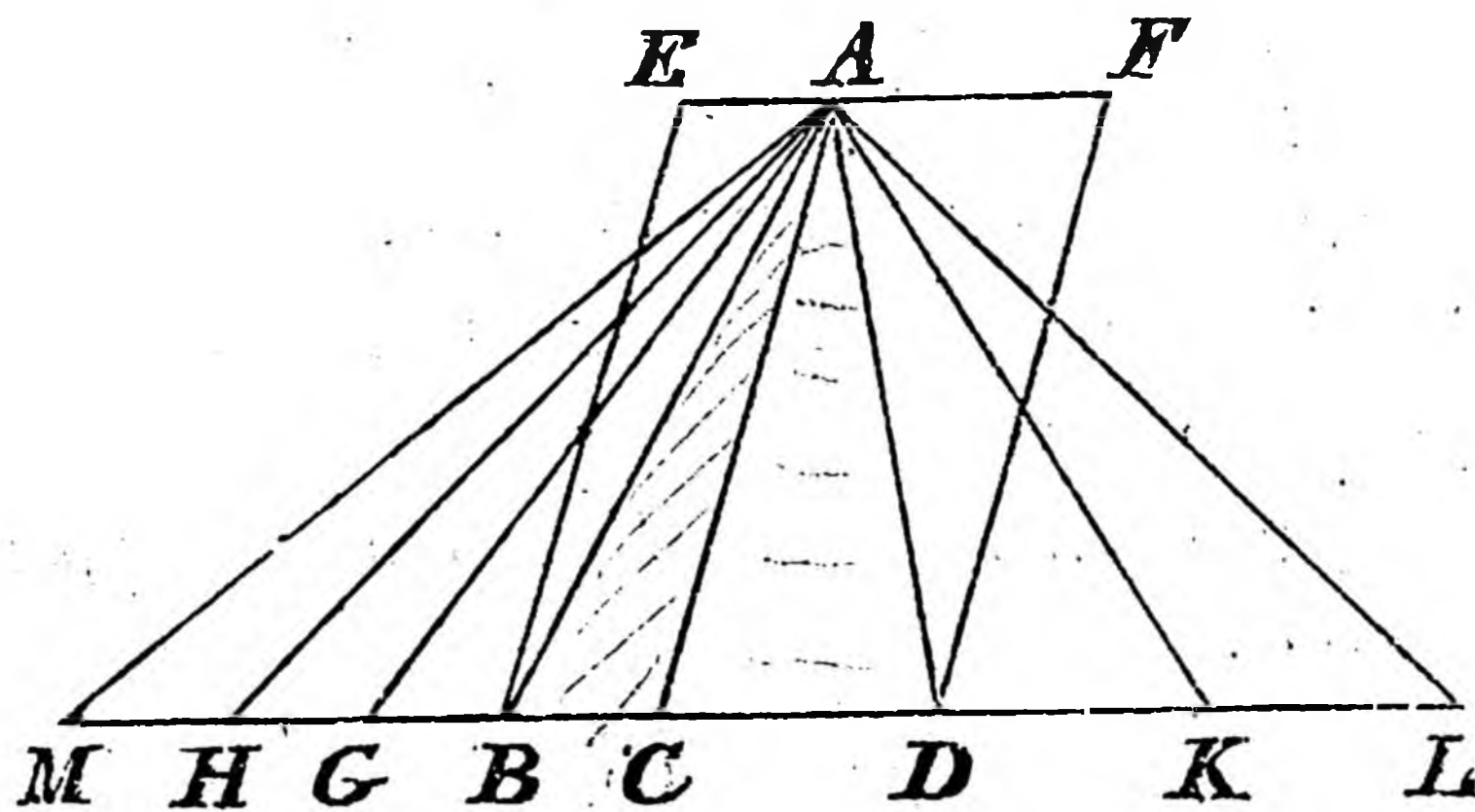
Въ нѣкоторыхъ изданіяхъ Евклида находится еще шестое опредѣленіе, но оно не имѣетъ значенія и въ большей части изданій опускается.

### Предложенія.

*Предложеніе 1.* Два треугольника или два параллелограма, имѣющіе равныя высоты, относятся между собою какъ ихъ основанія (фиг. 211).

*Доказат.* Пусть такіе треугольники и параллелограмы будутъ  $ABC$  и  $ACD$ ,  $EC$  и  $CF$ . Высота ихъ есть перпендикуляръ, опущенный изъ вершины  $A$  на прямую  $BD$ . Говорю, что два треугольника между собою и два параллелограма между собою относятся какъ основаніе  $BC$  къ основанію  $CD$ .

Фиг. 211.



Продолжимъ  $BD$  въ обѣ стороны и возьмемъ  $BG$ ,  $GH$ ,  $HM$  равныя  $BC$ , сколько угодно; точно также возьмемъ  $DK$ ,  $KL$ , равныя  $CD$  и сколько угодно. Проведемъ прямыя  $AG$ ,  $AH$ ,  $AM$ ,  $AK$ ,  $AL$ .

Треугольники  $ABC$ ,  $AGB$ ,  $AHG$ ,  $AHM$  равны (кн. 1, пред. 38). Слѣдовательно какой кратности основаніе  $MC$  будетъ отъ  $BC$ , такой же кратности треугольникъ  $AMC$  будетъ отъ треугольника  $ABC$ . По той же причинѣ треугольникъ  $ALC$  будетъ такой же кратности отъ треугольника  $ADC$ , какой кратности основаніе  $LC$  будетъ отъ основанія  $CD$ . Слѣдовательно, смотря

потому будетъ ли основаніе  $LC \begin{smallmatrix} \geq \\ \leq \end{smallmatrix} MC$ , треугольникъ  $ALC$  будетъ  $\begin{smallmatrix} \geq \\ \leq \end{smallmatrix}$  треугольника  $AMC$ . Слѣдовательно (кн. 5, опред. 5):

$$\triangle ABC : \triangle ADC = BC : CD.$$

Такъ какъ параллелограммы  $CE$  и  $CF$  равны удвоеннымъ треугольникомъ  $ABC$  и  $ADC$  (кн. 1, пред. 41), то (кн. 5, пред. 15):

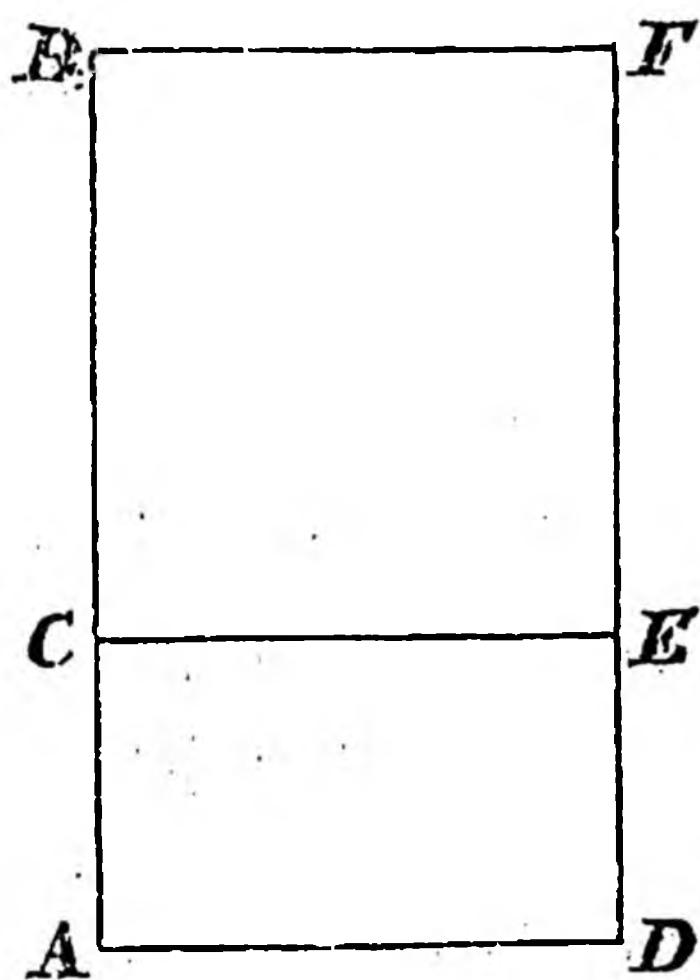
$$CE : CF = BC : CD.$$

*Примѣч. 4.* Такимъ образомъ Евклидъ доказываетъ это одно изъ самыхъ важныхъ предложеній. Нынѣ оно доказывается слѣдующимъ образомъ:

*Предлож.* Два прямоугольника, имѣющіе равныя основанія, относятся между собою, какъ ихъ высоты.

*Доказат.* Пусть данные прямоугольники, имѣющіе общее основаніе  $AD$  будутъ  $ABFD$  и  $ACED$ .

Фиг. 212.



Если высоту одного изъ нихъ, напримѣръ  $AC$ , раздѣлимъ на произвольное число  $n$  равныхъ частей, то, нанося такую часть на высоту  $AB$  другого прямоугольника, мы всегда найдемъ такое число  $m$ , что:

$$\frac{m}{n} AC \leq AB < \frac{m+1}{n} AC \quad (1)$$

Черезъ точки дѣленія высотъ  $AC$  и  $AB$  проведемъ параллельныя основанію  $AD$ , то прямоугольникъ  $AE$  раздѣлится, очевидно, также на  $n$  равныхъ прямоугольниковъ, а въ прямоугольникѣ  $AF$  такихъ частей будетъ содержаться или  $m$  или съ остаткомъ, т. е. мы всегда будемъ имѣть:

$$\frac{m}{n} AE \leq AF < \frac{m+1}{n} AE. \quad (2)$$

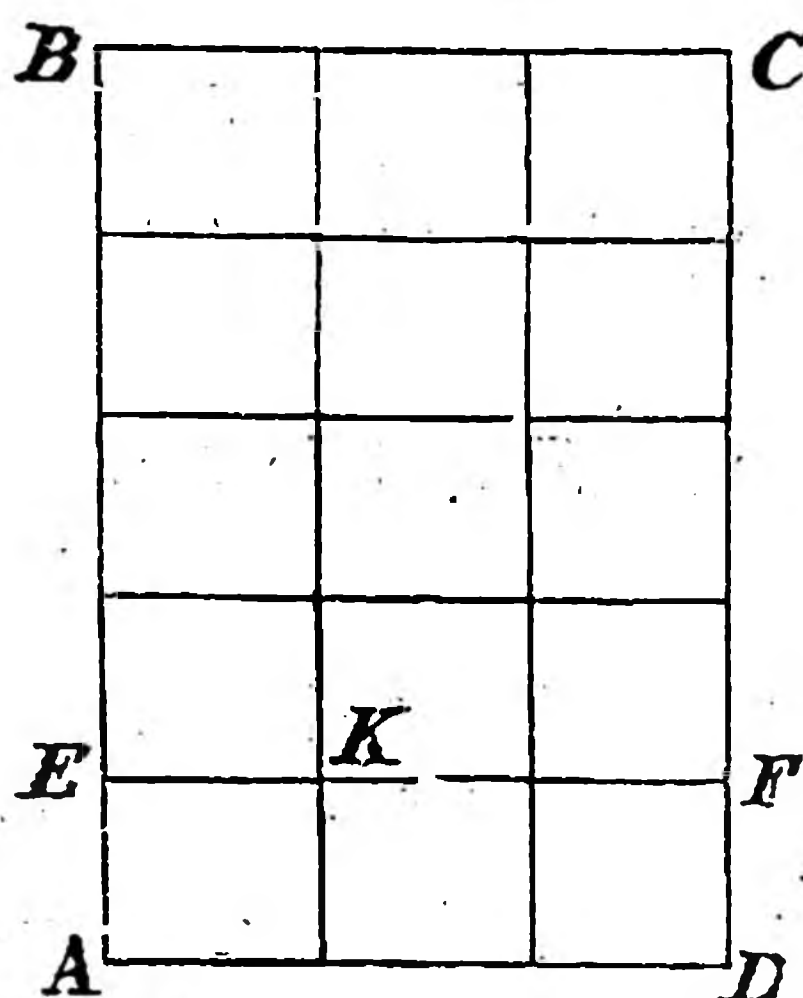
Но если условія (1) и (2) выполнены для всякаго произвольнаго числа  $n$ , то (см. кн. 5, примѣч. 5):



$$AF : AE = AB : AC.$$

*Мѣра площади прямоугольника.* Если на высоту  $AB$  прямоугольника, который назовемъ чрезъ  $P$ , нанесемъ сторону  $AE$ , какого нибудь квадрата  $AK$ .

Фиг. 213.



и чрезъ точку дѣленія  $E$  проведемъ  $EF$  параллельно основанію  $AD$ , то по предѣдущему мы будемъ имѣть:

$$\frac{AF}{AK} = \frac{AD}{AE}.$$

Разсматривая прямоугольники  $AC$  и  $AF$ , имѣющіе общее основаніе  $AD$ , мы имѣемъ:

$$\frac{AC}{AF} = \frac{AB}{AE},$$

перемножая эти послѣднія равенства получимъ (кн. 6, опред. 5):

$$\frac{AC}{AK} = \frac{AB}{AE} \cdot \frac{AD}{AE}.$$

Изъ этого выводимъ, что отношеніе площади прямоугольника  $AC$  къ площади квадрата  $AK$  равно произведенію отношеній основанія и высоты къ сторонамъ того же квадрата. Если за единицу площади принять площадь квадрата  $AK$ , а за единицу длины принять его сторону, то отношенія:

$$\frac{AC}{AK}, \frac{AB}{AE}, \frac{AD}{AE}$$

будутъ первое мѣра площади прямоугольника, а два послѣднія мѣры высоты  $AB$  и основанія  $AD$ . Поэтому пишутъ:

$$AC = AD \cdot AB$$

и говорятъ для краткости рѣчи, что площадь прямоугольника равна произведенію мѣры основанія на мѣру высоты, или просто произведенію основанія на высоту, т. е. въ площади прямоугольника  $AC$  находится столько квадратныхъ единицъ, сколько находится линейныхъ единицъ въ произведеніи основанія  $AD$  на высоту  $AB$ . Если данный прямоугольникъ будетъ квадратъ, то основаніе его будетъ равно высотѣ, слѣдовательно площадь квадрата равна произведенію его стороны на самую себя, т. е.  $AC = AB \cdot AB$ , что изображается такъ:  $AC = AB^2$ .

*Мѣра площади параллелограмма.* Такъ какъ параллелограмъ и прямоугольникъ имѣющіе равныя основанія и высоты равновелики (кн. 1, пред. 35) и какъ площадь прямоугольника измѣряется произведеніемъ основанія на высоту, то *площадь параллелограмма измѣряется также произведеніемъ основанія на высоту.*

*Мѣра площади треугольника.* Треугольникъ, имѣющій равное основаніе и высоту съ прямоугольникомъ, равенъ половинѣ прямоугольника (кн. 1, пред. 41), слѣдовательно, *площадь треугольника измѣряется половиной произведенія его основанія на высоту.*

*Мѣра многоугольника.* Какое бы ни было число сторонъ многоугольника, всегда его можно разбить на треугольники. Если возьмемъ за общую вершину точку внутри многоугольника, то онъ разобьется на треугольники, коихъ число будетъ равно числу сторонъ многоугольника. Если возьмемъ за общую вершину—вершину одного изъ угловъ многоугольника, то онъ разобьется діагоналями, проведенными изъ общей вершины къ остальнымъ вершинамъ многоугольника, на треугольники, коихъ число будетъ на двѣ единицы меньше числа сторонъ многоугольника.

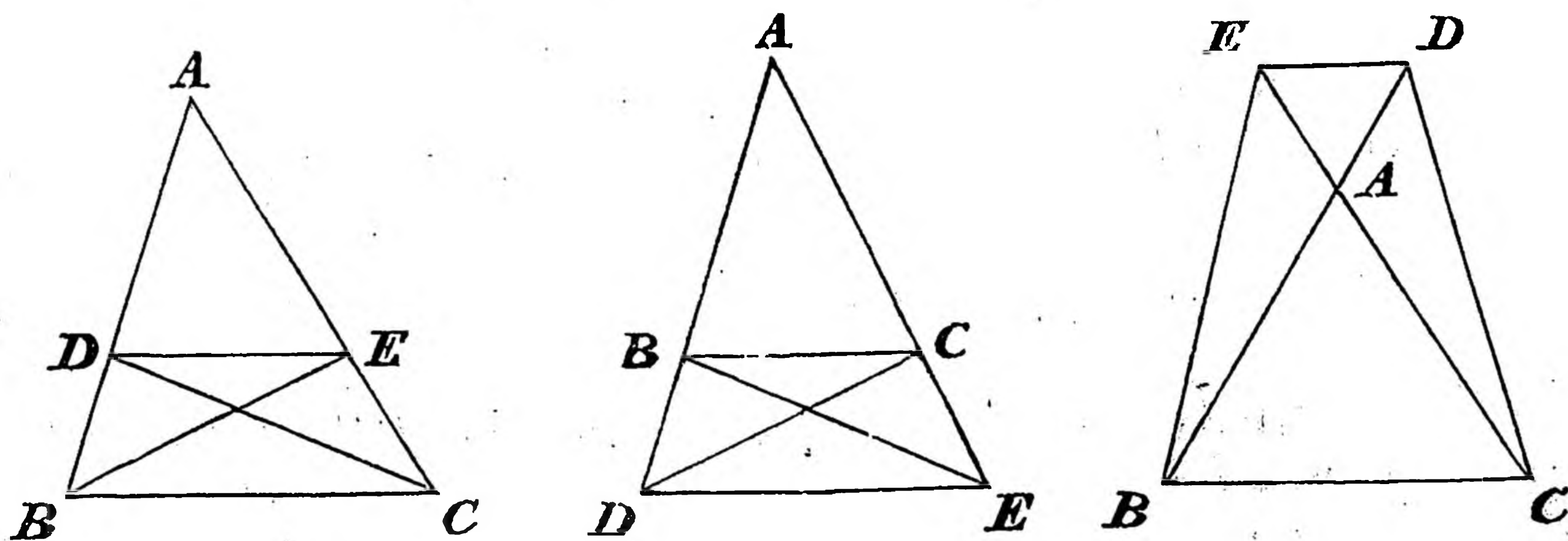
Слѣдовательно мѣра многоугольника получится складывая мѣры всѣхъ треугольниковъ. Если многоугольникъ будетъ правильный, то мѣра его площади равна *произведенію периметра на половину апогея*, т. е. на перпендикуляръ, опущенный, изъ центра описаннаго круга, на сторону многоугольника. Точно такимъ же образомъ получится мѣра всякой плоской фигуры, ограниченной прямыми линіями.

*Предложеніе 2.* Если въ какомъ нибудь треугольникѣ проведемъ линію параллельную одной изъ его сторонъ, то она, встрѣчая остальные двѣ стороны или ихъ продолженія, раздѣлитъ ихъ на части пропорціональныя; и обратно, если прямая, встрѣчая двѣ стороны треугольника, дѣлитъ ихъ, или ихъ продолженія на части пропорціональныя, то она параллельна третьей сторонѣ (фиг. 214).

*Доказат.* 1) Пусть прямая  $DE$  будетъ параллельна одной изъ сторонъ  $BC$  треугольника  $ABC$ . Я говорю, что мы будемъ имѣть:

$$BD : DA = CE : EA.$$

Фиг. 214.



Соединимъ точку  $B$  съ  $E$  и  $C$  съ  $D$ . Треугольники  $BDE$  и  $CDE$  равны, такъ какъ имѣютъ общее основаніе  $DE$ , а вершины ихъ  $B$  и  $C$  лежатъ на прямой  $BC$  параллельной основанію  $DE$  (кн. 1, пред. 37). Но

мы видѣли (кн. 5, пред. 7), что двѣ равныя величины къ одной и той же имѣютъ равныя отношенія, слѣдовательно:

$$\triangle BDE : \triangle ADE = \triangle CDE : \triangle ADE$$

Но треугольники  $BDE$  и  $ADE$ , имѣя разныя основанія  $BD$  и  $DA$ , имѣютъ одну и ту же высоту, такъ какъ ихъ основанія лежатъ на одной прямой, а обѣ вершины находятся въ точкѣ  $E$ , слѣдовательно, (кн. 6, пред. 1):

$$\triangle BDE : \triangle ADE = BD : DA.$$

По той же причинѣ:

$$\triangle CDE : \triangle ADE = CE : EA$$

откуда (кн. 5, пред. 11):

$$BD : DA = CE : EA.$$

2) Пусть теперь прямая  $DE$  дѣлитъ стороны  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  на части пропорціональныя, т. е. пусть:

$$BD : DA = CE : EA,$$

я говорю, что  $DE$  будетъ параллельна сторонѣ  $BC$ .

Дѣлая тоже построение, мы имѣемъ:

$$BD : DA = \triangle BDE : \triangle ADE$$

и

$$CE : EA = \triangle CDE : \triangle ADE,$$

слѣдовательно:

$$\triangle BDE : \triangle ADE = \triangle CDE : \triangle ADE.$$

Откуда треугольники  $BDE$  и  $CDE$  имѣютъ одно и тоже отношеніе къ треугольнику  $ADE$ , слѣдовательно (кн. 5, пред. 9):

$$\triangle BDE = \triangle CDE.$$

Но эти треугольники имѣютъ общее основаніе  $DE$ , слѣдовательно (кн. 1, пред. 40) ихъ вершины  $B$  и  $C$  лежатъ на прямой  $BC$ , параллельной основанію  $DE$ .

*Примѣч. 5.* Такъ доказалъ Евклидъ эту одну изъ самыхъ важныхъ теоремъ, такъ доказываетъ ее и Лежандръ. Другіе геометры доказываютъ эту теорему независимо отъ



отношеній между площадями треугольниковъ, способомъ болѣе естественнымъ, который основанъ на слѣдующей, весьма простой, теоремѣ.

*Предлож.* Если чрезъ точки, равноотстоящія одна отъ другой, взятая на одной изъ двухъ какихъ нибудь прямыхъ, проведемъ параллельныя, въ какомъ нибудь направленіи, то эти параллельныя раздѣлятъ и другую прямую на равныя между собою части (фиг. 215).

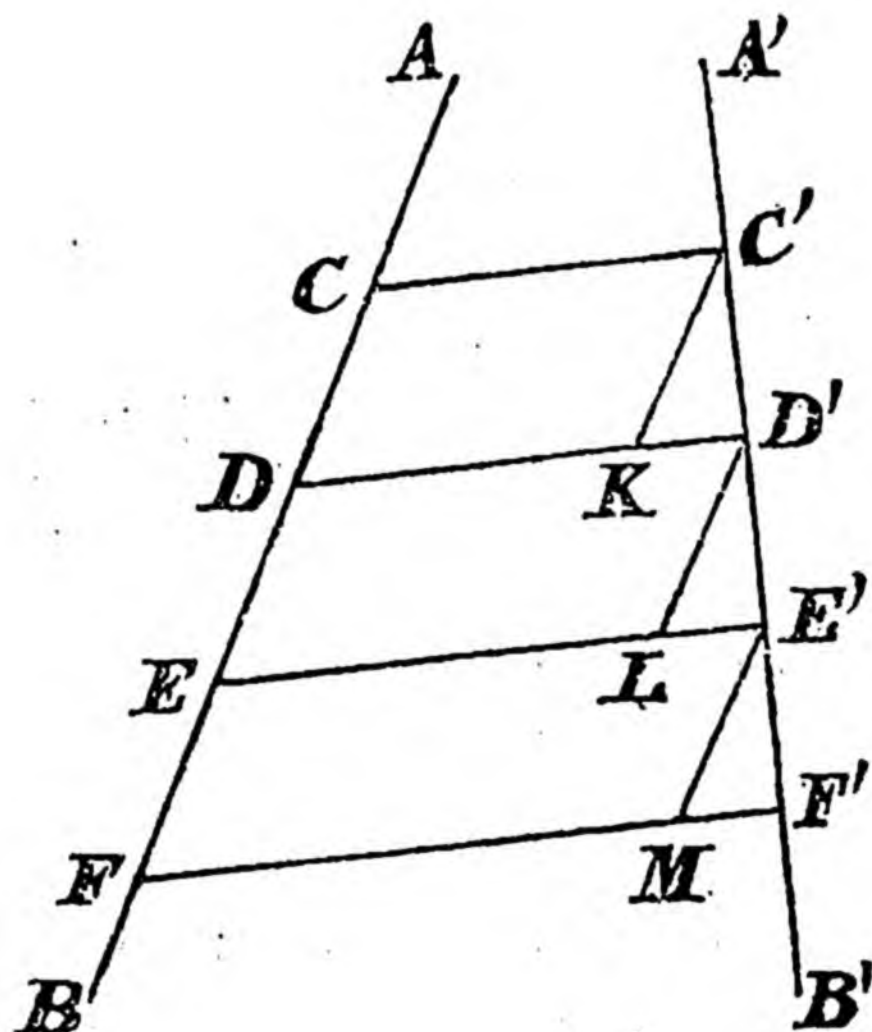
*Доказат.* Пусть двѣ данныя прямая будутъ  $AB$  и  $A'B'$ . Пусть прямая  $AB$  въ точкахъ  $C, D, E, F, \dots$  раздѣлена на равныя части, т. е. пусть:

$$CD=DE=EF=\dots$$

Я говорю, что параллельныя между собою прямая  $CC', DD', EE', FF', \dots$  дѣлятъ прямую  $A'B'$  также на равныя части:

$$C'D'=D'E'=E'F'=\dots$$

Фиг. 215.



Чрезъ точки  $C, D, E, \dots$  проведемъ прямая  $C'K, D'L, E'M, \dots$  параллельныя прямой  $AB$  (кн. 1, пред. 31).

Треугольники  $C'KD', D'LE', E'MF', \dots$  все равны между собою. Въ самомъ дѣлѣ, рассмотримъ два треугольника  $C'KD'$  и  $D'LE'$ , въ нихъ сторона  $C'K=D'L$  (кн. 1, пред. 34),  $\angle C'KD'=\angle CDK=\angle DEL=\angle D'LE'$  (кн. 1, пред. 29), по той же причинѣ  $\angle KC'D'=\angle LD'E'$ , слѣдовательно (кн. 1, пред. 10):

$$\triangle C'KD'=\triangle D'LE'$$

откуда  $C'D'=D'E'$ .

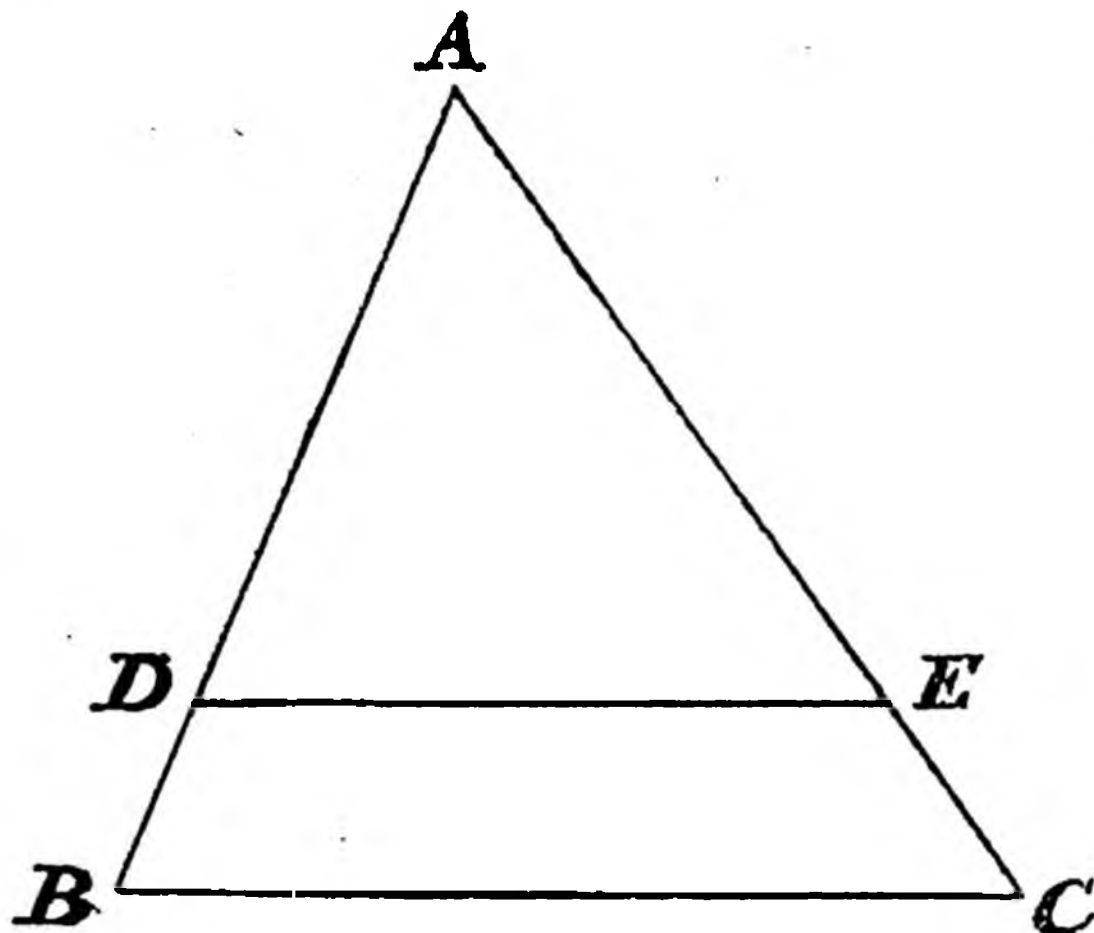
Подобнымъ образомъ можно доказать, что  $D'E'=E'F'=\dots$

Съ помощью этой послѣдней теоремы легко теперь доказать предложеніе 2, слѣдующимъ образомъ:

Пусть въ треугольникѣ  $ABC$  (фиг. 216) на сторонѣ  $AB$  взята гдѣ нибудь точка  $D$  и проведена прямая  $DE \parallel BC$ , требуется доказать, что:

$$AD : DB = AE : EC.$$

Фиг. 216.



Раздѣлимъ одинъ изъ отрѣзковъ стороны  $AB$ , на примѣръ  $AD$ , на произвольное число равныхъ частей, на примѣръ  $n$ . Наложимъ  $n$ -ю часть отрѣзка  $AD$  на отрѣзокъ  $DB$ , то мы всегда будемъ имѣть:

$$\frac{n}{n} = \frac{DB}{AD} < \frac{n+1}{n} \quad (1)$$

Если чрезъ точки дѣленій отрѣзковъ  $AD$  и  $DB$  проведемъ параллельныя основанію  $BC$ , то, по теоремѣ выше доказанной, мы найдемъ также:

$$\frac{n}{n} = \frac{EC}{AE} < \frac{n+1}{n} \quad (2)$$

Такъ какъ неравенства (1) и (2) всегда будутъ имѣть мѣсто, какое бы число  $n$  не было, то мы заключаемъ (кн. 5, прим. 5):

$$AD : DB = AE : EC.$$

Изъ этого отношенія мы имѣемъ (кн. 5, пред. 12):

$$AD + DB : AD = AE + EC : AE,$$

или

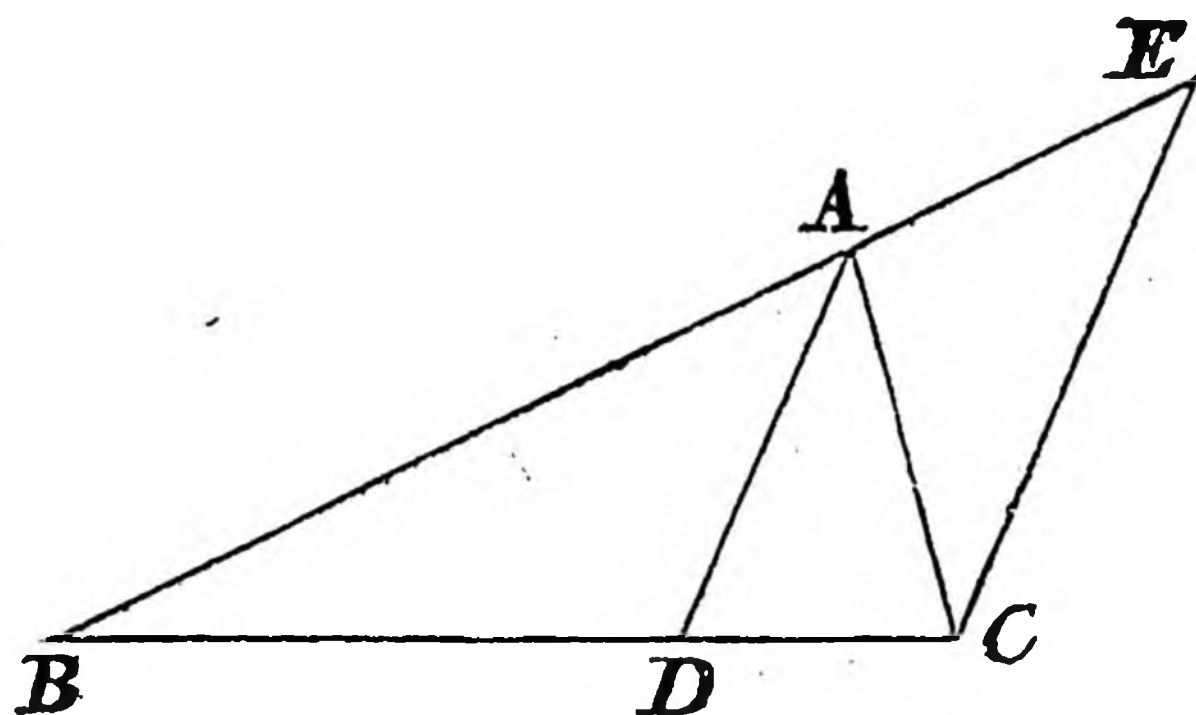
$$AB : AD = AC : AE.$$

**Предложеніе 3.** Если въ треугольникѣ одинъ изъ угловъ раздѣлимъ прямою пополамъ, то эта прямая, встрѣчая противуположную сторону, дѣлитъ ее на части пропорціональныя остальнымъ сторонамъ треугольника; и обратно, если одна изъ сторонъ треугольника раздѣлена на части, пропорціональныя остальнымъ сторонамъ, то прямая, соединяющая точку дѣленія съ вершиною противуположнаго угла, раздѣлитъ этотъ уголъ пополамъ (фиг. 217).

*Доказат.* 1) Пусть въ треугольникѣ  $ABC$ , уголъ  $BAC$ , прямою  $AD$ , раздѣленъ пополамъ. Я говорю, что:

$$BD : DC = BA : AC.$$

Фиг. 217.



Чрезъ точку  $C$  проведемъ прямую  $CE \parallel DA$  и продолжимъ сторону  $BA$  до встрѣчи ея съ  $CE$  въ точкѣ  $E$ . Такъ какъ въ треугольникѣ  $BCE$ , изъ взятой на сторонѣ точки  $A$ , проведена параллельная  $AD$  основанію  $CE$ , то мы имѣемъ (кн. 6, пред. 2):

$$BD : DC = BA : AE. \quad (1)$$

Но  $\angle BAD = \angle DAC$  по условію, и  $\angle BAD = \angle BEC$  (кн. 1, пред. 29), слѣдовательно  $\angle DAC = \angle BEC$ . Но  $\angle DAC = \angle ACE$  (кн. 1, пред. 29), слѣдовательно  $\angle BEC = \angle ACE$ . Откуда  $AE = AC$  (кн. 1, пред. 6). Подставляя въ пропорцію (1) вмѣсто  $AE$  сторону  $AC$ , найдемъ:

$$BD : DC = BA : AC.$$

2) Теперь положимъ, что мы имѣемъ:

$$BD : DC = BA : AC$$

требуется доказать, что:

$$\angle BAD = \angle DAC.$$

Соединяя точку  $D$  съ точкою  $A$  и дѣлая тоже построение, мы имѣемъ:

$$BD : DC = BA : AE.$$

Но по условію:

$$BD : DC = BA : AC$$



слѣдовательно (кн. 5, пред. 11):

$$BA : AC = BA : AE.$$

Откуда  $AC = AE$  (кн. 5, пред. 9).

Если  $AC = AE$ , то  $\angle AEC = \angle ACE$  (кн. 1, пред. 5). Но  $\angle AEC = \angle BAD$  (кн. 1, пред. 29) и  $\angle DAC = \angle ACE$ , по той же причинѣ, слѣдовательно (кн. 1, акс. 1):

$$\angle BAD = \angle DAC.$$

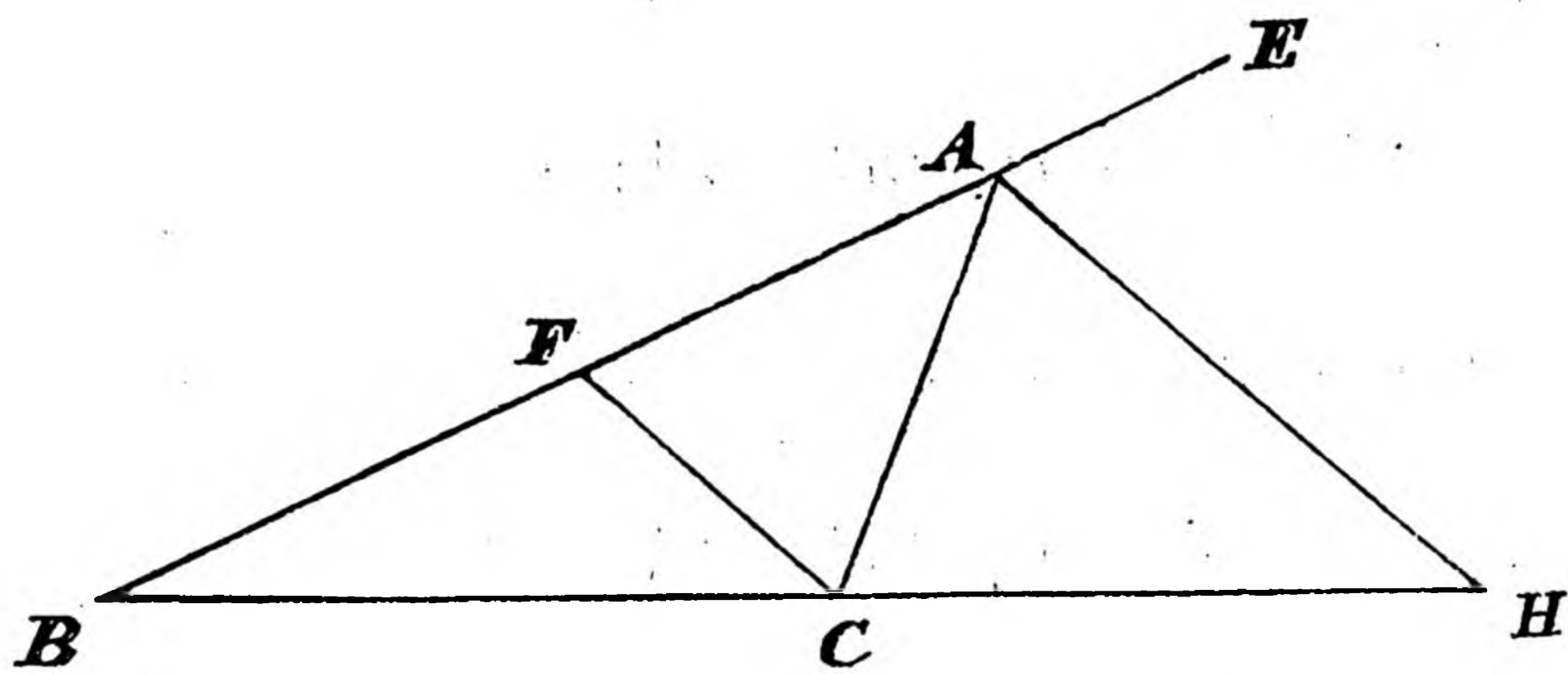
*Примѣч. 6.* Здѣсь Симсонъ прибавилъ слѣдующую весьма важную теорему:

*Предлож.* Если продолжимъ одну изъ сторонъ треугольника и раздѣлимъ внѣшній уголъ пополамъ, то равнодѣлящая прямая, встрѣчая противоположную сторону треугольника, раздѣлитъ ее такъ, что отрѣзки, заключенные между ея концами и точкою встрѣчи равнодѣлящей, будутъ пропорціональны остальнымъ сторонамъ треугольника; и обратно, если продолжимъ одну изъ сторонъ треугольника и на этомъ продолженіи возьмемъ такую точку, чтобы отрѣзки стороны, заключенные между ея концами и взятою точкою, были пропорціональны остальнымъ сторонамъ треугольника, то прямая, соединяющая взятую точку съ вершиною противолежащаго угла, раздѣлитъ внѣшній уголъ треугольника пополамъ (фиг. 218).

*Доказат.* 1) Пусть въ треугольникѣ  $ABC$  внѣшній уголъ  $CAE$  раздѣленъ пополамъ прямою  $AN$ , встрѣчающею продолженіе противоположной стороны  $BC$  въ точкѣ  $N$ , я говорю, что:

$$BN : CN = BA : AC.$$

Фиг. 218.



Чрезъ точку  $C$  проведемъ  $CF \parallel AN$ .

Въ треугольникѣ  $BCF$  чрезъ точку  $N$ , стороны  $BC$ , проведена  $AN \parallel CF$ , то (кн. 6, пред. 2) мы имѣемъ:

$$BN : CN = BA : FA. \quad (1)$$

Но по построению  $\angle EAN = \angle NAC$ , и  $\angle EAN = \angle AFC$ ,  $\angle NAC = \angle ACF$  (кн. 1, пред. 29), слѣдовательно  $\angle ACF = \angle AFC$ , откуда  $FA = AC$  (кн. 1, пред. 5). Подставляя въ пропорцію (1) вмѣсто  $FA$ ,  $AC$  найдемъ, что:

$$BN : CN = BA : AC.$$

2) Пусть въ треугольникѣ  $ABC$  на продолженіи стороны  $BC$  взята точка  $H$ , такъ, что:

$$BH:CH=BA:AC,$$

я говорю, что  $\angle CAH=\angle EAH$ .

Соединяя точку  $H$  съ точкою  $A$  и дѣлая тоже построение, мы будемъ имѣть (кн. 6, пред. 2):

$$BH:CH=BA:FA.$$

Но по условію мы имѣемъ:

$$BH:CH=BA:AC,$$

слѣдовательно (кн. 5, пред. 9)  $FA=AC$ .

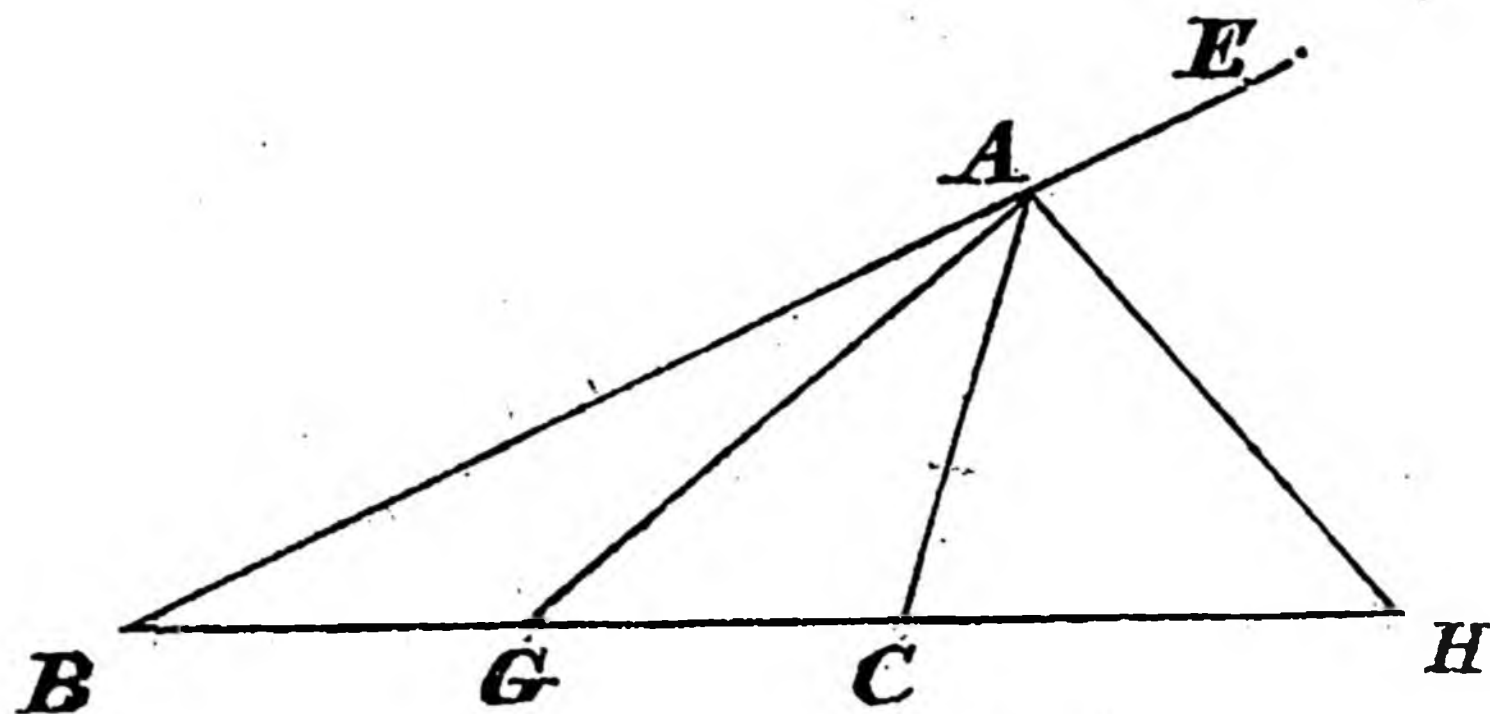
Если  $FA=AC$ , то  $\angle ACF=\angle AFC$  (кн. 1, пред. 6). Но  $AH \parallel CF$ , слѣдовательно  $\angle CFA=\angle EAH$  и  $\angle FCA=\angle CAH$  (кн. 1, пред. 29), откуда:

$$\angle CAH=\angle EAH.$$

*Слѣдствіе.* Если въ треугольникѣ  $ABC$  (фиг. 219) раздѣлимъ пополамъ какой нибудь изъ внутреннихъ угловъ, на примѣръ  $\angle BAC$ , а также и смежный ему внѣшній уголъ  $EAC$ , то равнодѣлящія эти углы  $AG$  и  $AH$  встрѣтятъ противоположную сторону  $BC$  въ точкахъ  $G$  и  $H$ , такъ, что:

$$BG:GC=BH:HC.$$

Фиг. 219.



Въ самомъ дѣлѣ, изъ предыдущаго мы имѣемъ:

$$BG:GC=BA:AC, \quad BH:HC=BA:AC,$$

слѣдовательно (кн. 5, пред. 11):

$$BG:GC=BH:HC.$$

Въ этомъ случаѣ говорятъ, что прямая  $BC$  въ точкахъ  $G$  и  $H$  раздѣлена *внутренне* и *внѣшне* въ одномъ и томъ же отношеніи. Такое дѣленіе называется *гармоническимъ*, а четыре точки  $B, C, G, H$  называются *гармоническими*. Попарно  $B, C$  и  $G, H$  называются *сопряженными*.

Если бы мы отсчитывали всѣ отрѣзки отъ точки  $H$ , то въ пропорцію надобно подставить вмѣсто:

$$BG=BH-GH \text{ и } GC=GH-CH,$$

т. е. мы будемъ имѣть:

$$BH-GH:GH-CH=BH:HC,$$

откуда:

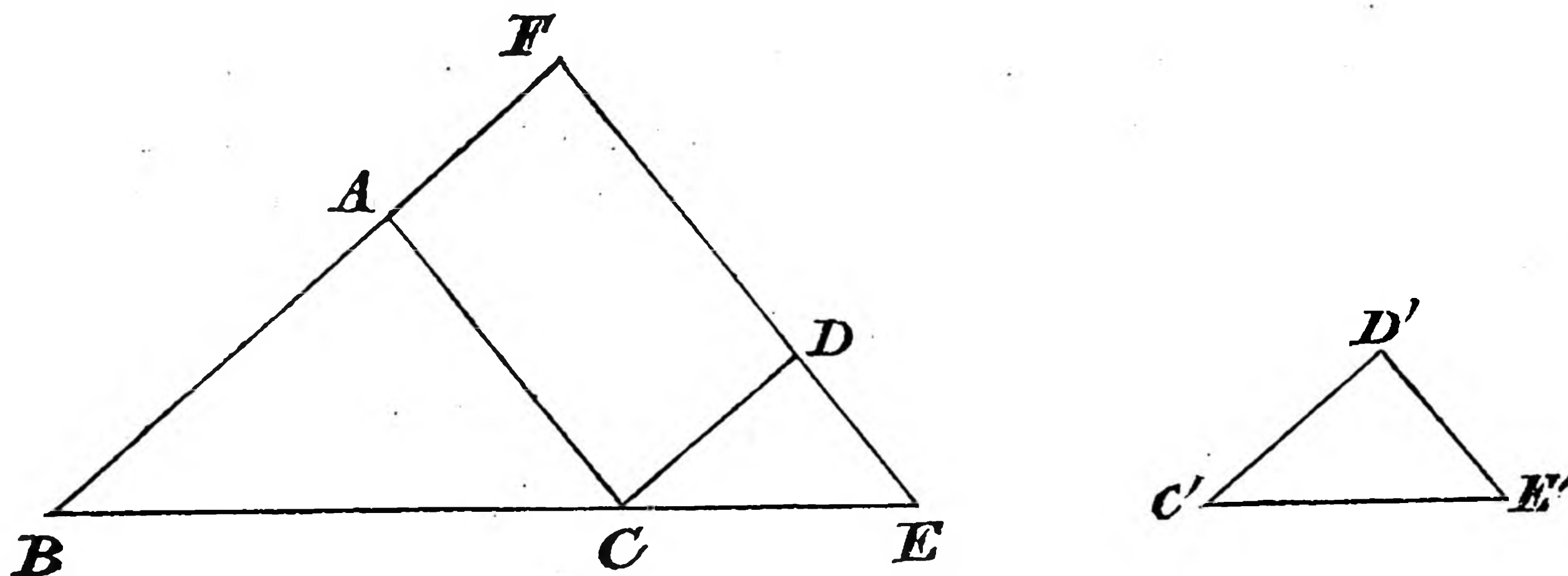
$$\frac{2}{HG} = \frac{1}{HC} + \frac{1}{BH}.$$

*Предложеніе 4.* Въ равноугольныхъ треугольникахъ стороны, противолежащія равнымъ угламъ, пропорціональны между собою, а соотвѣтственныя стороны будутъ тѣ, которыя лежатъ противъ равныхъ угловъ (фиг. 220).

*Доказат.* Пусть треугольники  $ABC$  и  $D'C'E'$  будутъ равноугольны такъ, что  $\angle ABC = \angle D'C'E'$ ,  $\angle ACB = \angle D'E'C'$  и  $\angle BAC = \angle C'D'E'$ , я говорю, что:

$$AB:BC:CA=D'C':C'E':E'D'$$

Фиг. 220.



т. е. сходственныя стороны будутъ имѣть одно и тоже отношеніе.

Помѣстимъ треугольникъ  $D'C'E'$  такъ, чтобы его основаніе  $C'E'$  помѣстилось на продолженіи основанія  $BC$  треугольника  $ABC$  и чтобы точка  $C'$  совпала съ точкою  $C$ , то  $\triangle D'C'E'$  приметъ положеніе  $DCE$ .

Такъ какъ  $\angle ABC + \angle ACB < 2d$  (кн. 1, пред. 17),  $\angle ACB = \angle DEC$ , то  $\angle ABC + \angle DEC < 2d$ , откуда стороны  $BA$  и  $ED$ , будучи продолжены встрѣтятся въ точкѣ  $F$  (кн. 1, акс. 11). Но  $\angle ACB = \angle DEC$ , слѣдовательно  $CA \parallel EF$  (кн. 1, пред. 29). По той же причинѣ  $BF \parallel CD$ .

Такъ какъ въ треугольникѣ  $FBE$ ,  $AC \parallel FE$ , то (кн. 6, пред. 2) мы имѣемъ:

$$AB:BC=AF:CE,$$

но  $AF=CD$  (кн. 1, пред. 34), слѣдовательно:

$$AB:BC=CD:CE.$$

Точно также, какъ въ  $\triangle FBE$ ,  $DC \parallel FB$ , то:



$$DE:FD=CE:BC,$$

но  $FD=AC$  (кн. 1, пред. 34), следовательно:

$$DE:AC=CE:BC.$$

откуда:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AC}{DE} = \frac{BC}{CE}$$

или

$$AB:BC=CD:CE, \quad AC:BC=DE:CE,$$

$$AB:AC=CD:DE.$$

*Слѣствие.* Откуда видимъ, что равноугольные треугольники суть фигуры подобныя (кн. 6, опред. 1).

*Предложеніе 5.* Если въ двухъ треугольникахъ стороны пропорціональны, то треугольники будутъ и равноугольны, и равнымъ угламъ будутъ противуположать сходственные стороны (фиг. 221).

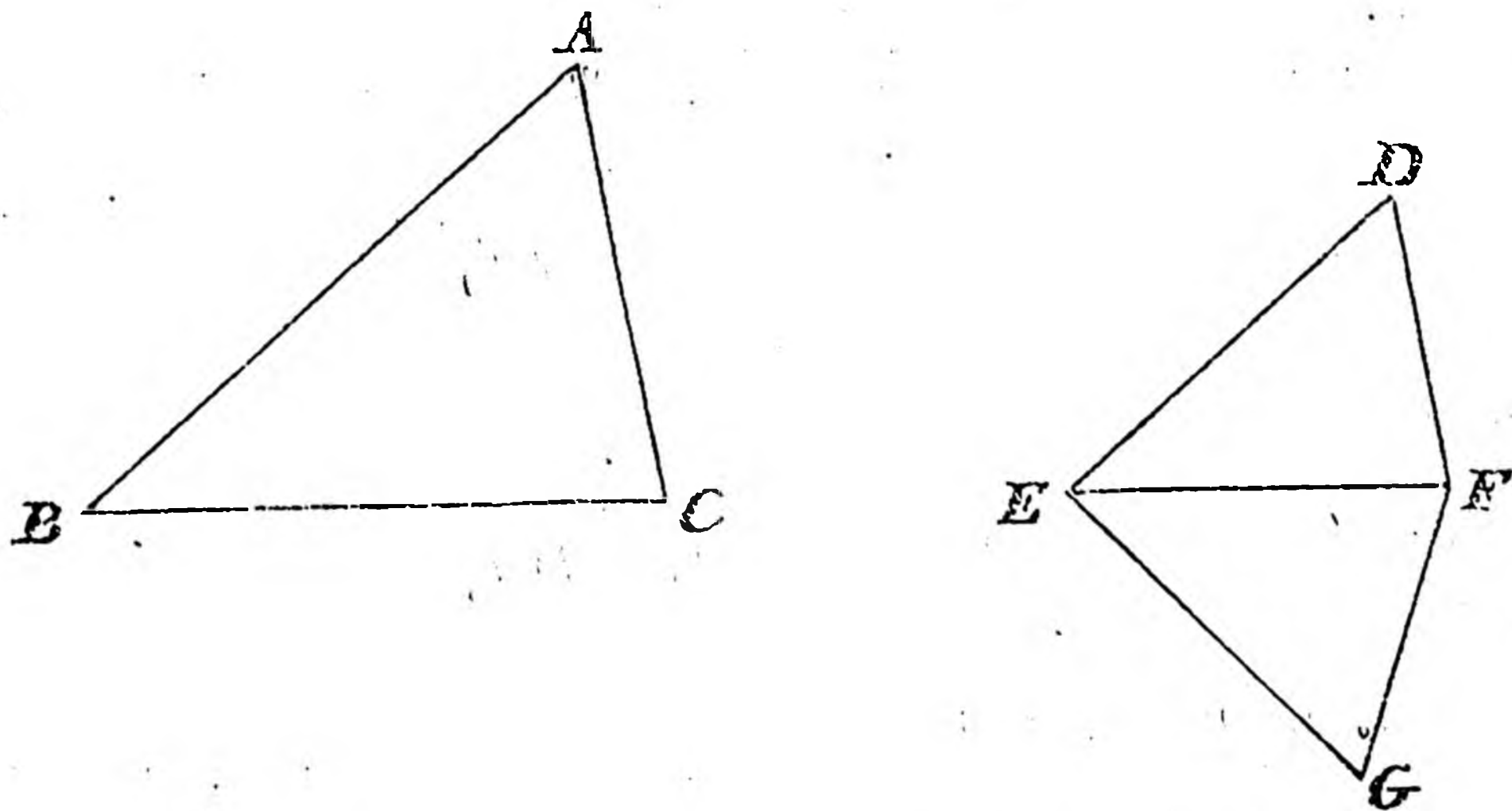
*Доказат.* Пусть треугольники, имѣющіе пропорціональныя стороны, будутъ  $ABC$  и  $DEF$ , т. е. пусть:

$$AB:BC=DE:EF, \quad BC:CA=EF:FD, \quad BA:AC=ED:DF.$$

Я говорю, что треугольникъ  $ABC$  будетъ равноугольный треугольнику  $DEF$  и притомъ такъ, что:

$$\angle ABC=\angle DEF, \quad \angle ACB=\angle DFE, \quad \angle BAC=\angle EDF.$$

Фиг. 221.



Построимъ  $\angle FEG=\angle ABC$  и  $\angle EFG=\angle ACB$  (кн. 1, пред. 28),

то третій уголъ  $\angle EGF = \angle BAC$  (кн. 1, пред. 32), слѣдовательно треугольникъ  $EGF$  будетъ равноугольный треугольнику  $ABC$ , а если эти треугольники равноугольны, то ихъ стороны пропорціональны (кн. 6, пред. 4), т. е.  $AB : BC = EG : EF$ ; но мы имѣемъ по условію  $AB : BC = ED : EF$ , откуда (кн. 5, пред. 9)  $EG = ED$ . По той же причинѣ  $FG = DF$ , а какъ  $EF$  есть сторона общая треугольникамъ  $EDF$  и  $EGF$ , то  $\triangle EDF = \triangle EGF$  (кн. 1, пред. 8). Откуда:

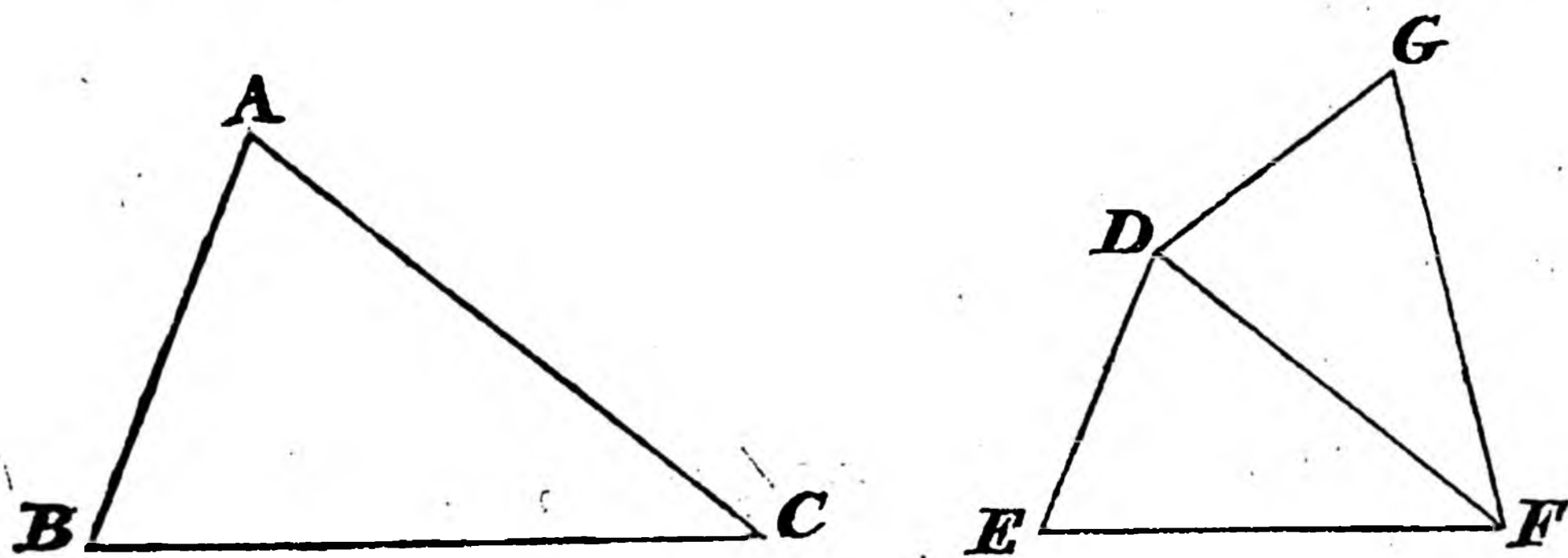
$$\angle GEF = \angle ABC = \angle DEF, \quad \angle EFG = \angle ACB = \angle DFE,$$

$$\angle EGF = \angle BAC = \angle EDF.$$

**Предложеніе 6.** Если два треугольника имѣютъ по два равные угла, заключенные между пропорціональными сторонами, то треугольники будутъ равноугольны и соотвѣтственнымъ сторонамъ будутъ противулежать равные углы (фиг. 222).

**Доказат.** Пусть въ треугольникахъ  $ABC$  и  $DEF$   $\angle BAC = \angle EDF$  и  $BA : AC = ED : DF$ . Я говорю, что  $\triangle ABC$  будетъ равноугольный  $\triangle DEF$  и такъ что  $\angle ABC = \angle DEF$ ,  $\angle ACB = \angle DFE$ .

Фиг. 222.



Построимъ  $\angle FDG = \angle BAC$  и  $\angle DFG = \angle ACB$  (кн. 1, пред. 23), то и остальной  $\angle ABC = \angle DGF$ . слѣдовательно (кн. 6, пред. 4):

$$BA : AC = GD : DF,$$

но мы имѣемъ по условію:

$$BA : AC = ED : DF,$$

слѣдовательно (кн. 5, пред. 11)  $ED : DF = GD : DF$ , откуда (кн. 5, пред. 9),  $ED = GD$ .

Въ треугольникахъ  $DEF$  и  $DGF$  стороны  $ED$  и  $DF$  равны сто-

ронамъ  $GD$  и  $DF$  и  $\angle EDF = \angle GDF$ , откуда (кн. 1, пред. 4)  $\angle DFG = \angle DFE$ , и  $\angle DGF = \angle DEF$ , но  $\angle DFG = \angle ACB$ , слѣдовательно  $\angle ACB = \angle DFE$ . Но какъ по положенію  $\angle BAC = \angle EDF$ , то и третій уголъ  $\angle ABC = \angle DEF$ . Слѣдовательно треугольники  $ABC$  и  $DEF$  равноугольны.

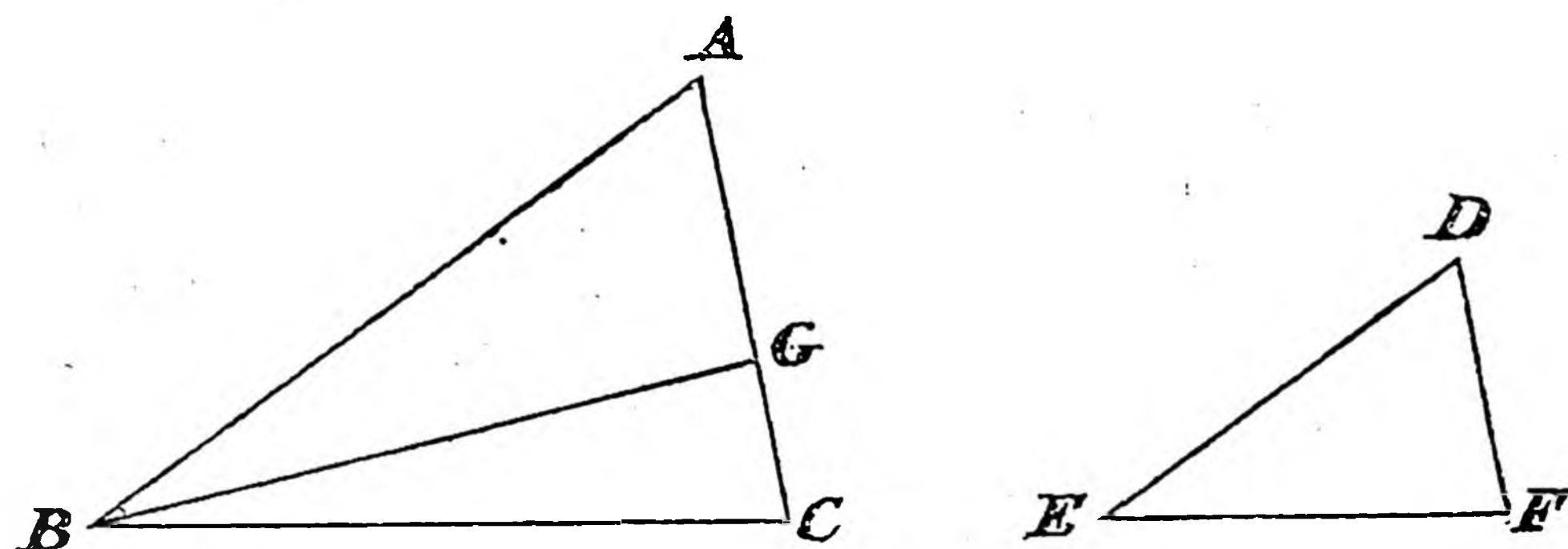
*Предложеніе 7.* Если два треугольника имѣютъ по одному углу равному и стороны, заключающія другой уголъ перваго треугольника, пропорціональны сторонамъ, заключающимъ другой уголъ втораго треугольника и если при этомъ остальные углы треугольниковъ оба или меньше, или не меньше прямого угла, то треугольники будутъ равноугольны и при томъ такъ, что углы, заключенные между пропорціональными сторонами, будутъ равны (фиг. 223).

*Доказат.* Пусть въ треугольникахъ  $ABC$  и  $DEF$   $\angle BAC = \angle EDF$  и стороны, заключающія углы  $ABC$  и  $DEF$ , пропорціональны, т. е.:

$$AB : BC = DE : EF$$

и если при этомъ или  $\angle ACB < d$  и  $\angle EFD < d$ , или  $\angle ACB > d$  и  $\angle EFD > d$ .

Фиг. 223.



1) Положимъ во первыхъ, что  $\angle ACB < d$  и  $\angle EFD < d$ .

Если бы углы  $ABC$  и  $DEF$  были неравны, то одинъ изъ нихъ, на-  
примѣръ  $ABC$  больше другаго  $DEF$ , т. е.  $\angle ABC > \angle DEF$ .

Отложивъ въ треугольникѣ  $ABC$   $\angle ABG = \angle DEF$ , то, такъ какъ углы  $BAC$  и  $EDF$  равны, то и  $\angle AGB = \angle DFE$  (кн. 1, пред. 32). Слѣдовательно треугольники  $ABG$  и  $DEF$  равноугольны и мы имѣемъ (кн. 6, пред. 4):

$$AB : BG = DE : EF,$$

но по условію:

$$AB : BC = DE : EF,$$

слѣдовательно (кн. 5, пред. 11):

$$AB : BC = AB : BG$$



откуда  $BC=BG$  (кн. 5, пред. 9). Но если  $BC=BG$ , то  $\angle BGC=\angle BCG$  (кн. 1, пред. 5). Но по положению  $\angle BCG < d$ , следовательно и  $\angle BGC < d$ , а если этот последний угол меньше прямого, то его смежный угол  $AGB > d$ , что противурѣчитъ положению  $\angle DFE=\angle AGB < d$ .

Слѣдовательно уголъ  $ABC$  не можетъ быть больше угла  $DEF$ , точно также онъ не можетъ быть и меньше, слѣдовательно:

$$\angle ABC = \angle DEF.$$

2) Пусть теперь  $\angle ACB > d$  и  $\angle DFE > d$ .

Если въ этомъ случаѣ, какъ и въ первомъ, предположимъ, что углы  $ABC$  и  $DEF$  неравны, то мы докажемъ, какъ и выше, что  $BG=BC$  и что  $\angle BGC=\angle ACB > d$ , слѣдовательно въ треугольникѣ  $BGC$  мы будемъ имѣть  $\angle BGC + \angle GCB > 2d$ , что невозможно (кн. 1, пред. 17). Слѣдовательно  $\angle ABC = \angle DEF$ .

*Примѣч. 7.* Это предложеніе можетъ быть выражено слѣдующимъ образомъ:

*Предложеніе.* Если двѣ стороны одного треугольника пропорціональны двумъ сторонамъ другого треугольника и углы, противулежащіе парѣ соотвѣтственныхъ сторонъ, равны, то углы, противулежащіе другой парѣ соотвѣтственныхъ сторонъ треугольниковъ, будутъ или равны, или сумма ихъ будетъ равна двумъ прямымъ угламъ.

*Доказат.* Углы, заключенные между пропорціональными сторонами, будутъ или равны или неравны. Если эти углы равны, то треугольники, имѣя по два равные угла каждый каждому, будутъ равноугольны (кн. 1, пред. 32). Слѣдовательно намъ необходимо разсмотрѣть только тотъ случай, въ которомъ углы, заключенные между пропорціональными сторонами, неравны.

Пусть въ треугольникахъ  $ABC$  и  $DEF$  (фиг. 223)  $\angle BAC = \angle EDF$  и

$$AB : BC = DE : EF,$$

но углы,  $ABC$  и  $DEF$ , заключенные между пропорціональными сторонами, неравны и пусть, какъ выше  $\angle ABC > \angle DEF$ . Я говорю, что:

$$\angle ACB + \angle DFE = 2d.$$

Въ самомъ дѣлѣ, дѣлая тоже построеніе, мы найдемъ, какъ и прежде, что  $\angle BGA = \angle DFE$ ,  $BG=BC$ , слѣдовательно  $\angle BGC = \angle BCG$  (кн. 1, пред. 5). Но такъ какъ  $\angle BGA + \angle BGC = 2d$  (кн. 1, пред. 13), а  $\angle BGA = \angle DFE$ ,  $\angle BGC = \angle BCG$ , то мы и будемъ имѣть:

$$\angle ACB + \angle DFE = 2d.$$

Изъ этого послѣдняго заключенія вытекаетъ предложеніе 7.

Въ самомъ дѣлѣ, если каждый изъ угловъ  $ACB$ ,  $DFE$  или больше, или меньше, или равенъ прямому углу, то они могутъ быть только равными.

*Предложение 8.* Если въ прямоугольномъ треугольникѣ изъ вершины прямого угла опустимъ на противоположную сторону (гипотенузу) перпендикуляръ, то онъ раздѣлитъ данный треугольникъ на два треугольника, изъ коихъ каждый подобенъ цѣлому и подобны между собою (фиг. 224).

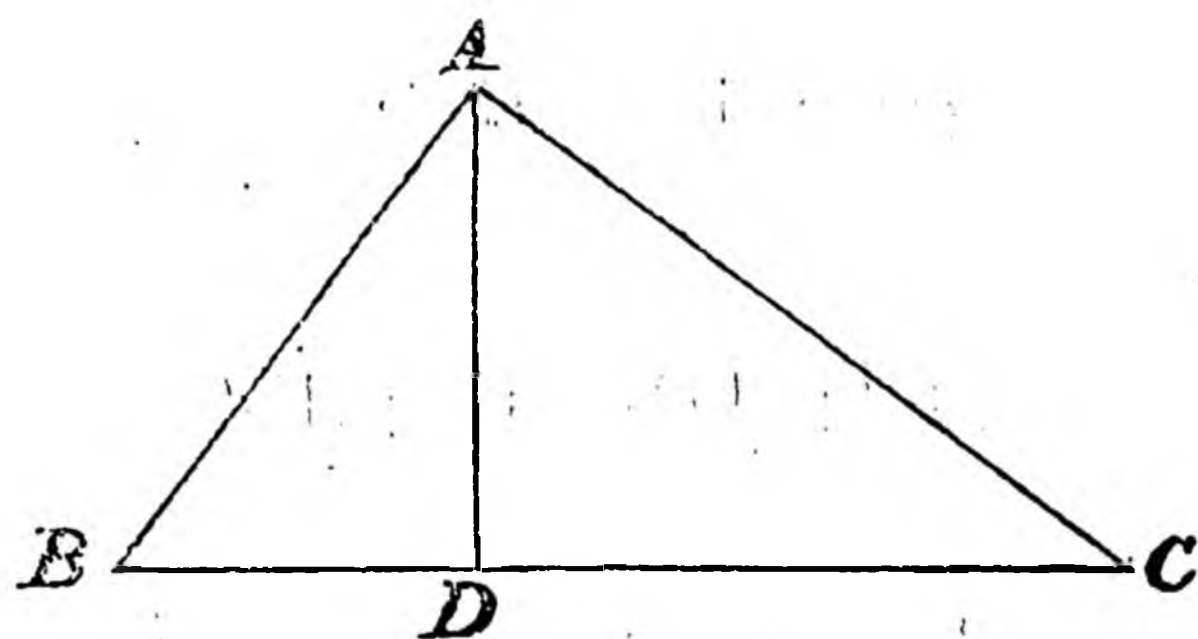
*Доказат.* Пусть въ треугольникѣ  $ABC$  уголъ  $BAC = d$ . Я говорю, что перпендикуляръ  $AD$  дѣлитъ треугольникъ  $ABC$  на два треугольника  $ABD$  и  $ACD$ , подобныхъ цѣлому  $ABC$  и подобныхъ между собою.

Въ самомъ дѣлѣ, въ треугольникахъ  $ABC$  и  $ABD$  углы  $BAC$  и  $ADB$  равны, какъ прямые, уголъ  $ABD$  общій, слѣдовательно (кн. 1, пред. 32)  $\angle ACD = \angle BAD$ . Но въ равноугольныхъ треугольникахъ стороны пропорціональны (кн. 6, пред. 4), слѣдовательно треугольники  $ABC$  и  $ABD$  подобны (кн. 6, опред. 1).

Точно такимъ же образомъ можно показать, что  $\triangle ABC$  подобенъ  $\triangle ACD$ .

Разсматривая, наконецъ, треугольники  $ABD$  и  $ACD$ , находимъ, что  $\angle ADB = \angle ADC$ , какъ прямые,  $\angle BAD = \angle ACD$ ,  $\angle ABD = \angle CAD$ , какъ мы выше показали, слѣдовательно и треугольники  $ABD$  и  $ACD$  подобны.

Фиг. 224.



*Слѣдствіе.* Изъ сказаннаго выше легко видѣть, что перпендикуляръ  $AD$  есть средне-пропорціональная линія между отрѣзками  $BD$  и  $DC$  гипотенузы  $BC$ , т. е. что (кн. 6, пред. 4):

$$BD : AD = AD : DC.$$

И что каждый изъ катетовъ  $AB$  и  $AC$  есть средне-пропорціональная линія между цѣлою гипотенузою  $BC$  и прилежащими отрѣзками  $BD$  и  $DC$ , т. е. (кн. 6, пред. 4):

$$BD : AB = AB : BC \quad \text{и} \quad DC : AC = AC : BC.$$

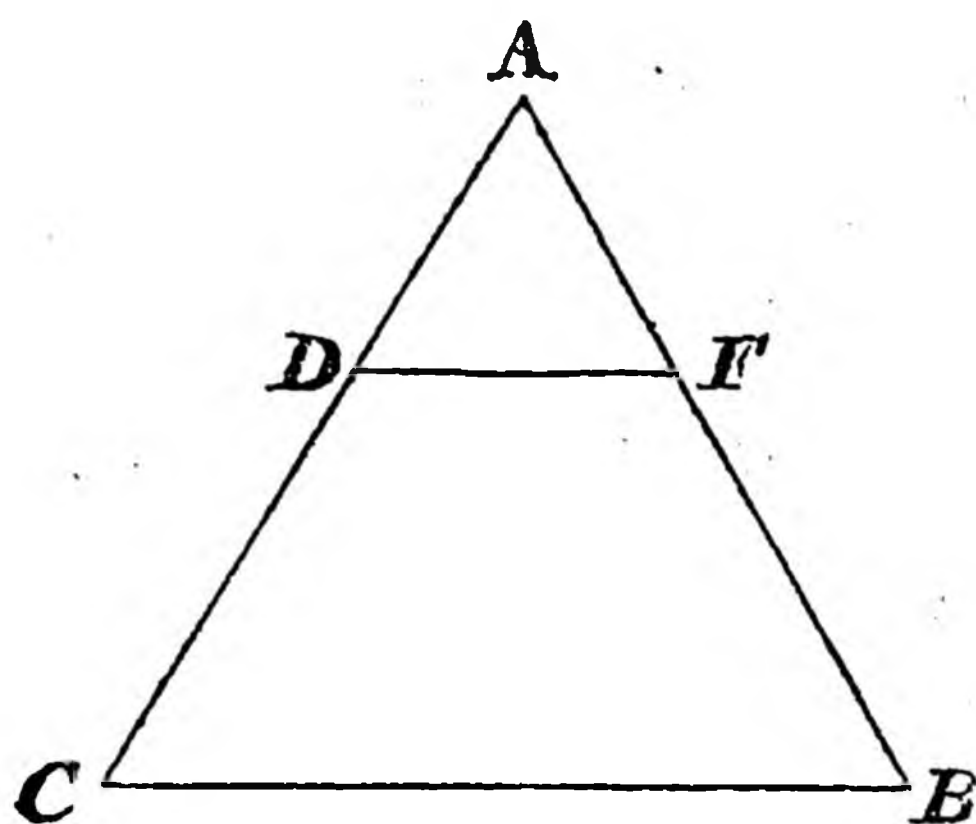
*Примѣч 8.* Въ текстѣ Евелида, сказано: то треугольники при перпендикулярѣ, а не такъ какъ мы сказали: то перпендикуляръ раздѣлитъ данный треугольникъ и т. д.

*Предложение 9.* Отъ данной прямой линіи отрѣзать данную ея часть (фиг. 225)?

*Рѣшеніе.* Пусть данная прямая будетъ  $AB$ , требуется отрѣзать отъ нея такую ея часть, которой бы прямая  $AB$  была данной кратности.

Чрезъ точку  $A$  проведемъ прямую  $AC$ , подъ произвольнымъ угломъ къ  $AB$ . На прямой  $AC$  возьмемъ произвольную точку  $D$  и отложимъ на  $AC$  столько разъ  $AD$ , какой кратности  $AB$  должна быть ея части.

Фиг. 225.



Точку  $C$  соединимъ съ  $B$ , чрезъ точку  $D$  проведемъ  $DF \parallel CB$  (кн. 1, пред. 31). Часть  $AF$  прямой  $AB$  и будетъ требуемая.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ въ треугольникѣ  $ACB$  проведена  $DF \parallel CB$ , то (кн. 6, пред. 2):

$$CD : AD = BF : AF$$

или (кн. 5, пред. 18):

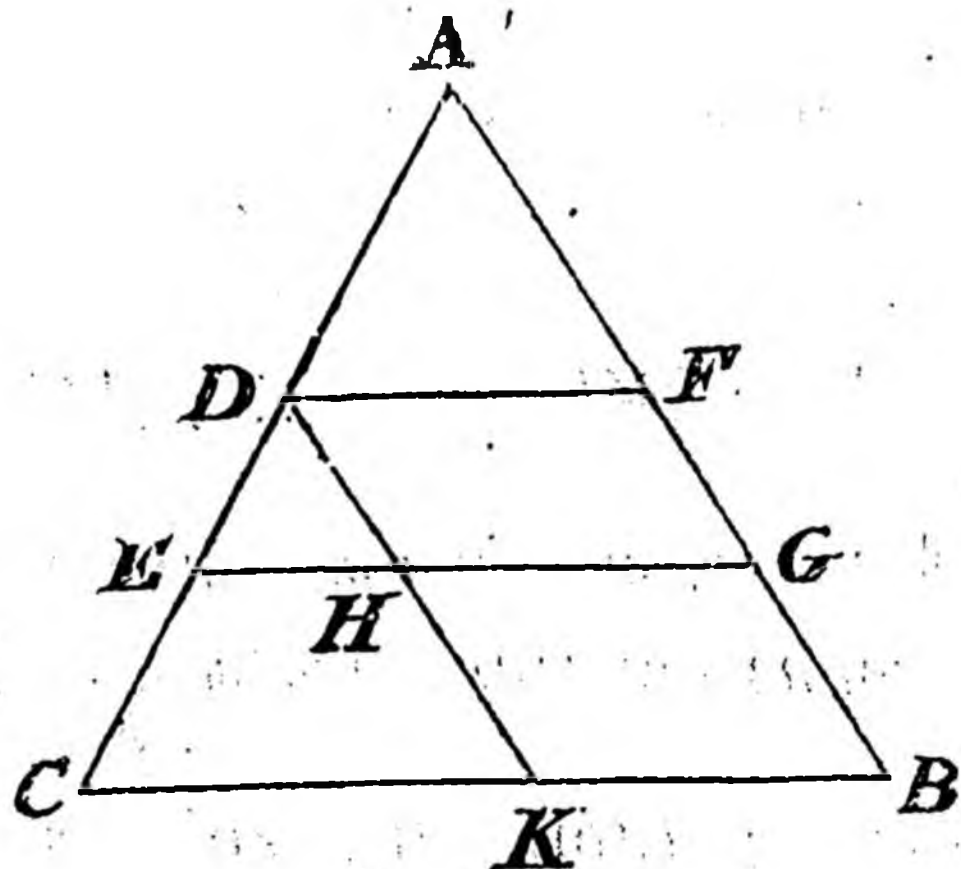
$$AC : AD = AB : AF.$$

Но  $AC$  есть линія данной кратности  $AD$ , слѣдовательно (кн. 5, примѣч. 28, пред. D) и  $AB$  будетъ той же кратности отъ  $AF$ .

*Предложеніе 10.* Раздѣлить данную прямую на части пропорціональныя и одинаково расположенныя, частямъ другой прямой (фиг. 226)?

*Рѣшеніе.* Пусть данная прямая будетъ  $AB$  и другая прямая  $AC$ , раздѣлить  $AB$  такъ какъ раздѣлена уже  $AC$ ?

Фиг. 226.



Пусть прямая  $AC$  въ точкахъ  $D$  и  $E$  раздѣлена известнымъ обра-



зомъ. Поставимъ прямыя  $AB$  и  $AC$  въ такое положеніе, чтобы онѣ составляли, какой нибудь уголъ  $CAB$ . Соединимъ  $C$  съ  $B$  и чрезъ точки  $D$  и  $E$  проведемъ  $DF$  и  $EG$  параллельно  $CB$  и чрезъ  $D$  линію  $DK \parallel AB$ . Очевидно фигуры  $HF$  и  $HВ$  будутъ параллелограммы (кн. 1, пред. 33), слѣдовательно  $DH=FG$  и  $HK=GB$ . Какъ въ треугольникѣ  $DKC$  проведена  $EH \parallel CK$ , то (кн. 6, пред. 2):

$$CE:ED=KH:HD$$

или

$$CE:ED=BG:GF$$

Точно также въ  $\triangle AEG$  проведена  $FD \parallel EG$ , слѣдовательно (кн. 6, пред. 2):

$$ED:DA=GF:FA$$

и еще:

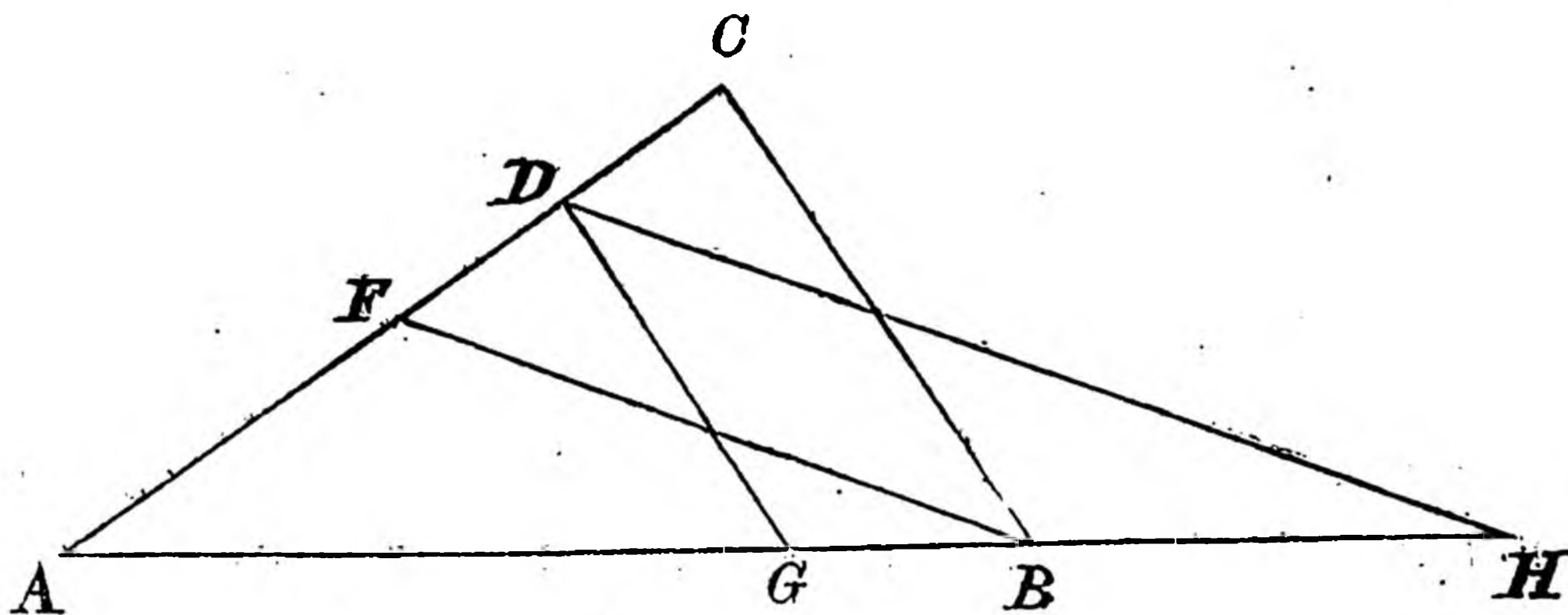
$$CD:DA=BF:FA.$$

Слѣдовательно прямая  $AB$  въ точкахъ  $F$  и  $G$  раздѣлена пропорціонально частямъ прямой  $AC$ , которыя и расположены одинаково, т. е. подобно.

*Примѣч. 9.* Съ помощью этого предложенія легко раздѣлить данную прямую  $AB$  внутренно и внѣшнѣ въ данномъ отношеніи (фиг. 227).

Пусть данное отношеніе будетъ  $AD:DC$  и пусть  $AD > DC$ .

Фиг. 227.



Помѣстимъ прямую  $AC$  такъ, чтобы она составляла произвольный уголъ съ данною прямою  $AB$ . Соединимъ  $B$  съ  $C$  и чрезъ точку  $D$  проведемъ  $DG \parallel BC$ , то прямая  $AB$  въ точкѣ  $G$  раздѣлена въ отношеніи  $AD:DC$  (кн. 6, пред. 2), т. е.:

$$AG:GB=AD:DC. \quad (1)$$

Отложимъ на прямой  $AD$  отъ точки  $D$  отрѣзокъ  $DF=DC$ . Соединимъ, найденную точку  $F$  съ  $B$  и чрезъ точку  $D$  проведемъ  $DH \parallel FB$ , то прямая  $AB$  въ точкѣ  $H$  будетъ

раздѣлена *внѣшнѣ* въ томъ же самомъ отношеніи. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ (кн. 6, пред. 2).

$$AH: BH = AD: FD,$$

но  $FD = DC$ , слѣдовательно:

$$AH: BH = AD: DC, \quad (2)$$

т. е. прямая  $AB$  въ точкѣ  $H$  раздѣлена *внѣшнѣ* въ томъ же самомъ отношеніи.

Сравнивая (1) и (2), мы найдемъ (кн. 5, пред. 11):

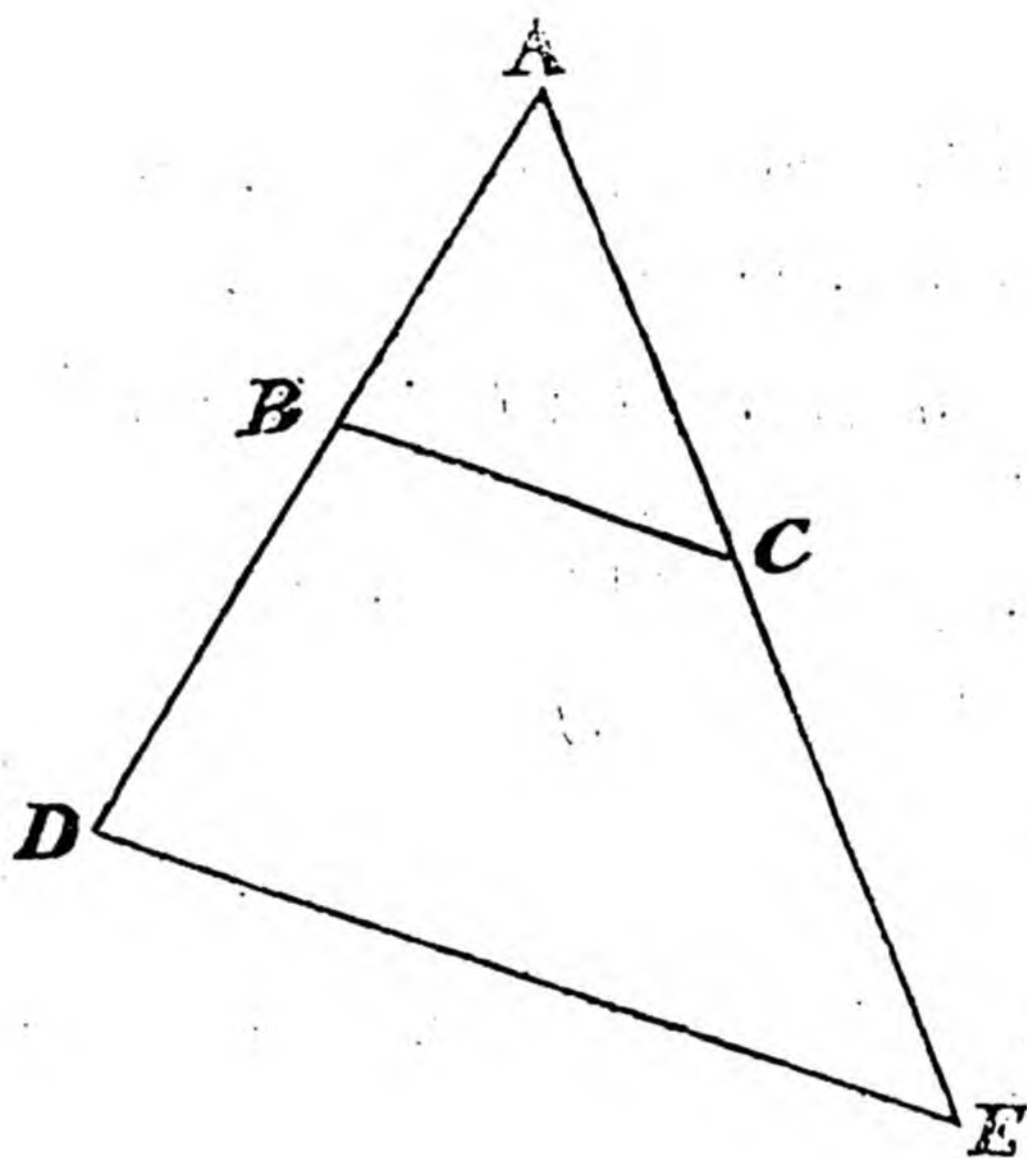
$$AG: GB = AH: BH.$$

Слѣдовательно точки  $A, G, B, H$  суть гармоническія (кн. 6, примѣч. 6):

**Предложеніе 11.** Даны двѣ прямыя линіи найти третью пропорціональную (фиг. 228)?

**Рѣшеніе.** Пусть  $AB$  и  $AC$  будутъ двѣ данныя линіи, такъ взятыя чтобы онѣ составляли произвольный уголъ, требуется найти третью пропорціональную къ  $AB$  съ  $AC$ .

Фиг. 228.



Продолжимъ линію  $AB$  такъ чтобы  $BD = AC$  и чрезъ точку  $D$  проведемъ  $DE \parallel BC$ , то мы будемъ имѣть (кн. 6, пред. 2):

$$AB: BD = AC: CE$$

но  $BD = AC$ , слѣдовательно:

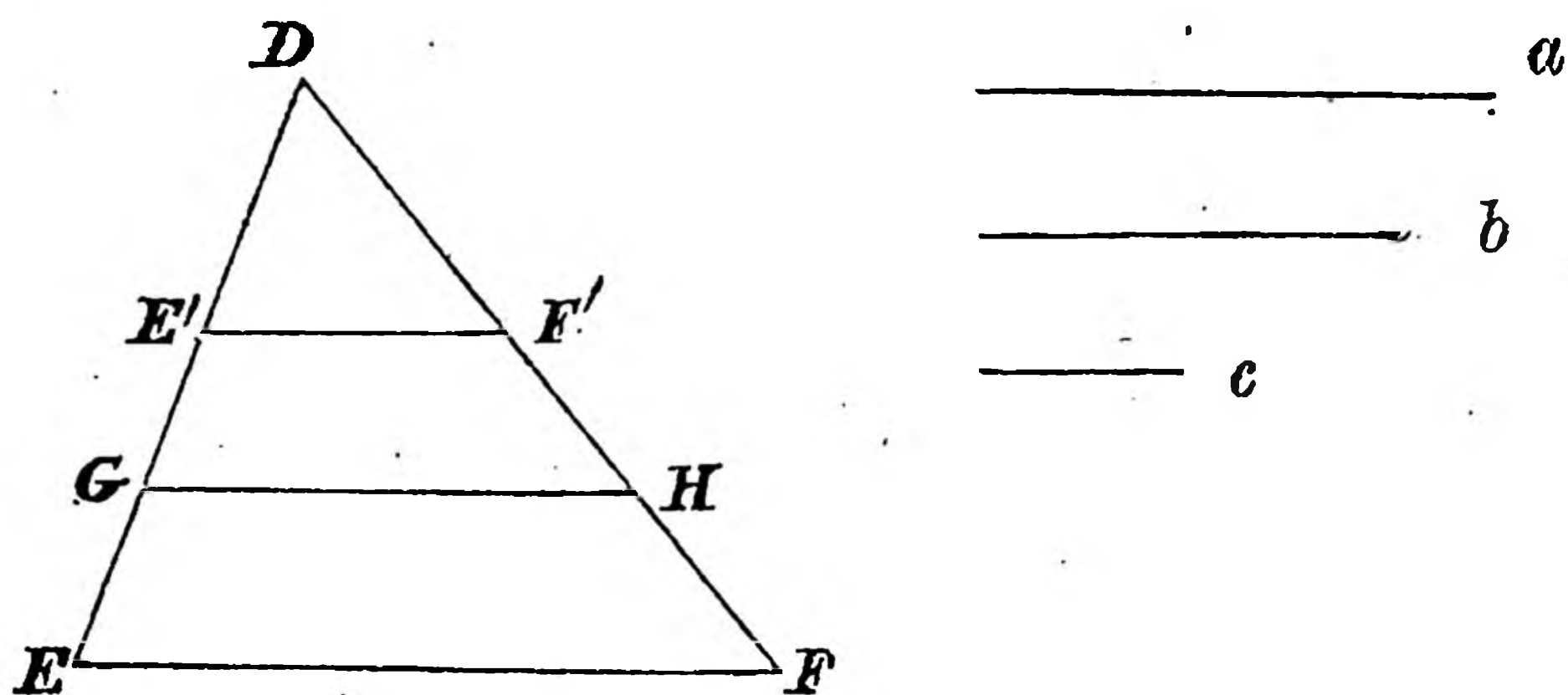
$$AB: AC = AC: CE.$$

**Предложеніе 12.** Даны три прямыя линіи, найти четвертую пропорціональную (фиг. 229)?

*Рѣшеніе.* Пусть данныя три прямыя линіи будутъ  $a, b, c$ , найти четвертую пропорціональную?

Проведемъ двѣ прямыя линіи  $DE$  и  $DF$ , такъ чтобы онѣ составляли произвольный уголъ  $EDF$ .

Фиг. 229.



Отложимъ на прямой  $DE$  отъ точки  $D$ , отрѣзокъ  $DG=b$  и отъ точки  $G$  отрѣзокъ  $GE=c$ . На прямой  $DF$  отъ той же точки  $D$  отложимъ отрѣзокъ  $DH=a$ . Соединимъ точки  $G$  и  $H$ , а чрезъ точку  $E$  проведемъ  $EF \parallel GH$ ; то отрѣзокъ  $HF$  и будетъ четвертая пропорціональная.

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ (кн. 6, пред. 2):

$$DG : GE = DH : HF$$

или

$$b : c = a : HF.$$

*Примѣч. 10.* Можно откладывать всѣ три данныя прямыя отъ точки  $D$ ,  $DG=b$ ,  $DE'=c$ ,  $DH=a$  и соединить точки  $G$  и  $H$ , чрезъ точку  $E'$  провести  $E'F' \parallel GH$ , то мы будемъ имѣть:

$$DG : DE' = DH : DF'$$

или

$$b : c = a : DF',$$

слѣдовательно искомая прямая будетъ  $DF'$ .

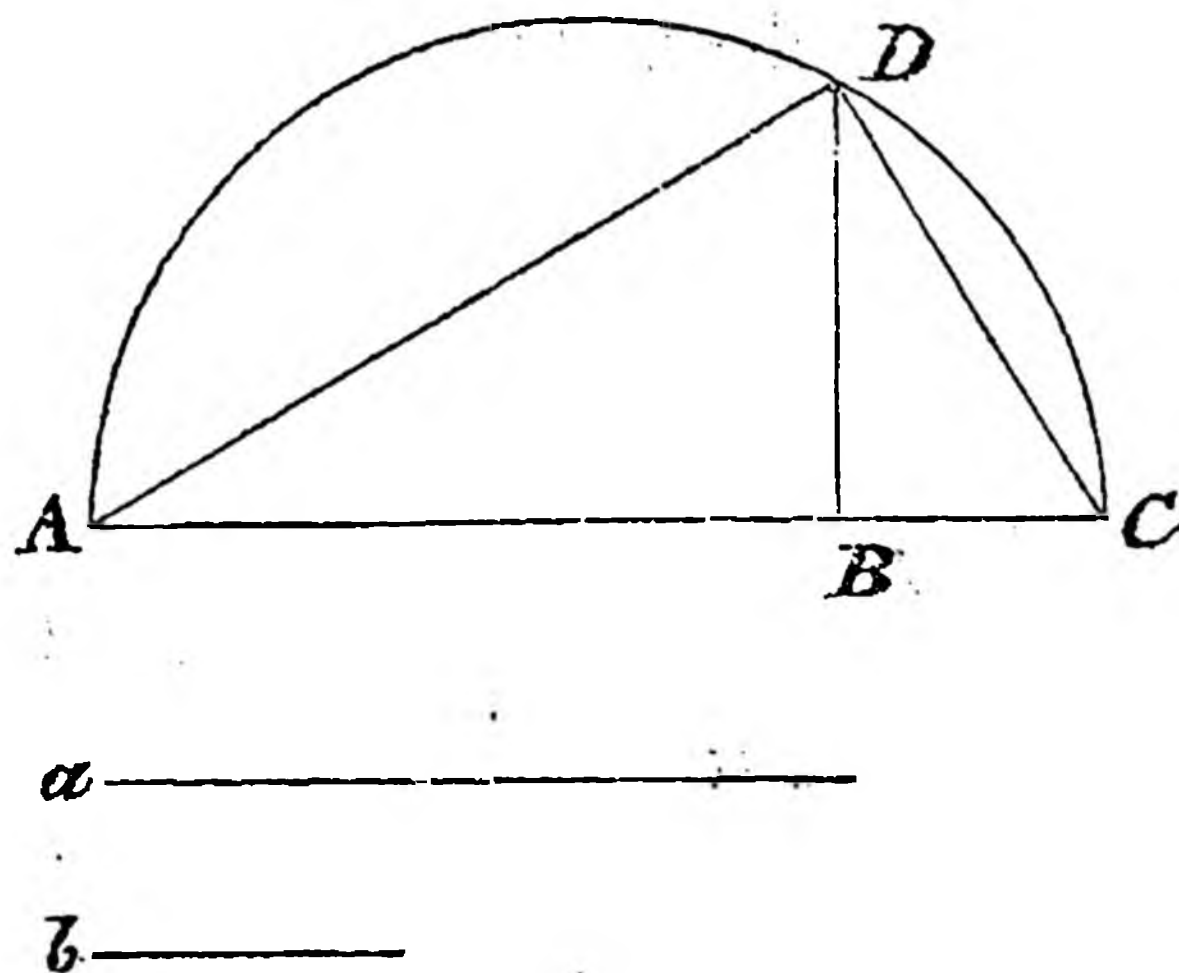
*Предложеніе 13.* Даны двѣ прямыя линіи найти средне-пропорціональную (фиг. 230)?

*Рѣшеніе.* Пусть данныя прямыя будутъ  $a$  и  $b$ , найти средне-пропорціональную. Отложимъ на какойнибудь прямой одинъ за другимъ отрѣзки  $AB=a$  и  $BC=b$  и на  $AC$ , какъ на діаметрѣ, опишемъ полукругъ  $ADC$ . Изъ точки  $B$  возставимъ перпендикуляръ къ  $AC$  и продолжимъ его до встрѣчи съ окружностью въ точкѣ  $D$ . Я говорю, что  $BD$  и будетъ искомая прямая.



Если соединимъ точку  $D$  съ  $A$  и  $C$ , то треугольникъ  $ADC$  будетъ прямоугольный (кн. 3, пред. 31) и какъ изъ вершины  $D$  прямого угла

Фиг. 230.

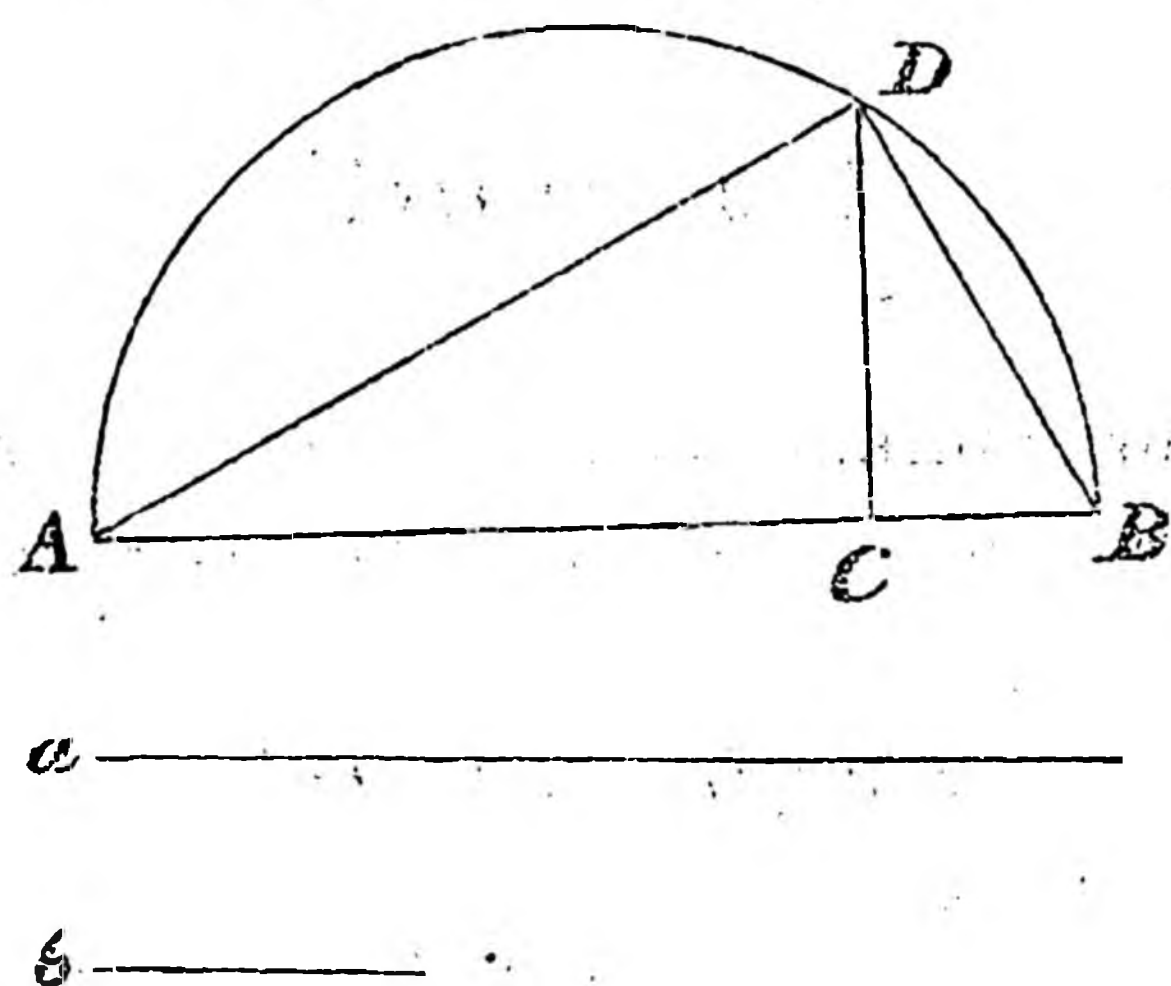


$ADC$  опущенъ на гипотенузу перпендикуляръ  $DB$ , то (кн. 6, пред. 8) онъ и будетъ искомая средне-пропорціональная прямая.

Примѣч. 11. Эту задачу можно рѣшить еще двумя слѣдующими построениями.

1) На большей изъ двухъ данныхъ прямыхъ  $AB=a$ , отъ точки  $B$  отложимъ меньшую  $BC=b$ , и на большей, какъ на діаметрѣ, опишемъ полукругъ  $ADB$ .

Фиг. 231.

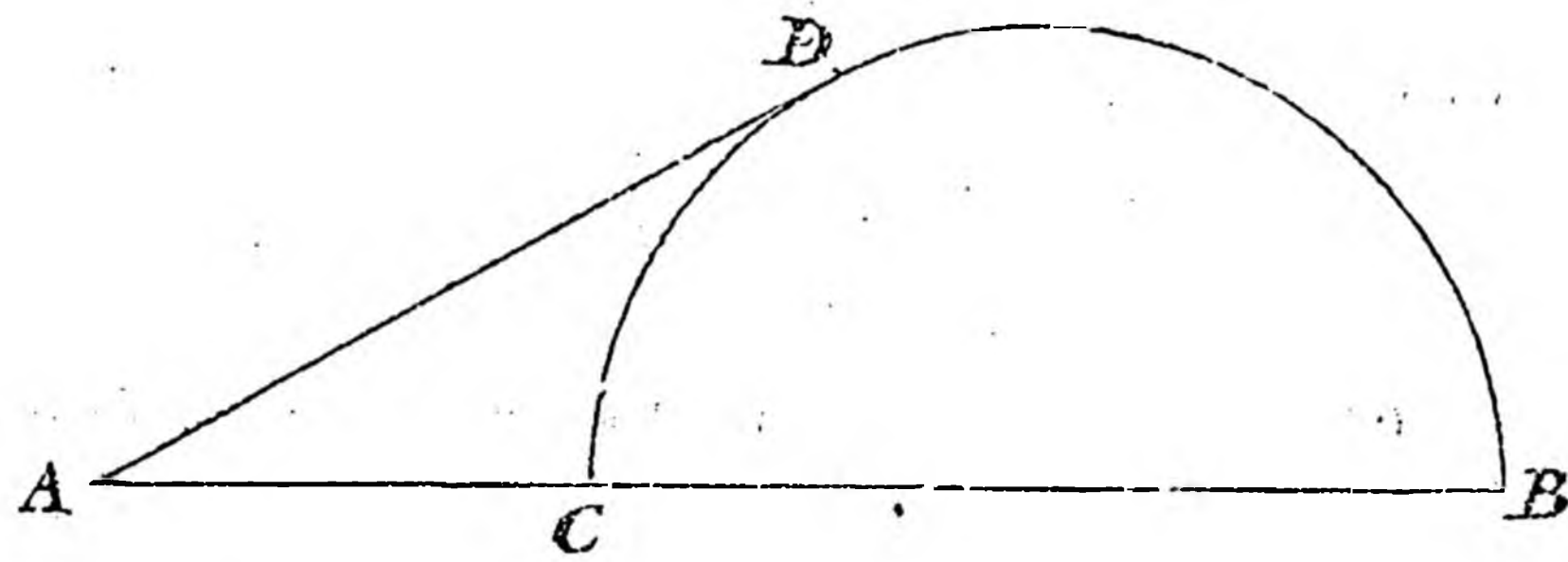


Изъ точки  $C$  возставимъ перпендикуляръ  $CD$  и продолжимъ его до встрѣчи съ окружностью въ точкѣ  $D$ . Точку  $D$  соединимъ съ точками  $A$  и  $B$ ; полученный такимъ образомъ треугольникъ  $ADB$  будетъ прямоугольный (кн. 3, пред. 31), въ которомъ изъ вершины прямого угла  $D$  опущенъ перпендикуляръ  $DC$  на гипотенузу  $AB$ , слѣдовательно (кн. 6, пред. 8) катетъ  $DB$  и будетъ искомая средне-пропорціональная линія между  $AB$  и  $BC$ , т. е. между данными.

2) Отложимъ на большей  $AB=a$  отъ точки  $A$  меньшую  $AC=b$ , и на остаткѣ  $BC$ , какъ на діаметрѣ, опишемъ полукругъ  $CDB$ , изъ точки  $A$  проведемъ касательную  $AD$  (кн. 3, пред. 17), то эта касательная и будетъ искомая прямая, такъ какъ мы имѣемъ (кн. 3, пред. 36):

$$\square AD=AB \cdot AC.$$

Фиг. 232.



$a$  —————

$b$  —————

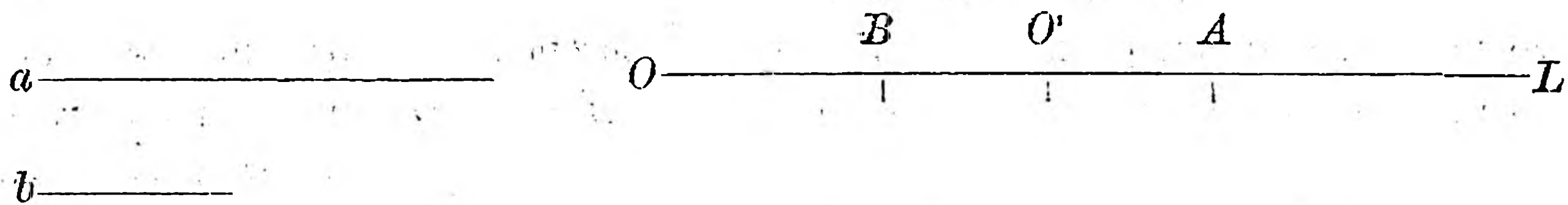
Замѣчу еще что эта задача уже рѣшена предложеніемъ 11.

*Примѣч. 12.* Среднимъ арифметическимъ двухъ однородныъ величинъ называется ихъ полусумма.

*Предложеніе а).* Даны двѣ прямыя  $a$  и  $b$ , найти прямую, которая бы была среднимъ арифметическимъ между  $a$  и  $b$  (фиг. 233)?

*Рѣшеніе.* Положимъ что  $a > b$ . На неопредѣленной прямой  $OL$  отъ точки  $O$  отложимъ  $OA = a$  и  $OB = b$  (кн. 1, пред. 2).

Фиг. 233.



Раздѣлимъ разстояніе  $AB$  пополамъ (кн. 1, пред. 10) въ точкѣ  $O'$ , я говорю, что  $OO'$  и будетъ средне-арифметическое между  $a$  и  $b$ , т. е.:

$$OO' = \frac{a+b}{2}.$$

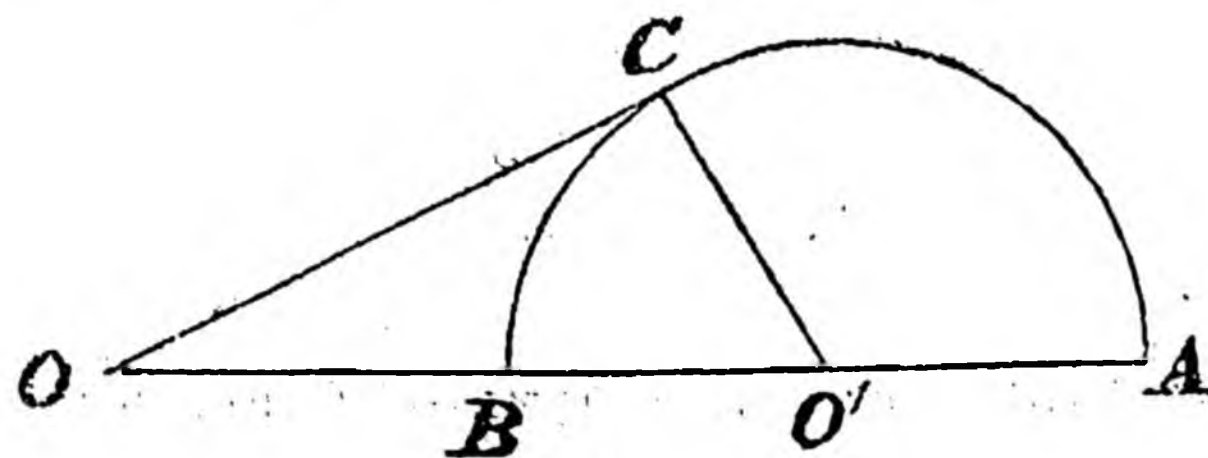
Въ самомъ дѣлѣ,  $OO' = OB + BO'$ , а  $BO' = \frac{OA - OB}{2}$ , следовательно:

$$OO' = OB + \frac{OA - OB}{2} = \frac{OA + OB}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

*Предложеніе б).* Средне-арифметическая прямая больше средне-геометрической, или средне-пропорціональной (фиг. 234).

*Доказат.* Пусть  $OA = a$ ,  $OB = b$ . Средне-арифметическая, какъ мы выше видѣли, будетъ  $OO'$ .

Фиг. 234.



На  $AB$ , какъ на діаметръ опишемъ полукругъ  $BCA$ , изъ точки  $O$  проведемъ касательную  $OC$  (кн. 3, пред. 17). Мы выше видѣли, что  $OO'$  есть средне-пропорціональная между

$OA$  и  $OB$ , т. е.  $OC^2 = OA \cdot OB = a \cdot b$ . Если точку касанія  $C$  соединимъ съ центромъ  $O$ , полу-  
круга  $BCA$ , то изъ треугольника  $OCO'$  будемъ имѣть, очевидно,  $OO' > OC$ , но  $OO' = \frac{a+b}{2}$ , а  
 $OC = \sqrt{ab}$ , слѣдовательно:

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}.$$

Если разность между  $\frac{a+b}{2}$  и  $\sqrt{ab}$  означимъ чрезъ  $\delta$ , то будемъ имѣть:

$$\delta = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$$

или

$$2\delta = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2,$$

умножая обѣ части на  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ , найдемъ:

$$2\delta(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (a - b)^2.$$

Такъ какъ  $a > b$ , то, подставивъ въ первую часть предыдущаго выраженія вмѣсто  $\sqrt{a}$   
 $\sqrt{b}$ , получимъ:

$$8\delta b < (a - b)^2,$$

откуда:

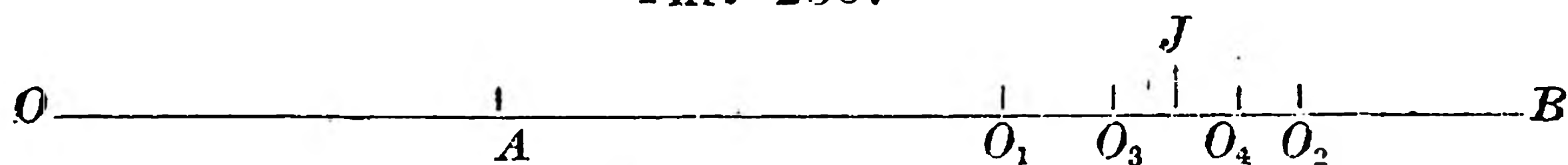
$$\delta < \frac{(a - b)^2}{8b},$$

т. е. разность между средне-арифметическимъ и средне-геометрическимъ двухъ прямыхъ  
всегда меньше квадрата ихъ разности, раздѣленнаго на восемь разъ взятую меньшую прямую.

*Предложеніе с).* Если возьмемъ средне-арифметическую  $OO_1$  двухъ прямыхъ  $OA$  и  
 $OB$  (фиг. 235), затѣмъ возьмемъ средне-арифметическую  $OO_2$  прямыхъ  $OB$  и  $OO_1$ , потомъ  
средне-арифметическую прямыхъ  $OO_1$  и  $OO_2$  и будемъ продолжать такое дѣйствіе неопре-  
дѣленно, то точки  $O_1, O_2, O_3, \dots$  будутъ приближаться неопредѣленно къ точкѣ  $J$ , взя-  
той на разстояніи  $\frac{2}{3} AB$  отъ точки  $A$ , т. е.:

$$OJ = OA + \frac{2}{3} AB.$$

Фиг. 235.



*Доказат.* Если  $AJ = \frac{2}{3} AB$ ,  $BJ = \frac{1}{3} AB$ , то:

$$OA = OJ - 2BJ, \quad OB = OJ + BJ.$$

Возьмемъ средне-арифметическую этихъ двухъ прямыхъ, то найдемъ:

$$OO_1 = OJ - \frac{BJ}{2}.$$

Средне-арифметическая этой послѣдней прямой и прямой  $OB$  будетъ:

$$OO_2 = OJ + \frac{BJ}{4} = OJ + \frac{BJ}{2^2}.$$



продолжая подобнымъ образомъ, найдемъ:

$$OO_3 = OJ - \frac{BJ}{2^3}, \quad OO_4 = OJ + \frac{BJ}{2^4}, \quad \dots$$

$$OO_n = OJ \pm \frac{BJ}{2^n},$$

знакъ  $+$  когда  $n$  есть число четное, а знакъ  $-$  когда  $n$  есть число нечетное.

Изъ послѣдняго выраженія видимъ, что по мѣрѣ возрастанія числа  $n$  дробь  $\frac{BJ}{2^n}$  убываетъ неопредѣленно, слѣдовательно точка  $O_n$  приближается къ точкѣ  $J$ .

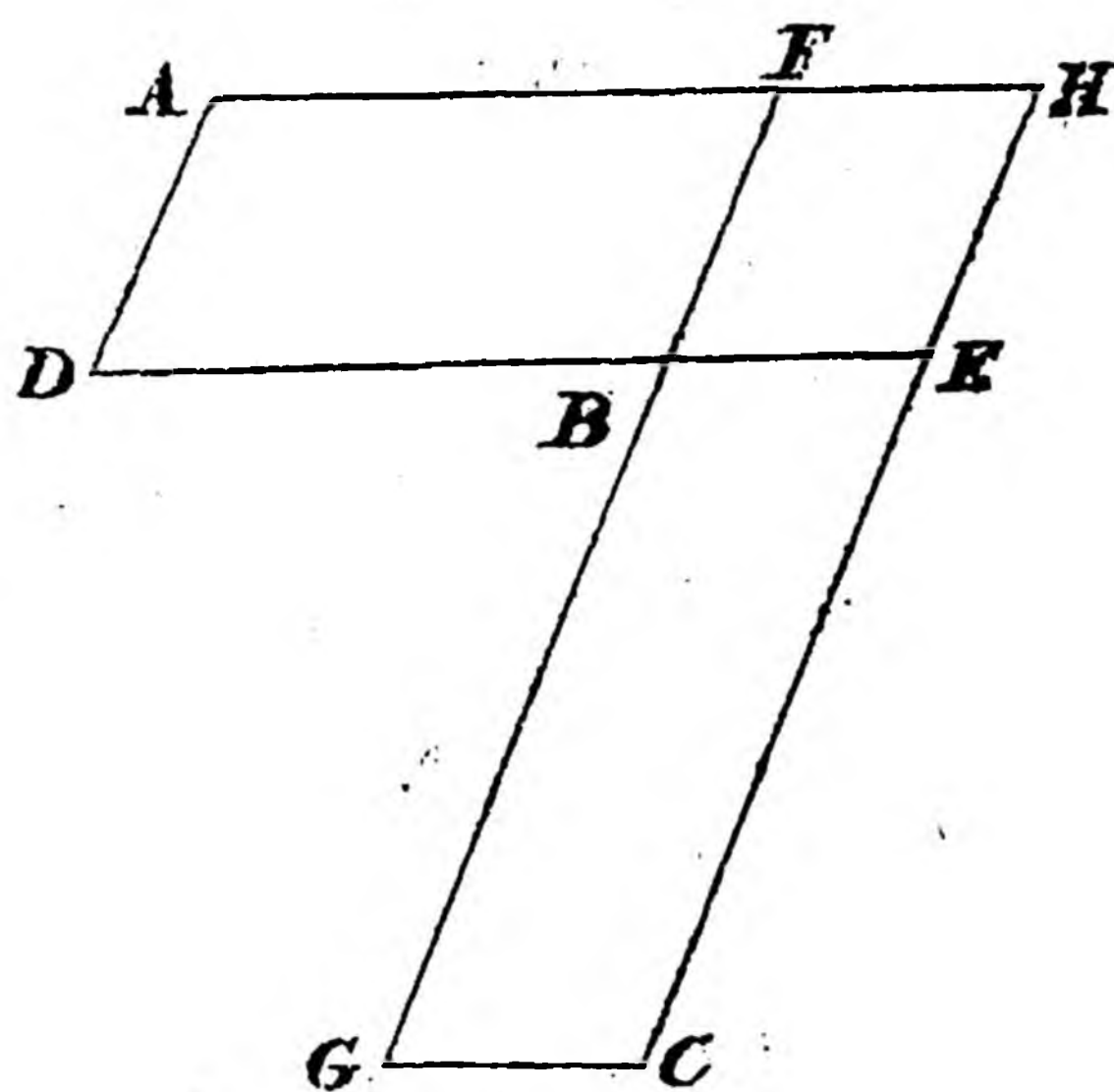
Предложенія (b) и (c) важны при разысканіи отношенія окружности къ діаметру.

*Предложеніе 14.* Если въ двухъ равныхъ параллелограммахъ уголъ одного равенъ углу другаго, то стороны параллелограмовъ, заключающія равные углы, будутъ обратно пропорціональны; и обратно, если въ двухъ параллелограммахъ уголъ одного равенъ углу другаго и стороны, заключающія равные углы, обратно пропорціональны, то параллелограммы равны (фиг. 233).

*Доказат.* 1) Пусть параллелограммы  $AB$  и  $BC$  равны и  $\angle FBD = \angle GBE$ . Я говорю, что:

$$DB : BE = GB : BF.$$

Фиг. 236.



Помѣстимъ параллелограммы  $AB$  и  $BC$  такъ, чтобы сторона  $BE$  параллелограмма  $BC$  была продолженіемъ стороны  $DB$  параллелограмма  $AB$ , то, такъ какъ углы  $DBF$  и  $GBE$  равны, сторона  $BF$  параллелограмма  $AB$  будетъ продолженіе стороны  $GB$  параллелограмма  $BC$  (кн. 1, пред. 14).

Такъ какъ параллелограмъ  $AB$  равенъ параллелограму  $BC$ , то (кн. 5, пред. 7):

$$AB : FE = BC : FE,$$

но (кн. 6, пред. 1):

$$AB:FE=DB:BE$$

и

$$BC:FE=GB:BF$$

следовательно (кн. 5, пред. 11):

$$DB:BE=GB:BF.$$

2) По условию мы имеем  $\angle DBF=\angle GBE$  и

$$DB:BE=GB:BF,$$

я говорю, что параллелограммы  $AB$  и  $BC$  равны. То же построение.

Въ самомъ дѣлѣ, мы имеемъ (кн. 6, пред. 1):

$$AB:FE=DB:BF$$

и

$$BC:FE=GB:BF.$$

Но по условию:

$$DB:BE=GB:BF,$$

следовательно (кн. 5, пред. 9):

$$AB:FE=BC:FE,$$

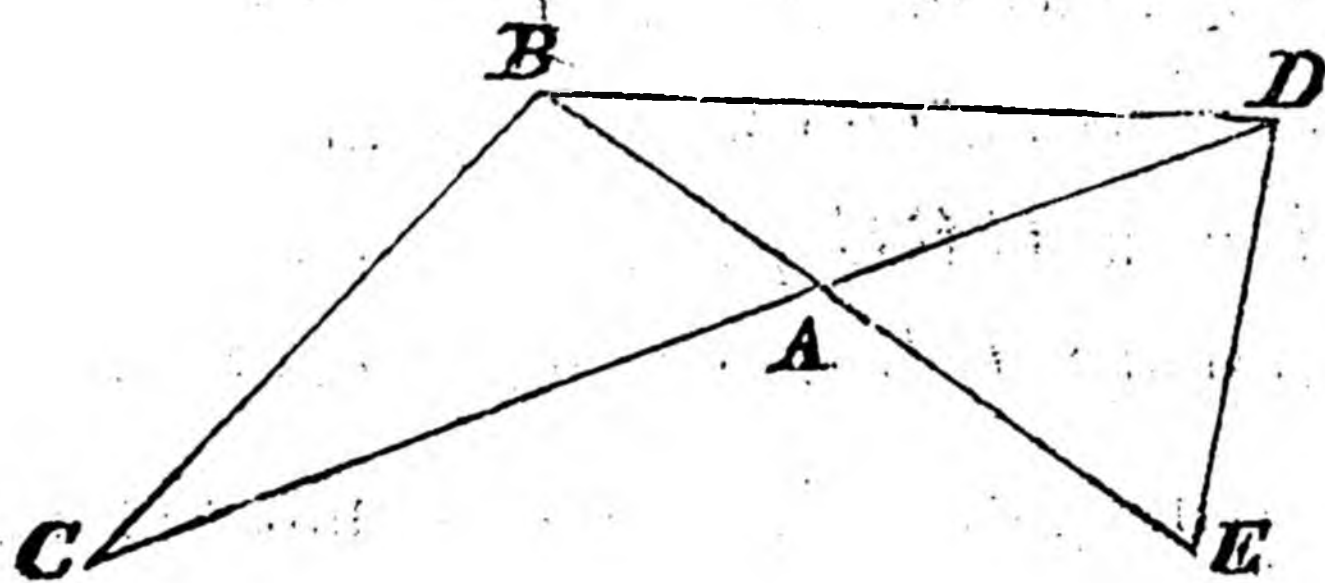
откуда  $AB=BC$ .

**Предложеніе 15.** Если въ двухъ равныхъ треугольникахъ уголъ одного равенъ углу другаго, то стороны, заключающія равные углы, обратно пропорціональны; и обратно, если въ двухъ треугольникахъ, уголъ одного равенъ углу другаго и стороны, заключающія равные углы, обратно пропорціональны, то треугольники будутъ равны (фиг. 237).

**Доказат.** 1) Пусть треугольники  $ABC$  и  $ADE$  равны и  $\angle BAC=\angle DAE$ . Я говорю, что:

$$CA:AD=EA:AB.$$

Фиг. 237.



Помѣстимъ треугольники  $ABC$  и  $ADE$  такъ, чтобы сторона  $AD$  была

продолженіемъ стороны  $CA$ , то (кн. 1, пред. 14) сторона  $EA$  будетъ продолженіемъ стороны  $AB$ . Соединимъ точки  $B$  и  $D$ .

Такъ какъ  $\triangle ABC = \triangle ADE$ , то (кн. 5, пред. 7):

$$\triangle ABC : \triangle ABD = \triangle ADE : \triangle ABD. \quad (1)$$

$$\triangle ABC : \triangle ABD = CA : AD \quad (2)$$

и

$$\triangle ADE : \triangle ABD = EA : AB \quad (3)$$

откуда, соображаясь съ (1), (2), (3) (кн. 5, пред. 11), найдемъ:

$$CA : AD = EA : AB.$$

2) По условію мы имѣемъ  $\angle BAC = \angle DAE$  и

$$CA : AD = EA : AB,$$

я говорю, что:

$$\triangle ABC = \triangle ADE.$$

Тоже построение.

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ:

$$CA : AD = EA : AB$$

и

$$\triangle ABC : \triangle ABD = CA : AD$$

$$\triangle ADE : \triangle ABD = EA : AB,$$

откуда:

$$\triangle ABC : \triangle ABD = \triangle ADE : \triangle ABD$$

а изъ этой пропорціи имѣемъ (кн. 5, пред. 9):

$$\triangle ABC = \triangle ADE.$$

*Предложеніе 16.* Если четыре прямыя линіи пропорціональны, то прямоугольникъ, построенный на крайнихъ прямыхъ, равенъ прямоугольнику, построенному на среднихъ; и обратно, если прямоугольникъ, построенный на крайнихъ прямыхъ, равенъ прямоугольнику, построенному на среднихъ прямыхъ, то четыре прямыя пропорціональны (фиг. 238).



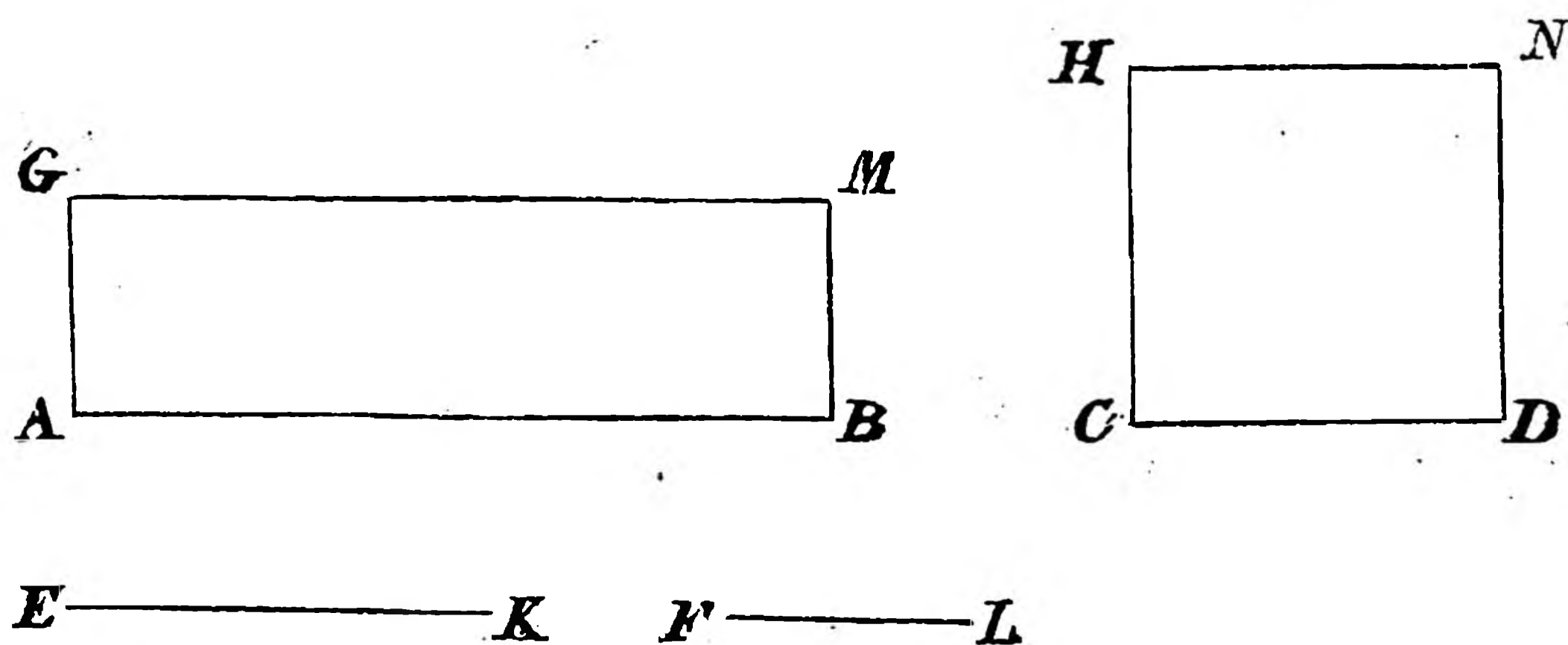
*Доказат.* 1) Пусть четыре прямые линии  $AB$ ,  $CD$ ,  $EK$ ,  $FL$  пропорциональны, т. е.:

$$AB : CD = EK : FL.$$

Я говорю, что прямоугольникъ, построенный изъ  $AB$  и  $FL$ , равенъ прямоугольнику, построенному изъ  $CD$  и  $EK$ , т. е.:

$$AB \cdot FL = CD \cdot EK$$

Фиг. 238.



Изъ точекъ  $A$  и  $C$  прямыхъ  $AB$  и  $CD$  возставимъ перпендикуляры  $AG = FL$  и  $CH = EK$  и построимъ прямоугольники  $GB$  и  $HD$ .

Такъ какъ изъ условія и построения мы имѣемъ;

$$AB : CD = CH : AG$$

то въ параллелограмахъ  $GB$  и  $HD$ , углы равны и стороны обратно пропорциональны, и слѣдовательно (кн. 6, пред. 14) они равны.

2) Положимъ теперь, что прямоугольникъ  $GB$ , построенный изъ прямыхъ  $AB$  и  $FL$ , равенъ прямоугольнику  $HD$ , построенному изъ прямыхъ  $CD$  и  $EK$ . Я говорю, что четыре прямые линии пропорциональны, т. е. что:

$$AB : CD = EK : FL.$$

Сдѣлавъ тоже построение, и замѣчая что прямоугольники  $GB$  и  $HD$  равны, мы будемъ имѣть  $\angle BAG = \angle DCH$ , слѣдовательно (кн. 6, пред. 14):

$$AB : CD = CH : AG,$$

откуда, замѣчая, что  $CH = EK$ ,  $AG = FL$ , найдемъ:

$$AB : CD = EK : FL.$$

*Примеч. 13.* Это предложеніе есть частный случай предложенія 14.

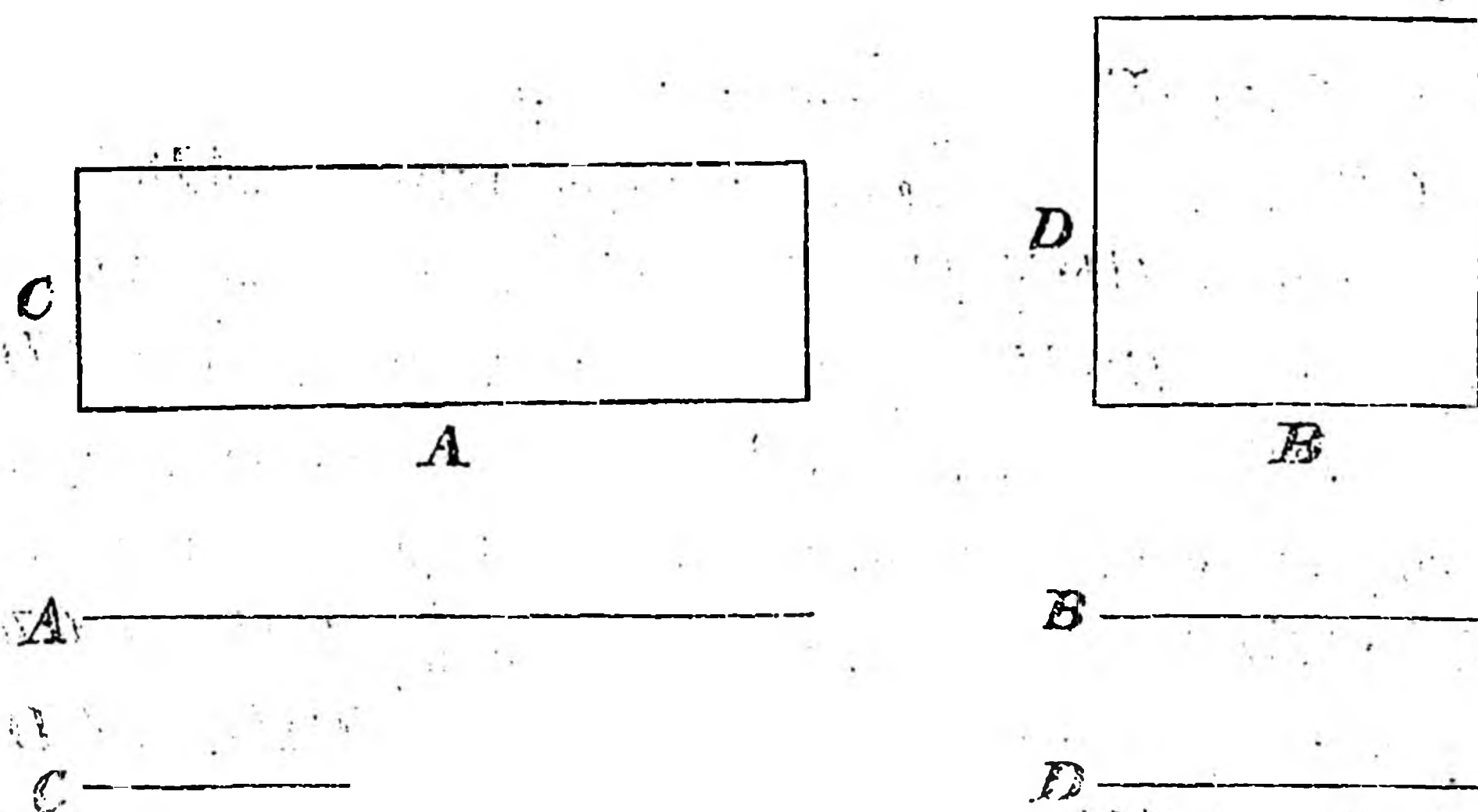
*Предложение 17.* Если три прямые линии пропорциональны, то прямоугольник, построенный изъ крайнихъ, равенъ квадрату, построенному на средней, и обратно, если прямоугольник, построенный на крайнихъ, равенъ квадрату, построенному на средней, то три прямые линии пропорциональны (фиг. 239).

*Доказат.* 1) Пусть три прямые линии  $A, B, C$  будутъ пропорциональны, т. е.:

$$A : B = B : C.$$

Я говорю, что прямоугольник, построенный изъ прямыхъ  $A$  и  $C$ , равенъ квадрату, построенному на прямой  $B$ .

Фиг. 239.



Возьмемъ четвертую прямую  $D=B$ , то (кн. 5, пред. 7) мы будемъ имѣть:

$$A : B = D : C$$

слѣдовательно (кн. 6, пред. 16) прямоугольник, построенный изъ прямыхъ  $A$  и  $C$ , равенъ прямоугольнику, построенному изъ прямыхъ  $B$  и  $D$ . Но прямоугольник, построенный изъ прямыхъ  $B$  и  $D$ , есть квадратъ, такъ какъ  $B=D$ .

2) Пусть теперь прямоугольник, построенный изъ  $A$  и  $C$  равенъ квадрату, построенному на  $B$ . Я говорю, что:

$$A : B = B : C$$

Сдѣлавъ тоже построение, видимъ, что прямоугольник изъ  $A$  и  $C$  будетъ равенъ прямоугольнику, построенному изъ  $B$  и  $D$ , слѣдовательно (кн. 6, пред. 16):

$$A : B = D : C$$

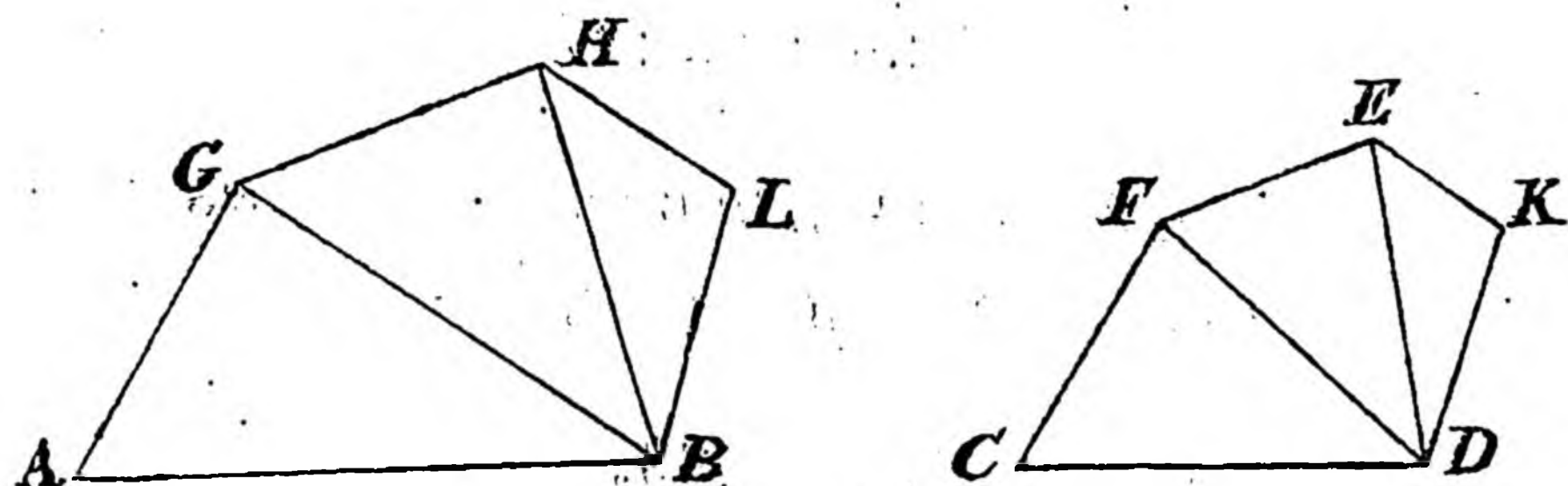
но  $D=B$ , слѣдовательно:

$$A : B = B : C.$$

**Предложение 18.** На данной прямой построить многоугольник подобный и подобно расположенный данному многоугольнику (фиг. 240)?

**Решение.** Пусть данная прямая будет  $AB$ , а данный многоугольник  $CDKEF$ . Требуется на прямой  $AB$  построить многоугольник подобный и подобно расположенный, так чтобы  $AB$  и  $CD$  были соответственными сторонами.

Фиг. 240.



Соединимъ  $D$  съ  $F$  и построимъ на прямой  $AB$  уголъ  $BAG = \angle DCF$  и  $\angle ABG = \angle CDF$ , слѣдовательно, построенный  $\triangle ABG$  будетъ равноугольный треугольнику  $CDF$ . Точно также, проведя прямую  $DE$ , на прямой  $BG$  построимъ  $\triangle BGH$ , равноугольный треугольнику  $DFE$  и наконецъ на прямой  $BH$  построимъ  $\triangle BHL$ , равноугольный треугольнику  $DEK$ .

Такъ какъ углы, построенные при точкѣ  $B$ , равны угламъ при точкѣ  $D$ , то и  $\angle ABL = \angle CDK$ . По той же причинѣ  $\angle AGH = \angle CFE$ ,  $\angle GHL = \angle FEK$ . Въ треугольникахъ  $BHL$  и  $DEK$   $\angle BHL = \angle DEK$ , слѣдовательно и  $\angle HLB = \angle EKD$ . Изъ этого видимъ, что построенный многоугольникъ  $AGHLB$  равноугольный данному  $CFEKD$ .

Далѣе треугольники  $AGB$  и  $CFD$  подобны, слѣдовательно (кн. 6, пред. 4):

$$AG : AB = CF : CD.$$

Точно также изъ подобныхъ треугольниковъ  $BGH$  и  $DFE$  мы имѣемъ:

$$BG : BH = DF : DE$$

а изъ подобныхъ треугольниковъ  $BHL$  и  $DEK$  мы имѣемъ:

$$BH : BL = DE : DK,$$

и

$$BL : LH = DK : KE.$$

Но такъ какъ:

$$AB : BG = CD : DF, \quad BG : BH = DF : DE,$$

$$BH : BL = DE : DK,$$



то (кн. 5, пред. 22):

$$AB : BL = CD : DK.$$

Точно также можно показать, что:

$$AG : GH = CF : FE$$

и

$$GH : HL = FE : EK.$$

Слѣдовательно многоугольники  $ABLHG$  и  $CDKEF$  не только равноугольны, но у нихъ, стороны заключающія равные углы, пропорціональны, т. е. они подобны.

*Примѣч. 14.* Подобными многоугольниками подобно расположенными называются такіе, коихъ соотвѣтственныя стороны параллельны въ одномъ и томъ же направленіи.

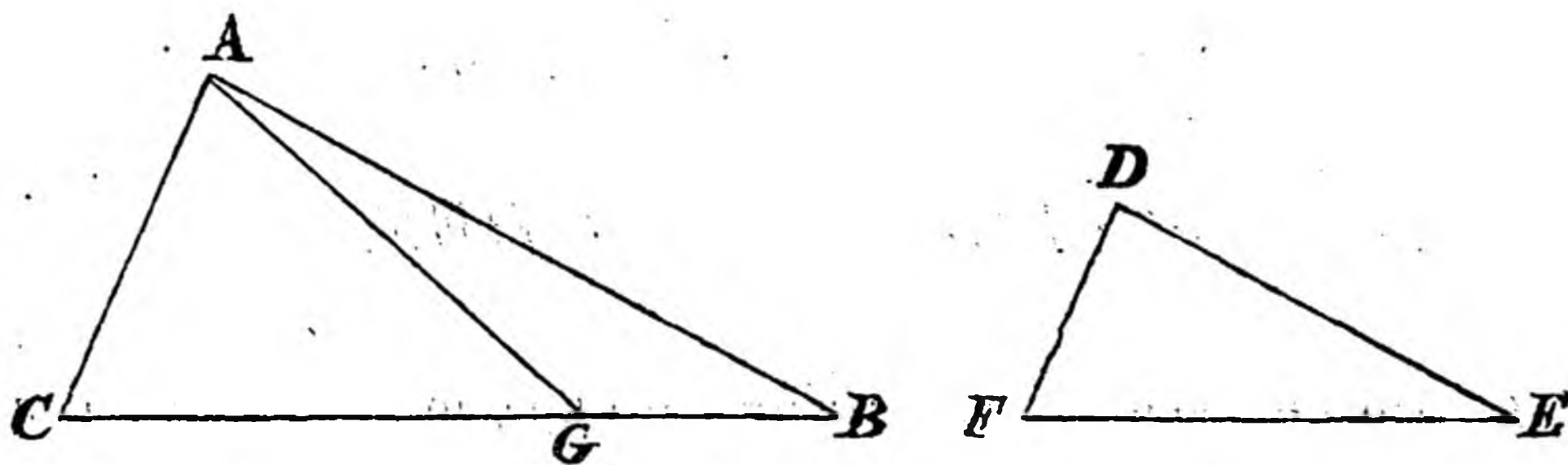
*Предложеніе 19.* Отношеніе подобныхъ треугольниковъ равно двойному отношенію соотвѣтственныхъ сторонъ (кн. 5, опред. 10) (фиг. 241).

*Доказат.* Пусть данныя треугольники будутъ  $ABC$  и  $DEF$  и пусть  $\angle ABC = \angle DEF$ , то:

$$AB : BC = DE : EF.$$

Я говорю, что  $\triangle ABC : \triangle DEF = 2(BC : EF)$ .

Фиг. 241.



Построимъ къ прямымъ  $BC$  и  $EF$  третью пропорціональную  $BG$  такъ, чтобы:

$$BC : EF = EF : BG.$$

Точку  $G$  соединимъ съ  $A$ . Такъ какъ мы имѣемъ (кн. 6, опред. 1):

$$AB : BC = DE : EF$$

или (кн. 5, опред. 13):

$$AB : DE = BC : EF.$$

Но по построению:

$$BC:EF=EF:BG, \quad (1)$$

следовательно (кн. 5, пред. 11):

$$AB:DE=EF:BG.$$

Изъ этой пропорціи видимъ, что, въ треугольникахъ  $ABG$  и  $DEF$  стороны, заключающія равные углы, обратно пропорціональны, следовательно (кн. 6, пред. 15):

$$\triangle ABG=\triangle DEF.$$

Но изъ пропорціи (1) видимъ, что отношеніе  $BC:BG=2(BC:EF)$ , а такъ какъ (кн. 6, пред. 1):

$$\triangle ABC:\triangle ABG=BC:BG,$$

то:

$$\triangle ABC:\triangle ABG=2(BC:EF).$$

Но

$$\triangle ABG=\triangle DEF$$

следовательно:

$$\triangle ABC:\triangle DEF=2(BC:EF).$$

*Слѣдствіе.* Изъ сказаннаго дѣлается яснымъ, что если три линіи  $BC$ ,  $EF$ ,  $BG$  пропорціональны, то первая относится къ третьей, какъ треугольникъ, построенный на первой къ треугольнику подобному и подобно расположенному, построенному на второй; и въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ:

$$BC:BG=\triangle ABC:\triangle DEF.$$

*Примѣч. 15.* Новые геометры выражаютъ это предложеніе такъ: площади подобныхъ треугольниковъ относятся между собою, какъ площади квадратовъ, построенныхъ на соответственныхъ сторонахъ. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ:

$$\triangle ABC:\triangle ABG=BC:BG,$$

но

$$BC:EF=EF:BG,$$

следовательно:

$$BC:BG=\square EF:\square BG$$

откуда:

$$\triangle ABC:\triangle ABG=\square EF:\square BG$$

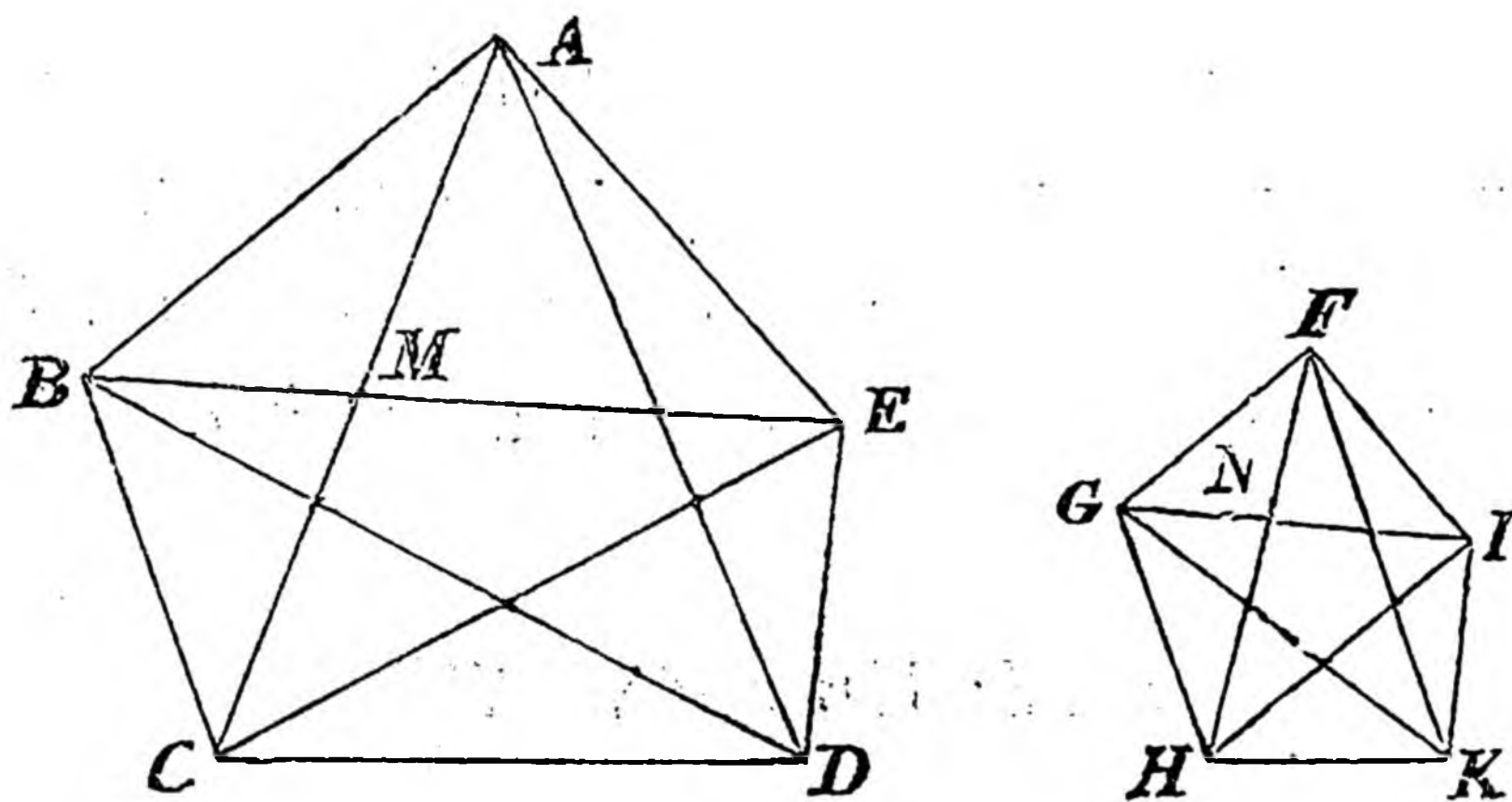
или

$$\triangle ABC:\triangle DEF=\square BC:\square EF.$$

*Предложение 20.* Два подобные многоугольника могут быть раздѣлены на одинаковое число подобныхъ треугольниковъ, имѣющихъ между собою отношеніе, равное отношенію многоугольниковъ, а отношеніе многоугольниковъ равно двойному отношенію соотвѣтственныхъ сторонъ (фиг. 242).

*Доказат.* 1) Пусть данные многоугольники будутъ  $ABCDE$  и  $FGHKI$  и пусть сторона  $AB$  будетъ соотвѣтственна сторонѣ  $FG$ . Я говорю, что многоугольники могутъ быть раздѣлены на одно и тоже число подобныхъ треугольниковъ.

Фиг. 242.



Проведемъ діагонали  $BE$ ,  $EC$ ,  $GI$ ,  $IH$ . Такъ какъ многоугольникъ  $ABCDE$  подобенъ многоугольнику  $FGHKI$ , то  $\angle BAE = \angle GFI$  и

$$AB : AE = FG : FI,$$

слѣдовательно треугольники  $ABE$  и  $FGI$ , имѣя по равному углу, заключенному между пропорціональными сторонами, будутъ подобны (кн. 6, пред. 6); откуда слѣдуетъ, что  $\angle ABE = \angle FGI$ , но изъ подобія многоугольниковъ мы имѣемъ  $\angle ABC = \angle FGH$ , слѣдовательно (кн. 1, акс. 3) и  $\angle EBC = \angle IGH$ . Изъ подобія треугольниковъ  $ABE$  и  $FGI$  мы имѣемъ:

$$AB : BE = FG : GI,$$

а изъ подобія многоугольниковъ:

$$AB : BC = FG : GH,$$

слѣдовательно (кн. 5, пред. 22):

$$BE : BC = GI : GH.$$

Откуда видимъ, что треугольники  $BEC$  и  $GIN$  имѣютъ  $\angle EBC = \angle IGH$ , какъ мы выше показали, и эти углы заключаются между пропорціональными сторонами, слѣдовательно треугольники подобны. Точно



такимъ же образомъ можно показать, что треугольникъ  $ECD$  подобенъ треугольнику  $INK$ . Следовательно многоугольники  $ABCDE$  и  $FGHIK$  раздѣлены на одно и тоже число подобныхъ треугольниковъ.

2) Я говорю, что мы будемъ еще имѣть:

$$ABCDE : FGHIK = \triangle ABE : \triangle FGI = \triangle EBC : \triangle IGH = \\ = \triangle CED : \triangle HIK.$$

Такъ какъ  $\triangle ABC$  подобенъ  $\triangle FGH$ , то  $\angle BAM = \angle GFN$  и  $\angle ABM = \angle FGN$ , следовательно въ треугольникахъ  $ABM$  и  $FGN$   $\angle AMB = \angle FNG$ , а потому треугольники эти подобны. Подобнымъ образомъ можно показать, что и треугольники  $BMC$  и  $GNH$  подобны, следовательно:

$$AM : MB = FN : NG$$

и

$$BM : MC = GN : NH$$

откуда (кн. 5, пред. 22):

$$AM : MC = FN : NH.$$

Но (кн. 6, пред. 1):

$$AM : MC = \triangle ABM : \triangle MBC$$

и

$$AM : MC = \triangle AME : \triangle MEC,$$

откуда (кн. 5, пред. 11):

$$\triangle ABM : \triangle MBC = \triangle AME : \triangle MEC$$

или

$$\triangle ABM : \triangle AME = \triangle MBC : \triangle MEC,$$

откуда (кн. 5, пред. 12):

$$\triangle ABE : \triangle CBE = \triangle ABM : \triangle MBC = AM : MC.$$

По той же причинѣ:

$$\triangle FGI : \triangle HGI = FN : NH,$$

но

$$AM : MC = FN : NH$$

слѣдовательно:

$$\triangle ABE : \triangle CBE = \triangle FGI : \triangle HGI,$$

или (кн. 5, пред. 16):

$$\triangle ABE : \triangle FGI = \triangle CBE : \triangle HGI.$$

Проведя  $BD$  и  $GK$ , легко показать, что:

$$\triangle CBE : \triangle HGI = \triangle ECD : \triangle IHK,$$

слѣдовательно (кн. 5, пред. 11):

$$\triangle ABE : \triangle FGI = \triangle CBE : \triangle HGI = \triangle ECD : \triangle IHK.$$

Но (кн. 5, пред. 12) одинъ изъ предъидущихъ относится къ своему послѣдующему, какъ сумма всѣхъ предъидущихъ относится къ суммѣ всѣхъ послѣдующихъ, слѣдовательно:

$$ABCDE : FGHIK = \triangle ABE : \triangle FGI.$$

Но мы выше (кн. 6, пред. 19) видѣли, что:

$$\triangle ABE : \triangle FGI = 2 (AB : FG)$$

слѣдовательно:

$$ABCDE : FGHIK = 2 (AB : FG). \quad (a)$$

*Слѣдствие 1.* Если къ  $AB$  и  $FG$  возьмемъ третье пропорціональное  $X$ , то мы будемъ имѣть (кн. 5, опред. 10).

$$AB : X = 2 (AB : FG),$$

слѣдовательно:

$$\triangle ABE : \triangle FGI = AB : X$$

откуда:

$$ABCDE : FGHIK = AB : X.$$

*Слѣдствие 2.* Очевидно также, что вообще, если три прямыя линіи пропорціональны, то фигура, построенная на первой прямой, относится къ подобной и подобно расположенной фигурѣ построенной на второй прямой, какъ первая прямая къ третьей.

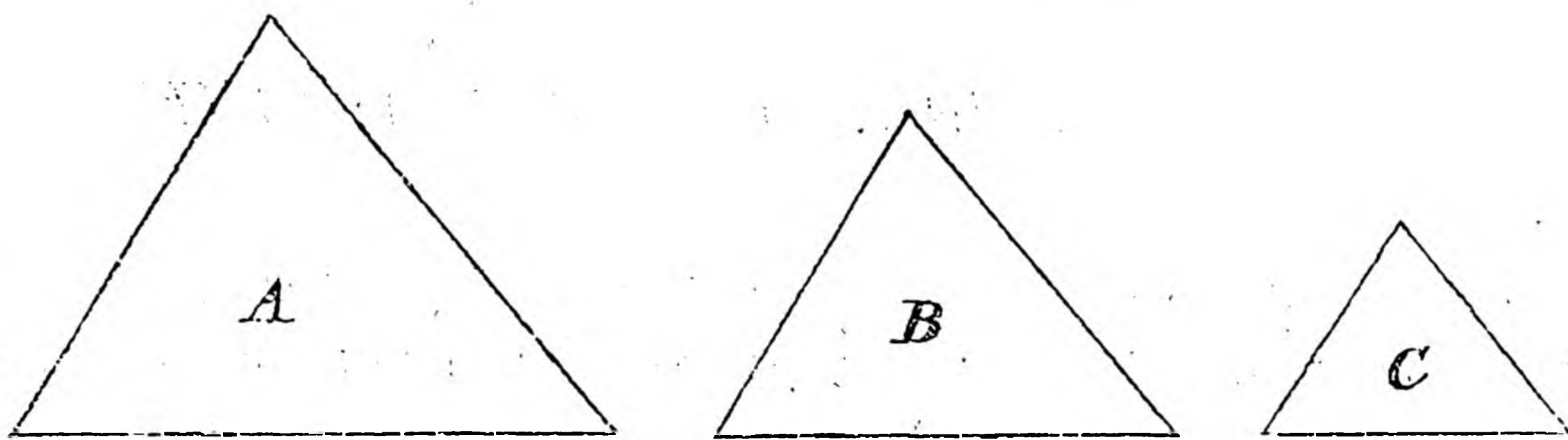
*Примѣч. 16.* Мы уже показали въ примѣч. (кн. 6, прим. 13), что пропорція (а) можетъ быть написана такъ:

$$ABCDE : FGHIK = \square AB : \square FG.$$

*Предложеніе 21.* Многоугольники подобныя одному и тому же многоугольнику подобны между собою (фиг. 243).

*Доказат.* Пусть многоугольники  $A$  и  $B$  подобны многоугольнику  $C$ . Я говорю, что  $A$  и  $B$  будутъ подобны.

Фиг. 243.



Такъ какъ фигура  $A$  подобна фигурѣ  $C$  и фигура  $B$  подобна той же  $C$ , то ихъ стороны, заключающія равные углы, пропорціональны, слѣдовательно фигуры  $A$  и  $B$  также равноугольны (кн. 1, акс. 1) и (кн. 5, пред. 11) стороны, заключающія равные углы, пропорціональны; слѣдовательно фигуры  $A$  и  $B$  (кн. 6, опред. 1) подобны.

*Примѣч. 17.* Въ настоящемъ примѣчаніи я обобщу и дополню недосказанное Евклидомъ относительно подобія фигуръ на плоскости.

Два подобныя многоугольника на плоскости могутъ имѣть, одинъ относительно другаго, два различныя положенія:

1) Они могутъ быть такъ расположены, что два наблюдателя, находясь одинъ внутри одного многоугольника, а другой внутри другаго, будутъ оба видѣть движеніе точки по контурамъ многоугольниковъ, отъ соотвѣтственныхъ точекъ къ соотвѣтственнымъ, въ одну сторону, т. е. или съ права на лѣво, или съ лѣва на право.

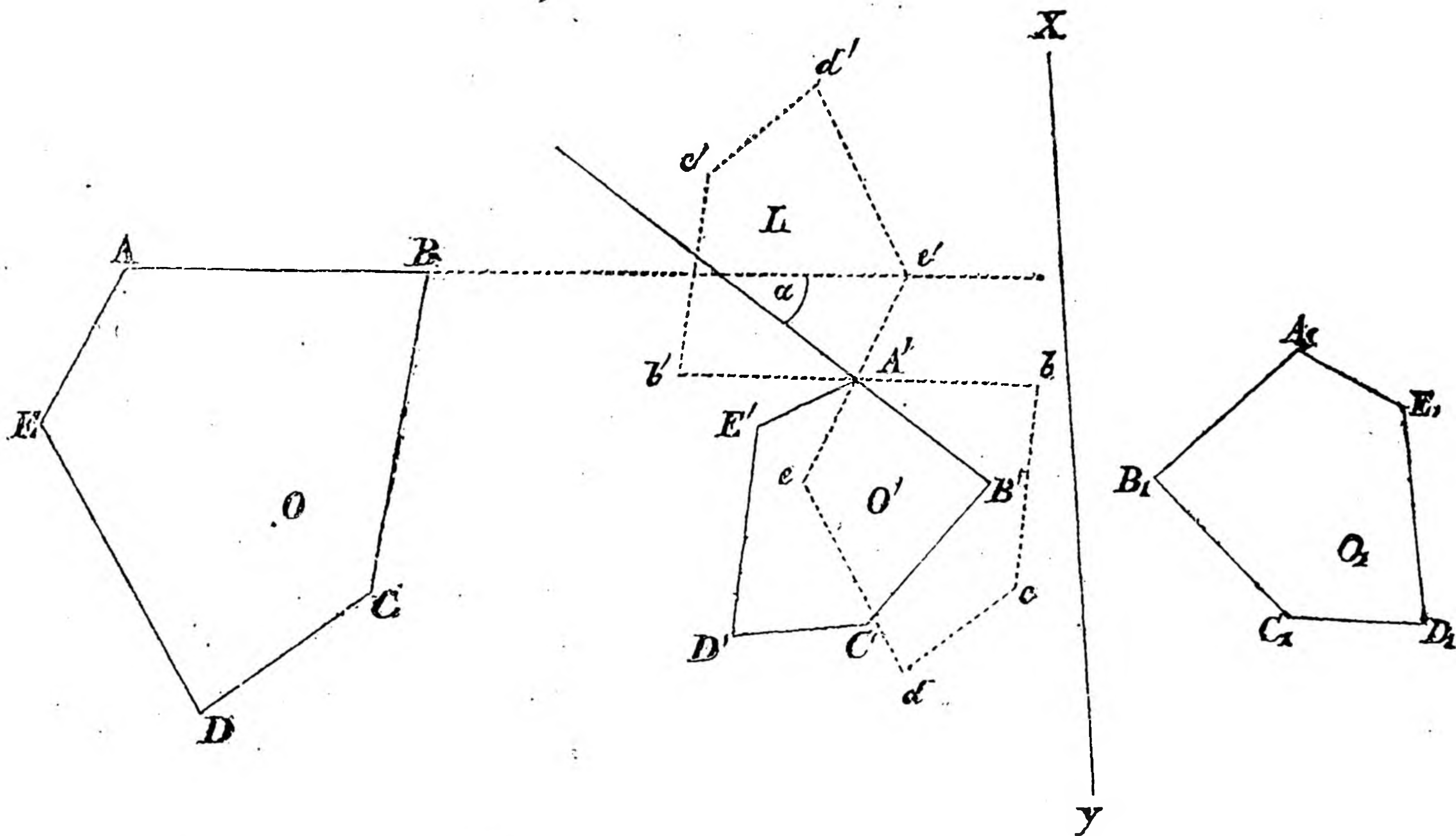
Такіе два многоугольника можно поворотомъ одного изъ нихъ въ плоскости, привести въ такое положеніе, въ которомъ ихъ сходственные стороны будутъ параллельны въ одномъ и томъ же направленіи или въ противоположномъ, т. е. двѣ какія нибудь, сходственные стороны будутъ составлять уголъ  $= 0$ , или  $= 2d$ .

Если въ подобныхъ многоугольникахъ  $ABCDE$  и  $A'B'C'D'E'$  сходственные стороны будутъ  $AB$  и  $A'B'$ ,  $BC$  и  $B'C'$ ,  $CD$  и  $C'D'$ ,  $DE$  и  $D'E'$ ,  $EA$  и  $E'A'$ , а слѣдовательно сходственные точки будутъ  $A$  и  $A'$ ,  $B$  и  $B'$ ,  $C$  и  $C'$ ,  $D$  и  $D'$ ,  $E$  и  $E'$ , то, очевидно, наблюдатели, находясь внутри многоугольниковъ, въ какихъ нибудь точкахъ  $O$  и  $O'$ , будутъ оба видѣть движеніе точки по контуру, одинъ отъ  $A$  къ  $B$ , а другой отъ  $A'$  къ  $B'$ , оба съ лѣва на право.



*Предлож. а.* Я говорю, что эти многоугольники можно поворотомъ въ плоскости, привести въ такое положеніе, въ которомъ ихъ сходственные стороны  $AB$  и  $A'B'$ ,  $BC$  и  $B'C'$  и т. д. будутъ параллельны (фиг. 244).

Фиг. 244.



*Доказат.* Такъ какъ многоугольники  $O$  и  $O'$  подобны, то мы имѣемъ:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'} = k$$

и

$$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C', \angle D = \angle D', \angle E = \angle E'.$$

Продолжимъ стороны  $AB$  и  $A'B'$  до встрѣчи ихъ въ точкѣ  $L$ , эти стороны вообще будутъ составлять, какой нибудь уголъ  $\alpha$ . Если многоугольникъ  $O'$  поворотимъ въ его плоскости, около точки  $A'$ , такъ чтобы  $\angle \alpha$  сдѣлался  $= 0$ , то сторона  $A'B'$  сдѣлается параллельна сторонѣ  $AB$  въ одномъ и томъ же направленіи. Если сторона  $A'B' \parallel AB$ , а по условію  $\angle B = \angle B'$ , то и сторона  $B'C'$  будетъ параллельна сторонѣ  $BC$  и т. д. Многоугольникъ  $O'$  приметъ положеніе  $A'b'c'd'e'$ . Такіе многоугольники называются *подобными и подробно расположенными*.

Если же, около точки  $A'$  поворотимъ многоугольникъ  $O'$  такъ, чтобы  $\angle \alpha = 2d$ , то мы будемъ еще имѣть  $A'B' \parallel AB$ , но въ противоположномъ направленіи, въ такой же параллельности будутъ и остальные сходственные стороны. Многоугольникъ  $O'$  приметъ положеніе  $A'b's'd'e'$ . Такіе многоугольники называются *подобными и противоположно расположенными*.

2) Если многоугольникъ  $A'B'C'D'E'$  поворотимъ вмѣстѣ съ плоскостью его около какой нибудь оси  $XY$ , лежащей въ той же плоскости, такъ чтобы онъ упалъ на ту же плоскость другой стороной, то онъ приметъ положеніе  $A_1B_1C_1D_1E_1$ , которое называется *симметричнымъ* положеніемъ относительно оси  $XY$ . Такъ какъ многоугольникъ  $O'$  такимъ поворотомъ ни въ чемъ не измѣнился, слѣдовательно остался подобнымъ многоугольнику  $O$ , то говорятъ, что два многоугольника  $ABCDE$  и  $A_1B_1C_1D_1E_1$  *симметрически по-*

добны. Очевидно, въ такихъ многоугольникахъ наблюдатели, находящіеся внутри многоугольниковъ въ точкахъ  $O$  и  $O_1$ , будутъ видѣть движеніе точки одинъ отъ  $A$  къ  $B$  и другой отъ  $A_1$  къ  $B_1$  въ противоположныхъ направленіяхъ, т. е. первый наблюдатель будетъ видѣть движеніе точки отъ  $A$  къ  $B$  съ лѣва на право, а второй отъ  $A_1$  къ  $B_1$  съ права на лѣво.

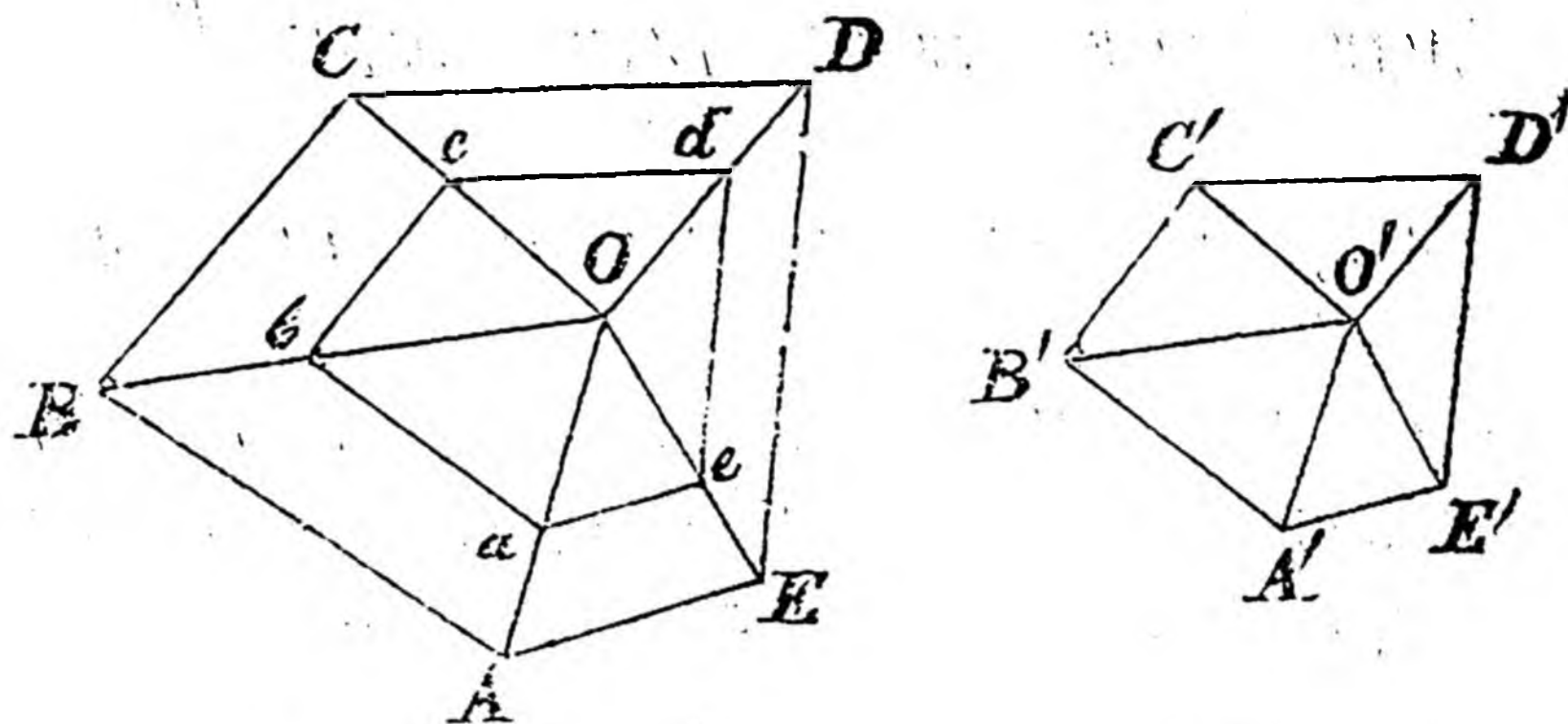
Слѣдовательно, если даны два многоугольника  $O$  и  $O_1$  симметрично подобные, то, чтобы привести ихъ въ такое положеніе, въ которомъ бы ихъ сходственные стороны были параллельны въ одномъ и томъ же направленіи, или въ противоположныхъ направленіяхъ, надобно сначала одинъ изъ многоугольниковъ, на примѣръ  $O_1$ , поворотомъ около какой нибудь оси  $XU$  привести въ положеніе  $O'$ , и затѣмъ поворотомъ въ плоскости около одной изъ его вершинъ, на примѣръ  $A'$ , привести или въ положеніе  $A'b'c'd'e'$ , или въ положеніе  $A'b'c'd'e'$ .

Слѣдовательно подобные многоугольники всегда могутъ быть приведены въ такое положеніе, при которомъ ихъ сходственные стороны будутъ параллельны въ одномъ и томъ же направленіи. По этому мы и будемъ теперь разсматривать только такіе многоугольники. Теперь я обобщу 20 предложеніе шестой книги Началь Евклида.

*Предлож. b.* На плоскости двухъ подобныхъ и подобно расположенныхъ многоугольниковъ, по произвольно взятой точкѣ, относительно перваго многоугольника, можно всегда найти такую точку, относительно втораго многоугольника, что если соединимъ первую точку съ вершинами перваго многоугольника, а вторую съ вершинами втораго многоугольника, то образуются двѣ системы подобныхъ треугольниковъ, и при томъ подобными будутъ тѣ, которые имѣютъ основаніями сходственные стороны данныхъ многоугольниковъ.

*Доказат.* Пусть данные многоугольники будутъ  $ABCDE$  и  $A'B'C'D'E'$  (фиг. 245).

Фиг. 245.



Такъ какъ многоугольники подобны, то мы имѣемъ:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}.$$

и

$$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C', \angle D = \angle D', \angle E = \angle E'.$$

Возьмемъ внутри, или внѣ, на примѣръ внутри, многоугольника  $ABCDE$  произвольную точку  $O$  и соединимъ ее съ вершинами  $A, B, C, D, E$  прямыми линиями. Черезъ точку на примѣръ  $A'$ , въ многоугольникѣ  $A'B'C'D'E'$  проведемъ прямую  $A'O' \parallel AO$  и построимъ на ней точку  $O'$  такъ, чтобы (кн. 6, пред. 12):

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AO}{A'O'}.$$

Если эту точку  $O'$  соединимъ съ вершинами  $A', B', C', D', E'$  втораго многоугольника, то треугольники  $OAB, OBC, OCD, \dots$  будутъ подобны треугольникамъ  $O'A'B', O'B'C', O'C'D', \dots$

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ по построенію въ треугольникахъ  $OAB$  и  $O'A'B'$  мы имѣемъ  $\angle OAB = \angle O'A'B'$  и  $AB : A'B' = OA : O'A'$ , то (кн. 6, пред. 6)  $\triangle OAB$  подобенъ  $\triangle O'A'B'$ .

Изъ подобія этихъ треугольниковъ мы будемъ имѣть  $\angle OBA = \angle O'B'A'$ , но  $\angle ABC = \angle A'B'C'$  изъ подобія многоугольниковъ, слѣдовательно  $\angle OBC = \angle O'B'C'$ .

Такъ какъ изъ подобія треугольниковъ  $OAB$  и  $O'A'B'$  мы имѣемъ  $AB : A'B' = OB : O'B'$ , а изъ подобія многоугольниковъ мы имѣемъ  $AB : A'B' = BC : B'C'$ , то (кн. 5, пред. 9)  $BC : B'C' = OB : O'B'$ . Слѣдовательно (кн. 6, пред. 1) треугольники  $OBC$  и  $O'B'C'$  также подобны. Точно также легко доказать, что и треугольники  $OCD, ODE, \dots$  подобны треугольникамъ  $O'C'D', O'D'E', \dots$

Такъ построенныя точки  $O$  и  $O'$  называются *соотвѣтственными*, какъ и точки  $A$  и  $A', B$  и  $B', \dots$

Если многоугольникъ  $A'B'C'D'E'$  нанесемъ на многоугольникъ  $ABCDE$ , такъ чтобы точка  $O'$  совмѣстилась съ точкою  $O$  и чтобы прямая  $O'A'$  совмѣстилась съ прямою  $OA$ , то, очевидно, и прямая  $O'B'$ ,  $O'C', \dots$ , совмѣстятся съ прямыми  $OB, OC, \dots$ . Такимъ образомъ многоугольникъ  $A'B'C'D'E'$  приметъ положеніе  $abcde$ . Въ такомъ относителномъ положеніи многоугольники  $ABCDE$  и  $abcde$  называются *гомотетическими*.

Если многоугольникъ  $abcde$  поворотимъ въ плоскости на  $2d$  около точки  $O$ , то онъ останется гомотетическимъ, но противоположнаго направленія, т. е. сходственные стороны будутъ составлять между собою уголъ  $= 2d$ .

Такъ какъ точку  $O$  относительно многоугольника  $ABCDE$  мы взяли произвольно на плоскости, то очевидно такихъ точекъ какъ  $O$  и  $O'$  есть безчисленное множество. Всѣ онѣ называются соотвѣтственными и вмѣстѣ съ вершинами, данныхъ подобныхъ многоугольниковъ, составляютъ, то что называютъ *подобными системами*.

Если бы въ многоугольникѣ  $ABCDE$  мы взяли за точку  $O$  одну изъ его вершинъ, то получили бы 20 предложеніе этой книги.

Теперь можно опредѣлить: что такое подобныя системы точекъ на плоскости?

Если каждой точкѣ одной системы соотвѣтствуетъ одна точка другой системы и при томъ такъ, что треугольникъ, образуемый какими нибудь тремя точками первой системы, подобенъ треугольнику, образуемому тремя соотвѣтственными точками второй системы, то такія двѣ системы точекъ называются *подобными*.

Подобія двухъ системъ точекъ могутъ быть *одинаковыми* и *симметричными*.

*Предлож. с.* Периметры подобныхъ многоугольниковъ относятся между собою, какъ сходственные стороны.

*Доказат.* Если многоугольники  $ABCDE$  и  $A'B'C'D'E'$  подобны, то мы имѣемъ:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'},$$

слѣдовательно (кн. 5, пред. 12) мы имѣемъ:

$$\frac{AB + BC + CD + DE + EA}{A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'A'} = \frac{AB}{A'B'}.$$



Но  $AB+BC+CD+DE+EA$  есть периметръ  $P$  первого многоугольника, а  $A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+E'A'$  есть периметръ  $P'$  второго многоугольника, слѣдовательно:

$$P : P' = AB : A'B'.$$

или

$$\frac{P}{P'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

**Правильные многоугольники.** Правильнымъ многоугольникомъ называется такой, въ которомъ всѣ стороны и углы равны между собою.

Мы видѣли (кн. 4, пред. 5, . . . 16), что около правильного многоугольника можно описать и вписать въ него кругъ.

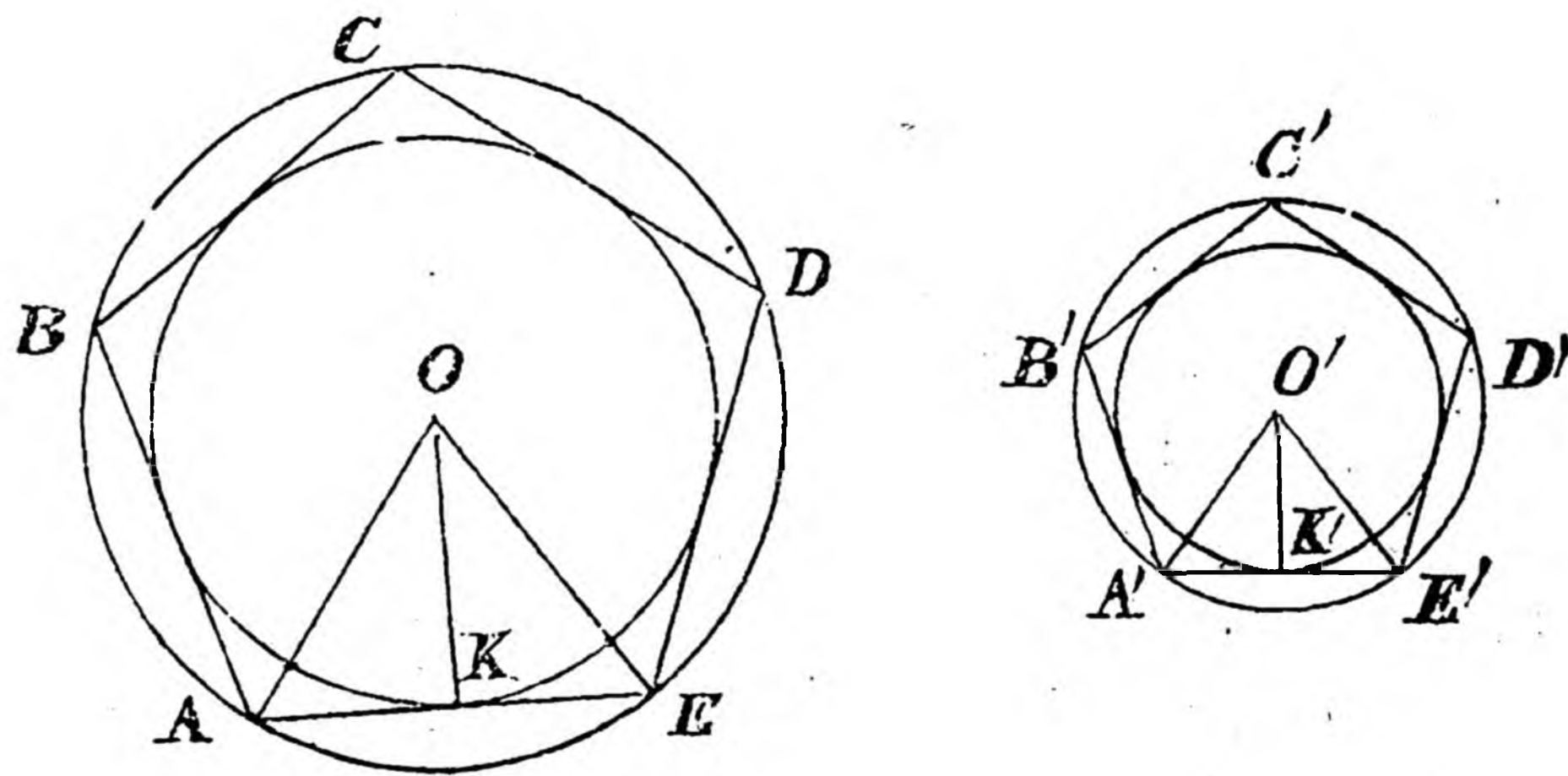
**Предлож. d.** Два правильные многоугольника съ одинаковымъ числомъ сторонъ подобны; периметры такихъ многоугольниковъ относятся между собою, какъ радіусы круговъ вписанныхъ или описанныхъ, а площади ихъ относятся между собою, какъ квадраты радіусовъ круговъ вписанныхъ, или описанныхъ (фиг. 246).

**Доказат. 1)** Пусть данные многоугольники будутъ  $ABCDE$  и  $A'B'C'D'E'$ . Такъ какъ стороны первого равны между собою и стороны второго равны между собою, то, очевидно, стороны одного пропорціональны сторонамъ другаго, т. е.:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'},$$

остается только показать, что углы одного многоугольника равны угламъ другаго.

Фиг. 246.



Для этого опишемъ около обоихъ многоугольниковъ круги  $O$  и  $O'$ . Такъ какъ стороны каждаго многоугольника равны между собою, то каждая изъ сторонъ, какъ въ одномъ такъ и въ другомъ многоугольнике, стягиваетъ одну и ту же часть окружности въ обоихъ описанныхъ кругахъ. Слѣдовательно дуга  $BAE$  составляетъ такую же часть окружности  $O$ , какую дуга  $B'A'E'$  составляетъ часть окружности  $O'$ . Откуда видимъ, что и остальные части  $BCDE$  и  $B'C'D'E'$  окружностей  $O$  и  $O'$  составляютъ одинаковыя части цѣлыхъ окружностей. Слѣдовательно углы  $BAE$  и  $B'A'E'$  (кн. 3, пред. 22) составляютъ одинаковую часть двухъ прямыхъ угловъ, слѣдовательно  $\angle BAE = \angle B'A'E'$ .

Слѣдовательно правильные многоугольники  $ABCDE$  и  $A'B'C'D'E'$  подобны.

2) Если многоугольники  $ABCDE$  и  $A'B'C'D'E'$  подобны, то мы имѣемъ:

$$P : P' = AE : A'E',$$

и

$$\text{пл. } ABCDE : \text{пл. } A'B'C'D'E' = \square AE : \square A'E'.$$

Но легко видѣть, что  $\triangle ABE$  подобенъ  $\triangle A'B'E'$ , слѣдовательно:

$$AE : A'E' = OE : O'E' = OK : O'K'$$

или если означимъ чрезъ  $R$  и  $r$ , и  $R'$  и  $r'$  радіусы круговъ описанныхъ и вписанныхъ, то будемъ имѣть:

$$AE : A'E' = R : R' = r : r',$$

откуда:

$$P : P' = R : R' = r : r'.$$

3) Такъ какъ изъ пропорціи:

$$AE : A'E' = R : R' = r : r',$$

мы имѣемъ:

$$\square AE : \square A'E' = \square R : \square R' = \square r : \square r'$$

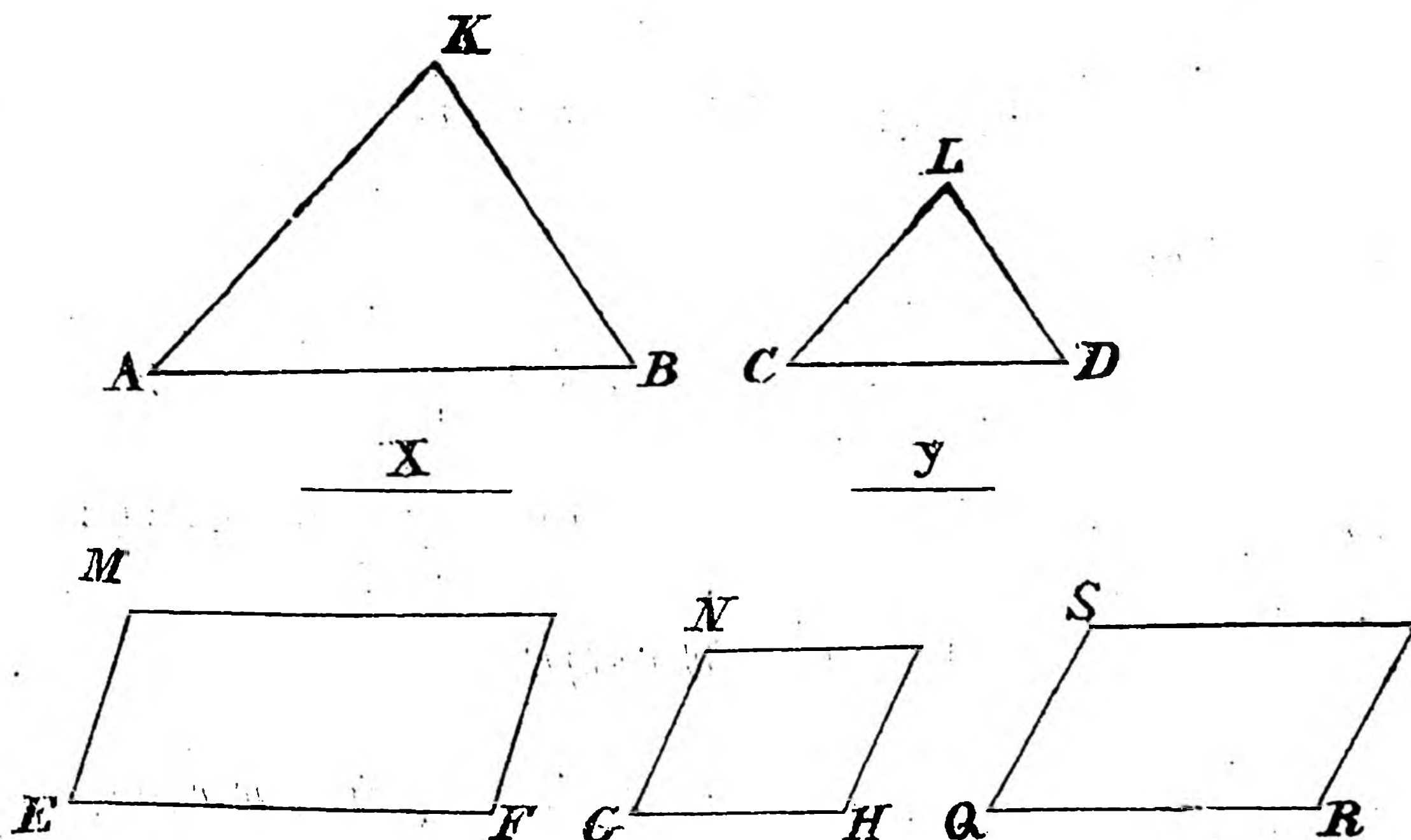
то соображаясь съ предъидущимъ найдемъ:

$$\text{пл. } ABCDE : \text{пл. } A'B'C'D'E' = \square R : \square R' = \square r : \square r'.$$

**Предложеніе 22.** Если четыре прямая линіи пропорціональны, то многоугольники подобные и подобно на нихъ построенные будутъ также пропорціональны, и обратно, если многоугольники подобные и подобно построенные на четырехъ прямыхъ пропорціональны, то и четыре прямая линіи пропорціональны (фиг. 247).

**Доказат.** 1) Пусть четыре пропорціональныя линіи будутъ  $AB$ ,  $CD$ ,  $EF$ ,  $GH$ , т. е. пусть:

Фиг. 247.



$$AB : CD = EF : GH.$$

Построимъ на прямыхъ  $AB$  и  $CD$  подобныя и подобно расположенныя фигуры  $KAB$  и  $LCD$  (кн. 6, пред. 18), а на прямыхъ  $EF$  и  $GH$

построимъ подобныя и подобно расположенныя фигуры  $MF$  и  $NH$ . Я говорю, что:

$$\triangle KAB : \triangle LCD = MF : NH.$$

Построимъ къ  $AB$  и  $CD$  третью пропорціональную  $X$ , а къ  $EF$  и  $GH$  третью пропорціональную  $Y$  (кн. 6, пред. 11), т. е.:

$$AB : CD = CD : X, \quad EF : GH = GH : Y,$$

слѣдовательно:

$$CD : X = GH : Y,$$

откуда (кн. 5, пред. 22):

$$AB : X = EF : Y.$$

Но (кн. 6, пред. 20, слѣд. 1):

$$AB : X = \triangle KAB : \triangle LCD$$

и

$$EF : Y = MF : NH,$$

слѣдовательно (кн. 5, пред. 11):

$$\triangle KAB : \triangle LCD = MF : NH.$$

2) Пусть фигуры  $\triangle KAB$ ,  $\triangle LCD$ ,  $MF$ ,  $NH$  будутъ пропорціональны, т. е.:

$$\triangle KAB : \triangle LCD = MF : NH$$

Я говорю, что:

$$AB : CD = EF : GH.$$

Если бы эта пропорція не имѣла мѣста, то мы бы имѣли:

$$AB : CD = EF : QR,$$

гдѣ  $QR$ , есть четвертая пропорціональная къ  $AB$ ,  $CD$ ,  $EF$  (кн. 6, пред. 12). Если на прямой  $QR$  построимъ фигуру  $SR$  подобную и подобно расположенную фигурамъ  $MF$  и  $NH$ , то будемъ имѣть, какъ выше показали:

$$\triangle KAB : \triangle LCD = MF : SR.$$



Слѣдовательно (кн. 5, пред. 11):

$$MF:SR=MF:NH,$$

откуда (кн. 5, пред. 9):

$$SR=NH.$$

Но такъ какъ фигура  $SR$  подобна фигурамъ  $MF$  и  $NH$ , то  $QR=GH$ , слѣдовательно (кн. 5, пред. 7):

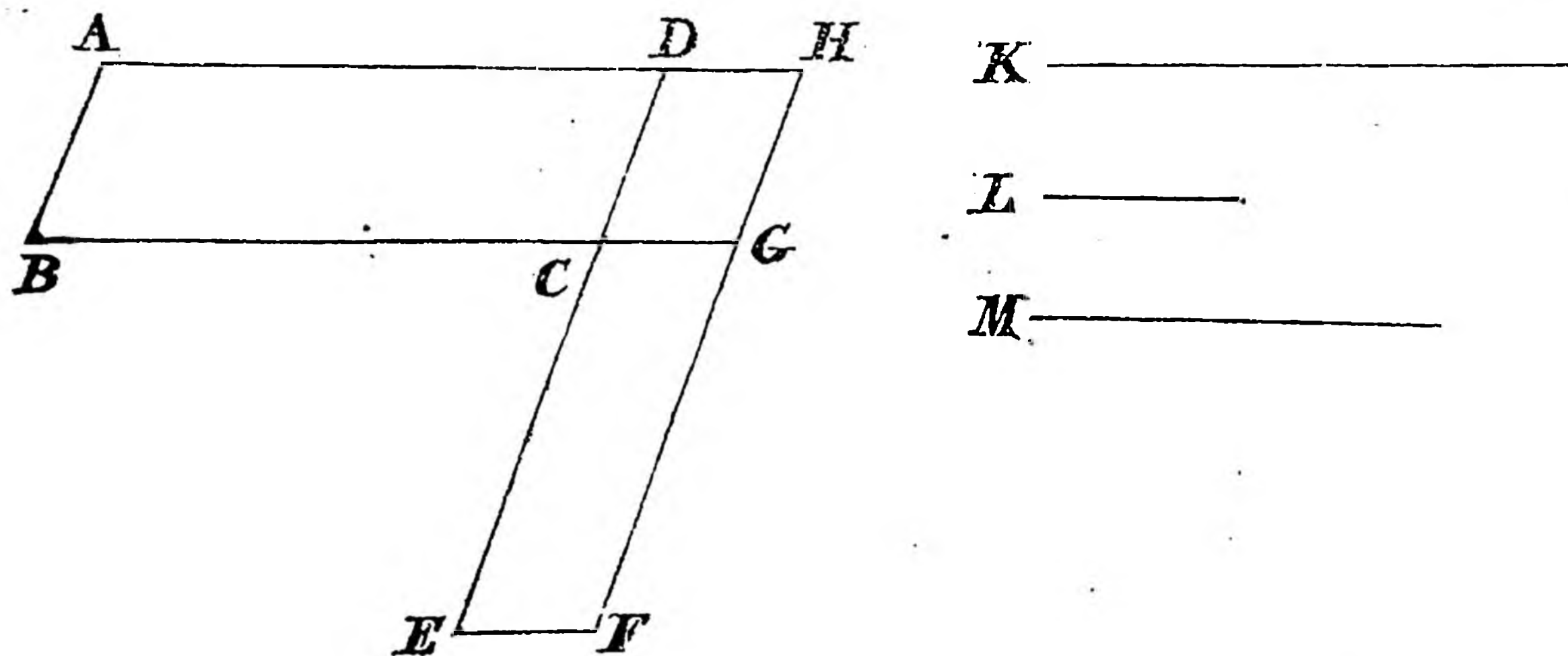
$$AB:CD=EF:GH.$$

*Предложеніе 23.* Отношеніе равноугольныхъ параллелограмовъ равно составному отношенію ихъ сторонъ (фиг. 248).

*Доказат.* Пусть равноугольные параллелограммы будутъ  $AC$  и  $CF$ , коихъ углы  $BCE$  и  $ECG$  равны. Я говорю, что:

$$AC:CF=\frac{BC}{GC}\cdot\frac{DC}{EC}.$$

Фиг. 248.



Помѣстимъ параллелограммы  $AC$  и  $CF$  такъ, чтобы стороны  $BC$  и  $GC$  составляли одну прямую линію  $BG$ , то стороны  $EC$  и  $DC$  будутъ также лежать на одной прямой  $ED$  (кн. 1, пред. 14). Построимъ параллелограмъ  $DG$  и возьмемъ какую нибудь, прямую линію  $K$ . Построимъ прямыя линіи  $L$  и  $M$ , такъ чтобы (кн. 6, пред. 12):

$$BC:GC=K:L \text{ и } DC:EC=L:M.$$

Отношеніе  $K$  къ  $M$  составлено изъ отношеній  $K:L$  и  $L:M$  (кн. 6, опред. 5), а эти послѣднія отношенія равны отношеніямъ:  $BC:GC$  и  $DC:EC$ , слѣдовательно отношеніе  $K:M$  равно составному отношенію изъ сторонъ параллелограмовъ.

Но мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$AC:CH=BC:GC=K:L$$

и

$$CH:CF=DC:EC=L:M$$

слѣдовательно:

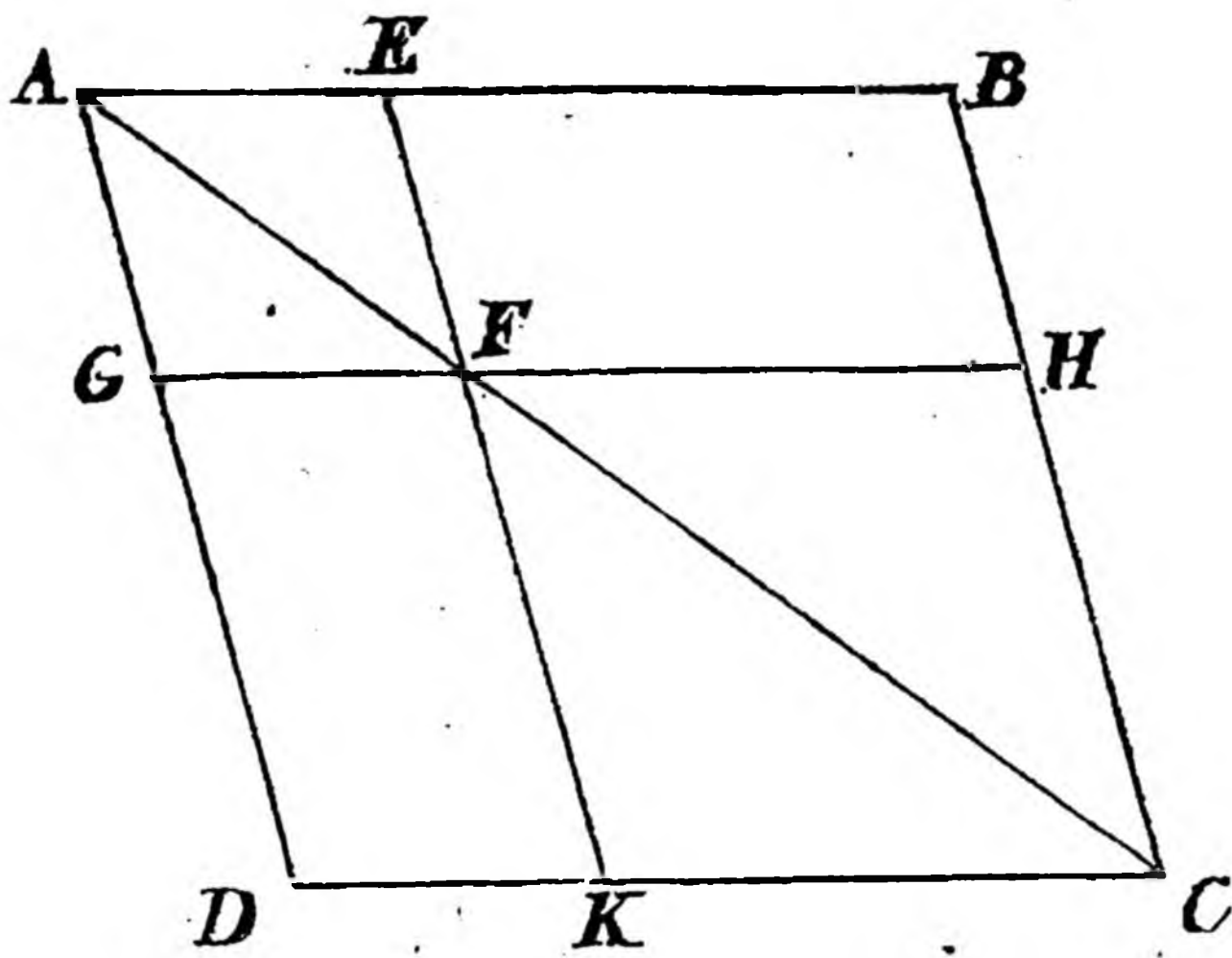
$$AC:CF=\frac{BC}{GC} \cdot \frac{DC}{EC}.$$

*Примѣч 18.* Это предложеніе можно выразить слѣдующимъ образомъ: площади двухъ равноугольныхъ параллелограмовъ относятся между собою, какъ произведенія изъ сторонъ, заключающихъ равные углы, или такъ какъ треугольникои составляютъ половины параллелограмовъ, то площади треугольниковъ, имѣющихъ по равному углу, относятся между собою какъ произведенія изъ сторонъ, заключающихъ равные углы.

*Предложеніе 24.* Параллелограммы, построенные на діагонали параллелограма, подобны цѣлому параллелограму и подобны между собою (фиг. 249).

*Доказат.* Пусть  $ABCD$  будетъ параллелограмъ, коего діагональ есть  $AC$ , и пусть на этой діагонали будутъ построены параллелограммы  $EG$  и  $HK$ . Я говорю, что эти параллелограммы подобны цѣлому  $ABCD$  и подобны между собою.

Фиг. 249.



Такъ какъ  $CD \parallel HG$ , то  $\angle ADC = \angle AGH$  (кн. 1, пред. 29), точно также  $BC \parallel EK$ , то  $\angle ABC = \angle AEK$ . Каждый изъ угловъ  $BCE$ ,  $EFG$  равенъ противоположному углу  $DAB$ , слѣдовательно они равны и между собою. Въ треугольникахъ  $ABC$  и  $AEF$  уголъ  $EAF$  общій,  $\angle ABC = \angle AEF$ , слѣдовательно они равноугольны, а если равноугольны, то (кн. 6 пред. 4):

$$AB:BC=AE:EF.$$

Но въ параллелограмѣ противоположныя стороны равны, слѣдовательно (кн. 5, пред. 7):

$$AB:AD=AE:AG \text{ и } DC:BC=GF:EF$$

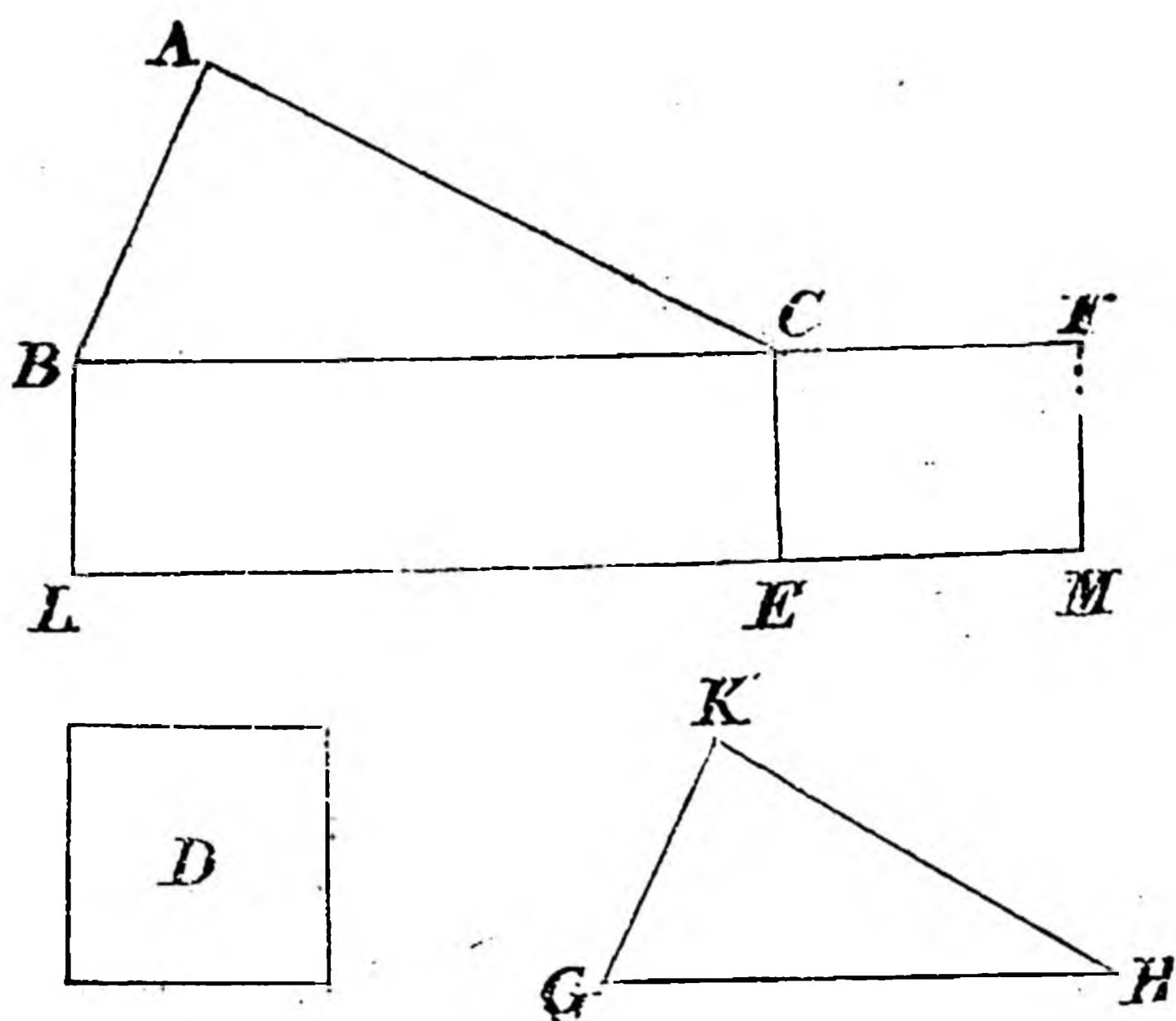
$$CD:AD=FG:AG.$$

Изъ этого видимъ, что стороны въ параллелограммахъ  $ABCD$  и  $AEEG$ , заключающія равные углы, пропорціональны, слѣдовательно (кн. 6, опред. 1) параллелограммы подобны. По той же причинѣ параллелограмъ  $ABCD$  подобенъ параллелограму  $FHCK$ , но каждый изъ параллелограммовъ  $AEEG$  и  $FHCK$  подобенъ цѣлому  $ABCD$ , слѣдовательно они подобны и между собою (кн. 6, пред. 21).

**Предложеніе 25.** Построить многоугольникъ подобный данному и равный другому данному (фиг. 250)?

**Рѣшеніе.** Пусть  $ABC$  будетъ многоугольникъ, которому искомый долженъ быть подобенъ, а  $D$  многоугольникъ, которому искомый долженъ быть равенъ.

Фиг. 250.



Если на прямой  $BC$  построимъ параллелограмъ  $BE=\triangle ABC$  (кн. 1, пред. 44), а на прямой  $CE$  подъ угломъ  $FCE=\angle CBL$  построимъ параллелограмъ  $EF=D$  (кн. 1, пред. 45), то  $BC$  и  $CF$ ,  $LE$  и  $EM$  лежатъ на одной прямой линіи (кн. 1, пред. 14). Построимъ средне-пропорціональную  $GH$  между  $BC$  и  $CF$ , на ней построимъ треугольникъ  $KGH$  подобный треугольнику  $ABC$  (кн. 6, пред. 18). Этотъ треугольникъ и будетъ искомый.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ:

$$BC:GH=GH:CF,$$

то (кн. 6, пред. 20, слѣд. 2) мы имѣемъ:

$$BC:CF=\triangle ABC:\triangle KGH.$$



Но (кн. 6, пред. 1):

$$BC : CF = BE : EF,$$

слѣдовательно (кн. 5, пред. 11):

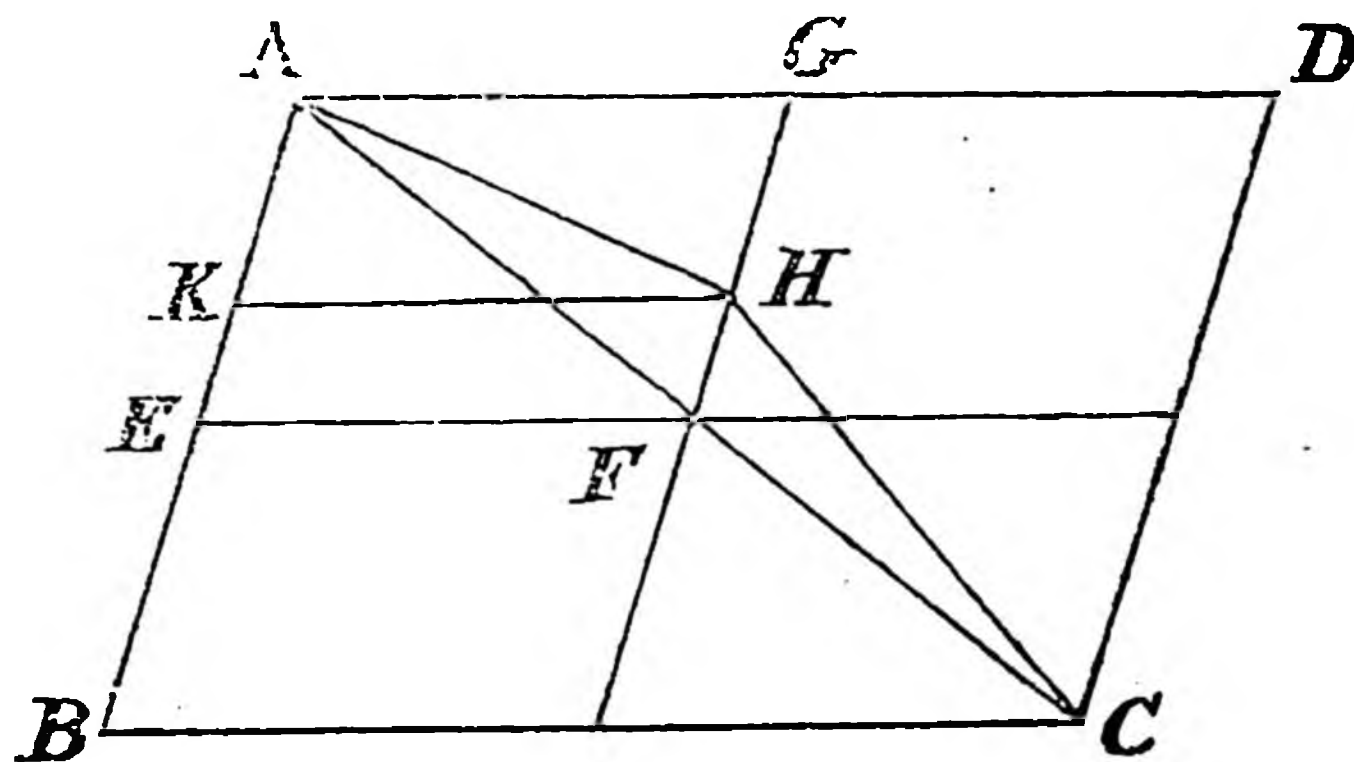
$$\triangle ABC : \triangle KGH = BE : EF.$$

Но такъ какъ по построению мы имѣемъ  $\triangle ABC = BE$ , то (кн. 5, пред. 14)  $\triangle KGH$ , подобный  $\triangle ABC$ , равенъ  $EF = D$ .

*Предложеніе 26.* Если два параллелограмма подобны и подобно расположены имѣютъ общій уголъ, то они лежатъ на одной діагонали (фиг. 251).

*Доказат.* Въ параллелограммѣ  $ABCD$  помѣщенъ параллелограммъ  $AE$ , подобный и подобно расположенный параллелограму  $ABCD$  и имѣющій съ нимъ общій уголъ  $GAE$ . Я говорю, что діагональ  $AF$  пройдетъ чрезъ точку  $C$ .

Фиг. 251.



Если бы діагональ  $AC$  не прошла чрезъ точку  $F$ , то она пройдетъ чрезъ какую нибудь точку  $H$  на прямой  $FG$ . Чрезъ точку  $H$  проведемъ  $KH \parallel AD$ . Такъ какъ параллелограммы  $ABCD$  и  $AKHG$  лежатъ на одной діагонали, то они будутъ подобны (кн. 6, пред. 24), слѣдовательно:

$$AD : AB = AG : AK.$$

Но параллелограммы  $ABCD$  и  $AEFG$  подобны по условію, слѣдовательно мы имѣемъ также:

$$AD : AB = AG : AE,$$

Изъ этихъ двухъ пропорцій видимъ (кн. 5, пред. 9), что  $AE = AK$ , что невозможно (кн. 1, акс. 9). Слѣдовательно діагональ  $AC$  не можетъ не пройти чрезъ точку  $F$ .

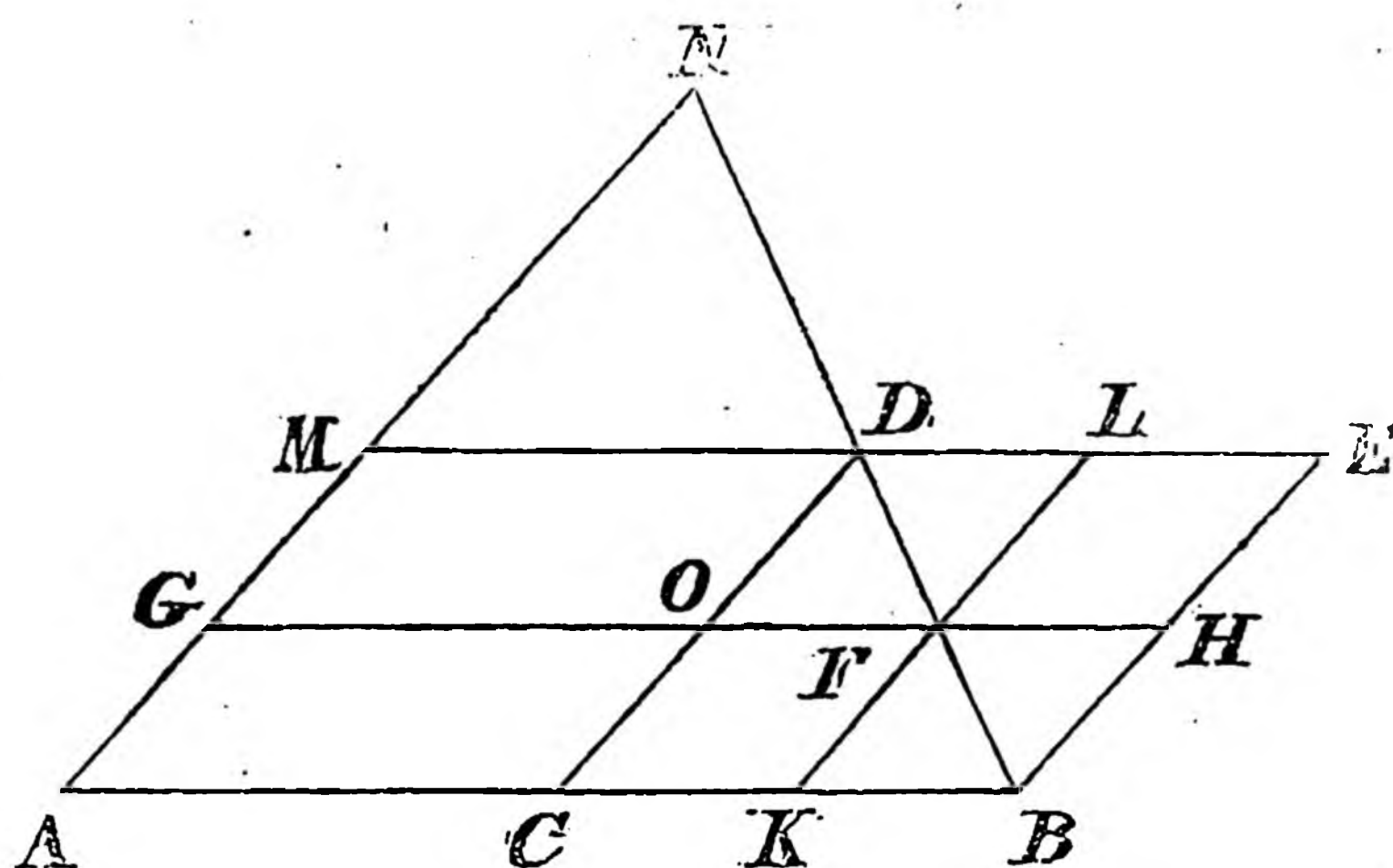
*Слѣствие.* Точно также можно показать, что если два параллело-

грама подобные и подобно расположенные имѣютъ *противуположные* углы въ вершинѣ, то ихъ діагонали составляютъ одну прямую линію.

*Предложеніе 27.* Изъ всѣхъ параллелограмовъ, которые можно вписать въ данный треугольникъ, *наибольшій* есть тотъ, котораго основаніе есть половина одной изъ сторонъ треугольника (фиг. 252).

*Доказат.* Пусть  $ABN$  будетъ данный треугольникъ,  $AC = \frac{1}{2} AB$  и  $ACDM$  параллелограмъ, вписанный въ треугольникъ. Пусть  $AKFG$  будетъ другой, вписанный въ треугольникъ, параллелограмъ; я говорю, что  $AD > AF$ .

Фиг. 252.



Построимъ параллелограмъ  $AE$  и продолжимъ стороны  $GF$  и  $KF$  до встрѣчи со сторонами параллелограмма  $AE$  въ точкахъ  $H$  и  $L$ .

Такъ какъ  $AC = CB$ , то  $AD = CE$  и  $AO = CH$  (кн. 1, пред. 36), но параллелограммы  $CF$  и  $FE$  суть дополненія параллелограмовъ  $OL$  и  $KH$ , слѣдовательно  $CF = FE$  (кн. 1, пред. 43), откуда весь параллелограмъ  $AF =$  гномону  $LBC$ . Но параллелограмъ  $CE >$  гномона  $LBC$ , слѣдовательно параллелограмъ  $AD = CE > AF$ . Точно также можно показать, что параллелограмъ  $AD$  больше какого угодно другаго параллелограмма, вписаннаго въ треугольникъ  $ANB$ .

*Примѣч. 19.* Это предложеніе выражено Евклидомъ въ другой формѣ, но содержаніе предложенія тоже.

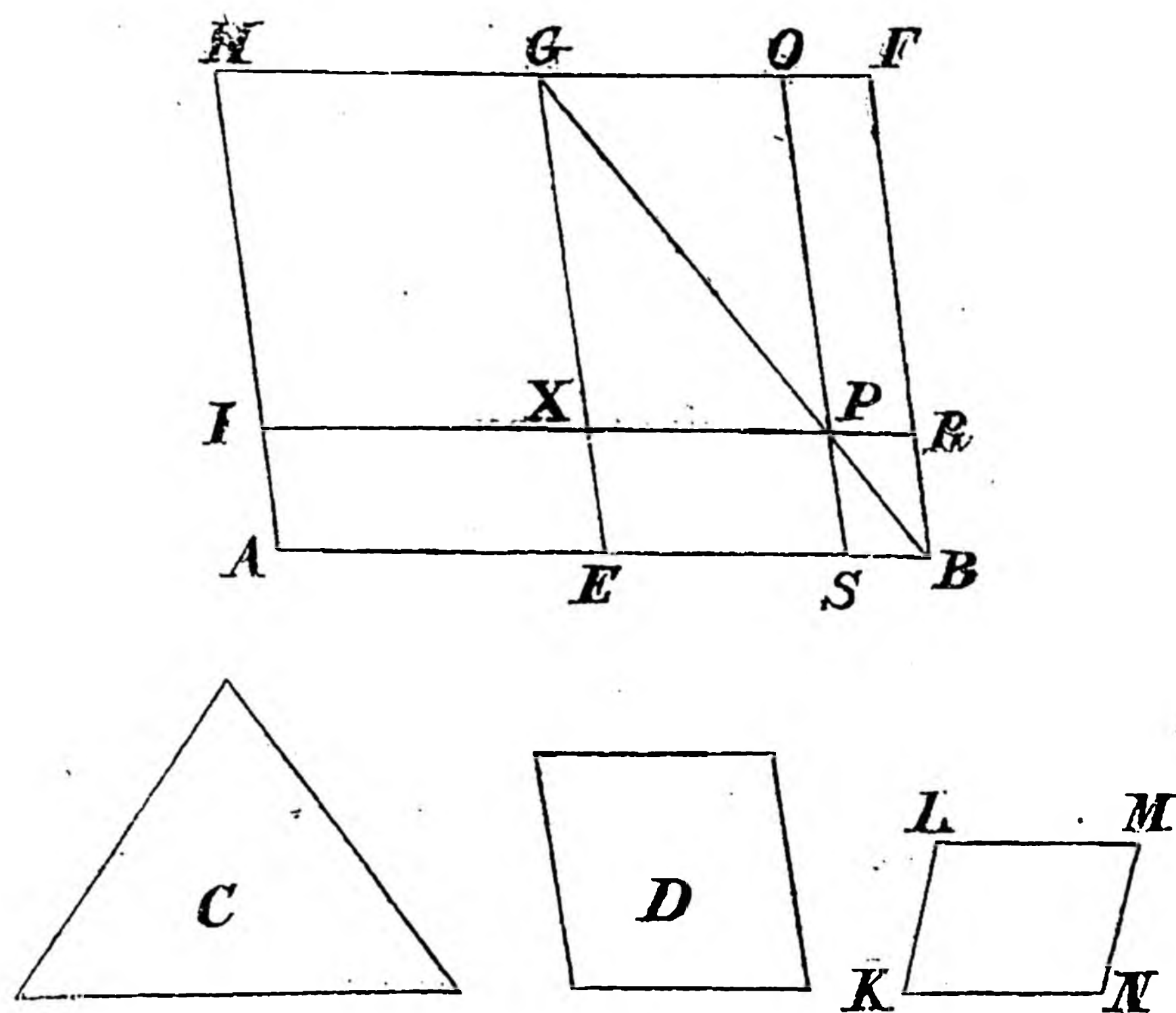
*Предложеніе 28.* Данную прямую линію раздѣлить на такіи двѣ части, чтобы изъ двухъ параллелограмовъ, одинаковой высоты, построенныхъ на нихъ, одинъ былъ равенъ данному многоугольнику, а другой подобенъ данному параллелограму (фиг. 253)?

*Рѣшеніе.* Пусть  $AB$  будетъ данная прямая,  $D$  данный параллелограмъ и  $C$  данный многоугольникъ, который не больше параллелограмма подобнаго  $D$ , построеннаго на половинѣ  $AB$ .

Раздѣлимъ прямую  $AB$  въ точкѣ  $E$  пополамъ и на  $EB$  построимъ (кн. 6, пред. 18) параллелограмъ  $EBFG$  подобный и подобно расположенный параллелограму  $D$ . Дополнимъ его параллелограмомъ  $AG$ . Парал-

параллелограмъ  $AG$  будетъ или равенъ  $C$ , или больше его. Если  $AG=C$ , то задача и рѣшена, т. е. искомая точка на прямой  $AB$  будетъ  $E$ .

Фиг. 253.



Но если параллелограмъ  $AG$  не равенъ  $C$ , то  $HE$  будетъ больше  $C$ , и какъ  $HE=GB$ , то и  $GB>C$ .

Построимъ (кн. 6, пред. 25) параллелограмъ  $KM$ , равный избытку параллелограмма  $GB$  надъ  $C$ , при томъ подобный и подобно расположенный  $D$ . Но параллелограмъ  $D$  подобенъ  $GB$ , слѣдовательно  $KM$  будетъ подобенъ (кн. 6, пред. 21)  $GB$ . Пусть прямая  $KL$  будетъ сторона, соответственная сторонѣ  $EG$ , а  $LM$  сторона, соответственная  $GF$ .

Но такъ какъ параллелограмъ  $GB$  равенъ суммѣ  $C$  и  $KM$ , то  $GB>KM$ , слѣдовательно прямая  $EG>KL$  и  $GF>LM$ . Возьмемъ  $XG=KL$  и  $GO=LM$  построимъ параллелограмъ  $XGOP$ . Очевидно параллелограмъ  $GP$  равенъ и подобенъ  $KM$ , но  $KM$  подобенъ  $GB$ , слѣдовательно  $GP$  подобенъ  $GB$ , по этой причинѣ (кн. 6, пред. 26) ихъ діагонали составляютъ одну прямую линію. Пусть эта діагональ будетъ  $GPB$ , если продолжимъ  $XP$  и  $OP$ , то пусть онѣ встрѣтятъ стороны  $AN$ ,  $BF$  и  $AB$  въ точкахъ  $I$ ,  $R$  и  $S$ .

Такъ какъ  $GB=C+KM$  и  $GP=KM$ , то гномонъ  $OBE=C$  и какъ  $OR=XS$  (кн. 1, пред. 43), то, прибавляя по  $PB$ , найдемъ, что  $OB=XB$ . Но  $XB=IE$ , такъ какъ  $AE=EB$ , слѣдовательно  $IE=OB$ . Прибавляя (кн. 1, акс. 1) по  $XS$ , найдемъ что  $IS$  будетъ равенъ цѣлому гномону  $OBE$ , но мы показали выше, что гномонъ  $OBE=C$ , слѣдовательно и  $IS=C$ . Откуда видимъ, что прямая  $AB$  въ точкѣ  $S$  раздѣлена на требуемыя двѣ части.



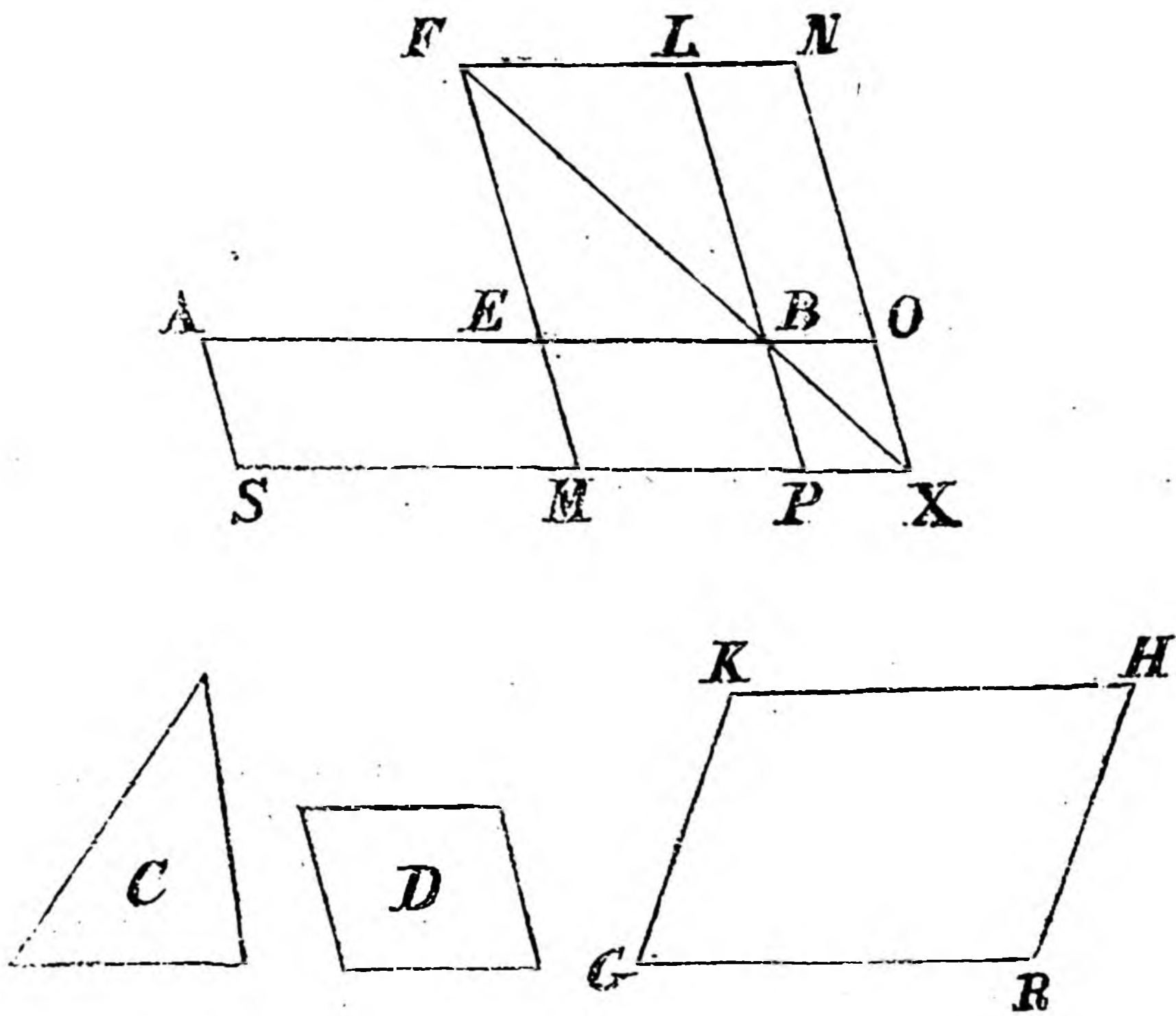
*Примѣч. 20.* Объ этомъ предложеніи надобно сказать тоже, что сказано въ 19 примѣчаніи.

Вслѣдствіе предъидущаго предложенія, данныйъ многоугольникъ не долженъ быть больше подобнаго параллелограмма, построеннаго на половинѣ данной прямой.

*Предложеніе 29.* Продолжить данную прямую такъ, чтобы на цѣлой прямой съ продолженіемъ и на продолженной части можно было построить два параллелограма равной высоты, изъ коихъ одинъ былъ бы равенъ данному многоугольнику, а другой подобенъ данному параллелограму (фиг. 254)?

*Доказат.* Пусть  $AB$  будетъ данная прямая,  $C$  данный многоугольникъ и  $D$  данный параллелограмъ. Раздѣлимъ прямую  $AB$  въ точкѣ  $E$  пополамъ и на  $EB$  построимъ параллелограмъ, подобный и подобно расположенный параллелограму  $D$  (кн. 6, пред. 18). Построимъ (кн. 6, пред. 25) параллелограмъ  $GH$ , равный суммѣ фигуръ  $FB$  и  $C$  и подобный  $D$ , параллелограмъ  $GH$  будетъ подобенъ  $FB$  (кн. 6, пред. 21).

**Фиг. 254.**



Пусть  $KH$  и  $HR$  будутъ стороны, соотвѣтственные сторонамъ  $FL$  и  $FE$ . Такъ какъ параллелограмъ  $GH$  больше параллелограмма  $FB$ , то прямая  $KH$  будетъ больше  $FL$ , а  $HR$  больше  $FE$ . Продолжимъ  $FL$  и  $FE$ , сдѣлаемъ  $FLN=KH$ , а  $FEM=HR$  и построимъ параллелограмъ  $MN$ . Параллелограмъ  $MN$  равенъ и подобенъ  $GH$ , но  $GH$  подобенъ  $FB$ , слѣдовательно (кн. 6, пред. 20) параллелограммы  $FB$  и  $MN$  имѣютъ общую діагональ. Проведемъ эту діагональ и дополнимъ фигуру.

Такъ какъ  $GH=EL+C$  и  $GH=MN$ , то и  $MN=EL+C$ . Отнимая по  $EL$  мы найдемъ, что гномонъ  $LXM=C$ . Но прямая  $AE=EB$ , слѣдовательно и параллелограмъ  $AM=MB$ , т. е.  $AM=LO$  (кн. 1, пред. 43). Прибавляя по  $EX$  получимъ, что  $AX=LXM$ , но гномонъ  $LXM=C$ ,

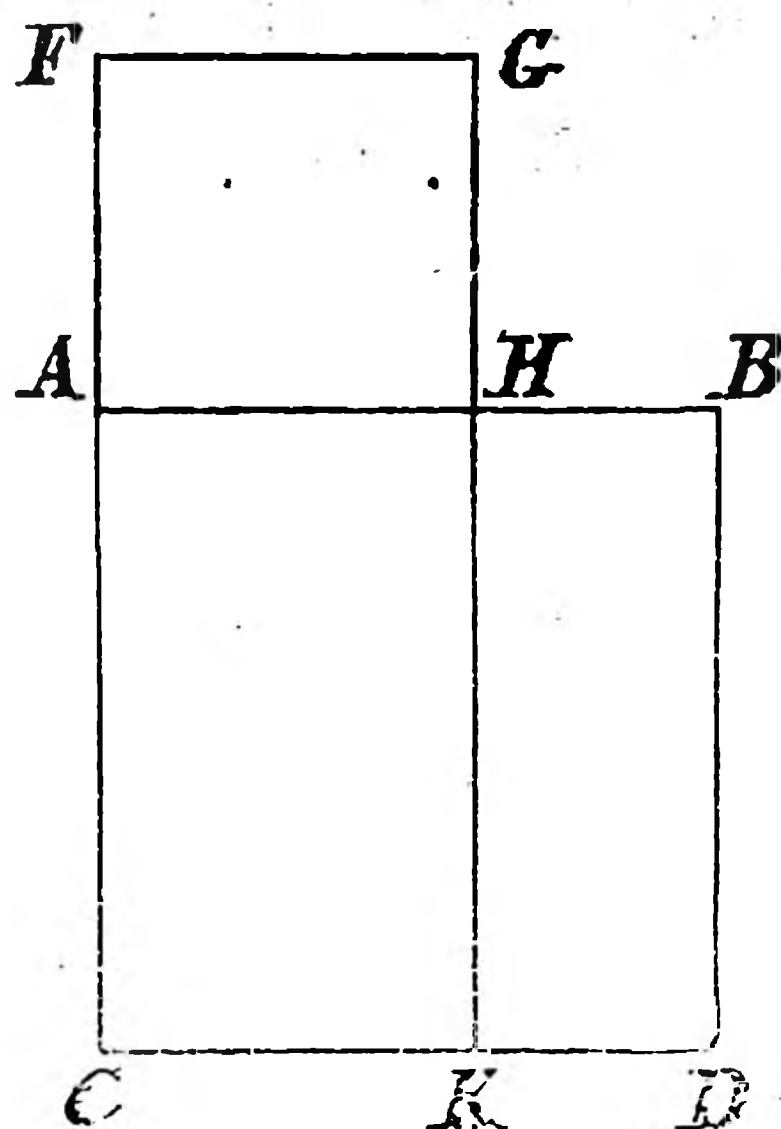
слѣдовательно  $AX=С$ . Откуда видимъ, что искомое продолженіе прямой  $AB$  есть  $BO$ .

*Примѣч. 21.* Тоже замѣчаніе, что и 19.

*Предложеніе 30.* Раздѣлить данную прямую въ крайнемъ и среднемъ отношеніи (фиг. 255)?

*Рѣшеніе.* Построимъ на данной прямой  $AB$  квадратъ  $BC$  (кн. 1, пред. 46), а на продолженной прямой  $AC$  построимъ параллелограмъ  $CG$ , равный квадрату  $BC$  и притомъ такъ, чтобы параллелограмъ  $AG$  былъ подобенъ квадрату  $BC$  (кн. 6, пред. 29).

Фиг. 255.



Такъ какъ  $BC$  есть квадратъ, то подобный ему параллелограмъ  $AG$  есть также квадратъ. По построенію  $BC=CG$ , отнимая по  $CH$  найдемъ (кн. 1, акс. 3)  $KB=AG$ . Но  $KB$  и  $AG$  суть равноугольные параллелограммы, слѣдовательно (кн. 6, пред. 14) стороны, заключающія равные углы, обратно пропорціональны, т. е. мы имѣемъ:

$$KH:HG=AH:HB$$

но

$$KH=AC=AB \text{ и } HG=AH,$$

слѣдовательно:

$$AB:AH=AH:HB.$$

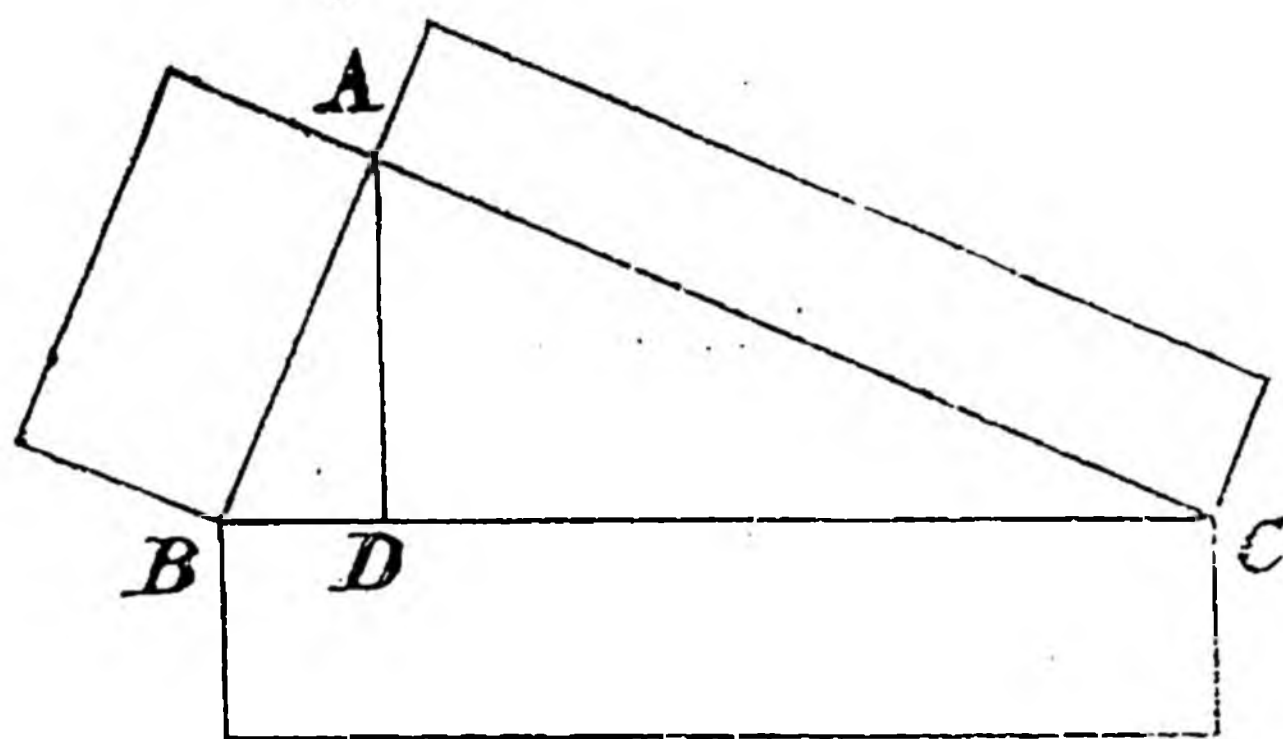
Но  $AB>AH$ , слѣдовательно  $AH>HB$ , откуда видимъ, что прямая  $AB$  въ точкѣ  $H$  раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи (кн. 6, опред. 3).

*Предложеніе 31.* Въ прямоугольномъ треугольникѣ, какал нибудь фи-

гура, построенная на гипотенузѣ, равна суммѣ фигуръ, подобныхъ и подобно расположенныхъ, построенныхъ на катетахъ (фиг. 256).

*Доказат.* Пусть  $ABC$  будетъ прямоугольный треугольникъ, въ которомъ уголъ  $BAC$  прямой. Я говорю, что фигура, построенная на  $BC$ , будетъ равна суммѣ фигуръ, построенныхъ на  $AB$  и  $AC$ , подобныхъ и подобно расположенныхъ фигуръ, построенной на  $BC$ .

Фиг. 256.



Изъ точки  $A$  опустимъ на гипотенузу перпендикуляръ  $AD$  (кн. 1, пред. 12), то треугольники  $ABD$  и  $ADC$  будутъ подобны цѣлому  $ABC$  и подобны между собою (кн. 6, пред. 8). Изъ подобія треугольниковъ  $ABC$  и  $ABD$  мы имѣемъ:

$$BC : AB = AB : BD.$$

Такъ какъ три линіи  $BC$ ,  $AB$ ,  $BD$  пропорціональны, то (кн. 6, пред. 20, слѣд.) первая будетъ такъ относиться къ третьей, какъ фигура, построенная на первой, относится къ подобной и подобно расположенной фигурѣ, построенной на второй, т. е.

$$BC : BD = \text{фиг. на } BC : \text{фиг. на } AB.$$

По той же причинѣ:

$$BC : DC = \text{фиг. на } BC : \text{фиг. на } AC.$$

Откуда (кн. 5, пред. 24):

$$BC : BD + DC = \text{фиг. на } BC : \text{фиг. на } AB + \text{фиг. на } AC$$

но  $BC = BD + DC$ , слѣдовательно:

$$\text{фиг. на } BC = \text{фиг. на } AB + \text{фиг. на } AC.$$

*Предложеніе 32.* Если двѣ стороны одного треугольника пропорціо-



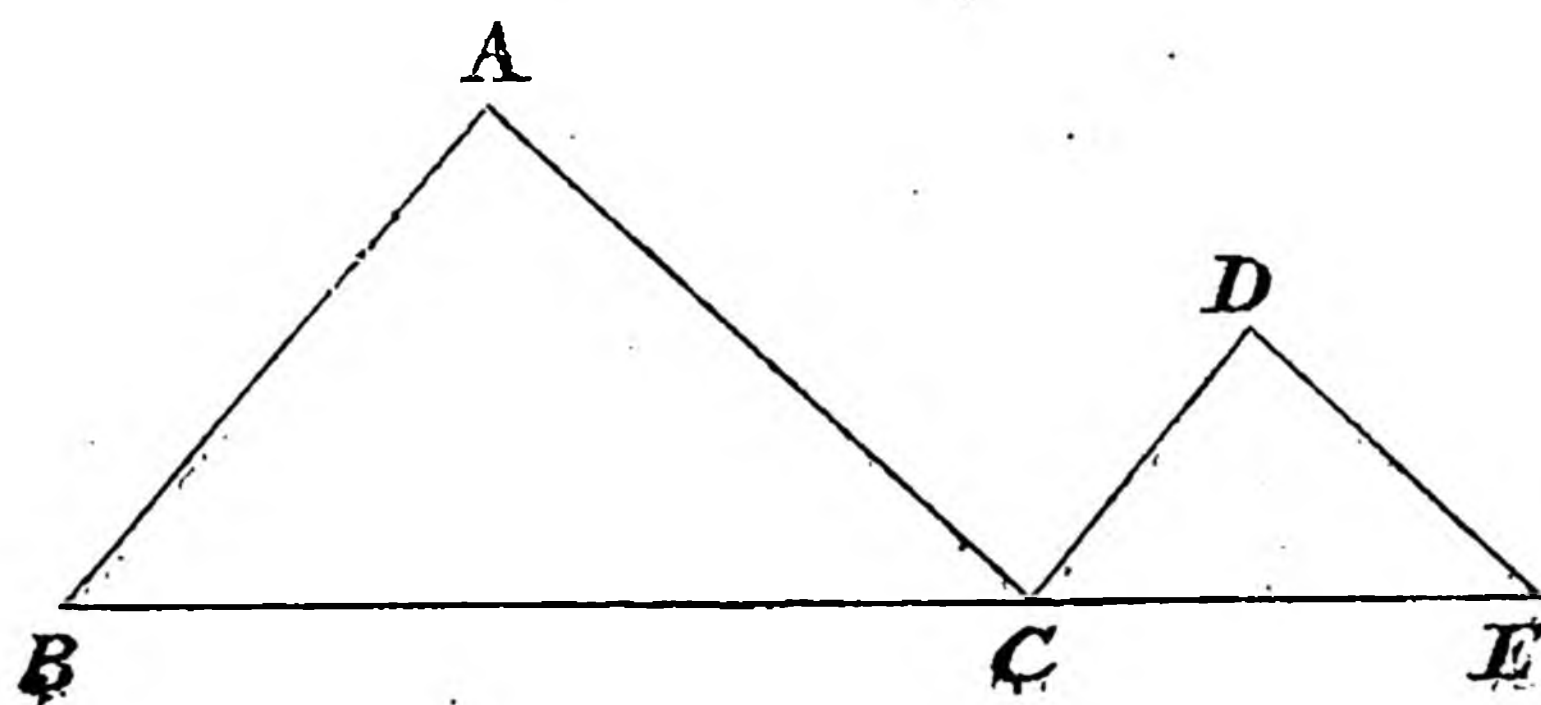
нальны двумъ сторонамъ другаго треугольника и если ихъ вершины такъ соединены въ одной точкѣ, что соотвѣтственные стороны параллельны, то остальные стороны будутъ составлять одну прямую линію (фиг. 257).

*Доказат.* Пусть два треугольника  $ABC$  и  $DCE$  имѣютъ общую вершину  $C$  и стороны  $BA$  и  $AC$  пропорціональны сторонамъ  $CD$  и  $DE$ , т. е.

$$BA : AC = CD : DE$$

и  $BA \parallel CD$ , а  $AC \parallel DE$ . Я говорю, что прямая  $BC$  и  $CE$  составляютъ одну прямую линію  $BE$ .

Фиг. 257.



Такъ какъ  $BA \parallel CD$ , то  $\angle BAC = \angle ACD$  (кн. 1, пред. 29); по той же причинѣ  $\angle CDE = \angle ACD$ , слѣдовательно  $\angle BAC = \angle CDE$ . Но въ треугольникахъ  $ABC$  и  $DCE$   $\angle A = \angle D$  и эти углы, по условію, заключены между пропорціональными сторонами, слѣдовательно треугольники будутъ равноугольны (кн. 6, пред. 6), откуда  $\angle ABC = \angle DCE$ . Но мы также показали, что  $\angle ACD = \angle BAC$ , слѣдовательно цѣлый уголъ  $\angle ACE = \angle ABC + \angle BAC$ ; прибавляя же по углу  $ACB$ , найдемъ, что:

$$\angle ACE + \angle ACB = \angle BAC + \angle ACB + \angle ABC.$$

Но

$$\angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = 2d,$$

слѣдовательно и

$$\angle ACE + \angle ACB = 2d,$$

а потому (кн. 1, пред. 24) прямая  $BC$  и  $CE$  составляютъ одну прямую линію.

*Примѣч. 22.* Это предложеніе нигдѣ не прилагается и кромѣ того оно не точно. Въ самомъ дѣлѣ, продолжимъ сторону  $ED$  такъ, чтобы продолженіе  $DF$  было равно  $ED$  и соединимъ  $F$  съ  $C$ . Полученный треугольникъ  $CDF$  удовлетворяетъ предложенію Евлида точно такъ же, какъ и треугольникъ  $DCE$ , но  $CF$  и  $CB$  не составляютъ одной прямой линіи. Чтобы предложеніе было точно, необходимо прибавить, что основанія должны лежать на соотвѣтственныхъ сторонахъ обѣихъ параллельныхъ. Основанія  $CF$  и  $CB$  не лежатъ

на соответственных сторонах параллельных  $AB$  и  $CD$ , поэтому треугольник  $CDF$  не удовлетворяет условию и долженъ быть исключенъ.

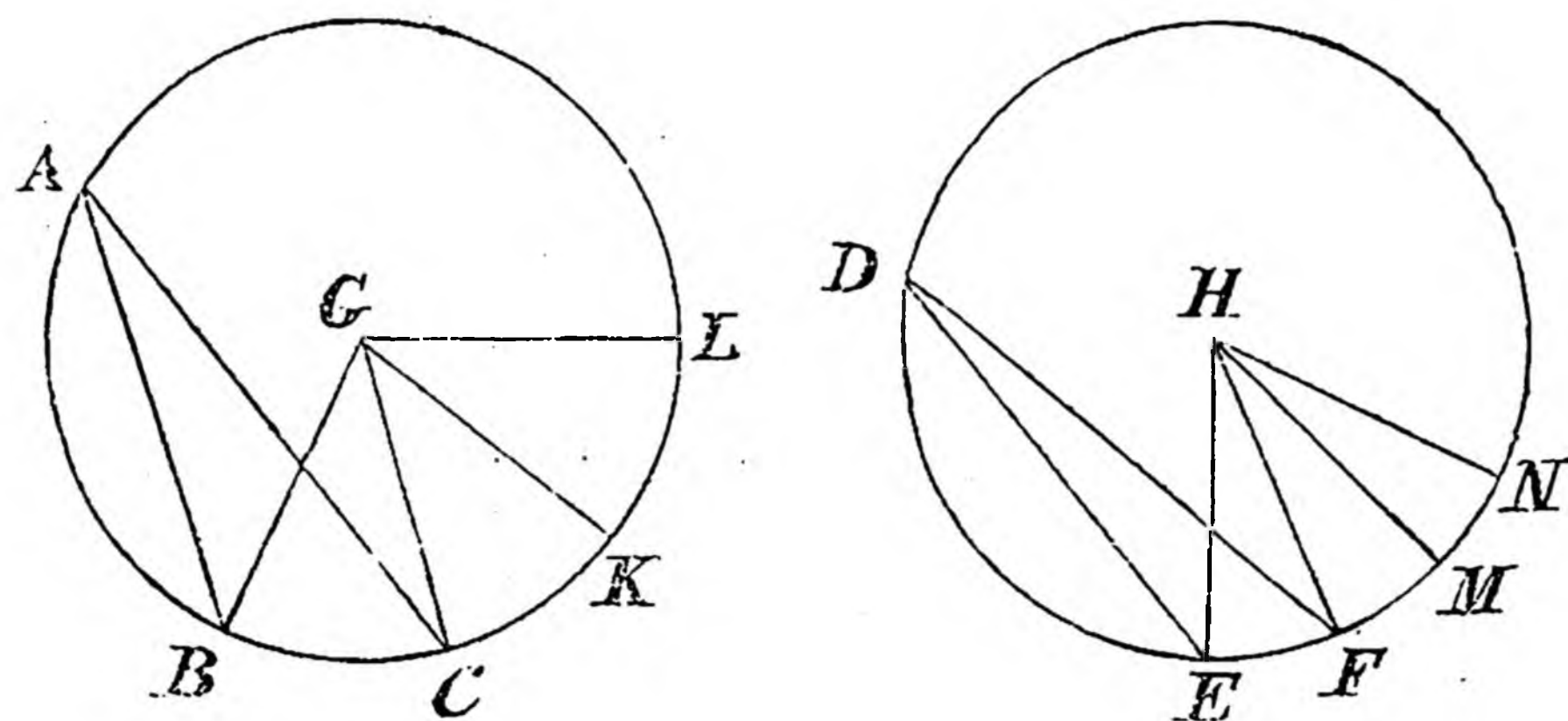
*Предложение 33.* Въ двухъ равныхъ кругахъ, или въ одномъ кругѣ углы, имѣющіе вершины свои на окружностяхъ или въ центрахъ, имѣютъ между собою такое же отношеніе, какъ и стягиваемыя ими дуги; тоже отношеніе имѣютъ между собою и секторы.

*Доказат.* 1) Пусть въ равныхъ кругахъ,  $ABC$  и  $DEF$ , будутъ углы  $BGC$  и  $EHF$ , имѣющіе вершины въ центрахъ  $G$  и  $H$ , и углы  $BAC$  и  $EDF$  углы, имѣющіе свои вершины на окружностяхъ (фиг. 258). Я говорю, что:

$$\text{дуг. } BC : \text{дуг. } EF = \angle BGC : \angle EHF$$

$$\angle BAC : \angle EDF = \text{сек. } BGC : \text{сек. } EHF.$$

Фиг. 258.



Возьмемъ какое угодно число дугъ  $KC$ ,  $KL$ , ... равныхъ дугѣ  $BC$  и также точно возьмемъ сколько угодно дугъ  $FM$ ,  $MN$ , ... равныхъ дугѣ  $EF$  и проведемъ прямыя  $GK$ ,  $GL$ , ...  $HM$ ,  $HN$ , ... Такъ какъ дуги  $BC$ ,  $CK$ ,  $KL$  равны между собою, то и углы  $BGC$ ,  $CGK$ ,  $KGL$  также равны между собою (кн. 3, пред. 27), слѣдовательно какой кратности дуга  $LB$  дуги  $BC$ , такой кратности уголъ  $BGL$  будетъ угла  $BGC$ ; по той же причинѣ дуга  $NE$  будетъ такой же кратности дуги  $EF$ , какой кратности уголъ  $ENH$  угла  $EHF$ . И если дуга  $BL \leq \text{дуги } EN$ , то  $\angle BGL \leq \angle ENH$ , слѣдовательно (кн. 5, опред. 5):

$$\text{дуг. } BC : \text{дуг. } EF = \angle BGC : \angle EHF.$$

Но углы  $BGC$  и  $EHF$  вдвое больше угловъ  $BAC$  и  $EDF$  (кн. 3, пред. 20), слѣдовательно (кн. 5, пред. 15):

$$\angle BGC : \angle EHF = \angle BAC : \angle EDF,$$

откуда:

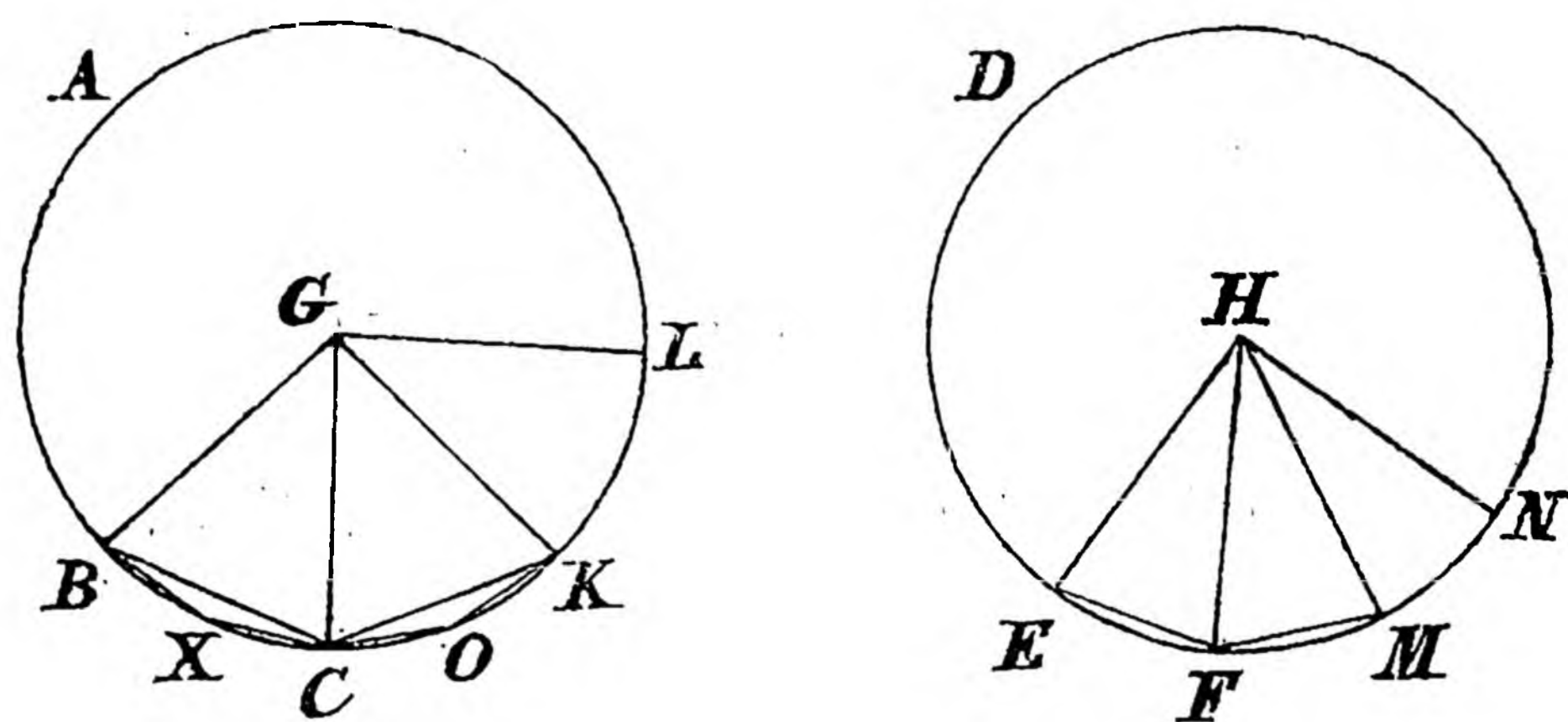
$$\text{дуг. } BC : \text{дуг. } EF = \angle BAC : \angle EDF.$$

2) Я говорю еще, что:

$$\text{дуг. } BC : \text{дуг. } EF = \text{сек. } BGC : \text{сек. } ENF.$$

Соединимъ  $B$  съ  $C$  и  $C$  съ  $K$  и возьмемъ на дугахъ  $BC$  и  $CK$  точки  $X$  и  $O$ , проведемъ хорды  $BX$ ,  $XC$ ,  $CO$ ,  $OK$  (фиг. 259).

Фиг. 259.



Такъ какъ въ треугольникахъ  $BGC$  и  $CGK$  сторона  $GC$  общая,  $GB=GK$  (кн. 1, опред. 15) и  $\angle BGC=\angle CGK$ , то  $\triangle BGC=\triangle CGK$  (кн. 1, пред. 26). Изъ равенства треугольниковъ мы имѣемъ хорд.  $BC=CK$ , слѣдовательно (кн. 3, пред. 28) дуг.  $BC=CK$ . Такъ какъ дуги  $BC$  и  $CK$  равны, то и дуги, дополняющія ихъ до цѣлой окружности, будутъ также равны; слѣдовательно  $\angle BXC=\angle COK$  (кн. 3, пред. 27) и сегментъ  $BXC$  подобенъ сегменту  $COK$  (кн. 3, опред. 2); но эти сегменты лежатъ на равныхъ хордахъ  $BC$  и  $CK$ , слѣдовательно (кн. 3, пред. 24) сег.  $BXC=$ сег.  $COK$ ; но треугольники  $BGC$  и  $CGK$  равны, слѣдовательно и

$$\text{сек. } BGC = \text{сек. } CGK.$$

По той же причинѣ:

$$\text{сек. } KGL = \text{сек. } CGK,$$

слѣдовательно секторы  $BGC$ ,  $CGK$ ,  $KGL$  равны между собою. Точно также и секторы  $HEF$ ,  $HFM$ ,  $HMN$  равны между собою. Слѣдовательно какой кратности дуга  $BL$  дуги  $BC$ , такой кратности будетъ секторъ  $BGL$  сектора  $BGC$ ; по той же причинѣ, какой кратности дуга  $NE$  дуги  $EF$ , такой же будетъ кратности секторъ  $ENH$  сектора  $ENF$ . Откуда видимъ, что если:

$$\text{дуг. } BL \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \text{дуг. } EN,$$

то

$$\text{сек. } BGL \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \text{сек. } ENH$$



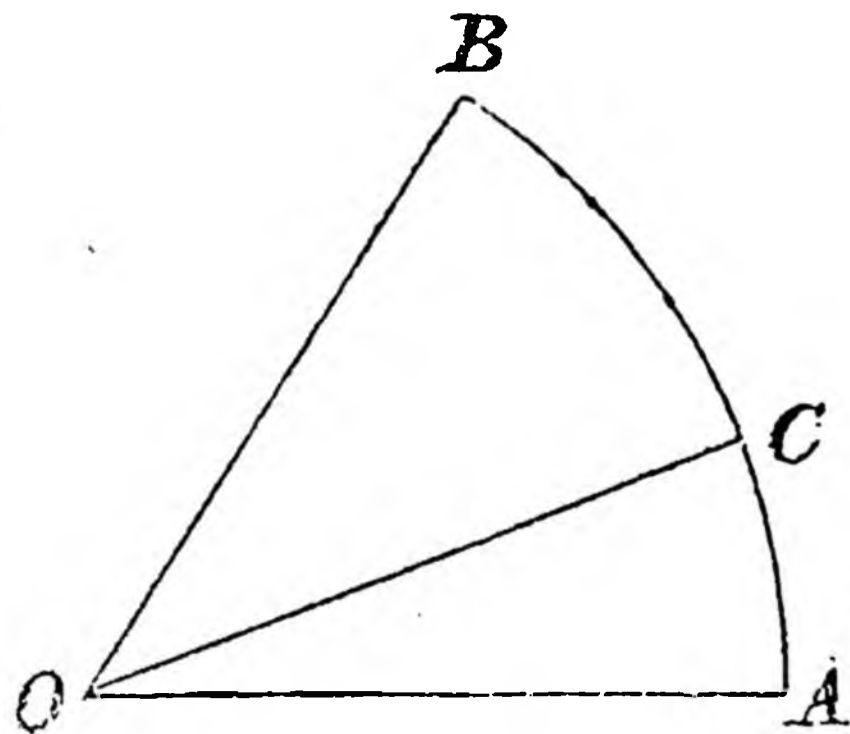
слѣдовательно (кн. 5, опред. 5):

$$\text{дуг. } BC : \text{дуг. } EF = \text{сек. } BGC : \text{сек. } ENF.$$

*Примѣч. 23.* Настоящее предложеніе можно доказать еще на основаніи опредѣленія пропорціональности, изложеннаго въ примѣчаніи 5, книги 5.

Пусть данные два угла будутъ  $AOB$  и  $AOC$  (фиг. 260), изъ общей ихъ вершины  $O$ , какъ изъ центра, произвольнымъ радіусомъ опишемъ дугу  $ACB$ , раздѣлимъ дугу, на примѣръ,

Фиг. 260.



$AC$ , на произвольное число  $n$  равныхъ частей и точки дѣленія соединимъ съ центромъ  $O$  прямыми линіями, (кн. 3, пред. 27) уголъ  $AOC$  раздѣлится также на  $n$  равныхъ частей.

Если теперь возьмемъ одно изъ дѣленій дуги  $AC$  и будемъ его намѣчать отъ точки  $C$  по дугѣ  $BC$ , то вообще мы найдемъ такое число  $m$ , что:

$$\frac{m}{n} \text{ дуг. } AC \leq \text{дуг. } AB < \frac{m+1}{n} \text{ дуг. } AC.$$

Очевидно что мы будемъ также имѣть:

$$\frac{m}{n} \angle AOC \leq \angle AOB < \frac{m+1}{n} \angle AOC.$$

Такъ какъ эти неравенства существуютъ при какомъ угодно числѣ  $n$ , то мы имѣемъ (кн. 5, прим. 4).

$$\text{дуг. } AB : \text{дуг. } AC = \angle AOB : \angle AOC.$$

т. е. мѣра дуги  $AB$ , когда дуга  $AC$  принята за единицу, равна мѣрѣ угла  $AOB$ , когда уголъ  $AOC$  принятъ за единицу. Поэтому часто говорятъ неправильно; что уголъ  $AOB$  измѣряется дугою  $AB$ , вмѣсто того чтобы сказать, что дуга  $AB$  и уголъ  $AOB$  имѣютъ одну мѣру.

Въ доказательствѣ этого предложенія уголъ  $BGL$  можетъ быть какимъ угодно вратнымъ угла  $BGC$  (фиг. 259), слѣдовательно можетъ быть больше, на сколько угодно, прямого угла. Слѣдовательно здѣсь неявно, Евклидъ оставляетъ ограниченіе, что рассматриваемые въ Геометріи углы всегда меньше двухъ прямыхъ.

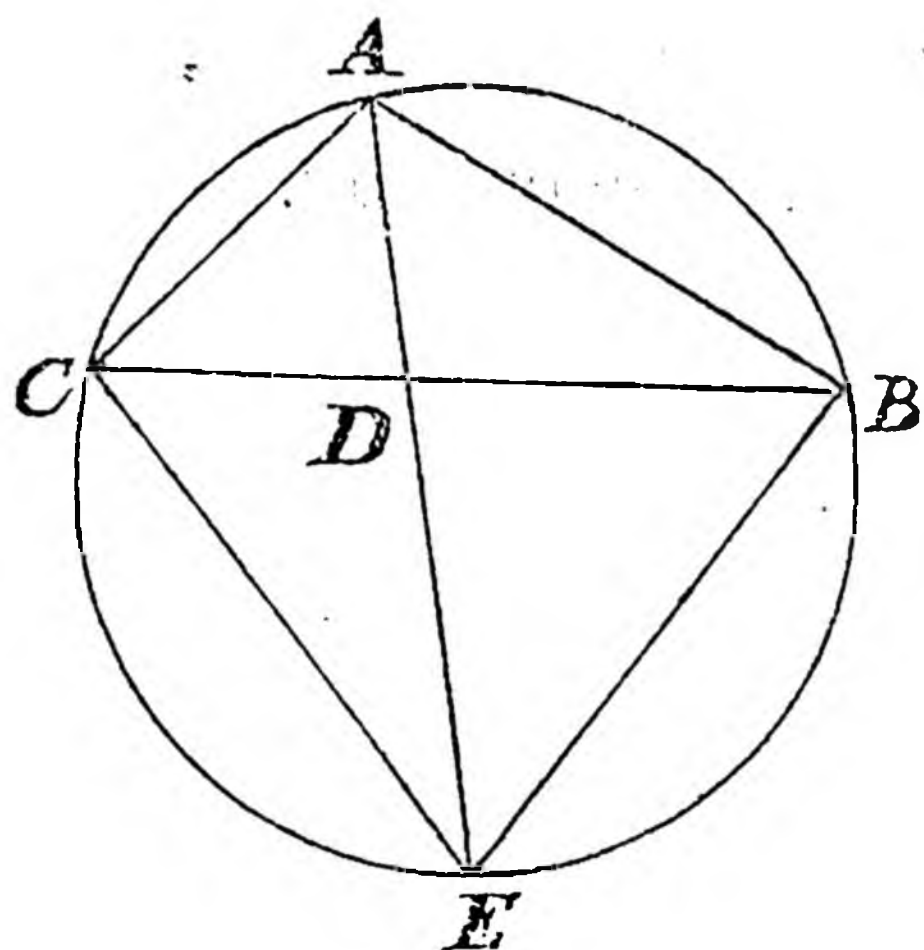
Слѣдующія три предложенія прибавлены Симсономъ, изъ нихъ третье, самое важное, встрѣчается у Птолемея въ *Μεγὰλη Σύνταξις*.

*Предлож. а.* Если въ треугольникѣ одинъ изъ угловъ раздѣленъ пополамъ и продолжимъ равнодѣлящую до встрѣчи съ противуположной стороной, то прямоугольникъ, построенный изъ сторонъ взятаго угла, будетъ равенъ прямоугольнику, построенному изъ отрѣзковъ основанія вмѣстѣ съ квадратомъ, построеннымъ на равнодѣлящей уголъ (фиг. 261).

*Доказат.* Пусть  $ABC$  будетъ треугольникъ, коего уголъ  $BAC$  раздѣленъ прямою  $AD$  пополамъ. Я говорю, что прямоугольникъ, построенный изъ сторонъ  $AB$  и  $AC$ , равенъ прямоугольнику изъ отрезковъ  $BD$  и  $DC$  съ квадратомъ, построеннымъ на  $AD$ , т. е.:

$$AB \cdot AC = BD \cdot DC + \square AD.$$

Фиг. 261.



Около даннаго треугольника  $ABC$  опишемъ кругъ (кн. 4, пред. 5) и продолжимъ равнодѣлящую  $AD$  до встрѣчи съ окружностью въ точкѣ  $E$ , соединимъ  $C$  съ  $E$ .

Такъ какъ  $\angle BAD = \angle CAE$  и  $\angle ABD = \angle AEC$  (кн. 3, пред. 21), то треугольники  $ABD$  и  $AEC$  равноугольны, слѣдовательно (кн. 6, пред. 4):

$$BA : AD = EA : AC,$$

а слѣдовательно прямоугольникъ изъ  $AB$  и  $AC$  равенъ прямоугольнику изъ  $AD$  и  $EA$  (кн. 6, пред. 16), т. е.:

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE,$$

или

$$AB \cdot AC = DE \cdot AD + \square AD,$$

но (кн. 3, пред. 35):

$$DE \cdot AD = BD \cdot DC,$$

слѣдовательно:

$$AB \cdot AC = BD \cdot DC + \square AD.$$

*Предлож. в.* Если изъ вершины какого нибудь угла треугольника опустимъ перпендикуляръ на противоположащую сторону, то прямоугольникъ изъ сторонъ взятаго угла будетъ равенъ прямоугольнику изъ перпендикуляра и діаметра круга, описаннаго около треугольника (фиг. 262):

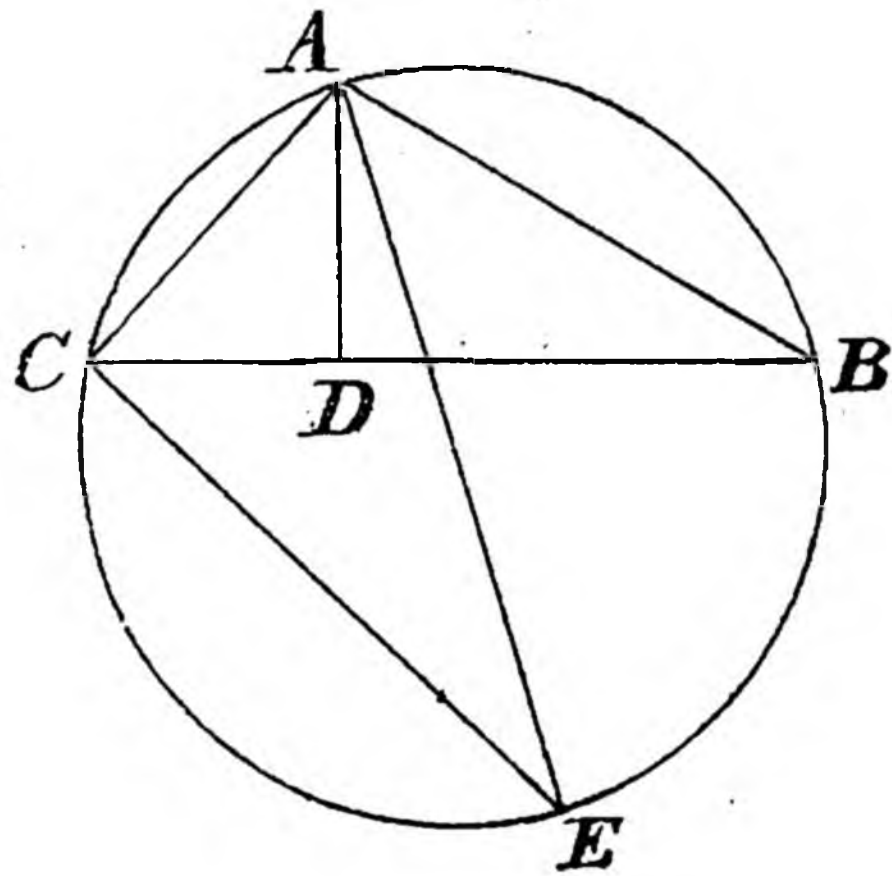
*Доказат.* Пусть изъ вершины угла  $BAC$  треугольника  $ABC$  опущенъ перпендикуляръ  $AD$  на сторону  $BC$ . Я говорю, что:

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE.$$

Такъ какъ прямой уголъ  $BDA = \angle ECA$  (кн. 3, пред. 31).  $AE$  есть діаметръ, и

$\angle ABD = \angle AEC$ , какъ вписанные въ одинъ и тотъ же сегментъ, то треугольники  $ABD$  и  $AEC$  равноугольны, а если равноугольны, то (кн. 6, пред. 4):

Фиг. 262.



$$AB : AD = AE : AC,$$

откуда:

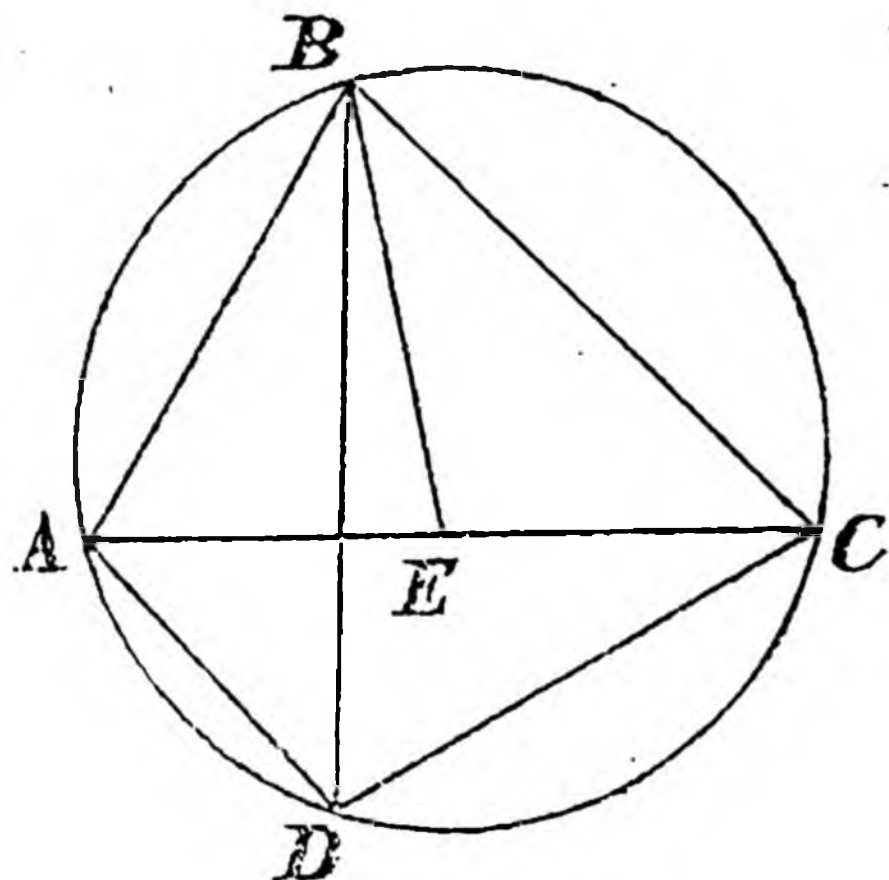
$$AB \cdot AC = AD \cdot AE.$$

*Предлож. с.* Если, какой нибудь, четырехугольникъ вписанъ въ кругъ, то прямоугольникъ изъ діагоналей равенъ суммѣ прямоугольниковъ изъ противоположныхъ сторонъ (фиг. 263).

*Доказат.* Пусть  $ABCD$  вписанный въ кругъ четырехугольникъ, проведемъ діагонали  $AC$  и  $BD$ . Я говорю, что:

$$AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot DC.$$

Фиг. 263.



Построимъ  $\angle ABE = \angle DBC$  (кн. 1, пред. 23) и отнимемъ по углу  $EBD$ , то (кн. 1, акс. 2)  $\angle ABD = \angle EBC$ ; но уголъ  $BDA = \angle BCE$  (кн. 3, пред. 21), слѣдовательно треугольники  $ABD$  и  $BCE$  равноугольны, а если эти треугольники равноугольны, то:

$$BD : AD = BC : CE,$$

откуда прям.  $BD \cdot CE =$  прям.  $AD \cdot BC$  (кн. 6, пред. 16). Уголъ  $ABE = \angle DBC$  и  $\angle BAE = \angle BDC$  (кн. 3, пред. 21), слѣдовательно треугольники  $ABE$  и  $BDC$  равноугольны, а если они равноугольны, то (кн. 6, пред. 4):



$$BD : DC = BA : AE$$

откуда:

$$\text{прям. } BA \cdot DC = \text{прям. } BD \cdot AE.$$

Но мы доказали, что  $\text{прям. } BC \cdot AD = \text{прям. } BD \cdot CE$ , следовательно:

$$\text{прям. } BC \cdot AD + \text{прям. } BA \cdot DC = \text{прям. } BD \cdot CE + \text{прям. } BD \cdot AE$$

т. е. :

$$\text{прям. } BD \cdot AC = \text{прям. } BC \cdot AD + \text{прям. } BA \cdot DC.$$


---

## ПРИБАВЛЕНІЯ.

### I. О многоугольникахъ.

Евклидъ въ четвертой книгѣ показалъ какъ построить правильные многоугольники въ кругѣ трехъ, четырехъ, пяти, шести и пятнадцати сторонъ, а мы въ шестомъ примѣчаніи, той же книги, замѣтили, что съ помощью построеній, данныхъ Евклидомъ, можно легко построить правильные многоугольники въ кругѣ 8, 10, 12, 16, 20, 24, 30, . . . . сторонъ. Въ настоящемъ прибавленіи я изложу подробнѣе свойства многоугольниковъ, которыя намъ послужатъ основаніемъ изложенія той части плоской геометріи, которая не находится у Евклида, именно: разысканіе числовой зависимости между радіусомъ и окружностью, между радіусомъ и площадью круга, задача извѣстная въ геометріи подъ именемъ *квадратуры круга*.

Пусть  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$  будутъ  $m$  точекъ, расположенныхъ, въ какомъ угодно порядкѣ, на плоскости.

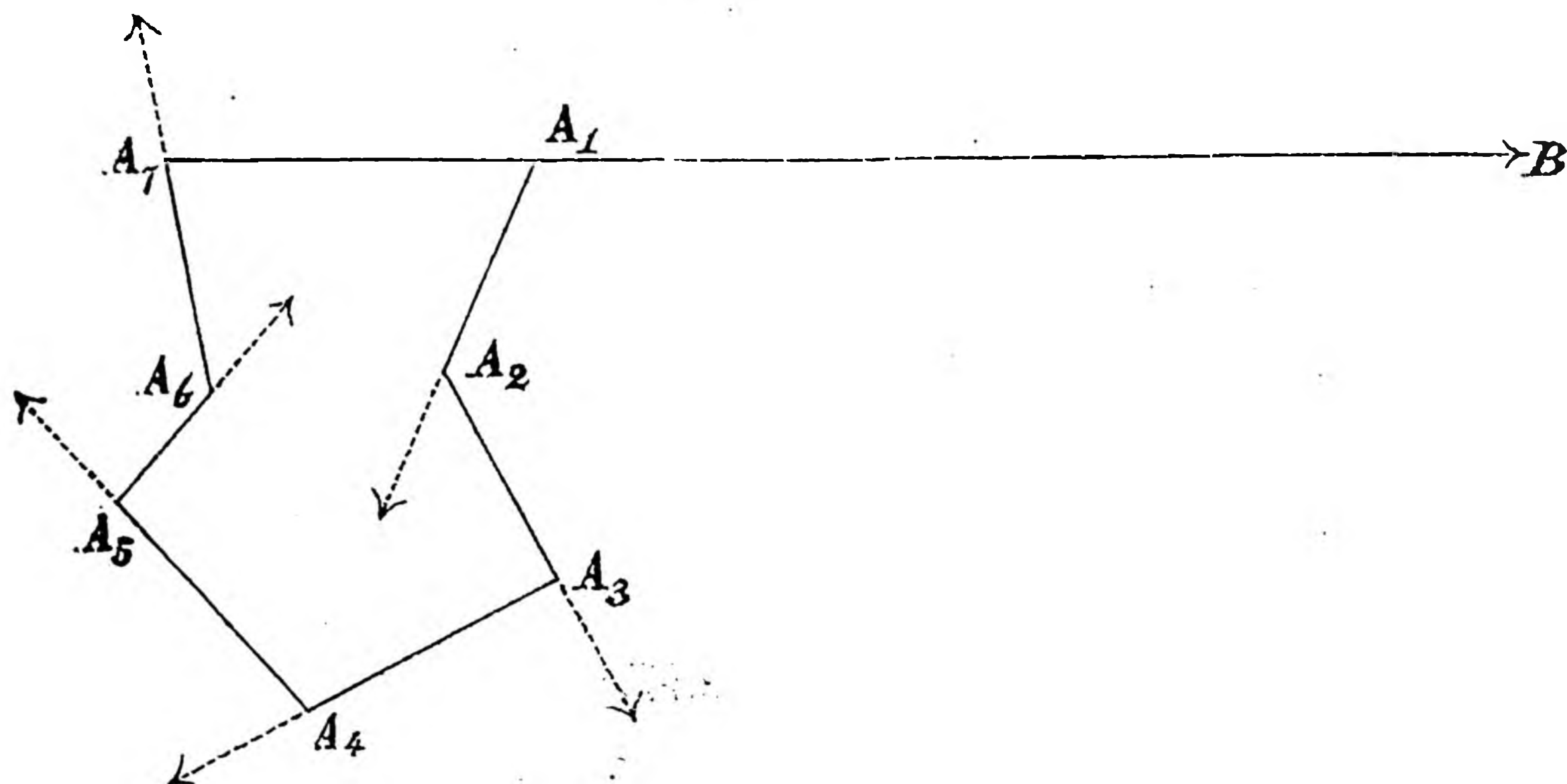
Многоугольникомъ вообще называютъ фигуру, образованную непрерывнымъ рядомъ прямыхъ  $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$ , съ условіемъ, чтобы фигура была замкнутая, т. е. чтобы послѣдняя прямая была  $A_mA_1$ .

Къ каждой изъ точекъ  $A$ , въ такой фигурѣ, примыкаютъ двѣ прямыя, которыя образуютъ въ этой точкѣ два угла, коихъ сумма равна  $4d$ . Какъ одни такъ и другіе, изъ этихъ угловъ, принадлежатъ многоугольнику, но какіе  $m$ , изъ этихъ  $2m$  угловъ, считать за углы даннаго многоугольника, это, подъ извѣстнымъ условіемъ, остается совершенно произвольнымъ.

Вотъ какъ опредѣляются тѣ углы, которые принимаются за углы многоугольника.

Возьмемъ, напримѣръ, многоугольникъ  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$  (фиг. 264), продолжимъ одну изъ его сторонъ, напримѣръ,  $A_2A_1$ , такъ чтобы продолженіе

Фиг. 264.



$A_1B$  было равно всему периметру многоугольника. Станемъ на прямой  $A_1B$  лицомъ къ стрѣлкѣ и вообразимъ, что правая сторона прямой  $A_1B$  окрашена бѣлой краской, а лѣвая черной. Переломимъ прямую  $A_1B$  въ точкѣ  $A_1$  и наклонимъ ее такъ, чтобы она прошла чрезъ точку  $A_2$ , переломимъ въ точкѣ  $A_2$  и наклонимъ такъ чтобы она прошла чрезъ точку  $A_3$  и будемъ продолжать подобнымъ образомъ до тѣхъ поръ, пока не замкнется многоугольникъ въ точкѣ  $A_1$ . Этимъ способомъ мы отдѣляемъ одну половину угловъ многоугольника отъ другой: одна изъ нихъ заключена между бѣлыми частями поломанной прямой  $A_1B$ , а другая между черными. Какъ тѣ, такъ и другіе суть углы многоугольника, но этимъ именемъ будемъ называть только ту половину изъ  $2m$  угловъ, которой сумма будетъ меньше. Если сумму этихъ угловъ назовемъ чрезъ  $\omega$ , то сумма другой половины будетъ очевидно  $4md - \omega$ .

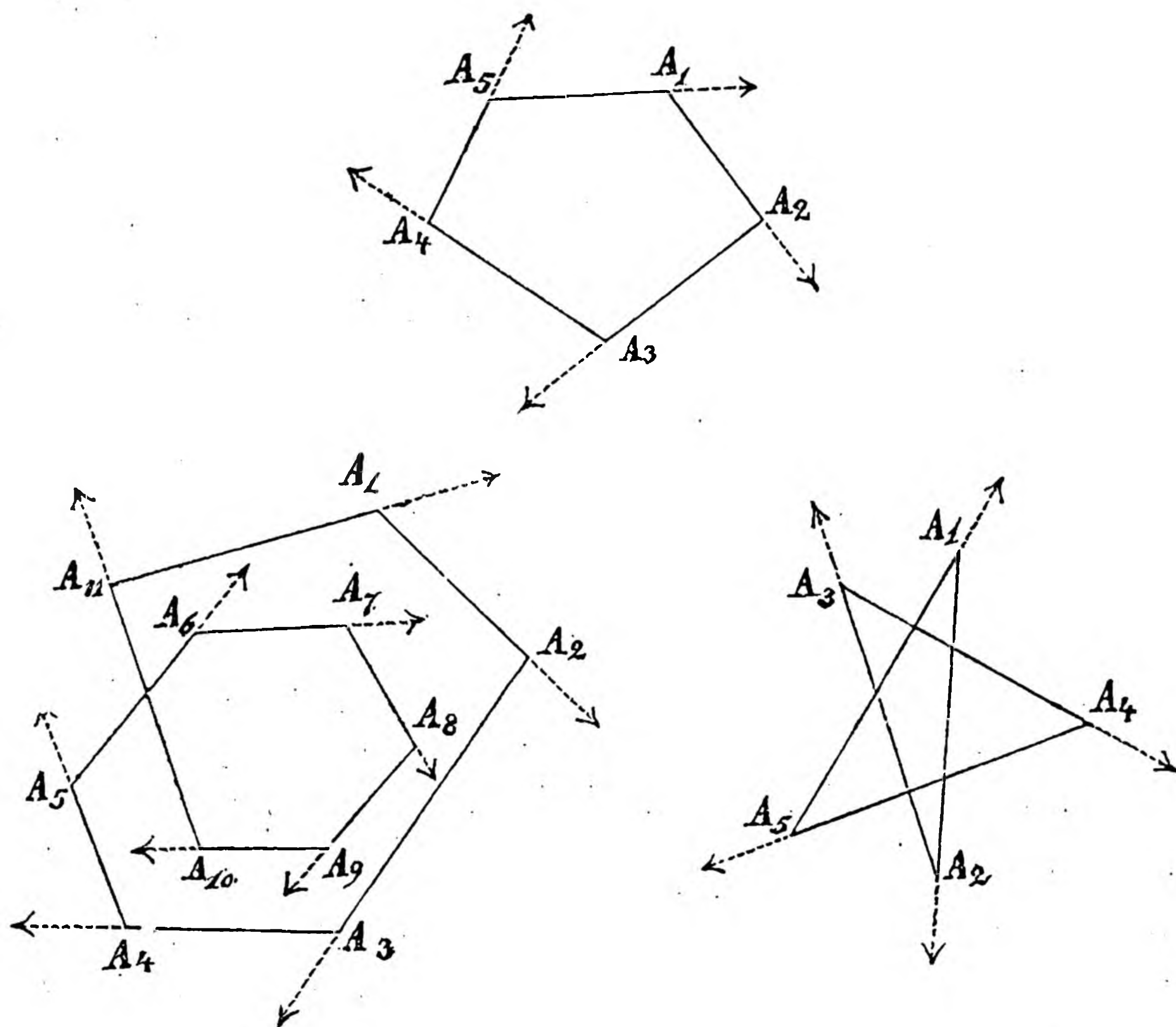
*Выпуклымъ многоугольникомъ* называютъ такой, периметръ котораго прямая, проведенная въ произвольномъ направленіи, не можетъ пересѣчь болѣе какъ въ двухъ точкахъ. Но такое опредѣленіе во первыхъ не точно, а во 2-хъ тѣмъ неудобно, что требуетъ безчисленнаго числа пробъ, поэтому дали другое, именно: *выпуклымъ многоугольникомъ* называется такой, въ которомъ нѣтъ ни одного угла, въ выше сказанномъ смыслѣ, больше  $2d$ , т. е. въ которомъ всѣ углы *вогнуты* (кн. 1, прим. 5).

Въ такомъ многоугольникѣ прямая  $A_1B$ , ломаясь въ точкахъ  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ , . . . наклоняется всегда въ одну сторону не возвращаясь назадъ, такъ что если чрезъ произвольно взятую точку  $O$  на плоскости будемъ проводить параллельныя тѣмъ направленіямъ, которыя принимаетъ прямая  $A_1B$ , ломаясь, то углы, которые они составляютъ съ первоначальнымъ направленіемъ, постоянно возрастаютъ.



Таковы многоугольники (фиг. 265).

Фиг. 265.



Относительно первого многоугольника прямая около точки  $O$ , принимая направления параллельныя сторонамъ многоугольника, сдѣлаетъ одинъ полный оборотъ, а относительно двухъ другихъ многоугольниковъ она сдѣлаетъ два полныхъ оборота, слѣдовательно, въ первомъ случаѣ, сдѣлаетъ уголъ въ  $4d$ , а во второмъ она сдѣлаетъ уголъ въ  $8d$ .

Изъ фигуръ втораго и третьяго многоугольника мы видимъ, что прямая можетъ пересѣчь ихъ периметръ болѣе чѣмъ въ двухъ точкахъ, а слѣдовательно, по первому опредѣленію, они не были бы выпуклые.

Напротивъ многоугольникъ (фиг. 264) не будетъ выпуклый, такъ какъ онъ не удовлетворяетъ условію опредѣленія, потому что прямая, ломаясь около точекъ  $A_1, A_2, A_3, \dots$  въ нѣкоторыхъ точкахъ, напримѣръ въ точкѣ  $A_2$ , возвращается назадъ.

Въ выпуклыхъ многоугольникахъ тѣ углы, которые мы назвали выше вообще *углами многоугольника* и изъ которыхъ каждый меньше  $2d$ , мы будемъ называть *внутренними*, а остальные *внѣшними*.

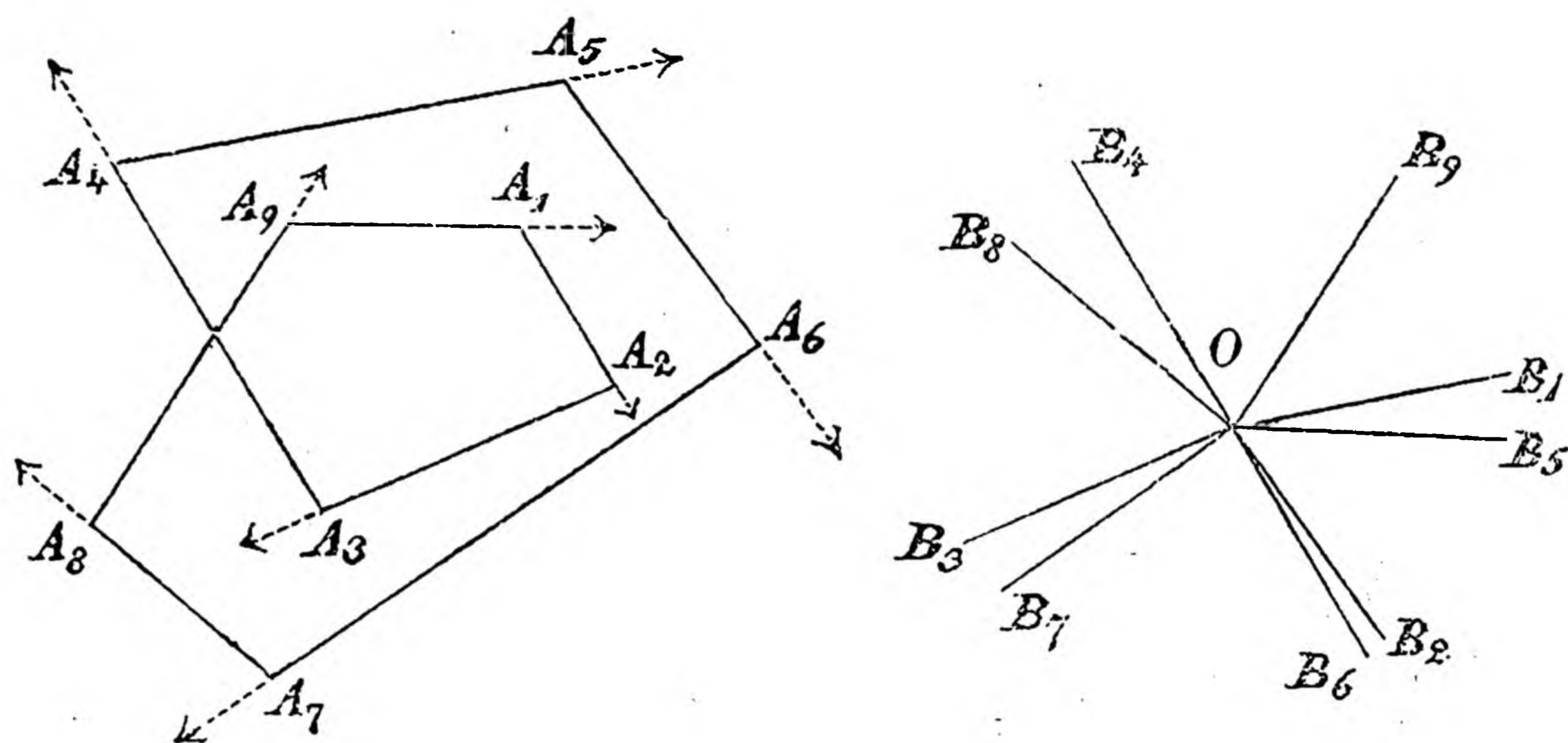
Теперь мы исключительно будемъ заниматься только выпуклыми многоугольниками.

*Предложеніе 1.* Если въ выпукломъ многоугольникѣ продолжимъ стороны въ одномъ направленіи, то сумма угловъ, которые эти продолженія образуютъ, съ прилежащими сторонами, равна  $4dh$ , гдѣ  $h$  есть число пол-

ныхъ оборотовъ, которые сдѣлаетъ прямая, проходящая чрезъ какую нибудь точку на плоскости, принимая послѣдовательно положенія параллельныя всѣмъ сторонамъ многоугольника (фиг. 266).

*Доказат.* Пусть данный выпуклый многоугольникъ будетъ  $A_1A_2 \dots A_n$ ,

Фиг. 266.



продолжимъ стороны  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$ ,  $A_3A_4$ , ... по направленію стрѣлокъ. Я говорю, что сумма внѣшнихъ угловъ при точкахъ  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ , ...  $A_n$  равна  $4d.2$  при двухъ оборотахъ и  $4d.h$  при  $h$  оборотахъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если чрезъ произвольно взятую точку  $O$  въ плоскости многоугольника проведемъ прямыя  $OB_1$ ,  $OB_2$ ,  $OB_3$ , ..., параллельныя сторонамъ  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$ ,  $A_3A_4$ , ..., то мы будемъ имѣть:

$$\angle A_1 = \angle B_1OB_2, \quad \angle A_2 = \angle B_2OB_3, \quad \dots$$

Но прямая  $OB_1$  дѣлаетъ два ( $h$ ) полныхъ оборота, когда возвращается въ первоначальное положеніе,  $OB_1$ , слѣдовательно сумма всѣхъ угловъ  $B_1OB_2$ ,  $B_2OB_3$ , ... равна  $4d.2$  ( $4d.h$ ).

Теперь легко показать чему равна сумма внутреннихъ угловъ во всякомъ выпукломъ многоугольникѣ.

*Предложеніе 2.* Во всякомъ выпукломъ многоугольникѣ сумма внутреннихъ угловъ равна  $2d$  взятымъ столько разъ, сколько сторонъ безъ удвоеннаго числа полныхъ оборотовъ, которые дѣлаетъ периметръ многоугольника, чтобы возвратиться въ точку исхода.

*Доказат.* Пусть данный многоугольникъ будетъ имѣть  $m$  сторонъ и пусть периметръ его дѣлаетъ  $h$  оборотовъ, чтобы замкнуться. Я говорю, что сумма внутреннихъ угловъ равна  $2d(m-2h)$ .

Въ самомъ дѣлѣ, въ каждой вершинѣ многоугольника  $A_1A_2 \dots$  (ф. 266), на примѣръ въ  $A_1$ ,  $\angle A_2A_1A_9 + \angle A_1 = 2d$ , слѣдовательно, при всѣхъ вершинахъ сумма этихъ угловъ будетъ равна  $2md$ . Если отъ этой суммы

отнимемъ сумму угловъ  $A_1, A_2, A_3, \dots$  которая, какъ мы выше видѣли равна  $4dh$ , то найдемъ, что сумма  $S_1$  всѣхъ внутреннихъ угловъ многоугольника будетъ равна:

$$S_1 = 2d(m - 2h).$$

*Слѣдствіе 1.* Такъ какъ въ каждой вершинѣ многоугольника сумма угловъ равна  $4d$ , а при всѣхъ вершинахъ эта сумма будетъ  $4md$ , то отнимая отъ этой суммы сумму  $S_1$  внутреннихъ угловъ многоугольника, получимъ сумму  $S_2$  внѣшнихъ угловъ многоугольника:

$$S_2 = 2d(m + 2h).$$

*Слѣдствіе 2.* Если  $h=1$ , т. е. если периметръ выпуклаго многоугольника состоитъ изъ одного оборота, то мы получимъ извѣстныя выраженія для  $S_1$  и  $S_2$ :

$$S_1 = 2d(m - 2), \quad S_2 = 2d(m + 2).$$

*Слѣдствіе 3.* Если въ выраженіи:

$$S_1 = 2d(m - 2h)$$

$m - 2h = 1$ , слѣдовательно число сторонъ будетъ  $m = 2h + 1$ , то  $S_1 = 2d$ , т. е. въ многоугольникахъ съ нечетнымъ числомъ сторонъ  $2h + 1$ , гдѣ  $h$  есть число оборотовъ периметра многоугольника, сумма внутреннихъ угловъ равна  $2d$ . Изъ этого видимъ, что не въ одномъ треугольникѣ сумма внутреннихъ угловъ равна  $2d$ , она равна  $2d$  и во всѣхъ многоугольникахъ съ нечетнымъ числомъ сторонъ, полученныхъ, полагая въ выраженіи  $m = 2h + 1$ ,  $h = 1, 2, 3, 4, \dots$

Если  $h=1$ , то имѣемъ треугольникъ.

Если  $h=2$ , то мы имѣемъ пятиугольникъ, коего периметръ дѣлаетъ два оборота.

Если  $h=3$ , то мы имѣемъ семиугольникъ, коего периметръ дѣлаетъ три оборота и т. д.

*Слѣдствіе 4.* Если въ выраженіи:

$$S_1 = 2d(m - 2h)$$

$m - 2h = 2$ , слѣдовательно число сторонъ будетъ  $m = 2h + 2$ , то  $S_1 = 4d$ . Изъ этого видимъ, что не въ одномъ четырехугольникѣ сумма внутреннихъ уг-



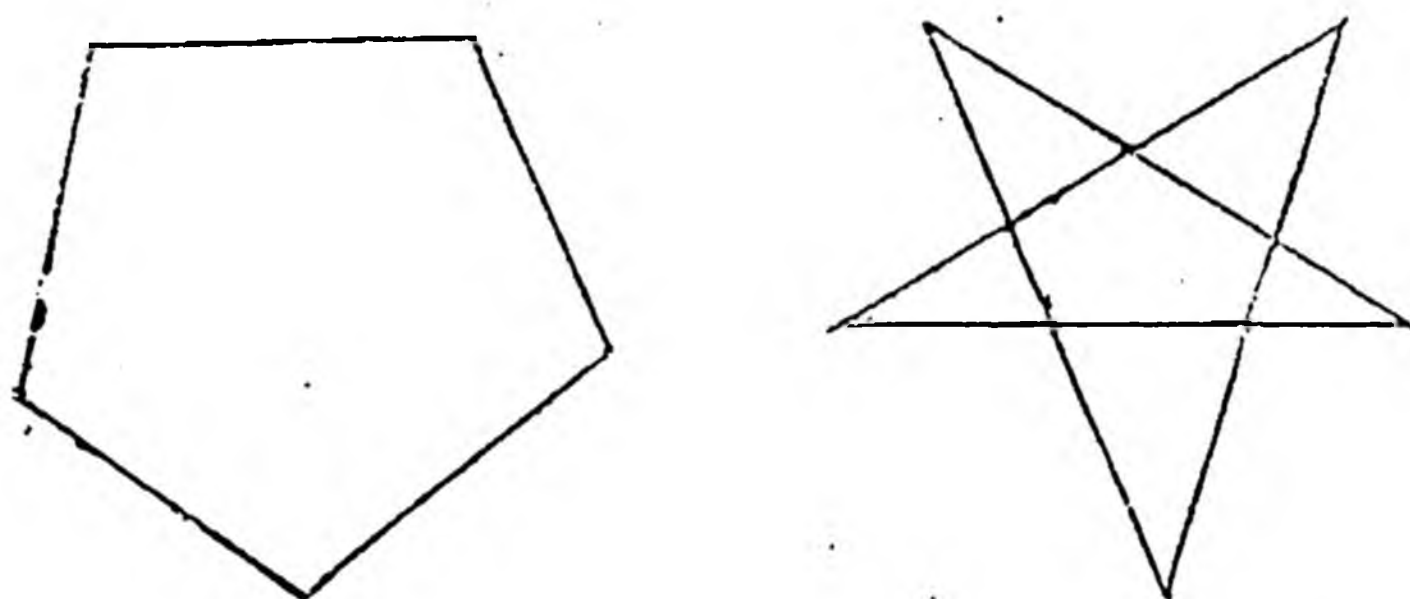
ловъ равна  $4d$ , она равна  $4d$  и во всѣхъ многоугольникахъ съ четнымъ числомъ сторонъ, полученныхъ, полагая  $h=1, 2, 3, 4, \dots$

Если  $h=1$ , то мы имѣемъ четырехугольникъ.

Если  $h=2$ , то имѣемъ шестиугольникъ, коего периметръ дѣлаетъ два оборота и т. д.

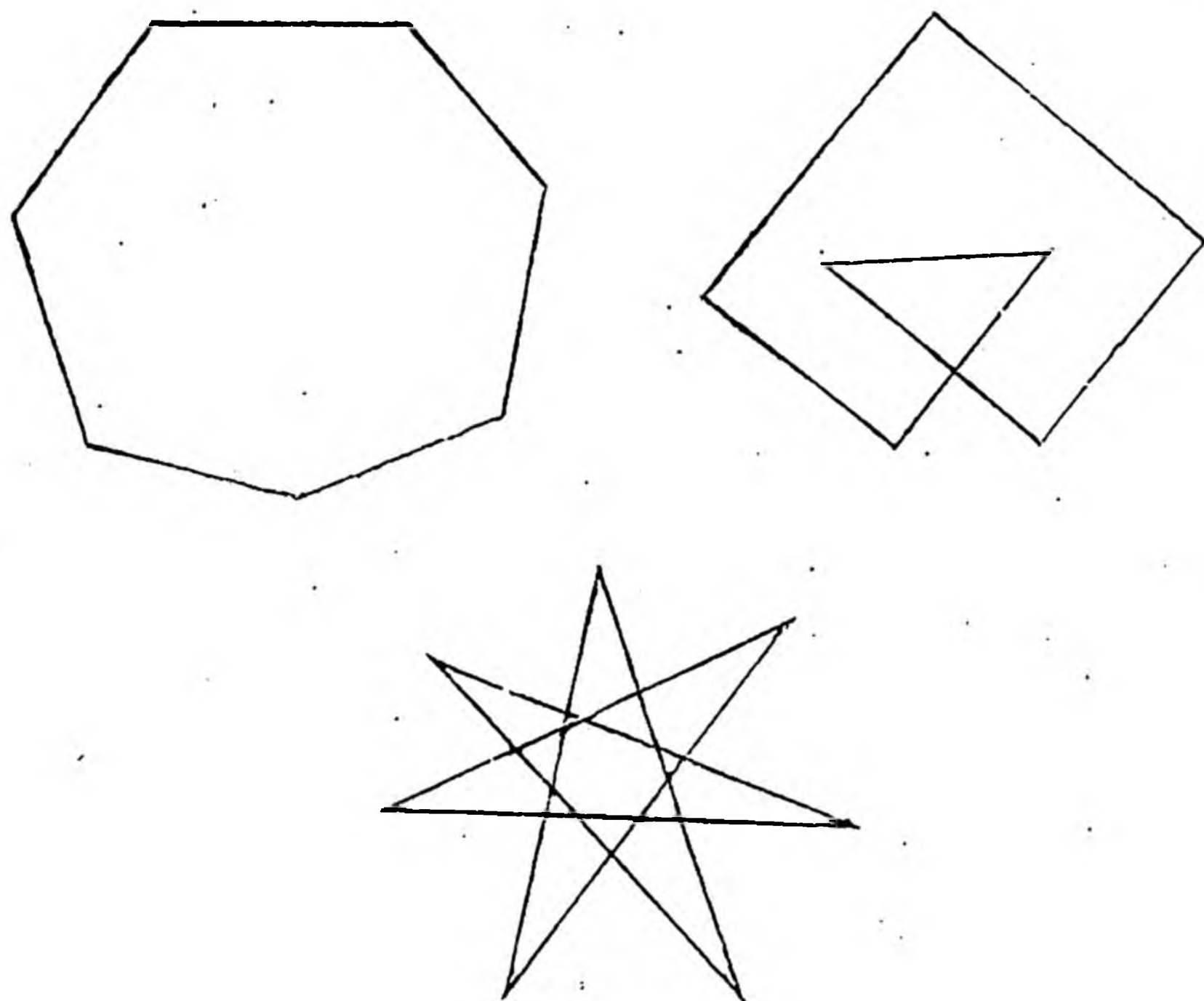
*Слѣдствіе 5.* Изъ выраженія  $S_1=2d(m-2h)$  легко видѣть, что есть только два рода выпуклыхъ пятиугольниковъ. Во всѣхъ пятиугольникахъ перваго рода сумма внутреннихъ угловъ равна  $6d$ , периметръ ихъ дѣлаетъ одинъ оборотъ, а во всѣхъ пятиугольникахъ втораго рода сумма внутреннихъ угловъ равна  $2d$ , периметръ ихъ дѣлаетъ два оборота (фиг. 267).

Фиг. 267.



Изъ того же выраженія видно, что есть три рода семиугольниковъ: къ первому роду принадлежатъ такіе, въ которыхъ сумма  $S_1=10d$ , ихъ периметръ дѣлаетъ одинъ оборотъ, ко второму принадлежатъ такіе, въ которыхъ  $S_1=6d$ , ихъ периметръ дѣлаетъ два оборота, наконецъ къ третьему роду принадлежатъ такіе, въ которыхъ  $S_1=2d$ , ихъ периметръ дѣлаетъ три оборота (фиг. 268).

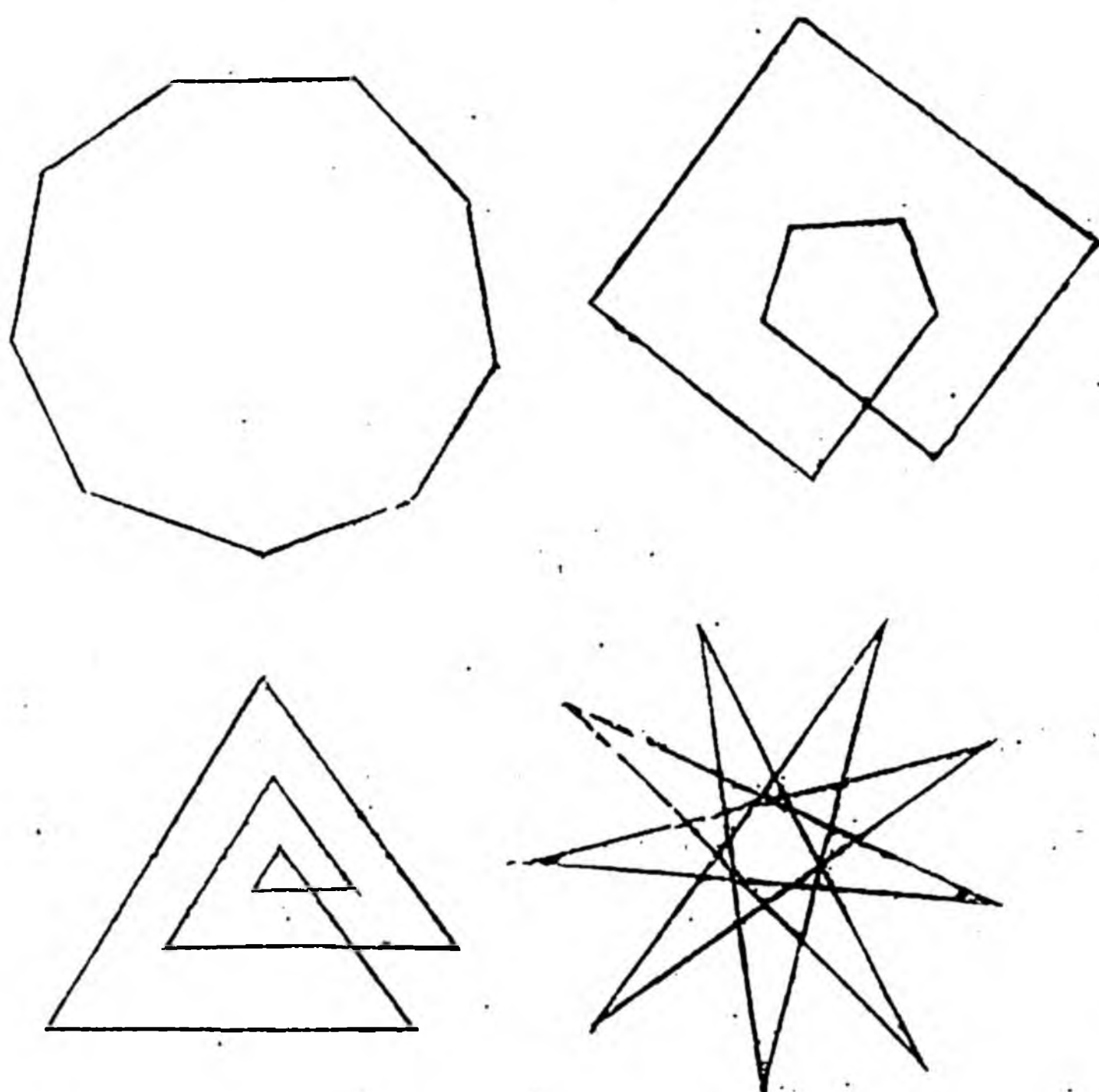
Фиг. 268.



Девятиугольниковъ есть четыре рода (фиг. 269):

1-й родъ,	$S_1=14d$ ,	число оборотовъ	$h=1$
2-й „	$S_1=10d$ ,	„	$h=2$
3-й „	$S_1=6d$ ,	„	$h=3$
4-й „	$S_1=2d$ ,	„	$h=4$ .

Фиг. 269.



Легко видѣть, что есть пять родовъ одиннадцатиугольниковъ и т. д. Вообще если число  $m$  есть нечетное, то давая числу  $h$  всѣ значенія отъ 1 до  $\frac{m-1}{2}$  включительно, получимъ всѣ роды многоугольниковъ, имѣющихъ  $m$  сторонъ, слѣдовательно такихъ родовъ есть  $\frac{m-1}{2}$ .

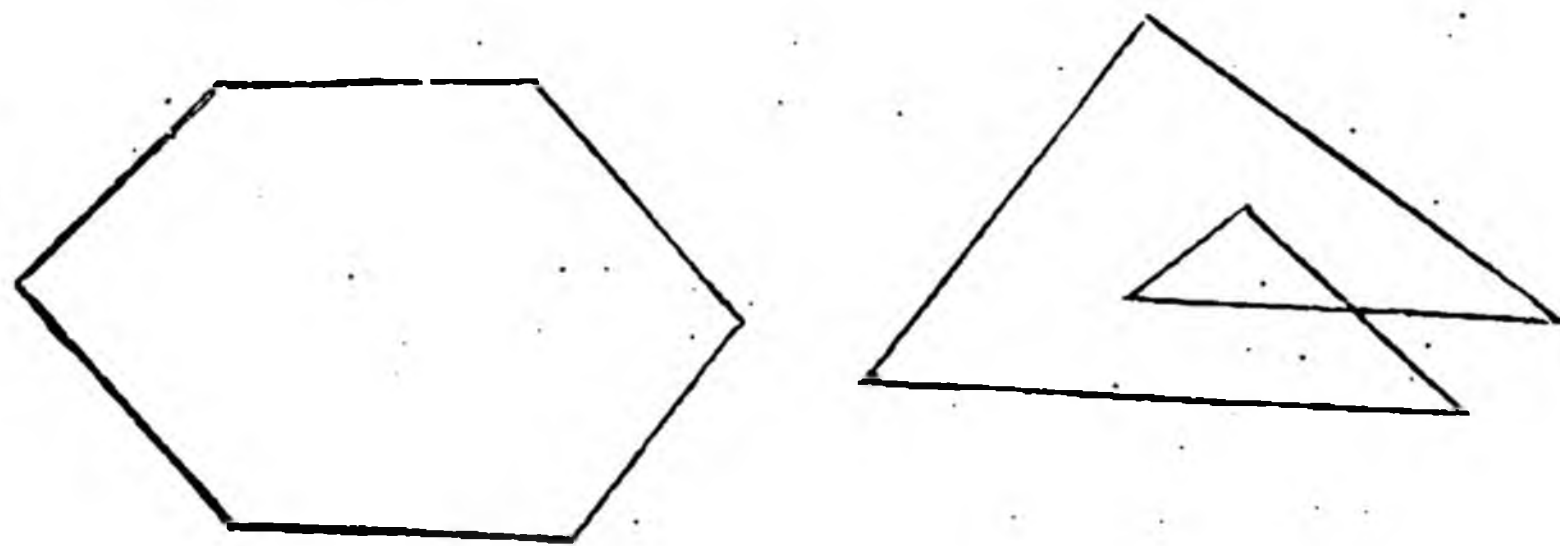
Четыреугольниковъ есть только одинъ родъ, въ нихъ  $S_1 = 4d$ .

Шестиугольниковъ есть два рода (фиг. 270):

1-й родъ,  $S_1 = 8d$ , число оборотовъ  $h=1$ ,

2-й „  $S_1 = 4d$ , „ „  $h=2$ .

Фиг. 270.



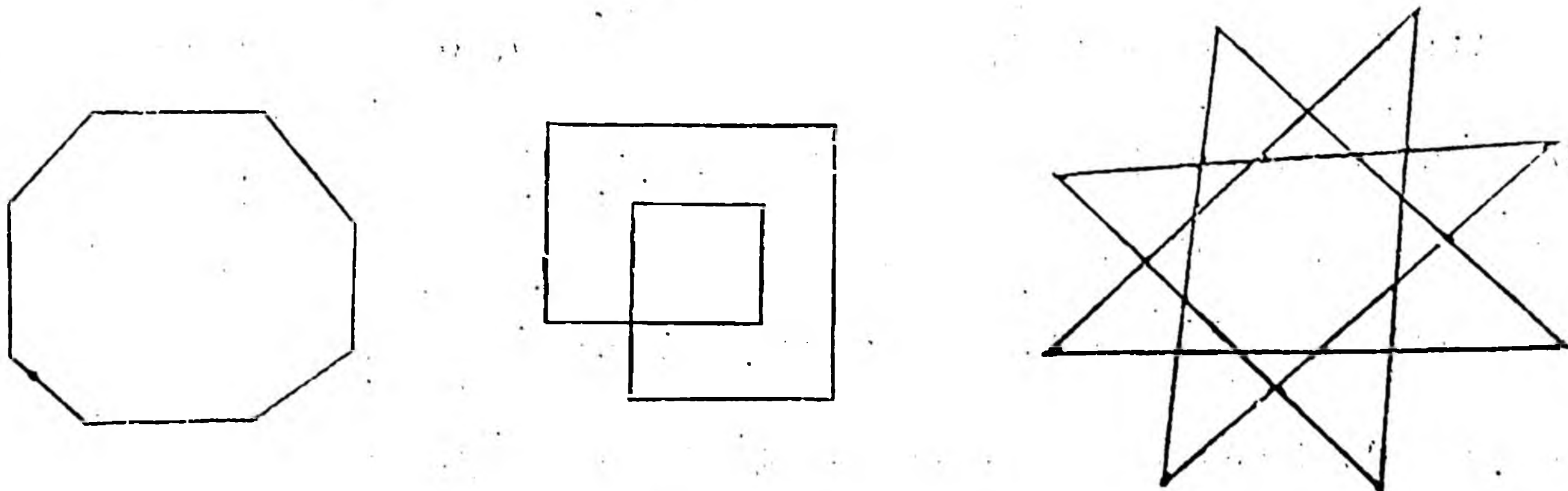
Восьмиугольниковъ есть три рода (фиг. 271):

1-й родъ,  $S_1 = 12d$ , число оборотовъ  $h=1$ ,

2-й „  $S_1 = 8d$ , „ „  $h=2$

3-й „  $S_1 = 4d$ , „ „  $h=3$

Фиг. 271.



и т. д.

Если  $m$  есть число четное, то давая числу  $h$  всѣ значенія отъ 1 до  $\frac{m-2}{2}$  включительно мы получимъ всѣ роды многоугольниковъ, имѣющихъ  $m$  сторонъ, слѣдовательно такихъ родовъ есть  $\frac{m-2}{2}$ .

## II. Правильные многоугольники.

Между выпуклыми многоугольниками особеннаго вниманія заслуживаютъ *правильные*, которыми мы теперь и займемся.

Пусть окружность круга будетъ раздѣлена на  $m$  равныхъ частей. Начиная съ какой нибудь точки дѣленія, поставимъ, послѣдовательно, на точкахъ дѣленія, нумера 1, 2, 3, 4, . . . ,  $m$ . Если проведемъ между послѣдовательными точками дѣленія прямая, т. е. соединимъ 1 съ 2, 2 съ 3, 3 съ 4, и т. д., то получимъ первый выпуклый  $m$  сторонній правильный многоугольникъ.

Возьмемъ теперь, какое нибудь число  $h$  меньше отъ  $m$  и взаимно-простое съ нимъ. Начиная съ точки 1 соединимъ, послѣдовательно по  $h$   $m$ -хъ частей окружности хордами. Такъ какъ  $h$  есть число взаимно простое съ  $m$ , т. е. не имѣетъ съ нимъ общей мѣры, то возвратиться въ точку исхода 1, не иначе возможно, какъ только пройдя чрезъ всѣ  $m$  точекъ. Такимъ образомъ образуется правильный, также выпуклый многоугольникъ, имѣющій  $m$  сторонъ и  $m$  угловъ: 1, 2, 3, . . . ,  $m$ . Очевидно, что это будетъ тотъ-же самый многоугольникъ, который мы построимъ, если будемъ соединять хордами по  $m-h$   $m$ -хъ частей окружности. Точно также если возьмемъ, какое нибудь, другое число  $g < m$  и взаимно простое съ нимъ то, соединяя по  $g$   $m$ -хъ частей окружности построимъ другой правильный многоугольникъ, имѣющій  $m$  сторонъ и  $m$  угловъ 1, 2, 3, . . . ,  $m$ . Соединяя по  $m-g$   $m$ -хъ частей окружности, построимъ тотъ-же многоугольникъ и т. д.

Изъ этого видно, что можно построить столько правильныхъ многоугольниковъ, имѣющихъ  $m$  сторонъ, сколько есть чиселъ меньшихъ числа  $m$  и взаимно-простыхъ съ нимъ. Но такъ какъ многоугольникъ, построенный, соединяя по  $h$   $m$ -хъ частей окружности, есть въ тоже время и многоугольникъ построенный, соединяя по  $m-h$   $m$ -хъ частей окружности, то слѣдовательно можно построить правильныхъ многоугольниковъ столько, сколько есть чиселъ взаимно-простыхъ съ  $m$  отъ 1 до  $\frac{m-1}{2}$ .

Если  $m$  есть число простое, то число правильныхъ многоугольниковъ, имѣющихъ  $m$  сторонъ, очевидно, будетъ  $\frac{m-1}{2}$ .

Мы выше видѣли, что число родовъ многоугольниковъ выпуклыхъ,



имѣющихъ  $m$  сторонъ есть или  $\frac{m-1}{2}$  или  $\frac{m-2}{2}$ , смотря потому будетъ-ли число  $m$  нечетное или четное.

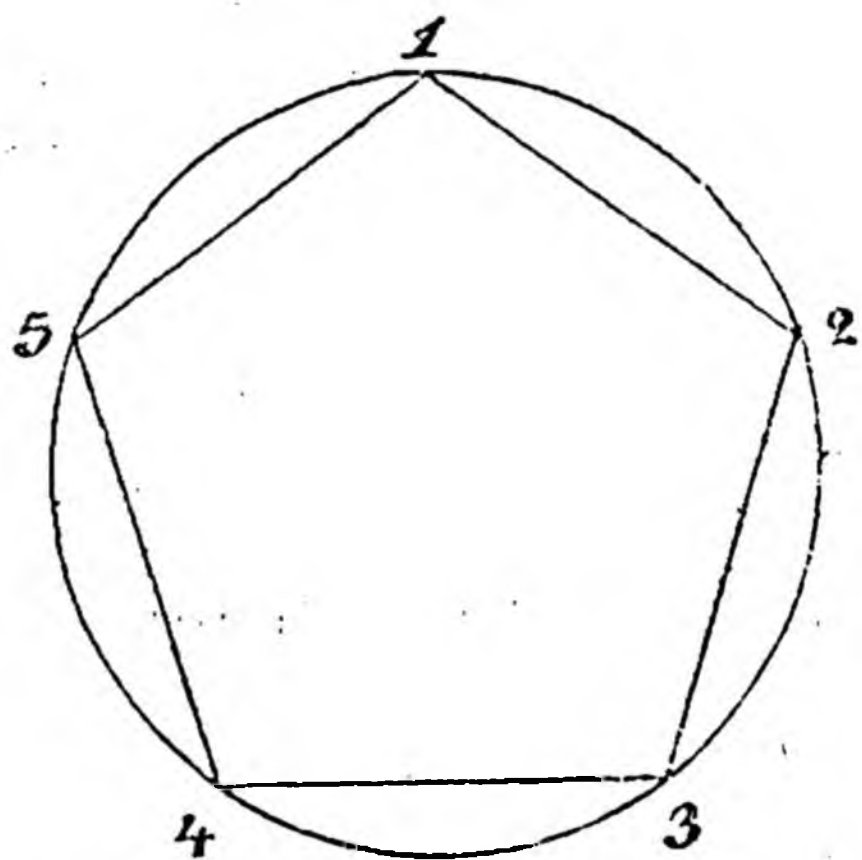
Правильныхъ же выпуклыхъ многоугольниковъ, имѣющихъ  $m$  сторонъ, будетъ столько родовъ, сколько есть чиселъ въ ряду  $1, 2, 3, \dots, \frac{m-1}{2}$  взаимно-простыхъ съ  $m$ .

Изъ всего сказаннаго выше видимъ, что правильныхъ треугольниковъ есть одинъ. Въ немъ сумма угловъ равна  $2d$ .

Правильныхъ пятиугольниковъ есть два, такъ какъ въ этомъ случаѣ, число  $\frac{m-1}{2} = 2$ .

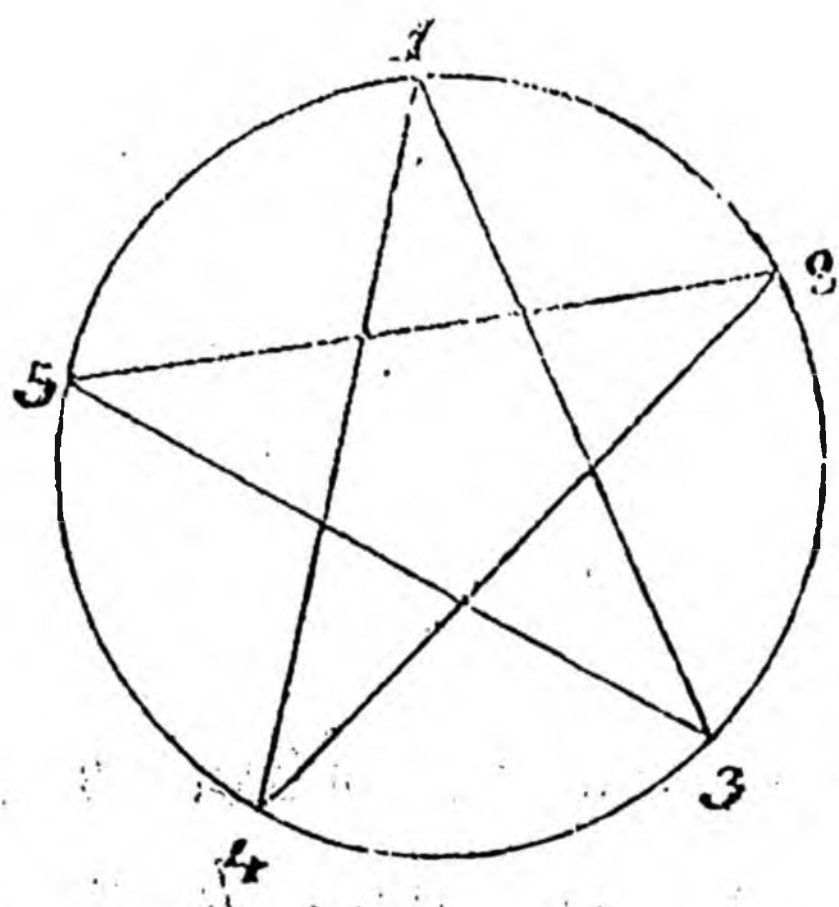
Первый правильный пятиугольникъ получится когда, раздѣливъ окружность на пять равныхъ частей, мы соединимъ нумера 1 съ 2, 2 съ 3, 3 съ 4, 4 съ 5 и 5 съ 1 (фиг. 272). Это обыкновенный правильный пятиугольникъ, въ которомъ сумма внутреннихъ угловъ равна  $6d$ .

Фиг. 272.



Другой правильный пятиугольникъ мы получимъ, когда соединимъ нумера 1 съ 3, 3 съ 5, 5 съ 2, 2 съ 4 и 4 съ 1. Это будетъ *звѣздный пятиугольникъ*. Въ немъ периметръ дѣлаетъ два полныхъ оборота, прежде чѣмъ онъ возвратится въ точку исхода, слѣдовательно въ немъ  $h=2$ , а поэтому сумма внутреннихъ угловъ равна  $2d$ , какъ и въ треугольникѣ (фиг. 273).

Фиг. 273.



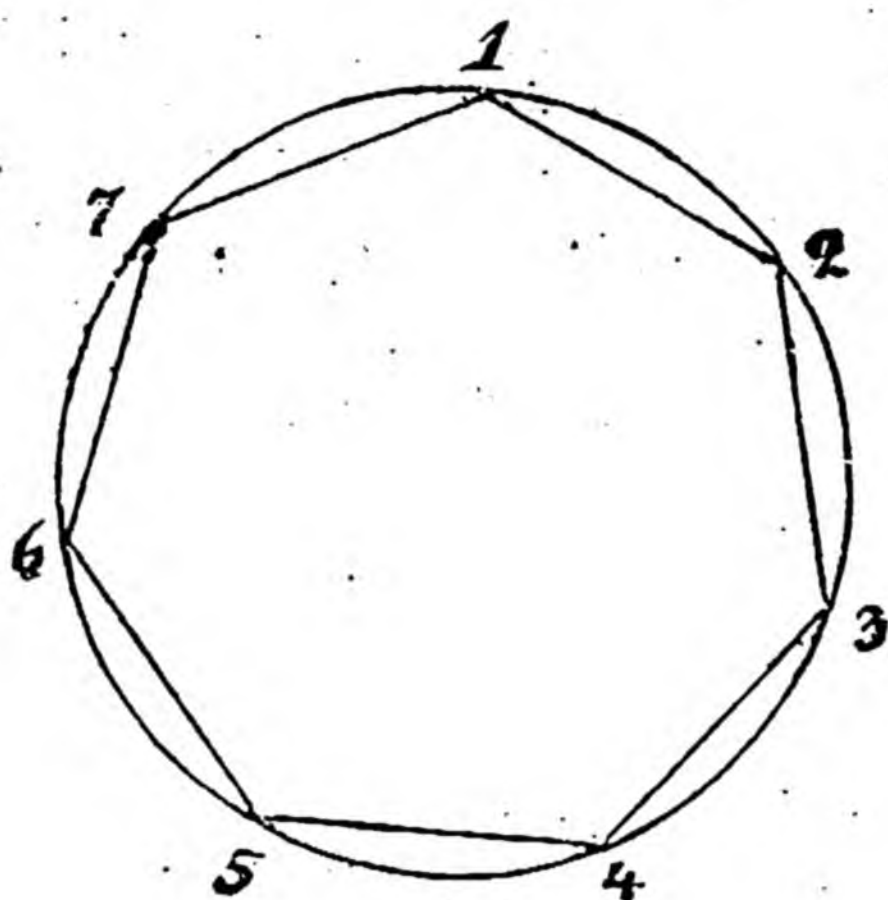
Въ первомъ пятиугольникѣ первая сторона стягиваетъ дугу

равную  $\frac{1}{5}$  окружности, а во второмъ она стягиваетъ  $\frac{1}{5}$  двухъ окружностей.

Правильныхъ семиугольниковъ есть три, такъ какъ въ этомъ случаѣ, число  $\frac{m-1}{2}=3$ .

Первый правильный семиугольникъ получится, когда, раздѣливъ окружность на семь равныхъ частей, соединимъ нумера 1 съ 2, 2 съ 3, 3 съ 4, 4 съ 5, 5 съ 6, 6 съ 7 и 7 съ 1. Это обыкновенный правильный выпуклый семиугольникъ (фиг. 274).

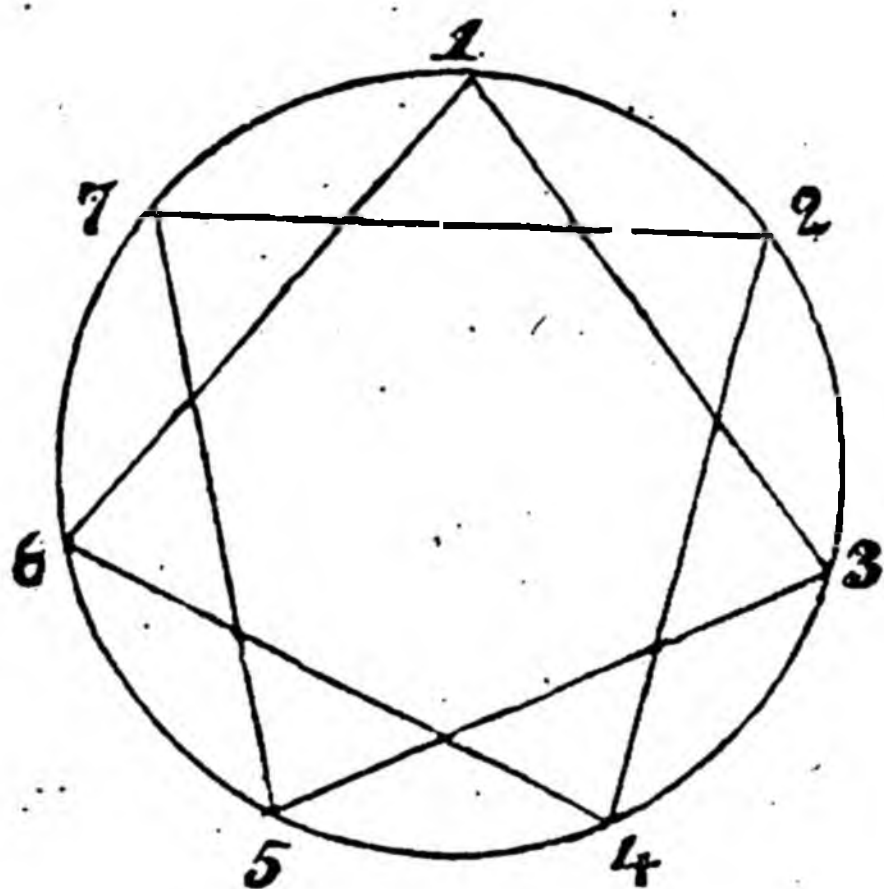
Фиг. 274.



Сумма угловъ въ такомъ многоугольникѣ, какъ извѣстно изъ формулы  $2d(n-2)$ , равна  $10d$ .

Второй правильный семиугольникъ получится, когда мы соединимъ нумера 1 съ 3, 3 съ 5, 5 съ 7, 7 съ 2, 2 съ 4, 4 съ 6, 6 съ 1 (фиг. 275).

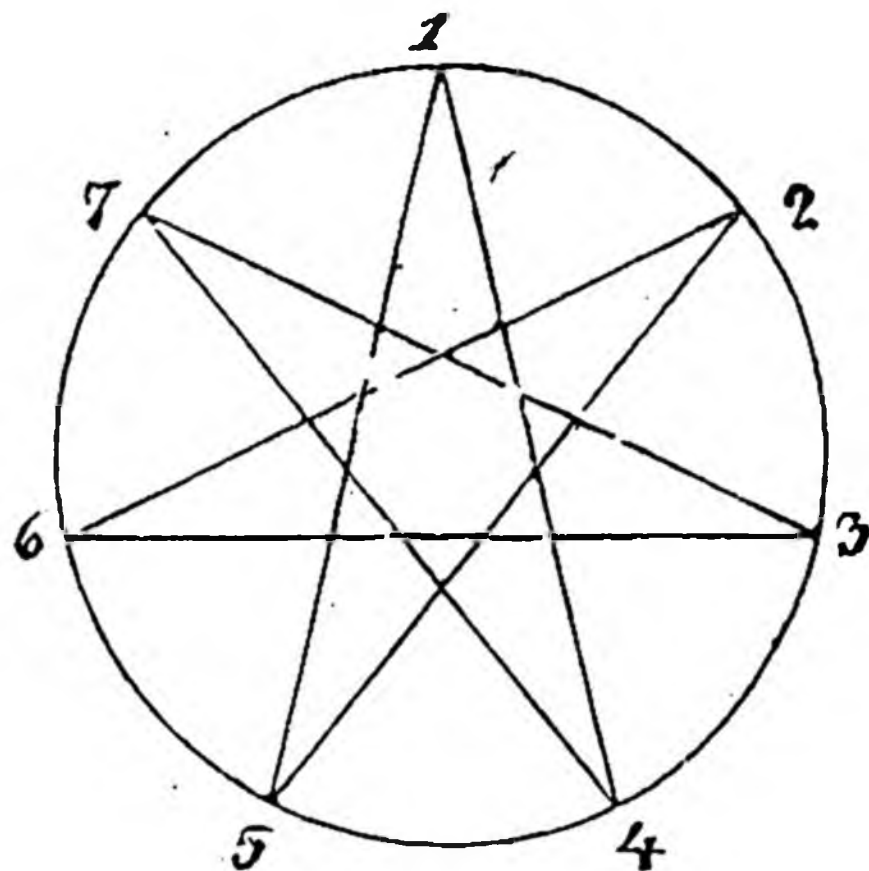
Фиг. 275.



Периметръ этого многоугольника дѣлаетъ два оборота, чтобы возвратиться въ точку исхода, слѣдовательно  $h=2$ , а поэтому изъ выраженія  $2d(m-2h)$  мы найдемъ, что сумма внутреннихъ угловъ будетъ равна  $6d$ .

Третій правильний семиугольникъ, получимъ, если соединимъ нумера 1 съ 4, 4 съ 7, 7 съ 3, 3 съ 6, 6 съ 2, 2 съ 5, 5 съ 1.

Фиг. 276.



Периметръ этого семиугольника дѣлаетъ три полныхъ оборота, чтобы возвратиться въ точку исхода, слѣдовательно, въ этомъ случаѣ  $h=3$ , а поэтому изъ выраженія  $2d(m-2h)$  найдемъ, что сумма внутреннихъ угловъ равна  $2d$ , какъ и въ треугольникѣ.

Такъ какъ чиселъ меньшихъ девяти и взаимно простыхъ съ нимъ есть 6, то правильныхъ девятиугольниковъ будетъ числомъ 3.

Чиселъ меньшихъ и взаимно-простыхъ съ числомъ 15 есть 8, слѣдовательно правильныхъ пятнадцатиугольниковъ есть 4.

Легко показать, что между правильными многоугольниками съ нечетнымъ числомъ сторонъ есть всегда такой, въ которомъ сумма внутреннихъ угловъ равна  $2d$ , какъ и въ треугольникѣ.

*Предложеніе 3.* Между правильными многоугольниками съ нечетнымъ числомъ сторонъ есть всегда одинъ, въ которомъ сумма угловъ равна  $2d$ .

*Доказат.* Чтобы сумма угловъ въ многоугольникѣ съ нечетнымъ числомъ сторонъ была равна  $2d$ , необходимо, чтобы въ выраженіи  $2d(m-2h)$ , гдѣ  $m$  есть число нечетное,  $m-2h=1$ . Опредѣляя  $h$  изъ этого уравненія, найдемъ, что  $h=\frac{m-1}{2}$ . Но если  $m$  есть число нечетное, то легко видѣть, что  $\frac{m-1}{2}$  есть число взаимно-простое съ  $m$ , а если  $\frac{m-1}{2}$  есть число взаимно-простое съ  $m$ , то существуетъ правильный многоугольникъ, имѣющій  $m$  сторонъ и въ коемъ сумма угловъ равна  $2d$ .

Слѣдовательно есть правильные многоугольники 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ... сторонъ, въ которыхъ сумма угловъ равна  $2d$ .

Перейдемъ къ многоугольникамъ съ четнымъ числомъ сторонъ.

Во первыхъ замѣтимъ, что нѣтъ ни одного правильнаго многоугольника съ четнымъ числомъ сторонъ, въ которомъ бы сумма угловъ была равна  $2d$ . Это видно изъ формулы  $2d(m-2h)$ , въ которой, въ этомъ случаѣ, число  $m-2h$  есть всегда четное.

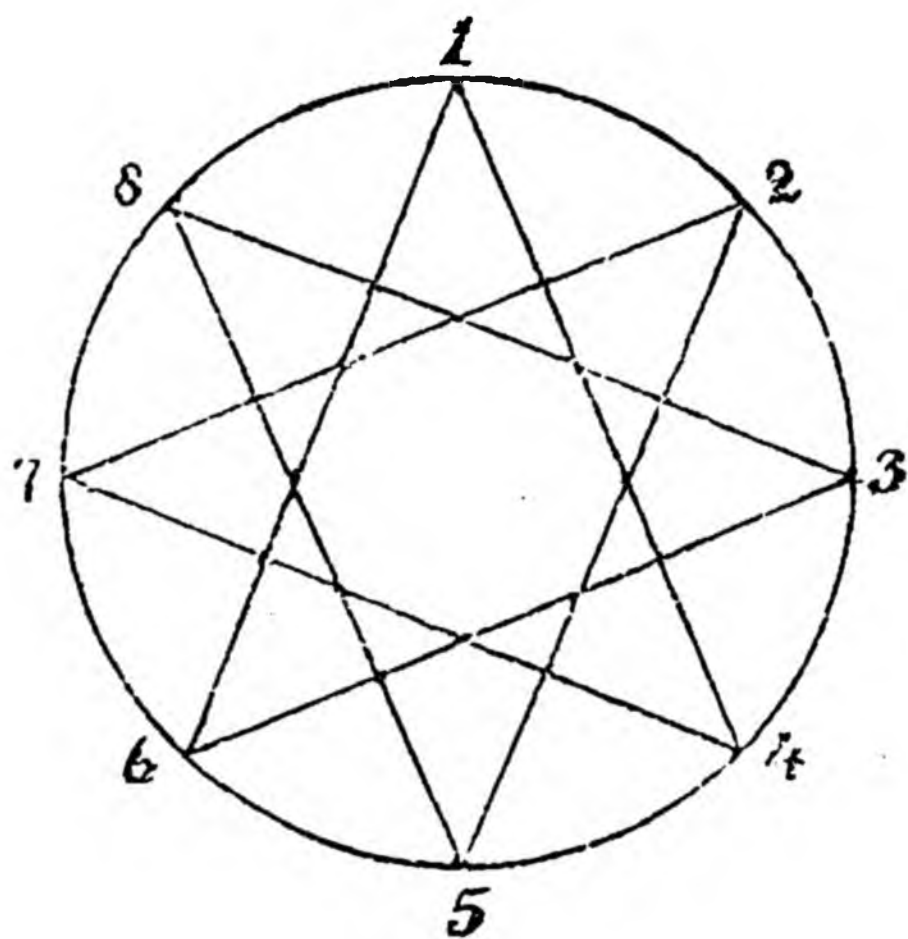


Изъ формулы  $2d(m-2h)$ , полагая  $m=4$ , мы видимъ, что есть только одинъ правильный четырехугольникъ, такъ какъ  $h$  можетъ быть только равно единицѣ. Мы видѣли выше, что есть одинъ только родъ четырехугольниковъ и между ними одинъ правильный—это квадратъ. Мы видѣли также, что сумма угловъ во всякомъ четырехугольникѣ равна  $4d$ .

Такъ какъ чиселъ меньшихъ шести и взаимно-простыхъ съ нимъ есть два, то слѣдуетъ изъ выше сказаннаго, что есть только одинъ правильный шестиугольникъ, между тѣмъ какъ есть два рода выпуклыхъ шестиугольниковъ. Въ одномъ родѣ сумма угловъ равна  $4d$ , а въ другомъ эта сумма равна  $8d$ , къ этому послѣднему роду принадлежитъ и правильный шестиугольникъ въ которомъ сторона (кн. 4, пред. 15) равна радіусу описаннаго круга.

Мы видѣли, что выпуклыхъ восьмиугольниковъ есть три рода, а такъ какъ чиселъ меньшихъ восьми и взаимно-простыхъ съ нимъ есть четыре, то правильныхъ восьмиугольниковъ есть только два, въ одномъ обыкновенномъ, правильномъ восьмиугольникѣ сумма угловъ равна  $12d$ , а въ другомъ, звѣздномъ, который получимъ если соединимъ нумера 1 съ 4, 4 съ 7, 7 съ 2, 2 съ 5, 5 съ 8, 8 съ 3, 3 съ 6 и 6 съ 1, сумма угловъ равна  $4d$ , такъ какъ въ немъ периметръ дѣлаетъ три оборота, слѣдовательно  $h=3$ .

Фиг. 277.



Мы видѣли, что выпуклыхъ десятиугольниковъ есть четыре рода, и такъ какъ чиселъ меньшихъ десяти и взаимно-простыхъ съ нимъ есть четыре, то правильныхъ десятиугольниковъ есть всего два. Одинъ обыкновенный, въ которомъ сумма угловъ равна  $16d$ , и другой звѣздный, въ которомъ периметръ дѣлаетъ три оборота, слѣдовательно  $h=3$ , а поэтому сумма угловъ въ этомъ десятиугольникѣ равна  $8d$ .

*Предложеніе 4.* Между правильными многоугольниками съ четно-четнымъ числомъ сторонъ есть всегда такой въ которомъ сумма угловъ равна  $4d$  и это наименьшая сумма угловъ въ такихъ многоугольникахъ. Въ много-

угольникахъ же съ четно-нечетнымъ числомъ сторонъ наименьшая сумма угловъ будетъ  $8d$ .

*Доказат.* Въ самомъ дѣлѣ, если число  $m$  есть четно-четное, т. е. имѣетъ форму такую  $m=2^n \cdot p$ , то легко видѣть, что  $\frac{m}{2} - 1$  есть число взаимно-простое съ  $m$ , слѣдовательно, полагая  $h = \frac{m}{2} - 1$ , изъ формулы  $2d(m-2h)$ , найдемъ, что сумма угловъ въ такомъ многоугольникѣ равна  $4d$ .

Если-же число  $m$  есть четно-нечетное, то число  $\frac{m}{2} - 2$  простое, слѣдовательно, полагая  $h = \frac{m}{2} - 2$ , найдемъ, что сумма угловъ въ такихъ многоугольникахъ равна  $8d$ .

Изъ этого видимъ, что между правильными многоугольниками съ 4, 8, 12, 16, 20, 24, . . . сторонами есть всегда родъ въ которомъ сумма угловъ равна  $4d$ .

А между многоугольниками съ 6, 10, 14, 18, 22, 26, . . . сторонами есть всегда родъ, въ которомъ сумма угловъ равна  $8d$ .

О звѣздномъ пятиугольникѣ упоминается въ первый разъ у Боеція, но есть данныя, по которымъ можно заключить, что онъ былъ уже извѣстенъ Пиеагору. Въ XIII вѣкѣ Кампанусъ въ своихъ комментаріяхъ Евклида упоминаетъ о немъ.

Кирхеръ (Kircher) въ своей *Arithmologia* упоминаетъ о звѣздномъ пятиугольникѣ и разказываетъ при какихъ таинственныхъ обстоятельствахъ его употребляли. Парацельсъ, извѣстный химикъ XVI вѣка смотрѣлъ на звѣздный пятиугольникъ, какъ на эмблему здоровья! Только въ XIV вѣкѣ геометръ Бравардини (Bradvardini)\* обобщилъ теорію звѣздныхъ многоугольниковъ, распространивъ ее на многоугольники съ большимъ числомъ сторонъ.

Въ этомъ сочиненіи онъ находитъ, что сумма угловъ въ звѣздномъ пятиугольникѣ, какъ и въ треугольникѣ, равна двумъ прямымъ угламъ и многія другія свойства.

Но истинный творецъ звѣздныхъ многоугольниковъ есть Poinso, который далъ ихъ полную теорію въ мемуарѣ: *Mémoire sur les polygones et les polyèdres*.

Вотъ все, что можно сказать вообще о многоугольникахъ, остается только вычислить стороны нѣкоторыхъ правильныхъ многоугольниковъ, вписанныхъ въ кругъ и показать числовую зависимость между стороною правильного многоугольника, имѣющаго  $n$  сторонъ и стороною также правильного многоугольника, но имѣющаго въ двое болѣе сторонъ.

---

\* Въ сочиненіи *Geometria speculativa* Thome Bradvardini . . . Parisiis. 1496.

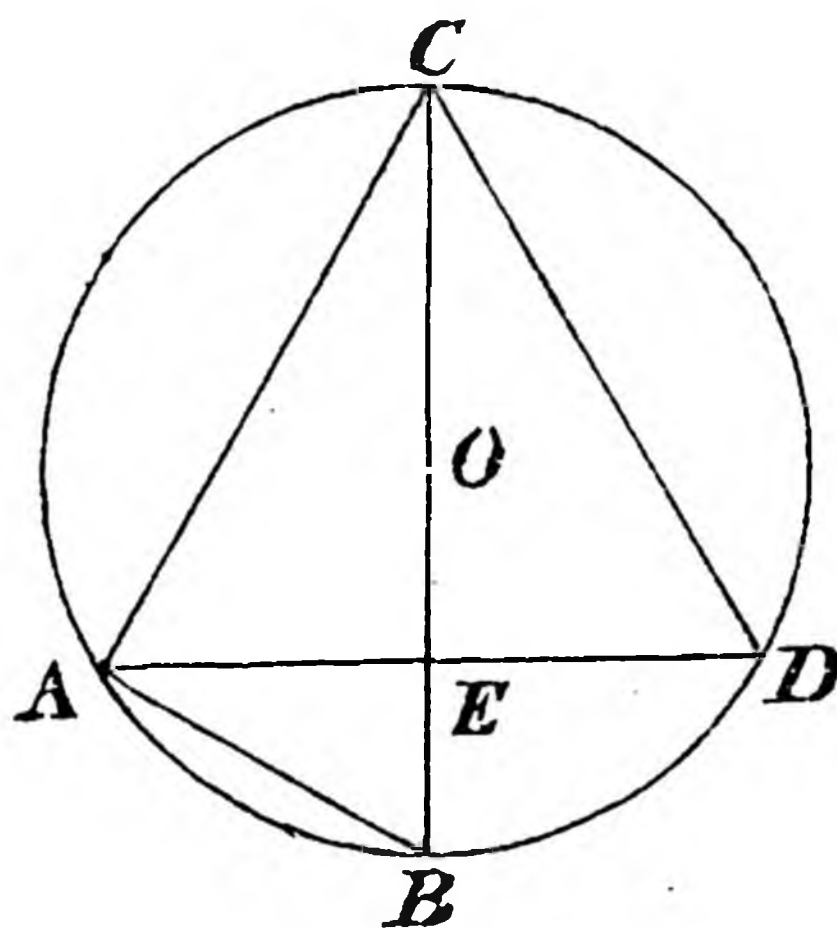
III. Числовыя выраженія для правильныхъ многоугольниковъ трехъ, четырехъ, пяти, шести, десяти сторонъ, вписанныхъ въ кругъ.

Евклидъ, въ 4-й книгѣ, въ 15 предложеніи, показалъ, что сторона правильного шестиугольника, вписаннаго въ кругъ, равна радіусу круга, который мы будемъ обозначать всегда чрезъ  $r$ .

*Предложеніе 5.* Опреѣлить сторону правильного треугольника, вписаннаго въ кругъ, коего радіусъ есть  $r$  (фиг. 278)?

*Рѣшеніе.* Зная, что сторона правильного шестиугольника, вписаннаго въ кругъ, равна радіусу круга, легко определѣить сторону правильного треугольника, вписаннаго въ кругъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть  $ABC$  будетъ сторона шестиугольника, вписаннаго въ кругъ  $O$ . Если проведемъ діаметръ  $BOC$  и соединимъ точку  $A$  съ  $C$ , то очевидно, хорда  $AC$  и будетъ сторона искомаго треугольника. Такъ какъ уголъ  $BAC$  есть прямой (кн. 3, пред. 31), то мы имѣемъ:

Фиг. 278.



$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Но  $AB=r$ ,  $BC=2r$ , слѣдовательно:

$$4r^2 = r^2 + AC^2,$$

откуда:

$$AC^2 = 3r^2,$$

Означая  $AC$  чрезъ  $x_3$  и, извлекая квадратный корень, найдемъ:

$$x_3 = r\sqrt{3}.$$

*Предложеніе 6.* Опреѣлить сторону квадрата, вписаннаго въ кругъ?

*Рѣшеніе.* Если въ кругъ вписанъ квадратъ, то его діagonalъ равна діаметру круга  $2r$ , слѣдовательно сторона квадрата, которую означимъ чрезъ  $x_4$ , будетъ:

$$x_4 = r\sqrt{2}.$$



*Предложеніе 7.* Опреѣлить сторону правильного десятиугольника и пятиугольника, вписанныхъ въ кругъ?

*Рѣшеніе.* Въ четвертой книгѣ Евклида (кн. 4, пред. 11) мы видѣли какъ построить въ кругѣ правильный пятиугольникъ, а въ примѣчаніи шестомъ, той же книги, показали какъ построить правильный десятиугольникъ и какая зависимость существуетъ между стороною десятиугольниками и радіусомъ круга, въ которомъ онъ вписанъ. Въ упомянутомъ примѣчаніи мы показали что сторона правильного десятиугольника, вписаннаго въ кругѣ, равна большей части радіуса, раздѣленнаго въ крайнемъ и среднемъ отношеніи. Слѣдовательно, если сторону правильного многоугольника, вписаннаго въ кругѣ, коего радіусъ есть  $r$ , означимъ чрезъ  $x_{10}$ , то мы будемъ имѣть:

$$r : x_{10} = x_{10} : r - x_{10}$$

откуда:

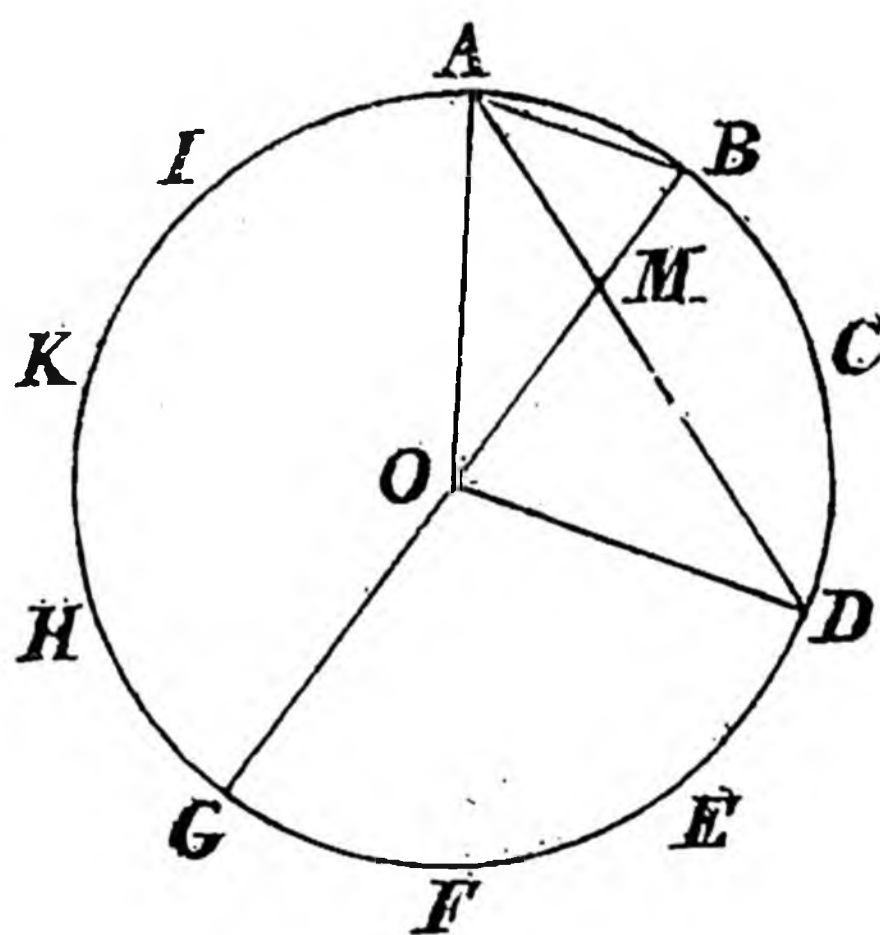
$$x_{10}^2 + rx_{10} - r^2 = 0, \quad (a)$$

опредѣляя  $x_{10}$ , найдемъ:

$$x_{10} = r \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{и} \quad x_{10} = -r \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Легко показать, что первое выраженіе для  $x_{10}$  даетъ сторону обыкновеннаго правильного десятиугольника, а второе, взятое съ противнымъ знакомъ, даетъ сторону звѣзднаго десятиугольника. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ что въ точкахъ  $A, B, C, D, E, F, G, H, K, I$  окружность раздѣлена на десять равныхъ частей (фиг. 279). Слѣдовательно, если соединимъ точку  $A$  съ  $B$ , то получимъ сторону обыкновеннаго правильного десятиугольника, а если соединимъ  $A$  съ  $D$ , то, какъ мы видѣли выше, это будетъ сторона правильного звѣзднаго десятиугольника.

Фиг. 279.



Легко видѣть, что  $\angle ABG = \angle AMB$ , такъ какъ первый измѣряется половиною дуги  $AIKHG$ , а второй полусуммою дугъ  $AB$  и  $GFED$ , т. е.

оба измѣряются  $\frac{1}{5}$  окружности. Слѣдовательно, въ треугольникѣ  $ABM$ ,  $AB=AM$ . По той же причинѣ  $\angle OMD=\angle MOD$ , слѣдовательно, въ треугольникѣ  $OMD$ ,  $MD=OD$ . Изъ этого видимъ, что  $MD=AB=OD-AM$ . Если чрезъ  $x_{10}$  и  $z_{10}$  означимъ стороны обоихъ правильныхъ десятиугольниковъ, то, замѣчая что  $MD=r$ , найдемъ:

$$z_{10}-x_{10}=r. \quad (b)$$

Легко также видѣть, что треугольники  $OAM$  и  $OAD$  подобны, такъ какъ  $\angle OAD$  есть общій для обоихъ,  $\angle AOB=\angle ADO$ , потому что оба измѣряются  $\frac{1}{10}$  окружности, слѣдовательно:

$$AD \cdot AM=OA^2$$

или

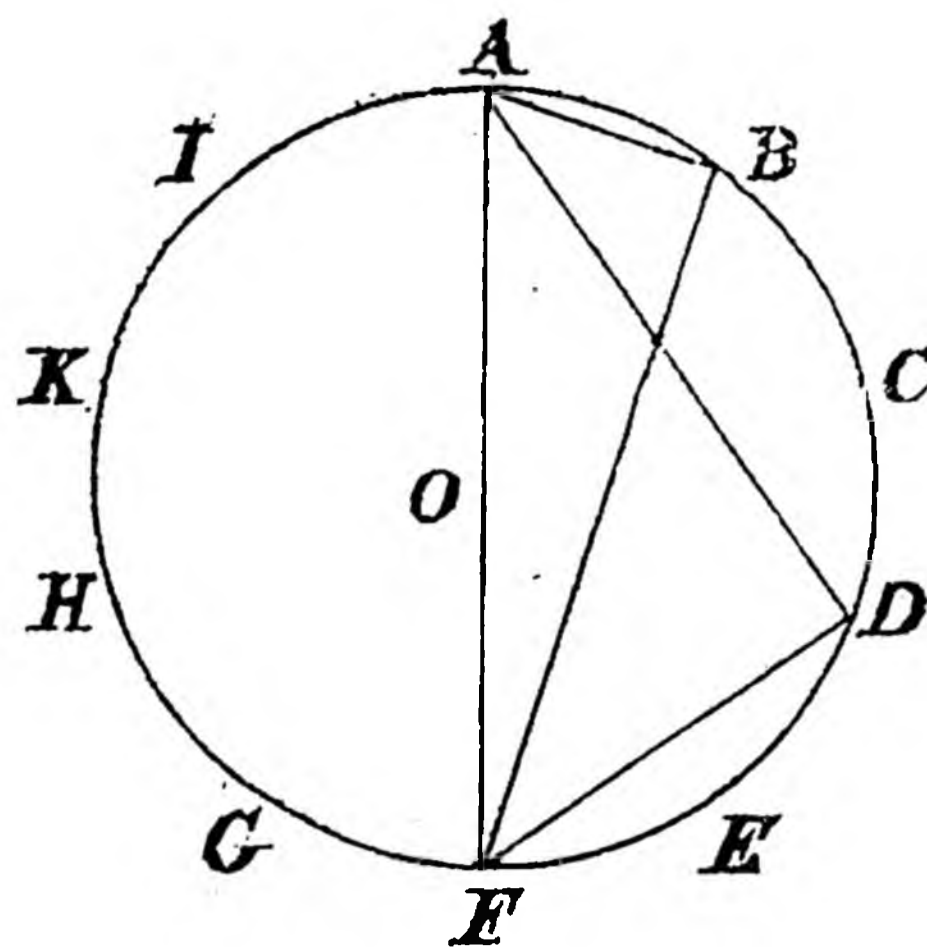
$$z_{10} \cdot x_{10}=r^2. \quad (c)$$

Изъ уравненій (b) и (c) мы, легко получимъ квадратное уравненіе, коего корни будутъ равны корнямъ уравненія (a), но съ противными знаками. Слѣдовательно стороны обоихъ десятиугольниковъ будутъ:

$$x_{10}=r \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad z_{10}=r \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Если окружность раздѣлить на десять равныхъ частей, то, соединяя хордами по двѣ части, получимъ обыкновенный правильный пятиугольникъ, а соединяя по четыре получимъ звѣздный правильный пятиугольникъ. Слѣдовательно,  $AB$ ,  $DF$ ,  $BF$  суть стороны десятиугольника, пятиугольника выпуклаго и пятиугольника звѣзднаго (фиг. 280).

Фиг. 280.



Если обозначимъ, какъ и выше, стороны обоихъ пятиугольниковъ

чрезъ  $x_5$ ,  $z_5$ , стороны обоихъ десятиугольниковъ чрезъ  $x_{10}$ ,  $z_{10}$ , то изъ прямоугольныхъ треугольниковъ  $ADF$  и  $ABF$  мы найдемъ:

$$x_5^2 = 4r^2 - z_{10}^2 = r^2 + (3r^2 - z_{10}^2)$$

$$z_5^2 = 4r^2 - x_{10}^2 = r^2 + (3r^2 - x_{10}^2).$$

Но мы выше видѣли, что:

$$z_{10} - x_{10} = r, \quad z_{10} x_{10} = r^2$$

изъ этихъ уравненій, возвышая первое въ квадратъ и складывая съ удвоеннымъ вторымъ, найдемъ:

$$x_5^2 = r^2 + x_{10}^2, \quad z_5^2 = r^2 + z_{10}^2.$$

Изъ этихъ выраженій мы видимъ, что сторона правильного выпуклаго пятиугольника есть гипотенуза прямоугольнаго треугольника, коего катеты суть радіусъ круга и сторона выпуклаго десятиугольника; а сторона правильного звѣзднаго пятиугольника есть гипотенуза прямоугольнаго треугольника, коего катеты суть радіусъ круга и сторона правильного звѣзднаго десятиугольника.

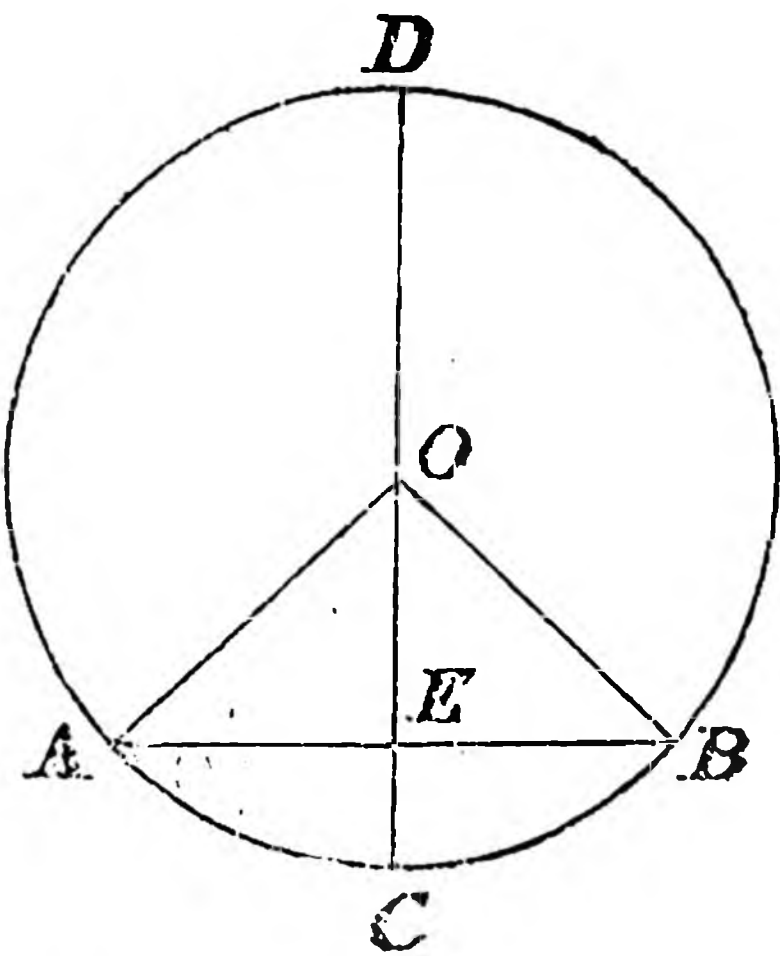
Замѣщая въ предъидущихъ уравненіяхъ  $x_{10}$  и  $z_{10}$  ихъ величинами, найденными выше, получимъ:

$$x_5 = \frac{r}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \quad z_5 = \frac{r}{2} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Легко также опредѣлить числовое выраженіе стороны правильного пятнадцатиугольника, но она для насъ не имѣетъ значенія.

**Предложеніе 8.** По данной сторонѣ правильного многоугольника, вписаннаго въ кругъ, опредѣлить его апопему (фиг. 281)?

Фиг. 281.



**Рѣшеніе.** Пусть  $AB = a$  будетъ сторона правильного многоугольника,



вписаннаго въ кругъ  $O$ . Опустимъ изъ центра  $O$  на сторону  $AB$  перпендикуляръ  $OE$ . Этотъ перпендикуляръ и будетъ искомая апогема. Означимъ его чрезъ  $q$ .

Перпендикуляръ  $OE$  дѣлитъ сторону  $AB$  пополамъ (кн. 3, пред. 3), слѣдовательно  $AE = \frac{1}{2}a$ .  $AOE$  есть прямоугольный треугольникъ, слѣдовательно (кн. 1, пред. 47):

$$AO^2 = AE^2 + OE^2,$$

но  $AO = r$ ,  $AE = \frac{1}{2}a$ ,  $OE = q$ , слѣдовательно:

$$r^2 = q^2 + \frac{a^2}{4},$$

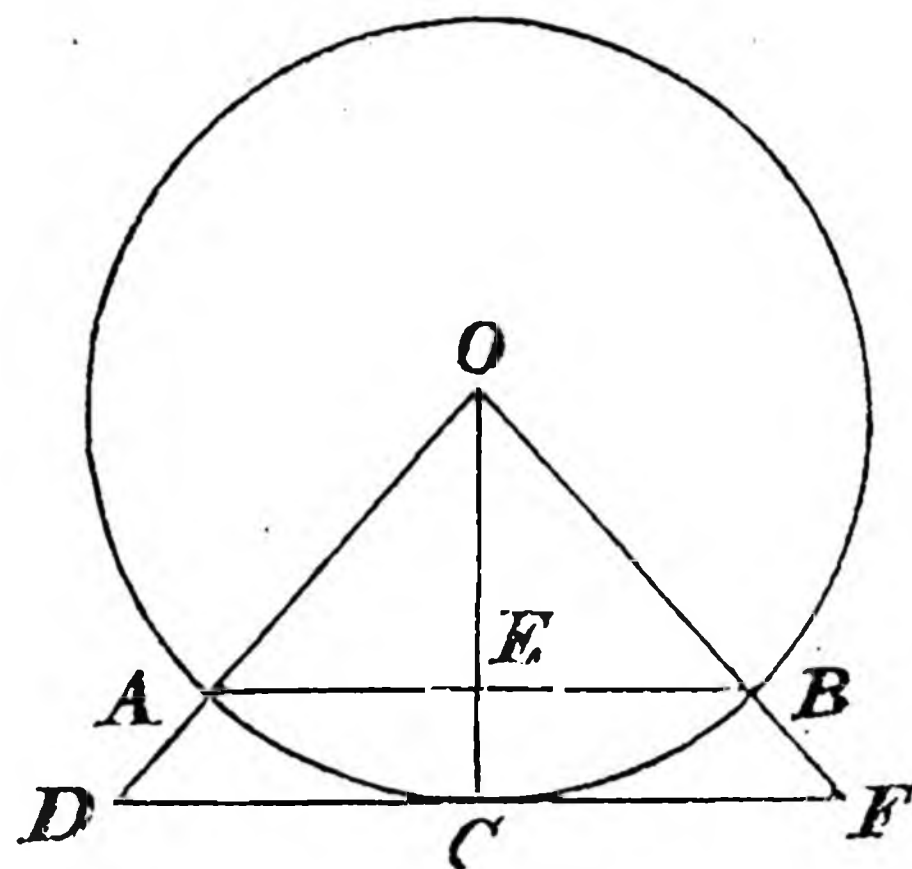
откуда:

$$q = \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - a^2} \quad (1)$$

*Предложеніе 9.* По данной сторонѣ правильнаго многоугольника, вписаннаго въ кругъ, опредѣлить сторону правильнаго многоугольника, описаннаго около круга и имѣющаго тоже число сторонъ (фиг. 282)?

*Рѣшеніе.* Пусть  $AB = a$  есть сторона правильнаго многоугольника, вписаннаго въ кругъ  $O$ . Опустимъ изъ центра  $O$  перпендикуляръ  $OE$  на сторону  $AB$  и продолжимъ его до встрѣчи съ окружностью въ точкѣ  $C$ . Изъ точки  $C$  возставимъ перпендикуляръ  $DF$  и продолжимъ его до встрѣчи въ точкахъ  $D$  и  $F$  съ прямыми, соединяющими центръ  $O$  съ точками  $A$  и  $B$ . Легко видѣть, что  $DF$  и будетъ искомая сторона. Остается опредѣлить числовое выраженіе стороны  $DF$ .

Фиг. 282.



Такъ какъ треугольники  $DOF$  и  $AOB$  равноугольные, по построению, то мы имѣемъ:

$$DF : AB = OC : OE.$$

Но  $AB=a$ ,  $OC=r$ ,  $OE=q=\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-a^2}$ , слѣдовательно:

$$DF:a=r:\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-a^2},$$

откуда:

$$DF=\frac{2ar}{\sqrt{4r^2-a^2}}.$$

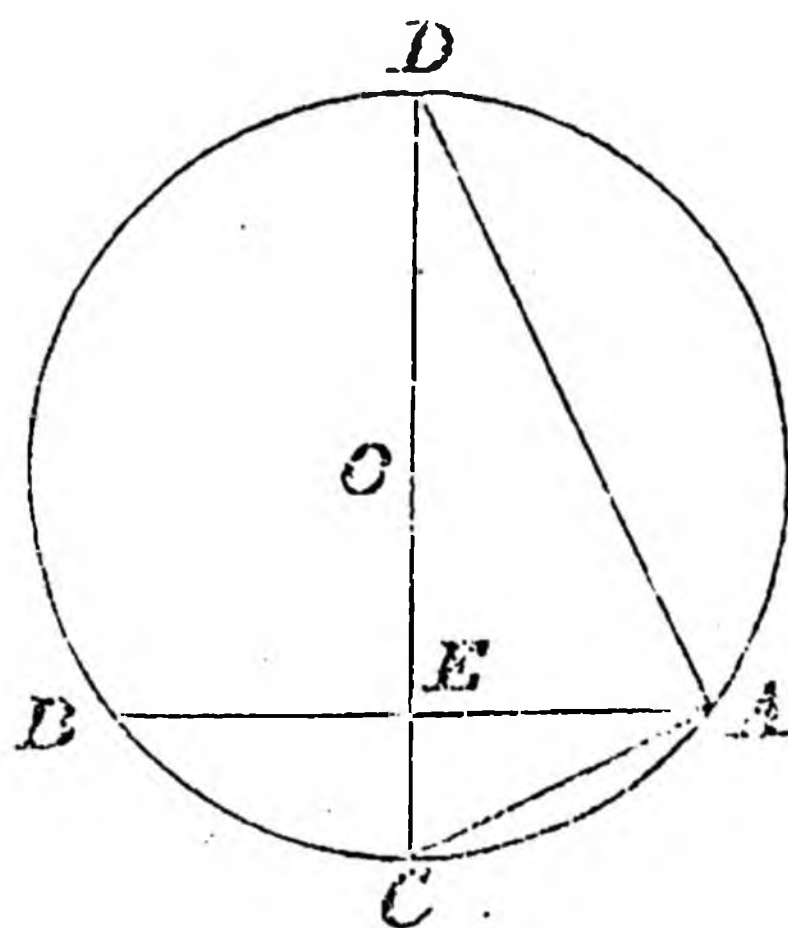
*Примѣръ.* Если бы  $AB$  была сторона треугольника, то  $a=r\sqrt{3}$ , подставляя эту величину вмѣсто  $a$  въ предыдущее выраженіе, найдемъ, что сторона правильного треугольника, описаннаго около круга, равна  $2r\sqrt{3}$ , что мы уже видѣли выше.

Если  $a=r$ , т. е. если правильный многоугольникъ будетъ шестиугольникъ, то предыдущее выраженіе даетъ  $\frac{2r}{\sqrt{3}}$  и т. д.

*Предложеніе 10.* По данной сторонѣ правильного многоугольника, вписаннаго въ кругъ, опредѣлить сторону правильного многоугольника, вписаннаго въ тотъ же кругъ, но имѣющаго вдвое болѣе сторонъ (фиг. 283)?

*Рѣшеніе.* Пусть  $AB=a$  будетъ сторона правильного многоугольника, имѣющаго  $n$  сторонъ, вписаннаго въ кругъ  $O$ . Если изъ центра  $O$  опустимъ перпендикуляръ  $OE$  на сторону  $AB$  и продолжимъ его въ обѣ стороны до встрѣчи съ окружностью въ точкахъ  $C$  и  $D$ , то, соединяя точку  $A$  съ  $C$ , хорда  $AC$  и будетъ искомая сторона правильного многоугольника, имѣющаго  $2n$  сторонъ.

Фиг. 283.



Соединимъ  $A$  съ  $D$ , то (кн. 6, пред. 8)  $AC$  будетъ средне-пропорціональная между діаметромъ  $2r$  и отрезкомъ  $CE=r-OE$ .

Слѣдовательно:

$$AC^2=2r(r-OE).$$

Но  $OE$  есть апогема правильного многоугольника, коего сторона есть  $a$ , следовательно  $OE = \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - a^2}$ , откуда:

$$AC^2 = 2r \left( r - \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - a^2} \right),$$

или

$$AC = \sqrt{2r^2 - r \sqrt{4r^2 - a^2}}. \quad (d)$$

*Примѣръ.* Если  $a = r\sqrt{3}$ , то изъ этой формулы получимъ  $AC = r$ ; если  $a = r$ , то изъ этой формулы получимъ сторону двѣнадцатиугольника, которая и будетъ:

$$x_{12} = \sqrt{2r^2 - r^2 \sqrt{3}} = r \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Если положимъ  $a = r\sqrt{2}$ , то получимъ сторону правильного восьмиугольника именно:

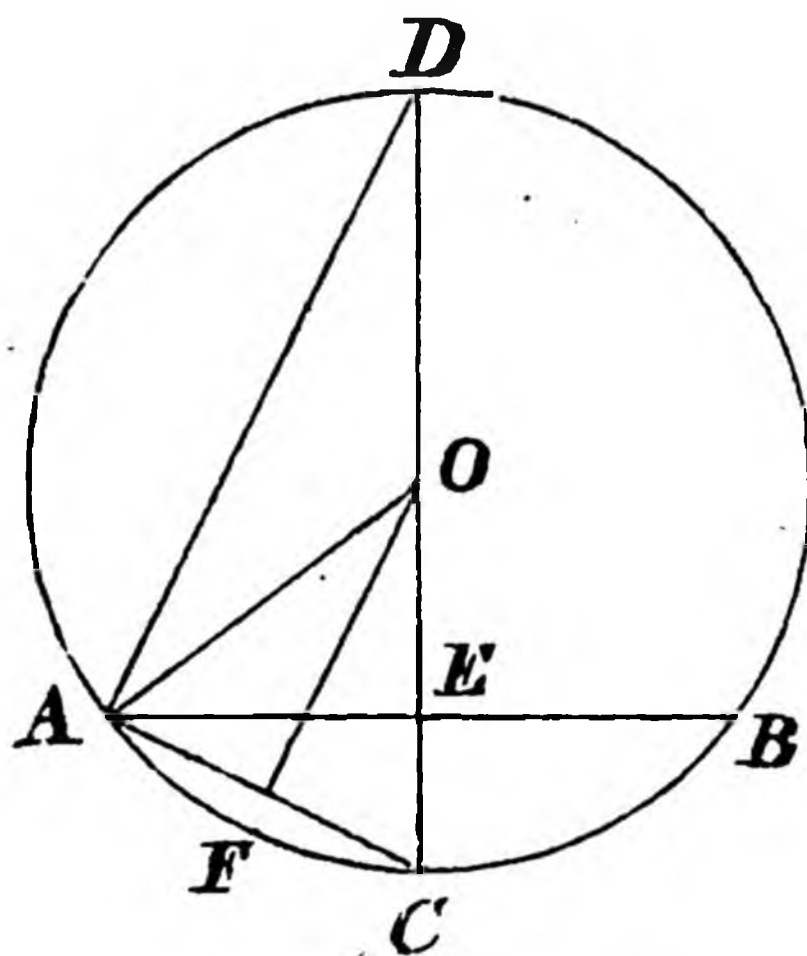
$$x_8 = r \sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

и т. д.

*Предложеніе 11.* По данной апогемѣ правильного многоугольника, вписаннаго въ кругѣ, опредѣлить апогему правильного многоугольника, вписаннаго въ томъ же кругѣ, но имѣющаго вдвое болѣе сторонъ (фиг. 284)?

*Рѣшеніе.* Пусть  $AB = a$  будетъ сторона правильного многоугольника,  $OE = q$  апогема того же многоугольника. Если апогему  $OE$  продолжимъ въ обѣ стороны до встрѣчи съ окружностью въ точкахъ  $C$  и  $D$ , и соединимъ точки  $A$  и  $C$ , то  $AC$  будетъ сторона правильного многоугольника, имѣющаго вдвое болѣе сторонъ, а перпендикуляръ  $OF$  будетъ искомая апогема.

Фиг. 284.



Легко видѣть изъ треугольника  $ADC$ , что:

$$AD^2 = 2r(r + OE) = 2r(r + q);$$



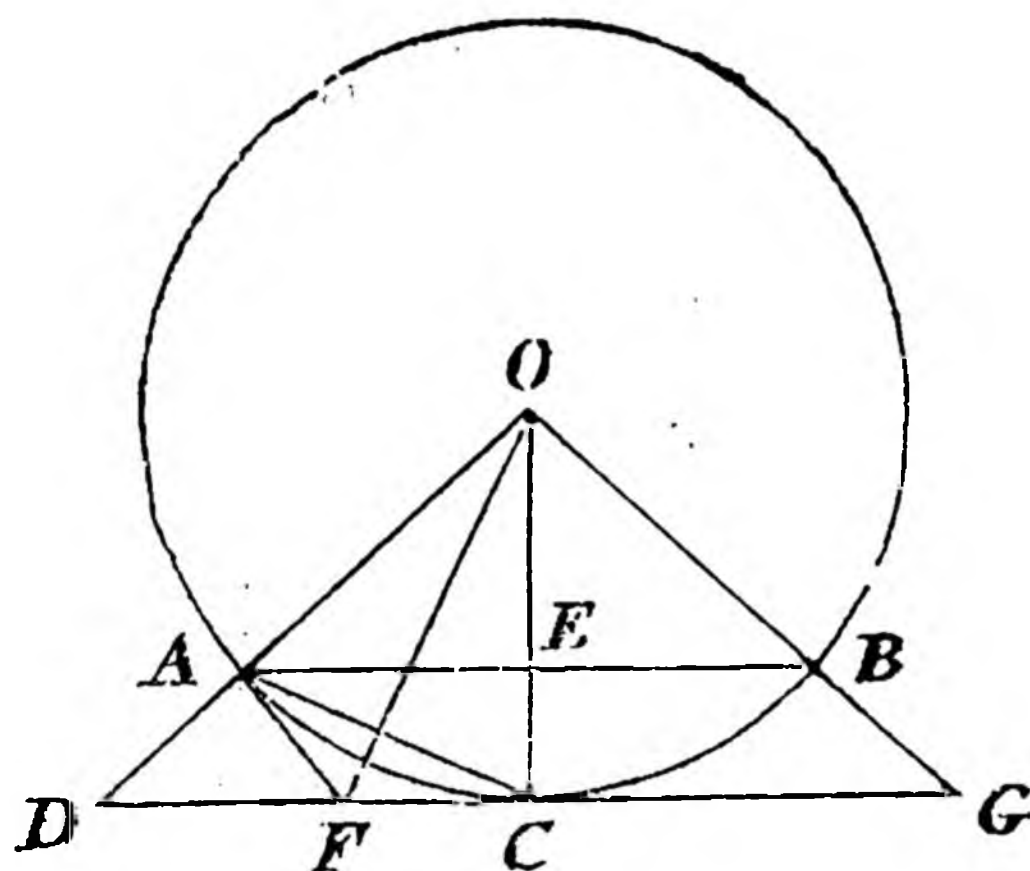
но  $AD=2OF$  (кн. 6, пред. 3), следовательно:

$$2OF^2 = r(r+q) \quad \text{или} \quad OF = \sqrt{\frac{1}{2} r(r+q)}.$$

*Предложеніе 12.* Даны площади  $p_n$  и  $p_{2n}$  правильныхъ, вписанныхъ въ кругъ, многоугольниковъ, съ  $n$  и  $2n$  числомъ сторонъ и  $P_n$  и  $P_{2n}$ , площади правильныхъ, описанныхъ около того же круга многоугольниковъ, съ тѣмъ же числомъ сторонъ, найти зависимость между площадями  $p_n$ ,  $p_{2n}$ ,  $P_n$ ,  $P_{2n}$  (фиг. 285)?

*Рѣшеніе.* Пусть  $AB$  будетъ сторона правильнаго многоугольника, имѣющаго  $n$  сторонъ,  $OA=r$  радіусъ, то  $AC$  будетъ сторона правильнаго многоугольника, имѣющаго  $2n$  сторонъ.

Фиг. 285.



Очевидно мы имѣемъ:

$$\triangle AOE = \frac{p_n}{2n}, \quad \triangle COD = \frac{P_n}{2n}$$

$$\Delta AOC = \frac{P_{2n}}{2n}, \quad AFCO = \frac{P_{2n}}{2n}$$

$$\Delta ADF = \frac{P_n - P_{2n}}{2n}, \quad \Delta AFC = \frac{P_{2n} - p_{2n}}{2n}.$$

Треугольники  $AOE$  и  $AOC$  имѣютъ одну высоту, а основанія ихъ лежатъ на одной прямой  $OC$ , слѣдовательно (кн. 6, пред. 1).

$$\triangle AOE : \triangle AOC = OE : OC = OA : OD = \triangle AOC : \triangle DOC$$

ИЛИ

$$\triangle AOE : \triangle AOC = \triangle AOC : \triangle DOC$$

**Откуда:**

$$\triangle AOC^2 = \triangle AOE. \triangle DOC,$$

подставляя предыдущія выраженія для площадей треугольниковъ, найдемъ:

$$p_{2n}^2 = p_n P_n.$$

Треугольники  $DAF$  и  $FAC$  имѣютъ равныя высоты и основанія лежащія на одной прямой  $DC$ , даютъ:

$$\begin{aligned} \triangle DAF : \triangle FAC &= DF : FC = \triangle DOF : \triangle FOC = \\ &= \triangle DOF : \triangle AOF = OD : OA = \triangle DOC : \triangle AOC \end{aligned}$$

или

$$P_n - P_{2n} : P_{2n} - p_{2n} = P_n : p_{2n},$$

откуда, найдемъ:

$$\frac{2}{P_{2n}} = \frac{1}{p_{2n}} + \frac{1}{P_n}.$$

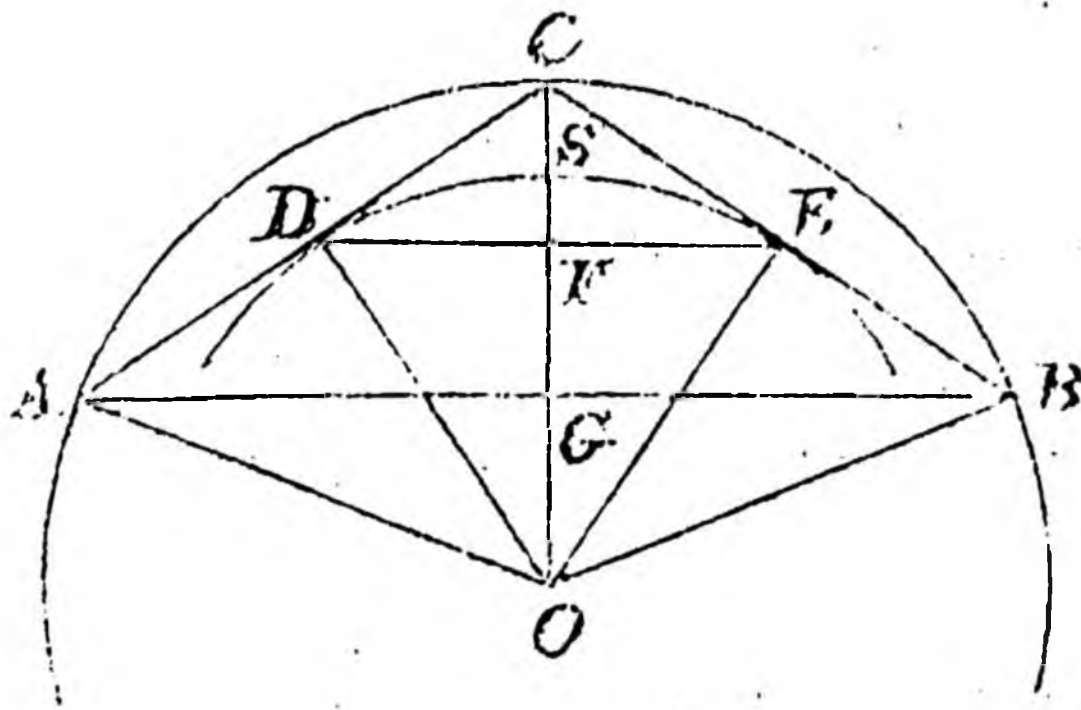
*Предложеніе 13.* По данному радіусу  $r$  и апоземъ  $q$  правильнаго многоугольника, найти радіусъ  $r_1$  и апозему  $q_1$  правильнаго многоугольника, имѣющаго периметръ, равный данному, но двойное число сторонъ (фиг. 286)?

*Рѣшеніе.* Пусть  $AB$  будетъ сторона даннаго многоугольника,  $O$  центръ круга, въ который вписанъ многоугольникъ. Если изъ центра  $O$  опустимъ перпендикуляръ  $OG$  на сторону  $AB$  и продолжимъ его до встрѣчи съ окружностью въ точкѣ  $C$ , то будемъ имѣть:

$$OC = r, \quad OG = q.$$

Проведемъ хорды  $AC$  и  $BC$  и соединимъ середины  $D$  и  $E$  этихъ хордъ, прямою  $DE$ . Очевидно прямая  $DE$ , параллельная  $AB$  и равная половинѣ этой послѣдней, будетъ сторона правильнаго многоугольника,

Фиг. 286.



имѣющаго периметръ, равный периметру даннаго, но съ удвоеннымъ числомъ сторонъ.

Такъ какъ  $\angle DOE = \frac{1}{2} \angle AOB$ , то центръ  $O$  будетъ и центромъ новаго многоугольника и мы будемъ имѣть:

$$OD = r_1, \quad OF = q_1.$$

Изъ построения видно, что точка  $F$  есть середина  $CG$ , слѣдовательно  $OF = \frac{1}{2} (OG + OC)$ , или:

$$q_1 = \frac{1}{2} (r + q). \quad (1)$$

Кромѣ этого изъ прямоугольнаго треугольника  $ODC$  мы найдемъ  $OD^2 = OC \cdot OF$  (кн. 6, пред. 8) или:

$$r_1 = \sqrt{rq_1}. \quad (2)$$

Два выраженія (1) и (2) вполне рѣшаютъ нашу задачу, первая даетъ  $q_1$ , а вторая затѣмъ опредѣляетъ  $r_1$ .

*Слѣствие.* Изъ построения видно, что  $OF > OG$ , а  $OD < OC$ . Слѣдовательно, когда отъ правильнаго многоугольника переходимъ къ правильному же, имѣющему тотъ же периметръ, но съ удвоеннымъ числомъ сторонъ, то апогея увеличивается, а радиусъ уменьшается.

Легко при этомъ показать, что разность  $r_1 - q_1 < \frac{1}{4} (r - q)$ . Въ самомъ дѣлѣ, если изъ точки  $O$ , какъ изъ центра радиусомъ  $OD$  опишемъ дугу  $DSC$ , то видно, что:

$$r_1 - q_1 = SF \quad \text{и} \quad r - q = CG = 2CF.$$

Остается показать, что  $SF$  меньше половины  $CF$ . Для этого замѣтимъ, что уголъ  $SDE$  и уголъ  $SDC$  равны, такъ какъ оба измѣряются половинами равныхъ дугъ  $DS$  и  $ES$ . Если эти углы равны, то (кн. 6, пред. 3):

$$DF : DC = SF : SC,$$

но  $DF < DC$ , слѣдовательно и  $SF < SC < \frac{1}{4} CG$ .

*Предложеніе 14.* Найти зависимость между периметрами  $p$  и  $P$  двухъ правильныхъ подобныхъ многоугольниковъ, вписаннаго и описаннаго и периметрами  $p_1$  и  $P_1$  правильныхъ многоугольниковъ, но съ удвоеннымъ числомъ сторонъ (фиг. 286)?



*Рѣшеніе.* Мы видѣли (кн. 6, примѣч. 17, пред. d), что периметры подобныхъ многоугольниковъ относятся между собою какъ ихъ стороны или апоѳемы, поэтому мы имѣемъ:

$$\frac{p}{P} = \frac{OG}{OC}, \quad \frac{p_1}{P_1} = \frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OD},$$

откуда:

$$\frac{OC}{1} = \frac{OG}{P} \quad \text{и} \quad \frac{OD}{1} = \frac{OF}{P_1}.$$

Но изъ подобія треугольниковъ мы имѣемъ:

$$\frac{OC}{OD} = \frac{AC}{AG} = \frac{p_1}{p} \quad \text{или} \quad \frac{OC}{1} = \frac{OD}{p_1},$$

слѣдовательно:

$$\frac{OC}{1} = \frac{OG}{P} = \frac{OD}{p_1} = \frac{OF}{P_1}.$$

Но предположеніе 13 даетъ:

$$OF = \frac{1}{2} (OC + OG) \quad \text{и} \quad OD = \sqrt{OC \cdot OF},$$

слѣдовательно:

$$\frac{2}{P_1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{P} \quad \frac{1}{p_1} = \sqrt{\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{P}}.$$

Эти формулы даютъ возможность вычислить, по даннымъ периметрамъ  $p$  и  $P$  правильныхъ многоугольниковъ вписаннаго и описаннаго въ кругъ, периметры  $p_1$  и  $P_1$  правильныхъ многоугольниковъ, вписаннаго и описаннаго, съ двойнымъ числомъ сторонъ.

#### IV. Измѣреніе круга.

Послѣ прямой линіи самая простая, всѣмъ извѣстная, кривая линія есть кругъ. Евклидъ въ третьей и четвертой книгѣ своихъ *Началъ* изложилъ всѣ главныя свойства круга, но въ этомъ сочиненіи мы не находимъ измѣренія круга, хотя эта задача, въ то время, была уже изслѣдована довольно обстоятельно. Поэтому многіе геометры думали, что эта

часть сочиненія Евклида утеряна. Такое мнѣніе несправедливо потому, что измѣреніе круга требуетъ началъ, отличныхъ отъ тѣхъ, которыя положены Евклидомъ въ основаніе своего сочиненія.

Безъ сомнѣнія, какъ только первыя геометрическія истины были облечены въ логическую форму, измѣрены прямолинейныя фигуры, то сейчасъ же были сдѣланы и попытки измѣрить простѣйшую изъ кривыхъ линій—кругъ.

Радіусъ въ кругѣ есть, всегда величина данная—измѣренная; требуется:

1) По данному радіусу круга построить окружность, т. е. найти сколько разъ радіусъ или діаметръ круга содержится въ окружности?

2) По данному радіусу круга построить квадратъ, коего площадь равна площади круга, или найти сколько разъ квадратъ, построенный на радіусѣ, содержится въ площади круга, или построить квадратъ, коего площадь была бы равна площади круга? Эти двѣ задачи такъ связаны между собою, что рѣшеніе одной изъ нихъ даетъ рѣшеніе другой. Древніе геометры сначала пытались рѣшить эту задачу въ смыслѣ втораго предложенія, поэтому она была извѣстна подъ именемъ *квадратуры круга*.

*Анаксаторъ*, умершій въ 430 г. до Р. Х., былъ первый изъ геометровъ, который занимался квадратурой круга. Посаженный въ тюрьму за безбожіе, онъ написалъ тамъ цѣлое сочиненіе о квадратурѣ круга, которое до насъ не дошло. Доказывалъ-ли онъ въ этомъ сочиненіи, что онъ рѣшилъ эту задачу, какъ это случалось часто съ искателями квадратуры круга, или онъ показывалъ какія трудности представляетъ эта задача, неизвѣстно. Судя впрочемъ по отзыву Платона, можно думать, что сочиненіе было написано въ послѣднемъ смыслѣ.

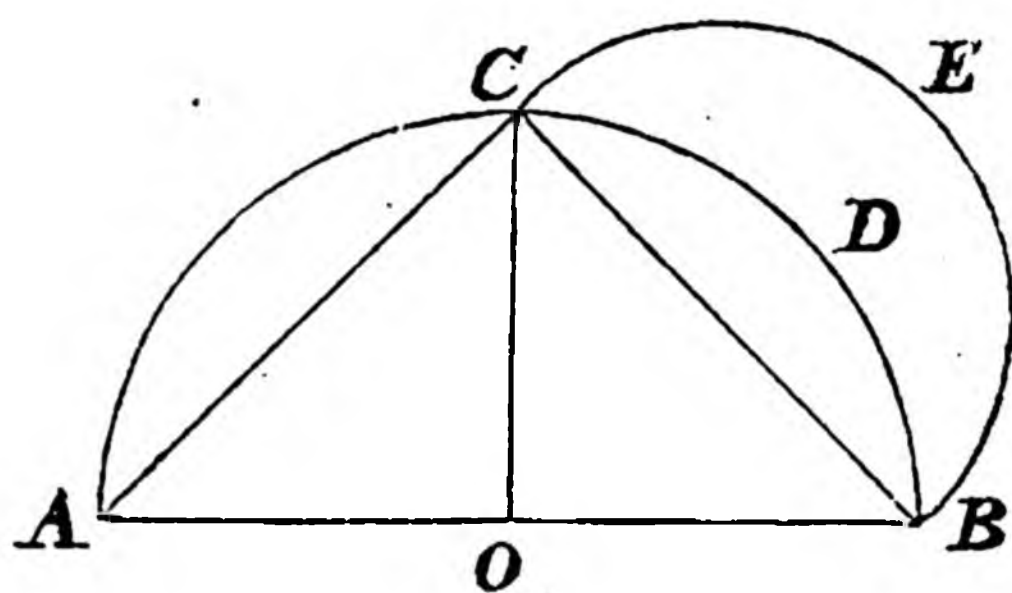
Вѣроятно съ этихъ поръ этой задачей занимаются весьма усердно, такъ какъ знаменитый комикъ Аристофанъ уже въ комедіи своей *Птицы* смѣется надъ искателями квадратуры круга. Онъ выводитъ на сцену знаменитаго геометра Метона и влагаетъ въ его уста бессмысленную фразу: „я тебѣ сдѣлаю квадратный кругъ“ съ которою онъ обращается къ *Пистетеросу*.

Почти въ то же время *Гиппократъ Хіосскій* занимался той же задачей и хотя задачи не рѣшилъ, но при этомъ сдѣлалъ весьма замѣчательное открытіе, именно онъ построилъ квадратъ равный *мениску* (*μηνίσκος*) или *луночкѣ*, т. е. площади, ограниченной двумя дугами неравныхъ круговъ. Это открытіе дѣйствительно замѣчательное, такъ какъ уже въ то время начали думать, что построить квадратъ, который бы былъ равенъ площади, ограниченной кривыми линіями, невозможно. Вотъ какъ объ этомъ рассказываетъ Симпликій, приводя выписки изъ Эвдема, греческій текстъ кото-

рыхъ находится только въ изданіи: *Simplicii Comment. in octo Aristotelis Physicae auscultationis libros. Venetiis, 1526, ap. Aldum Manutium fol. 12, sqq.*

На прямой  $AB$ , какъ на діаметрѣ (фиг. 287), построимъ полукругъ  $ACB$ , изъ середины  $O$  прямой  $AB$ , т. е. изъ центра круга, возставимъ перпендикуляръ  $OC$  къ діаметру  $AB$  и соединимъ точку  $C$  съ  $B$ . прямая  $CB$  будетъ сторона квадрата, вписаннаго въ кругъ, а треугольникъ  $ACB$  будетъ половина этого квадрата; на прямой  $CB$ , какъ на діаметрѣ, опишемъ еще полукругъ  $CEB$ .

Фиг. 287.



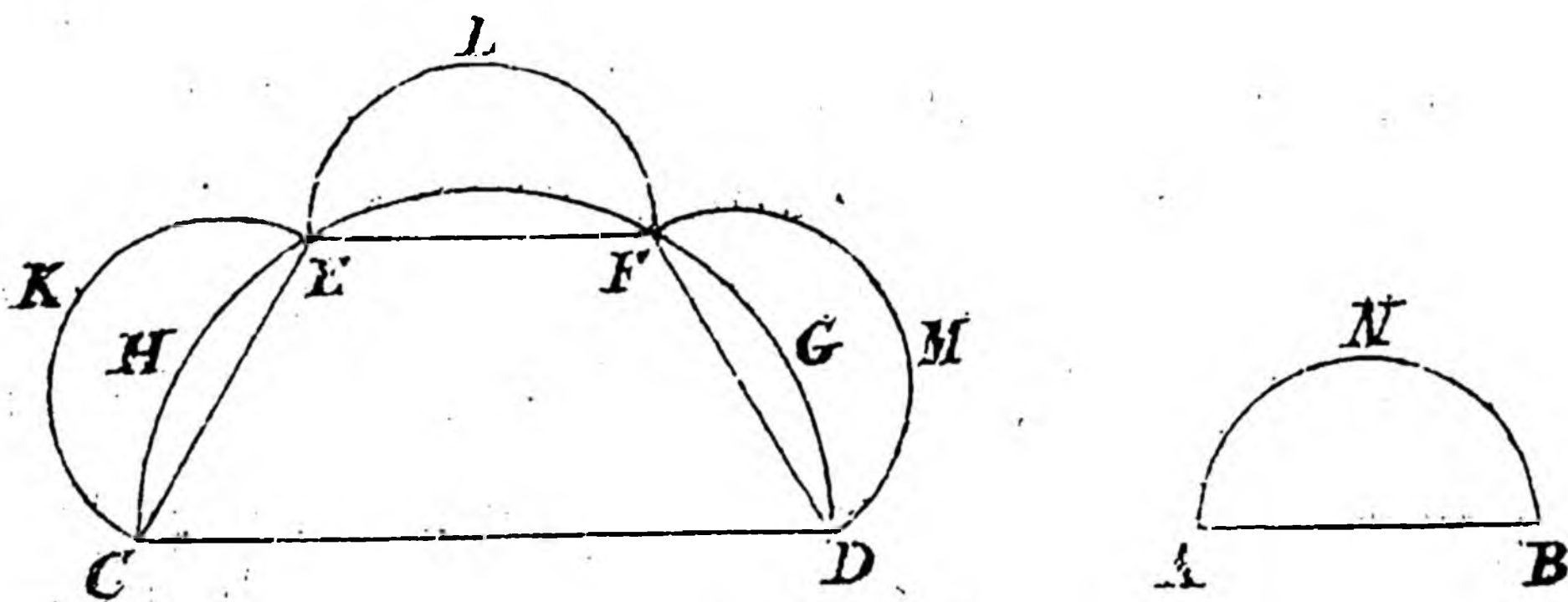
Такъ какъ  $\square AB = \square AC + \square BC = 2\square AC$  (кн. 1, пред. 47), а площади круговъ относятся между собою какъ квадраты изъ ихъ діаметровъ (кн. 6, примѣч. 17, пред. d), то слѣдуетъ изъ этого, что площадь полукруга  $ACB$  равна удвоенной площади полукруга  $CEB$ . Но секторъ  $OCB$  есть четверть окружности или половина половины, слѣдовательно секторъ  $OCB$  равенъ площади полукруга  $CEB$ . Отымая отъ этихъ равныхъ величинъ общій имъ сегментъ  $CDB$ , найдемъ, что треугольникъ  $COB$  равенъ луночкѣ  $CDBE$ . Наконецъ можно построить квадратъ, коего площадь будетъ равна площади треугольника  $COB$ , и слѣдовательно, будетъ равна и площади луночки  $CDBE$ .

Далѣе греческій текстъ, въ упомянутомъ выше сочиненіи, неясенъ и по всему видно измѣненъ, но въ настоящее время возстановленъ Бретшнейдеромъ въ сочиненіи: *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides*.

Вотъ въ чемъ дѣло. Гиппократъ, найдя квадратуру луночки, думалъ найти квадратуру круга слѣдующимъ образомъ:

На прямой  $AB$ , какъ на діаметрѣ (фиг. 288), построимъ полукругъ, возъ-

Фиг. 288.



мемъ  $CD = 2AB$  и, какъ на діаметрѣ, построимъ полукругъ на  $CD$ , въ полукругъ этотъ впишемъ шестиугольникъ, коего стороны  $CE$ ,  $EE$ ,  $FD$  будутъ,



очевидно, равны прямой  $AB$ , на сторонах  $CE$ ,  $EF$ ,  $FD$  построимъ полукруги  $CKE$ ,  $ELF$ ,  $FMD$ , которые будутъ равны полукругу построенному на  $AB$ .

Такъ какъ полукруги  $CKE$ ,  $ELF$ ,  $FMD$ ,  $ANB$  всѣ равны, то сумма ихъ равна четырежды взятому полукругу  $ANB$ . Но  $CD=2AB$ , а площади круговъ относятся какъ квадраты діаметровъ, слѣдовательно полукругъ  $CEFD:ANB=4:1$ , т. е. полукругъ  $CEFD=4ANB$  или полукругъ  $CEFD$  равенъ суммѣ трехъ полукруговъ  $CKE$ ,  $ELF$ ,  $FMD$  и полукруга  $ANB$ , если отымемъ три сегмента  $CHE$ ,  $EPF$  и  $FGD$  общіе, какъ полукругу  $CEFD$ , такъ и полукругамъ  $CKE$ ,  $ELF$ ,  $FMD$ , то найдемъ, что площадь трапеціи  $CEFD$  равна площадямъ трехъ луночекъ съ площадью полукруга  $ANB$ , слѣдовательно площадь полукруга  $ANB$  равна площади трапеціи  $CEFD$  безъ трехъ луночекъ  $CHE$ ,  $EPF$ ,  $FGD$ ; но мы можемъ построить квадратъ, коего площадь равна суммѣ площадей трехъ луночекъ, слѣдовательно, площадь круга, построеннаго на  $AB$ , какъ на діаметръ, равна удвоенной разности двухъ прямолинейныхъ площадей, именно трапеціи  $CEFD$  и площади квадрата равнаго суммѣ площадей трехъ выше упомянутыхъ луночекъ. Но такъ какъ эта послѣдняя прямолинейная площадь можетъ быть обращена въ квадратъ, то площадь этого квадрата и будетъ равна площади круга  $ANB$ .

Далѣе Эвдемъ замѣчаетъ, что хотя это остроумно, но невѣрно и показываетъ почему. Лакруа, въ своемъ изданіи: *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle par Montucla*, говоритъ, что, не смотря на свидѣтельство историковъ, онъ не вѣритъ, чтобы такой геометръ какъ Гиппократъ впалъ въ такую грубую ошибку и при этомъ даетъ довольно странное объясненіе, что Гиппократъ хотѣлъ указать только какъ было бы возможно найти квадратуру круга. Аристотель упоминаетъ еще о двухъ геометрахъ, занимавшихся квадратурой круга.

Брисонъ (*Brisonos*), утверждалъ, что площадь круга есть средне-пропорціональная между площадями вписаннаго и описаннаго квадратовъ, но это очевидная недѣлность, такъ какъ между площадями, вписаннаго и описаннаго около круга квадратовъ, средне-пропорціональная есть площадь восьмиугольника и вообще между площадями правильныхъ многоугольниковъ, вписаннаго и описаннаго, средне-пропорціональная есть площадь вписаннаго многоугольника съ удвоеннымъ числомъ сторонъ.

Антифонъ рассматривалъ кругъ какъ многоугольникъ, состоящій изъ безчисленнаго числа сторонъ, т. е. вписывалъ сначала квадратъ въ кругъ, затѣмъ восьмиугольникъ и т. д., все удваивая число сторонъ и говоритъ, что такую операцію надо продолжать до тѣхъ поръ пока площадь многоугольника не исчерпаетъ всю площадь круга, потомъ онъ дѣлаетъ слѣдующее заключеніе: что такъ какъ каждому вписанному многоугольнику

можно построить равный квадратъ, то слѣдовательно можно построить квадратъ, коего площадь будетъ равна площади круга.

*Деностратъ* былъ первый изъ геометровъ, который нашелъ квадратуру круга правильнымъ теоретическимъ построениемъ, воспользовавшись кривою, построенною Гиппiасомъ, которая носитъ названіе *квадратриксъ*. Но построить ту точку кривой, которая даетъ квадратуру круга представляетъ такія же трудности, какъ и сама квадратура круга.

Это почти все то что мы знаемъ о квадратурѣ круга до Архимеда.

Быть не можетъ, чтобы такой чисто теоретическій умъ, какъ Архимедовъ не пробовалъ рѣшить задачу квадратуры круга геометрическимъ построениемъ и безъ сомнѣнія, что только послѣ того какъ онъ убѣдился въ трудности и почти невозможности достигнуть полного рѣшенія задачи, онъ берется за нее съ практической стороны. Замѣчательно, что до Архимеда ни одинъ изъ геометровъ, занимавшихся квадратурой круга, не показалъ приближеннаго отношенія окружности круга къ радіусу, или площади круга къ квадрату построенному на радіусѣ. По крайней мѣрѣ ни одинъ изъ историковъ и геометровъ объ этомъ не упоминаетъ, но англійскіе ученые въ Индіи нашли, въ одномъ изъ сочиненій Браминовъ подъ заглавіемъ *Аіенъ Акбери* (*Ayeeen Akbery*), отношеніе окружности къ діаметру, выраженное числами  $3927:1250=3,1416$  вѣрное до одной десяти тысячной и которое считается древнѣе Архимедовскаго.

Евтокій говоритъ, что Архимедъ предпринялъ такое вычисленіе въ виду практическаго примѣненія, и дѣйствительно онъ выполнилъ, въ этомъ отношеніи, свою задачу въ совершенствѣ, пріемъ его изящный, и числа полученныя, въ практическомъ отношеніи, не оставляютъ желать ничего лучшаго.

Изслѣдованія свои Архимедъ изложилъ въ маленькомъ сочиненіи *Κύκλου μέτρησις* и достигъ слѣдующихъ результатовъ:

1) Площадь круга равна площади прямоугольнаго треугольника, коего одинъ катетъ равенъ длинѣ окружности круга, а другой равенъ радіусу круга.

2) Площадь круга относится къ площади квадрата, построеннаго на діаметрѣ, почти какъ 11:14.

3) Окружность круга меньше трехъ діаметровъ и  $\frac{1}{7}$  этого діаметра и больше трехъ діаметровъ и  $\frac{10}{71}$  того-же діаметра, откуда слѣдуетъ, что окружность не много разнится отъ перваго изъ этихъ предѣловъ, т. е., что она почти равна  $3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$  діаметра. Это приближеніе самое точное изъ тѣхъ, которыя выражаются наименьшимъ числомъ цифръ.

Почти всѣ знаютъ, что Архимедъ опредѣлилъ отношеніе окружности

къ діаметру, но не многимъ извѣстны его изслѣдованія, поэтому я изложу здѣсь дословно его маленькое сочиненіе *Κύκλου μέτρησις*, съ нѣкоторыми поясненіями и прибавленіемъ двухъ началъ, изъ его же сочиненія *Περὶ σφαιράς καὶ κυλίνδρου*, на которыя онъ ссылается, кромѣ этого буду ссылаться еще на два предложенія Евклида: 1-е десятой и 2-е двѣнадцатой книги.

Два упомянутыя выше начала Архимеда суть слѣдующія.

1) Прямая линія есть кратчайшая изъ всѣхъ тѣхъ линій, которыя имѣютъ съ нею однѣ и тѣ-же концы.

2) Двѣ кривыя линіи, лежащія въ одной плоскости и имѣющія одни и тѣ-же концы, не равны, если обѣ выпуклы въ одну и ту же сторону и если одна вся заключена другою и прямою, имѣющею однѣ и тѣ-же концы съ этой послѣдней, или наконецъ, если одна заключена только частью другой, а остальная часть общая обѣмъ, то заключенная линія будетъ кратчайшая.

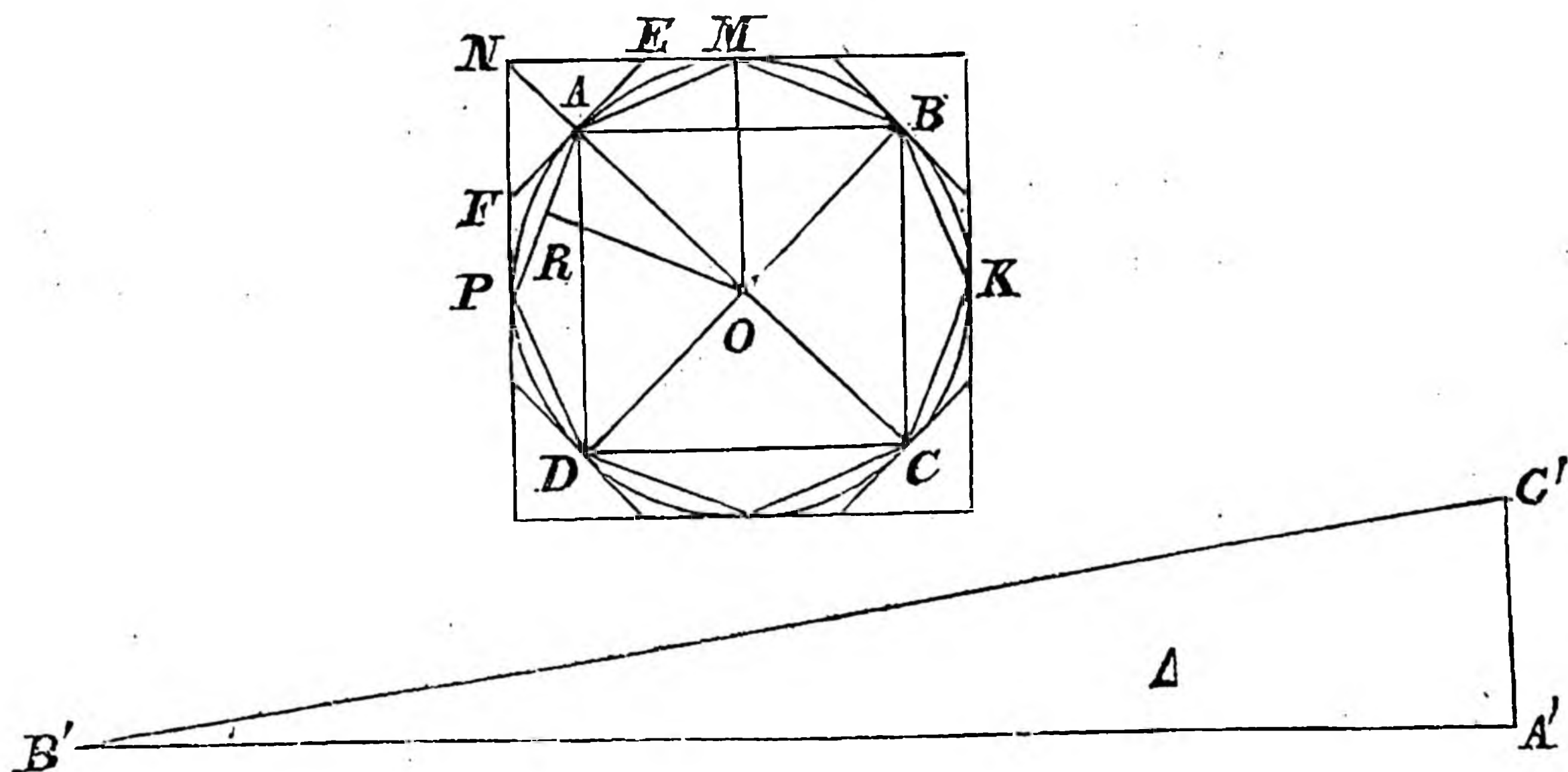
#### VI. Объ измѣреніи круга.

##### *Κύκλου μέτρησις.*

**Предложеніе 1.** Площадь всякаго круга равна площади прямоугольнаго треугольника, коего одинъ изъ катетовъ равенъ окружности круга, а другой радіусу круга (фиг. 289).

**Доказат.** Пусть данный кругъ будетъ  $O$ , а треугольникъ, коего одинъ катетъ \*  $A'B'$  равенъ окружности круга  $O$ , а другой  $A'C'$  радіусу круга, назовемъ  $\Delta$ .

Фиг. 289.



Положимъ, если это возможно, что площадь круга  $O$ , которую назовемъ чрезъ  $\Pi$ , больше площади, построеннаго треугольника  $\Delta$ , т. е. пусть

\* Слово катетъ не употреблялось, а Архимедъ употребляетъ фразу: *ἡ περὶ τῆς ὀρθῆς*.



$\Pi = \Delta + \varepsilon$ , гдѣ  $\varepsilon$  есть избытокъ площади круга надъ площадью треугольника.

Впишемъ въ кругъ  $O$  квадратъ (кн. 4, пред. 6)  $ABCD$ , и будемъ дѣлить дуги пополамъ до тѣхъ поръ пока сумма сегментовъ, т. е. разность между площадью круга и вписаннаго многоугольника, не сдѣлается меньше  $\varepsilon$  (кн. 12, пред. 2). Тогда мы будемъ имѣть правильный, вписанный въ кругъ, многоугольникъ, коего площадь будетъ больше площади треугольника  $\Delta$ . Изъ центра круга  $O$  опустимъ перпендикуляръ  $OR$  на сторону, построеннаго, какъ сказано выше, многоугольника. Перпендикуляръ  $OR$ , очевидно меньше радіуса круга. Периметръ многоугольника меньше окружности по второму началу, слѣдовательно площадь многоугольника будетъ меньше площади треугольника  $\Delta$ , что противурѣчитъ сдѣланному построению.

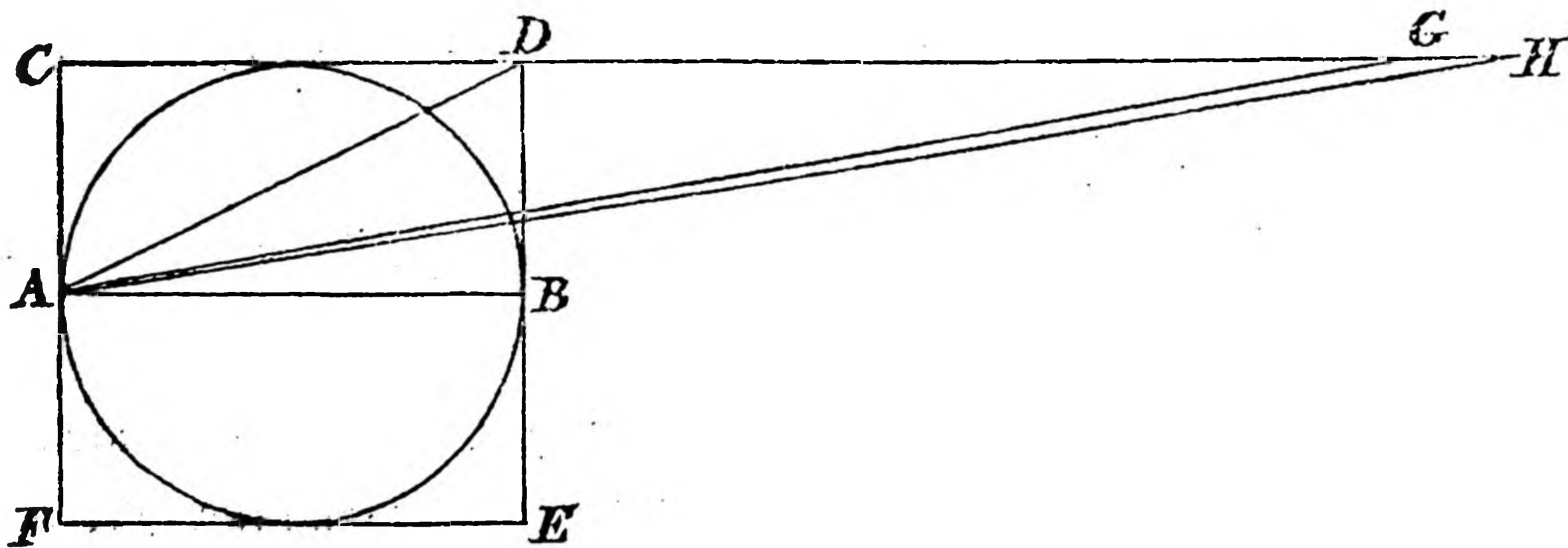
Положимъ, что площадь  $\Pi$  круга  $O$  меньше площади треугольника  $\Delta$ , т. е. пусть  $\Pi + \varepsilon = \Delta$ ,  $\varepsilon$  есть избытокъ площади  $\Delta$  надъ площадью  $\Pi$ .

Опишемъ около круга  $O$  квадратъ (кн. 4, пред. 7) и раздѣлимъ дуги  $PM, AK, \dots$  пополамъ и чрезъ точки дѣленія проведемъ касательныя къ кругу. Такъ какъ уголъ  $NAE$  прямой, то  $NE > AE = EM$ , слѣдовательно  $\triangle FNE$  больше половины фигуры  $NPAMN$ . Продолжимъ такое построение пока сумма прямолинейныхъ фигуръ, подобныхъ фигурѣ  $PFEM$  не сдѣлается меньше  $\varepsilon$  (кн. 12, пред. 2), тогда, очевидно, сумма фигуръ, заключенныхъ, напримѣръ, между дугою  $AP$  и касательными  $AF$  и  $PF$ , тѣмъ болѣе, будетъ меньше  $\varepsilon$ . Слѣдовательно, многоугольникъ  $FEBKCDP$  будетъ меньше треугольника  $\Delta$ , что не сообразно, такъ какъ периметръ многоугольника больше окружности (кн. 2, пред. 2), а апогема его равна радіусу круга.

И такъ площадь треугольника  $\Delta$  не можетъ быть ни больше ни меньше площади круга  $O$ , слѣдовательно она ей равна.

*Предложеніе 2.* Площадь всякаго круга относится къ площади квадрата, построеннаго на діаметрѣ, почти какъ 11 къ 14 (фиг. 290).

Фиг. 290.



*Доказат.* Пусть діаметръ, даннаго круга, будетъ  $AB$ . Опишемъ около этого круга квадратъ  $CDEF$ .

Продолжимъ сторону  $CD$  квадрата такъ, чтобы продолженіе  $DG$  было равно удвоенному  $CD$ , а  $GH$  было равно одной седьмой  $CD$ .

Треугольники  $ACG$  и  $ACD$  имѣютъ одну высоту, слѣдовательно:

$$\triangle ACG : \triangle ACD = 21 : 7,$$

по той же причинѣ:

$$\triangle ACD : \triangle AGH = 7 : 1$$

и

$$\triangle ACH : \triangle ACD = 22 : 7.$$

Но  $\square CD = 4ACD$ , слѣдовательно:

$$\triangle ACH : \square CD = 22 : 28$$

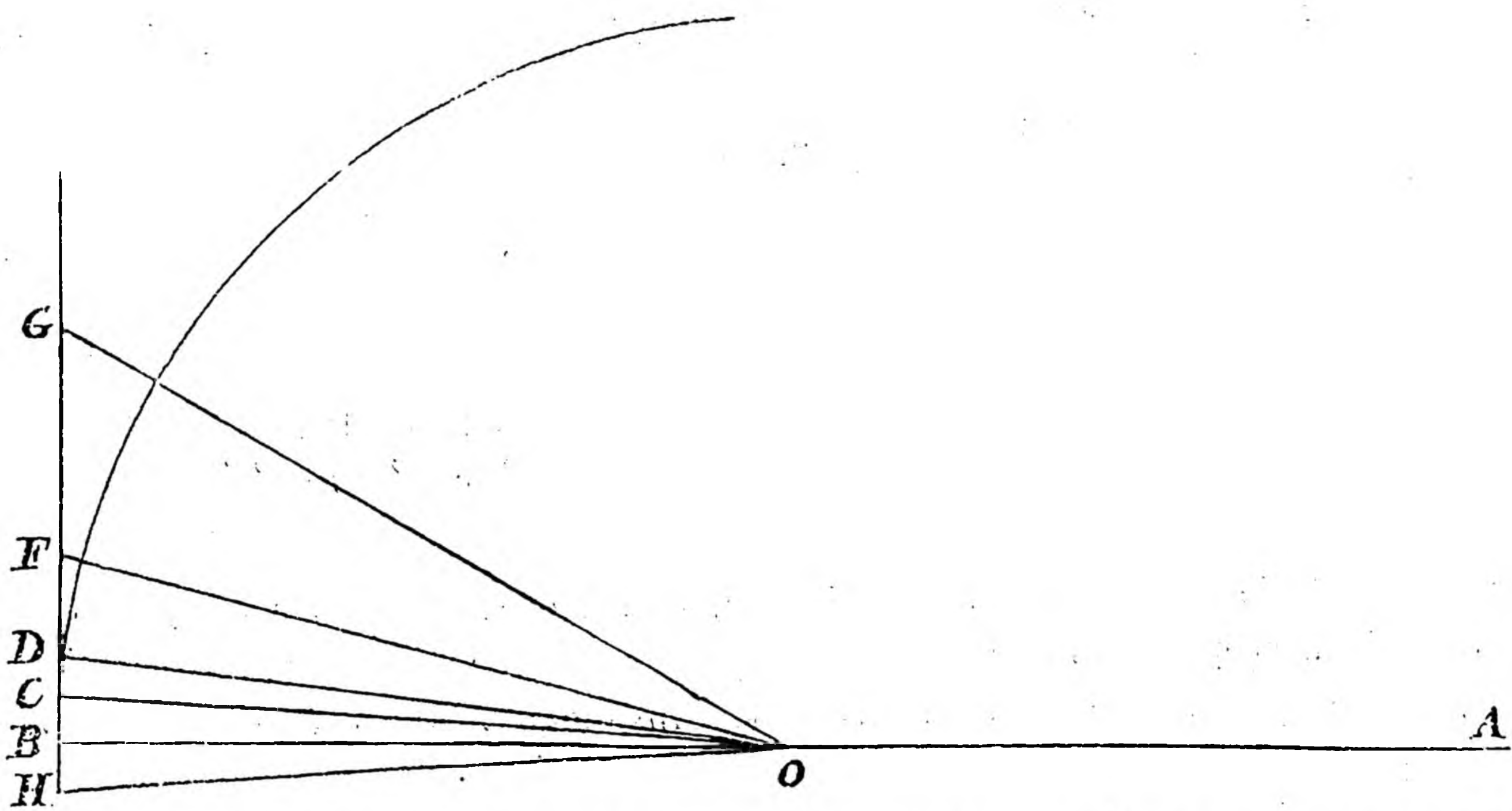
или

$$\triangle ACH : \square CD = 11 : 14.$$

Ниже мы покажемъ, что прямая  $CH$  почти равна окружности круга, слѣдовательно, площадь прямоугольнаго треугольника  $ACH$ , въ которомъ одинъ катетъ равенъ окружности круга, а другой радіусу его, равна площади круга (пред. 1). Слѣдовательно площадь круга относится къ площади квадрата  $CE$  почти какъ 11:14.

*Предложеніе 3.* Окружность всякаго круга равна тремъ діаметрамъ съ частью діаметра, которая меньше одной седьмой этого діаметра и больше  $\frac{10}{71}$  того же діаметра (фиг. 291).

Фиг. 291.



*Доказат.* Пусть  $AB$  будетъ діаметръ круга, а  $O$  его центръ. Проведемъ касательную  $BG$ , построимъ уголъ  $\angle BOG = \frac{1}{3}d$ .

Прямая  $OG$  будетъ относиться къ прямой  $BG$  какъ 306 къ 153, т. е.:

$$OG : BG = 306 : 153$$

а отношеніе  $OB$  къ  $BG$  будетъ больше отношенія 265 къ 153, т. е.:

$$\frac{OB}{BG} > \frac{265}{153}.$$

*Примѣч. а).* Такъ какъ уголъ  $BOG = \frac{1}{3}d$ , то извѣстно, что  $BG = \frac{1}{2}OG$ , а  $OB = BG\sqrt{3}$ , т. е.:

$$\frac{OG}{BG} = \frac{2}{1}, \quad \frac{OB}{BG} = \sqrt{3}.$$

Съ перваго раза кажется страннымъ, почему Архимедъ, вмѣсто отношенія  $\frac{2}{1}$ , взялъ отношеніе  $\frac{306}{153}$ , но здѣсь то и видна необыкновенная, для того времени, проницательность.

Сколько намъ извѣстно въ то время корни извлекались ощупью, не было особенныхъ правилъ, по крайней мѣрѣ, намъ не переданы тѣ правила, которыми древніе руководствовались при извлеченіи корней, а Архимедъ не оставилъ подробностей своихъ вычисленій.

Чтобы получить неравенство:

$$\frac{OB}{BG} > \frac{265}{153}.$$

Архимеду необходимо было извлечь квадратный корень изъ 3 и найти его приближенную величину съ недостаткомъ. Какимъ образомъ онъ нашелъ предъидущую дробь? какъ нашелъ приближеніе корня  $\sqrt{3}$ ? неизвѣстно, но эта дробь есть простѣйшая и вмѣстѣ съ тѣмъ ближайшая къ  $\sqrt{3}$  изъ всѣхъ тѣхъ, которыя выражаются тремя знаками.

Въ самомъ дѣлѣ, если  $\sqrt{3}$  обратимъ въ непрерывную дробь, то получимъ дробь:

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \dots}}}}$$

последовательныя приближенія, которой будутъ:

$$1, 2, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{19}{11}, \frac{26}{15}, \frac{71}{41}, \frac{97}{56}, \frac{265}{153}, \frac{362}{209}, \frac{989}{507}, \frac{1351}{780}, \dots$$

первое приближеніе меньше  $\sqrt{3}$ , второе больше, третье опять меньше и т. д., какъ извѣстно изъ теоріи непрерывныхъ дробей.

Девятое приближеніе, есть то, которое Архимедъ и взялъ за приближенную величину  $\sqrt{3}$ .

Теперь дѣлается ясно почему Архимедъ взялъ отношеніе:

$$OG : BG = 306 : 153.$$



Въ самомъ дѣлѣ,  $\frac{265}{153}$  есть приближенная величина  $\sqrt{3} = \frac{OB}{BG}$ , слѣдовательно, если положить  $BG=153$ , то прямая  $OG$  будетъ равна 306, такъ какъ мы видѣли, что  $OG=2BG$ .

Раздѣлимъ уголъ  $BOG$  прямою  $OF$  пополамъ, то (кн. 6, пред. 3) мы будемъ имѣть:

$$OG : OB = FG : BF$$

откуда:

$$OG + OB : OB = FG + BF : BF$$

или

$$OG + OB : BG = OB : BF.$$

Такъ какъ  $OB > 265$ , то:

$$\frac{OB}{BF} > \frac{571}{153}.$$

Слѣдовательно отношеніе квадрата  $OF$  къ квадрату  $BF$  больше отношенія 349450 къ 23409, а отношеніе  $OF$  къ  $BF$  больше отношенія  $591\frac{1}{8}$  къ 153.

Примѣч. б). Мы видѣли, что:

$$\frac{OB}{BF} > \frac{571}{153},$$

слѣдовательно, если прямая  $BF=153$ , то  $OB > 571$ . Возвышая въ квадратъ предыдущее неравенство мы имѣемъ:

$$\frac{OB^2}{BF^2} > \frac{571^2}{153^2},$$

придавая къ обѣимъ частямъ по единицѣ, найдемъ:

$$\frac{OB^2 + BF^2}{BF^2} > \frac{571^2 + 153^2}{153^2},$$

или

$$\frac{OF^2}{BF^2} > \frac{571^2 + 153^2}{153^2}$$

или

$$\frac{OF^2}{BF^2} > \frac{349450}{23409}$$

извлекая квадратный корень, найдемъ наконецъ:

$$\frac{OF}{BF} > \frac{591\frac{1}{8}}{153},$$

какъ было сказано выше.

Раздѣлимъ уголъ  $BOF$ , прямою  $OE^*$ , пополамъ, то мы будемъ имѣть:

$$\frac{OB}{BE} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153}.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{OE}{BE} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153}.$$

Примъч. с). Такъ какъ въ треугольникѣ  $BOF$  уголъ  $BOF$  раздѣленъ пополамъ, то мы имѣемъ:

$$OF:OB=EF:BE,$$

откуда:

$$OF+OB:OB=EF+BE:BE$$

или

$$\frac{OF+OB}{BF} = \frac{OB}{BE},$$

но мы выше видѣли, что:

$$\frac{OF}{BF} > \frac{591\frac{1}{8}}{153} \quad \text{и} \quad \frac{OB}{BF} > \frac{571}{153},$$

слѣдовательно:

$$\frac{OB}{BE} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153}.$$

Откуда:

$$\frac{OB^2}{BE^2} > \frac{1350534\frac{33}{64}}{23409},$$

придавая по единицѣ къ обѣимъ частямъ, и дѣлая приведеніе, найдемъ:

$$\frac{OB^2+BE^2}{BE^2} = \frac{OE^2}{BE^2} > \frac{1373943\frac{33}{64}}{23409},$$

извлекая квадратный корень, получимъ:

$$\frac{OE}{BE} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153}.$$

Раздѣлимъ уголъ  $EOB$  прямою  $OD$  пополамъ, то отношеніе  $OB$  къ  $BD$  будетъ больше отношенія  $2334\frac{1}{4}$  къ 153, т. е.:

$$\frac{OB}{BD} > \frac{2334\frac{1}{4}}{153},$$

слѣдовательно отношеніе:

$$\frac{OD}{BD} > \frac{2339\frac{1}{4}}{153}.$$

---

\* Прямая  $OE$  на фиг. 291 пропущена.

*Примѣч. d).* Этотъ результатъ, какъ и слѣдующій, получается тѣмъ же процессомъ, какимъ показано въ примѣчаніяхъ (b) и (c).

Раздѣлимъ наконецъ уголъ  $BOD$  прямою  $OC$  пополамъ, то отношеніе:

$$\frac{OB}{BC} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}$$

Такъ какъ уголъ  $GOB$ , равный третьей части прямого угла, былъ раздѣленъ четыре раза пополамъ, то уголъ  $COB$  составляетъ сорокъ восьмую часть прямого угла. Построимъ уголъ  $BOH = \angle BOC$  и продолжимъ  $GB$  до встрѣчи съ прямою  $OH$  въ точкѣ  $H$ , то уголъ  $COH$  будетъ составлять одну двадцать четвертую часть прямого угла. Слѣдовательно, прямая  $CH$  будетъ сторона правильнаго, описаннаго около круга  $O$ , девяностошестиугольника.

Мы выше показали, что:

$$\frac{OB}{CB} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}$$

и какъ  $AB = 2OB$ , а  $CH = 2CB$ , то:

$$\frac{AB}{CH} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}$$

Откуда заключаемъ, помножая знаменателей въ обѣихъ частяхъ предыдущаго неравенства на 96, что:

$$\frac{AB}{96 \cdot CH} > \frac{4673\frac{1}{2}}{14688}$$

т. е. отношеніе діаметра  $AB$  круга  $O$  къ периметру девяностошестиугольника больше предыдущей дроби.

Слѣдовательно:

$$\frac{96 \cdot HC}{AB} < \frac{14688}{4673\frac{1}{2}}$$

но знаменатель предыдущей дроби содержится въ числитель три раза съ остаткомъ  $667\frac{1}{2}$  и этотъ остатокъ меньше седьмой части числа  $4673\frac{1}{2}$ , слѣдовательно периметръ описаннаго многоугольника содержитъ въ себѣ трижды діаметръ съ частью того же діаметра, меньшею одной седьмой. Слѣдовательно тѣмъ болѣе окружность круга меньше три раза взятаго діаметра увеличеннаго одной седьмой этого діаметра.



*Примѣч. е).* Седьмая часть числа  $4673\frac{1}{2}$  есть  $667\frac{9}{14} > 667\frac{1}{2}$ . Слѣдовательно:

Перим. 96 угол.  $< 3\frac{1}{2}$  діам.

а. тѣмъ болѣе:

Окруж.  $< 3\frac{1}{2}$  діам.

Найдя, такимъ образомъ, большій предѣлъ окружности круга, Архимедъ находитъ и меньшій предѣлъ слѣдующимъ образомъ.

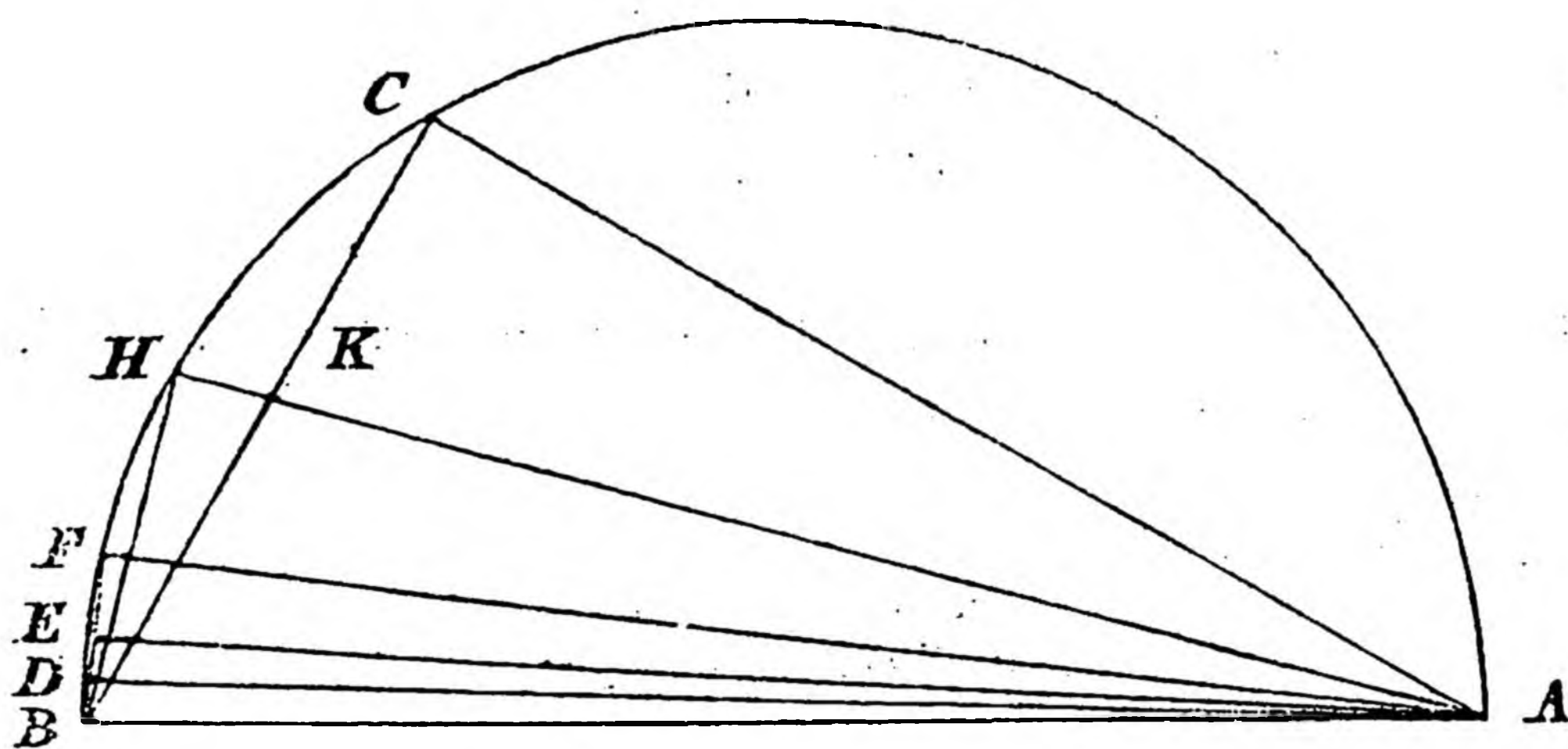
Пусть будетъ кругъ, коего діаметръ есть  $AB$ . Пусть уголъ  $CAB$  будетъ  $= \frac{1}{3} d$ , то отношеніе  $AC$  къ  $CB$  будетъ меньше отношенія 1351 къ 780, т. е.:

$$\frac{AC}{CB} < \frac{1351}{780}$$

а отношеніе  $AB$  къ  $BC$  будетъ равно отношенію 1560 къ 780, т. е.:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{1560}{780}.$$

Фиг. 292.



*Примѣч. f).* Такъ какъ уголъ  $CAB = \frac{1}{3} d$ , то:

$$\frac{AC}{CB} = \sqrt{3}$$

это отношеніе есть  $\cotg 30^\circ$ . Архимедъ беретъ за  $\sqrt{3}$  послѣднее изъ приближеній, наивсѣннѣе въ примѣчаніи (а), это приближеніе больше  $\sqrt{3}$ , слѣдовательно, мы имѣемъ неравенство:

$$\frac{AC}{CB} < \frac{1351}{780}.$$

Если сторона  $CB=780$ , то очевидно что  $AB=1560$ .

Удивительно, что Архимедъ, не зная ни десятичныхъ дробей, ни непрерывныхъ, беретъ и здѣсь самое простое изъ большихъ для  $\sqrt{3}$  приближеній, но какимъ образомъ онъ вычислялъ эти приближенія неизвѣстно.

Раздѣлимъ уголъ  $\angle CAB$  прямою  $АН$  пополамъ, точку встрѣчи этой прямой съ окружностью соединимъ съ точкою  $B$ .

Такъ какъ  $\angle CАН = \angle НВС = \angle НАВ$  и уголъ  $АНВ$  общій треугольникамъ  $АНВ$  и  $НВК$ , то эти треугольники подобны, слѣдовательно:

$$АН : ВН = ВН : НК = АВ : ВК.$$

Но мы имѣемъ еще (кн. 6, пред. 6):

$$АВ : ВК = АВ + АС : ВС,$$

слѣдовательно:

$$АВ + АС : ВС = АН : ВН$$

или

$$\frac{АВ}{ВС} + \frac{АС}{ВС} = \frac{АН}{ВН}.$$

Выше мы нашли, что:

$$\frac{АВ}{ВС} = \frac{1570}{780}, \quad \frac{АС}{ВС} < \frac{1351}{780},$$

слѣдовательно:

$$\frac{АН}{ВН} < \frac{2911}{780}.$$

откуда:

$$\frac{АВ}{ВН} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}.$$

*Примѣч. g).* Возвышая въ квадратъ обѣ части предъидущаго неравенства и придавая къ обѣмъ частямъ по единицу, получимъ:

$$\frac{АН^2 + ВН^2}{ВН^2} = \frac{АВ^2}{ВН^2} < \frac{2911^2 + 780^2}{780^2}$$

или

$$\frac{АВ^2}{ВН^2} < \frac{9082321}{780^2}$$

а извлекая квадратный корень, найдемъ:

$$\frac{АВ}{ВН} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}.$$

Раздѣлимъ уголъ  $\angle ВАН$  прямою  $АF$  пополамъ, то найдемъ, что:

$$\frac{АF}{ВF} < \frac{5924\frac{1}{2}}{780}.$$

или

$$\frac{AF}{BF} < \frac{1823}{240}$$

такъ какъ помножая числителя и знаменателя этой послѣдней дроби на  $\frac{13}{4}$  получимъ первую.

Изъ послѣдняго неравенства, точно также какъ было сдѣлано выше, получимъ:

$$\frac{AB}{BE} < \frac{1838\frac{3}{4}}{240}$$

Раздѣлимъ еще уголъ  $FAB$  прямою  $AE$  пополамъ, то найдемъ, что:

$$\frac{AE}{BE} < \frac{3661\frac{9}{11}}{240}$$

или

$$\frac{AE}{BE} < \frac{1007}{66}$$

такъ какъ, помножая числителя и знаменателя этой послѣдней дроби  $\frac{40}{11}$ , найдемъ первую. Слѣдовательно:

$$\frac{AB}{BE} < \frac{1009\frac{1}{6}}{66}$$

Раздѣлимъ наконецъ уголъ  $EAB$  прямою  $AD$  пополамъ, то получимъ, что:

$$\frac{AD}{DB} < \frac{2016\frac{1}{6}}{66}$$

а

$$\frac{AB}{DB} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66}$$

Изъ этого послѣдняго имѣемъ:

$$\frac{BD}{AB} > \frac{66}{2017\frac{1}{4}}$$

Помножая обѣ части этого неравенства на 96, найдемъ:

$$\frac{96 \cdot BD}{AB} > \frac{6336}{2017\frac{1}{4}}$$



т. е. отношеніе периметра девяностошестиугольника къ діаметру больше отношенія:

$$\frac{6336}{2017\frac{1}{2}}$$

Но числитель предыдущей дроби содержитъ знаменатель три раза съ остаткомъ большимъ отъ  $\frac{10}{71}$  числа  $2017\frac{1}{2}$ . Слѣдовательно периметръ 96-ти угольника, вписаннаго въ кругъ, въ три раза больше взятаго діаметра съ  $\frac{10}{71}$  частью того-же діаметра. Слѣдовательно, тѣмъ болѣе окружность круга въ три раза больше взятаго діаметра съ  $\frac{10}{71}$  частью того-же діаметра.

Слѣдовательно окружность круга равна три раза взятому діаметру круга съ частью того же діаметра, которая больше  $\frac{10}{71}$  и меньше  $\frac{10}{70}$  частей того-же діаметра.

*Примеч. Ъ).* Изъ этого видимъ, что Архимедъ, для того чтобы отнять у софистовъ возможность возражать противъ его вычисленій, гдѣ приходилось нѣсколько разъ извлекать по приближенію квадратные корни, ведетъ свои вычисленія такъ, чтобы всегда имѣть одно число больше описаннаго периметра, а другое меньше вписаннаго и находитъ такимъ образомъ два предѣла  $3\frac{10}{71}$  и  $3\frac{10}{70}$ , между которыми лежитъ величина окружности круга. Онъ принялъ большій предѣлъ  $3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$  за приближенное отношеніе окружности къ діаметру. Погрѣшность, дѣлаемая при этомъ, меньше разности предѣловъ, т. е. меньше  $\frac{1}{497}$ . Такое приближеніе больше чѣмъ достаточно въ практическихъ приложеніяхъ. Это все то, что заключаетъ книга Архимеда.

Евтокій въ своихъ комментаріяхъ Архимеда *Εὐτοκίου ἀσχαλωνίτου εἰς τὰ ἀρχιμήδους περὶ σφαιρᾶς καὶ κυλίνδρου καὶ τὰ ἄλλα ὑπομνήματα*, говоритъ, что Аполлоній Перигейскій, въ утерянномъ сочиненіи *Ωκυτοβοος*, вычислилъ отношеніе окружности къ діаметру съ большимъ приближеніемъ. Что значить слово *Ωκυτοβοος* неизвѣстно. Галлей думаетъ, что это должно быть *Ωκυτομιος*, т. е. вычислять быстро большія числа.

Кромѣ Аполлонія Евтокій упоминаетъ еще о Филонѣ Кидарскомъ, который еще ближе подошелъ, въ своихъ вычисленіяхъ, къ окружности.

Это и все, что мы знаемъ о квадратурѣ круга у древнихъ.

Діофантомъ Александрійскимъ, жившимъ въ IV-мъ вѣкѣ, какъ полагаютъ въ царствованіи Юліана, заканчивается блестящій періодъ математическаго развитія и вообще всѣхъ наукъ; затѣмъ наступаетъ періодъ религіозныхъ

споровъ, повлекшій за собою гоненія на языческую философію. Только отъ времени до времени являются комментаторы древнихъ авторовъ каковы: Прокль въ 485 году, Маринусъ изъ Неаполя, Евтокій въ царствованіе Юстиніана, Антеминусъ въ 534 году, Филопонусъ, Дидимъ, Калькентеросъ, Пселлусъ и друг.

Съ IX-го вѣка греческая наука переходитъ къ Арабамъ, большая часть греческихъ твореній переводится на арабскій языкъ и комментируются арабскими учеными, а Европа, въ это время, впадаетъ въ такое невѣжество, что греческія творенія, если и были извѣстны, то только въ арабскихъ переводахъ.

Какъ въ оригинальныхъ сочиненіяхъ арабскихъ авторовъ, такъ и въ ихъ комментаріяхъ на греческія сочиненія мы не находимъ ничего замѣчательнаго относительно квадратуры круга; задача эта является на сцену только съ возрожденіемъ наукъ въ Европѣ, съ половины XV-го вѣка, когда Региомонтанусъ (Regiomontanus)\* взялся возражать знаменитому въ то время кардиналу Куза (Cusa) противъ его квадратуры. Николай Куза, умершій въ 1464 году, былъ одинъ изъ тѣхъ людей, съ независимымъ умомъ, которые приготовили возрожденіе наукъ въ Европѣ. Онъ первый возобновилъ задачу квадратуры круга и для вычисленія радіуса онъ употребилъ формулу:

$$r = \frac{p}{2n \sin \frac{180^\circ}{n}},$$

гдѣ  $n$  есть число сторонъ правильнаго многоугольника,  $p$  периметръ его, а  $r$  радіусъ круга. Это выраженіе не можетъ служить основаніемъ доказательства несоизмѣримости окружности съ діаметромъ. Въ своемъ возраженіи Региомонтанусъ опредѣлилъ немного точнѣе чѣмъ Архимедъ отношеніе окружности къ діаметру.

Петръ Мецій (Metius), жившій въ началѣ XVI-го вѣка, былъ первый, опредѣлившій весьма значительное приближеніе окружности къ діаметру  $\frac{355}{113}$ , которое, выраженное въ десятичныхъ частяхъ, начинаетъ разниться только съ седьмой десятичной цифрой отъ настоящаго, именно:

$$\frac{355}{113} = 3,1415929 \dots$$

а настоящее 3,14159265 . . . .

---

\* Настоящее имя его Johann Müller; онъ род. въ 1446 г. въ деревнѣ Koesberg или Koenigsberg около Кобурга. Отсюда и произошло названіе Regiomontanus.

Нѣкоторые писатели приписываютъ это замѣчательное отношеніе окружности къ діаметру Адріану Мецію, сыну Петра, но это неправильно.

Віетъ (Viète 1540—1603 г.), нашелъ замѣчательное выраженіе для отношенія площади квадрата вписаннаго въ кругъ, къ площади круга, коего діаметръ равенъ единицѣ, именно: —

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}}} \dots \text{до } \infty,$$

такъ, что площадь круга будетъ равна единицѣ, раздѣленной на:

$$2 \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}}} \dots \infty$$

Віетъ нашелъ, такимъ образомъ, приближеніе:

$$3,1415926535 + \epsilon$$

вѣрное до одиннадцати цифръ;  $\epsilon$  есть погрѣшность, которая меньше единицы послѣдняго разряда.

Выраженіе свое Віетъ вывелъ, рассматривая кругъ какъ многоугольникъ съ безчисленнымъ числомъ сторонъ.

Съ этихъ поръ геометры, не находя точнаго рѣшенія квадратуры, стараются вычислить отношеніе окружности къ діаметру все точнѣе и точнѣе. За Віетомъ слѣдуетъ Адріанъ Романусъ (Van Roomen 1561—1615 г.), вычислившій сторону полигона, имѣющаго:

$$1073741824 = 2^{30}$$

сторонъ и получившій, такимъ образомъ, 16 цифръ для отношенія окружности къ діаметру:

$$3,141592653589793.$$

Съ этихъ поръ это число, т. е. отношеніе окружности къ діаметру означается греческою буквою  $\pi$ , начало слова  $\pi\epsilon\rho\iota\phi\epsilon\rho\epsilon\iota\alpha$ .

Лудольфъ изъ Кельна (Ludolph van Ceulen, 1539—1610 г.), современникъ Романуса, даетъ еще большее приближеніе, состоящее изъ 36 цифръ.

$$3,14159265358979323846264338327950288.$$



Окружность круга заключается между этимъ числомъ и числомъ, увеличеннымъ единицей. Лудольфъ вычислилъ это приближеніе слѣдующимъ образомъ: онъ положилъ радіусъ круга равнымъ единицѣ съ 75-ю нулями и вычислилъ стороны, начиная съ стороны вписаннаго квадрата, до стороны правильнаго многоугольника, имѣющаго:

$$36893488147419103232=2^{65},$$

сторонъ, затѣмъ вычислилъ сторону правильнаго описаннаго многоугольника съ тѣмъ же числомъ сторонъ, сравнилъ периметры этихъ многоугольниковъ и нашелъ, что они имѣютъ 36 общихъ первыхъ цифръ, откуда онъ заключилъ, что эти 36 первыхъ цифръ выражаютъ окружность, съ погрѣшностью меньше единицы. Надобно удивляться терпѣнію и усидчивости Лудольфа, потому что едвали можно найти работу болѣе скучную и однообразную; въ ней мы не находимъ ни метода, ни приѣмовъ, упрощающихъ вычисленія. Какъ ни скучна была работа Лудольфа, но нашелся патеръ Гримбергеръ (Grimberger), который провѣрилъ всѣ вычисленія Лудольфа и нашелъ, что они вѣрны.

Снелліусъ (Willebrod Snellius съ 1591—1626 г.), занимаясь квадратурой круга, нашелъ двѣ теоремы, которыя даютъ предѣлы окружности болѣе тѣсныя, нежели вписанные и описанные многоугольники. Эти двѣ теоремы сокращаютъ на половину вычисленія, чтобы получить отношеніе  $\frac{22}{7}$ . Архимедъ долженъ былъ, какъ мы выше видѣли, употребить 96-ти вписанный и описанный многоугольникъ. Снелліусъ, зная только сторону шестиугольника, съ помощью своихъ теоремъ, даетъ тоже приближеніе, а 96-ти угольникъ ему даетъ приближеніе 3,1415926. Затѣмъ онъ провѣряетъ приближеніе Лудольфа съ помощью многоугольника, который далъ бы Лудольфу только 17 десятичныхъ знаковъ, а съ помощью приближенія Лудольфа онъ могъ получить приближеніе съ 75 знаками.

Снелліусъ еще вычислилъ предѣлы окружности, которые даютъ вписанные и описанные многоугольники, начиная съ 80-ти угольника до  $5242880=2^{16}$  угольника, такъ, что если бы кто нибудь предложилъ ложное отношеніе окружности къ діаметру, то обращая его въ десятичную дробь, легко, изъ ниже слѣдующей таблицы, видѣть ниже или выше какого предѣла лежитъ предложенное число.

Число сторонъ.	Перим. вписан. многоуг.	Перим. описан. многоуг.
80	3,140	3,143
160	3,141	3,142
320	3,1415	3,1417
640	3,1415	3,1416
1280	3,14158	3,14160
2560	3,141591	3,141594
5120	3,1415928	3,1415930
10240	3,14159260	3,14159274
20480	3,14159264	3,14159268
40960	3,14159265	3,14159266
81920	3,141592652	3,141592655
163840	3,1415926533	3,1415926540
327680	3,1415926535	3,1415926537
655360	3,14159265357	3,14159265361
1310720	3,141592653586	3,141592653596
2621440	3,141592653589	3,141592653591
5242880	3,1415926535896	3,1415926535902

Занимаясь тѣмъ же предметомъ Гюгенсъ (M. Huygens 1629—1695) далеко оставилъ древнихъ и Снедліуса; онъ, съ своей стороны, нашелъ двѣ теоремы, которыя даютъ такіе два предѣла, что достаточно вычислить сторону шестидесятиугольника, чтобы получить 10 вѣрныхъ знаковъ.

Кромѣ этого Гюгенсъ нашелъ еще слѣдующую теорему: что всегда можно опредѣлить прямолинейную фигуру, которая уравнивается, будучи повѣшена известнымъ образомъ на вѣсахъ, сегментъ круга. Если бы центръ тяжести круга всего сегмента былъ известенъ, то изъ этой теоремы вытекала бы квадратура круга, но въ томъ-то и дѣло, что этотъ центръ есть таже квадратура.

Одинъ изъ самыхъ замѣчательныхъ искателей квадратуры круга былъ Грегуаръ де Сентъ-Венсентъ (Grégoire de Saint—Vincent, 1584—1667); изслѣдованія его относительно квадратуры круга привели его къ многимъ, весьма замѣчательнымъ результатамъ, но его квадратура, какъ и всѣхъ

подобныхъ искателей, оказалась ложною. Изслѣдованія эти выходятъ за предѣлы элементарной геометріи, поэтому я объ нихъ здѣсь и не стану говорить.

Упомяну еще, что Брункеръ (Brouncker 1620—1684) нашелъ, принимая площадь вписаннаго квадрата въ кругъ за единицу, что площадь круга равна слѣдующему выраженію:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{9}{2} + \frac{25}{2} + \frac{49}{2} + \frac{81}{2} + \dots$$

которое получило тогда же названіе *непрерывной дроби*.

Послѣ столькихъ усилій отыскать квадратуру круга естественно долженъ былъ явиться вопросъ: возможно-ли рѣшить эту задачу? Первый изъ геометровъ изслѣдовавшій задачу квадратуры круга въ этомъ направленіи былъ Яковъ Грегори (Jacques Gregory), за нимъ Ньютонъ (Newton), но ихъ доказательства, какъ и нѣкоторыхъ другихъ геометровъ, находятъ неудовлетворительными. Замѣчу еще, что Ламбертъ въ *Memoires de Berlin* за 1761 годъ показалъ что  $\pi$  или отношеніе окружности къ діаметру есть число несоизмѣримое, а Лежандръ показалъ что и  $\pi^2$  есть также число несоизмѣримое. Если обратить вниманіе на число знаменитыхъ геометровъ, занимавшихся квадратурой кругъ, какъ въ одномъ направленіи такъ и въ другомъ, то вѣроятность дѣлается весьма значительною, что квадратура невозможна. Замѣтимъ при этомъ, что еслибы она и была возможна, то рѣшеніе этой задачи важнаго значенія въ геометріи не имѣетъ, а потому Парижская академія въ 1775 году напечатала въ *Mémoires de l'Académie* слѣдующее заявленіе:

L'Académie a pris, cette année, la resolution de ne plus examiner aucune solution des problèmes de la duplication du cube, de la trisection de l'angle ou de la quadrature du cercle, ni aucune machine annoncée comme un mouvement perpetuel.

Послѣ этого краткаго историческаго очерка квадратуры круга я изложу, какимъ образомъ нынѣшніе геометры, воспользовавшись трудами своихъ предшественниковъ, отыскиваютъ отношеніе окружности къ діаметру и находятъ площадь круга.

Мы видѣли, что Архимедъ, и прежде его, другіе геометры разсматривали кругъ и вообще кривыя линіи, какъ предѣлъ, вписанныхъ или описанныхъ, многоугольниковъ, коихъ число сторонъ можетъ неопредѣленно



возрастать, а величина ихъ неопредѣленно убывать. Но этотъ приѣмъ древними не былъ возведенъ въ методъ изслѣдованія, какъ онъ возведенъ у насъ въ два метода, въ сущности составляющіе одинъ, *методъ безконечно-малыхъ* и *методъ предѣловъ*.

### VII. Методъ предѣловъ.

Когда древніе геометры приступили къ измѣренію кривыхъ линій и площадей ограниченныхъ кривыми линіями, то первая, безъ сомнѣнія, мысль, и самая естественная, была замѣнить кривыя линіи и криволинейныя площади другими простѣйшими, которыя они успѣли уже измѣрять, т. е. фигурами прямолинейными и притомъ выбранными извѣстнымъ образомъ, именно: чтобы ихъ величина оставалась *неопредѣленною*, т. е. могла бы быть то больше, то меньше, и, увеличиваясь или уменьшаясь, могла бы такъ приблизиться къ даннымъ величинамъ, что разность между ними послѣдними и выбранными—простѣйшими могла бы сдѣлаться *менѣе всякой данной величины*.

Величина, которая, въ продолженіи изслѣдованія, не имѣетъ опредѣленнаго числоваго значенія, а можетъ быть то больше, то меньше, однимъ словомъ, которая можетъ получить безчисленное множество значеній, называется *величиною переменною*. Напримѣръ, хорда въ кругѣ есть величина переменная, такъ какъ она можетъ имѣть всѣ числовыя значенія отъ нуля до діаметра.

Таже величина, которая, въ продолженіи изслѣдованія не измѣняется, т. е. имѣетъ одно только числовое значеніе, называется *постоянною*. Напримѣръ, діаметръ круга, окружность суть величины постоянныя.

Переменная величина можетъ увеличиваться или уменьшаться безпредѣльно, т. е. можетъ получить всевозможныя числовыя значенія отъ нуля до безконечности, т. е. можетъ сдѣлаться и менѣе и болѣе всякой данной величины. Но если переменная величина, увеличиваясь или уменьшаясь неопредѣленно, приближается къ извѣстной опредѣленной величинѣ такъ, что разность между ними можетъ сдѣлаться менѣе всякой данной величины, но нулемъ сдѣлаться никогда не можетъ по свойству переменной и постоянной, то постоянная величина, къ которой стремится переменная называется *предѣломъ* переменной.

Предѣлъ переменной, которая можетъ, уменьшаясь, сдѣлаться менѣе всякой данной величины, есть *нуль*. Напримѣръ дробь  $\frac{1}{n}$  съ увеличеніемъ числа  $n$  неопредѣленно уменьшается, но нулемъ сдѣлаться не можетъ. Въ самомъ дѣлѣ, если данная величина была 0,1, то переменная  $\frac{1}{n}$  можетъ

сдѣлаться меньше 0,1, если положить  $n=100$ . Если данная величина есть 0,01, то переменная  $\frac{1}{n}$  будетъ меньше 0,01, если положить  $n=1000$  и т. д., но, при неопредѣленномъ возрастаніи числа  $n$ , переменная  $\frac{1}{n}$  нулемъ, очевидно, сдѣлаться не можетъ. Евклидъ въ первомъ предложеніи десятой книги доказываетъ, что если даны двѣ величины, изъ коихъ одна какая угодно малая, то всегда отъ другой можно отнять такую ея часть, что остатокъ будетъ меньше другой данной. Это предложеніе Евклида одно изъ самыхъ важныхъ, такъ какъ оно служитъ основаніемъ метода предѣловъ (кн. 10, пред. 1).

Переменная величина, которой данная должна быть предѣломъ, выбирается такъ, чтобы она удовлетворяла слѣдующимъ условіямъ:

1) Чтобы, по своему свойству, она могла получить безчисленное множество значеній и чтобы каждое изъ этихъ значеній, въ извѣстный моментъ, могло быть опредѣлено или измѣренно.

2) Чтобы разность между предѣломъ и переменной величиной могла сдѣлаться меньше всякой данной величины.

Если на кривой линіи возьмемъ нѣсколько точекъ и соединимъ эти точки прямыми линіями, то получимъ ломанную линію вписанную въ кривую. Если теперь, между взятыми точками на кривой, возьмемъ другія точки и соединимъ, эти послѣднія, съ предъидущими, то получимъ другую ломанную, которая лежитъ ближе къ кривой. Продолжая подобное построеніе мы будемъ получать ломанныя линіи, которыя будутъ все ближе и ближе подходить къ кривой, по мѣрѣ возрастанія числа сторонъ, которыхъ величина вмѣстѣ съ тѣмъ убываетъ. При неопредѣленномъ возрастаніи числа сторонъ ломанная линія приближается неопредѣленно къ кривой такъ, что кривую рассматриваютъ какъ предѣлъ ломанной вписанной.

Если чрезъ точки взятые на кривой проведемъ къ ней касательныя, то онѣ, пересѣкаясь, образуютъ ломанную, которая при неопредѣленномъ возрастаніи числа точекъ взятыхъ на кривой, неопредѣленно приближается къ кривой, такъ что кривую можно рассматривать и какъ предѣлъ описанной ломанной линіи.

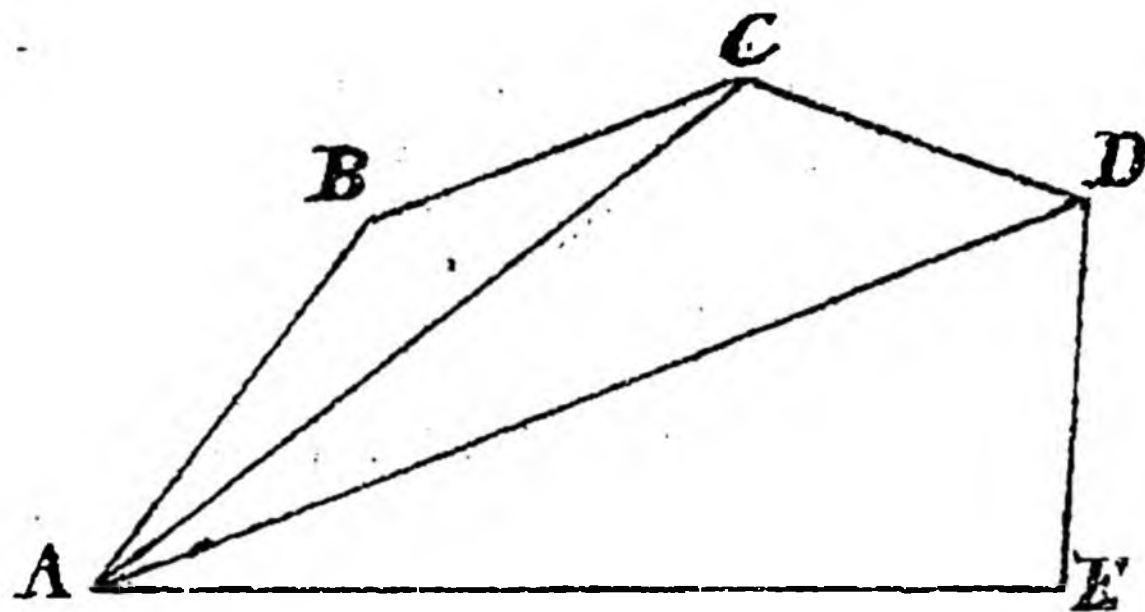
*Предложеніе 15.* Ломанная линія, имѣющая одни концы съ прямою, больше этой послѣдней (фиг. 293).

*Доказат.* Пусть данная прямая будетъ  $AE$ , а ломанная  $ABCDE$ , я говорю, что:

$$AE < AB + BC + CD + DE.$$

Соединимъ точку  $A$  съ точками  $C$  и  $D$ , то будемъ имѣть слѣдующія неравенства (кн. 1, пред. 20):

Фиг. 293.



$$AE < AD + DE$$

$$AD < AC + CD$$

$$AC < AB + BC.$$

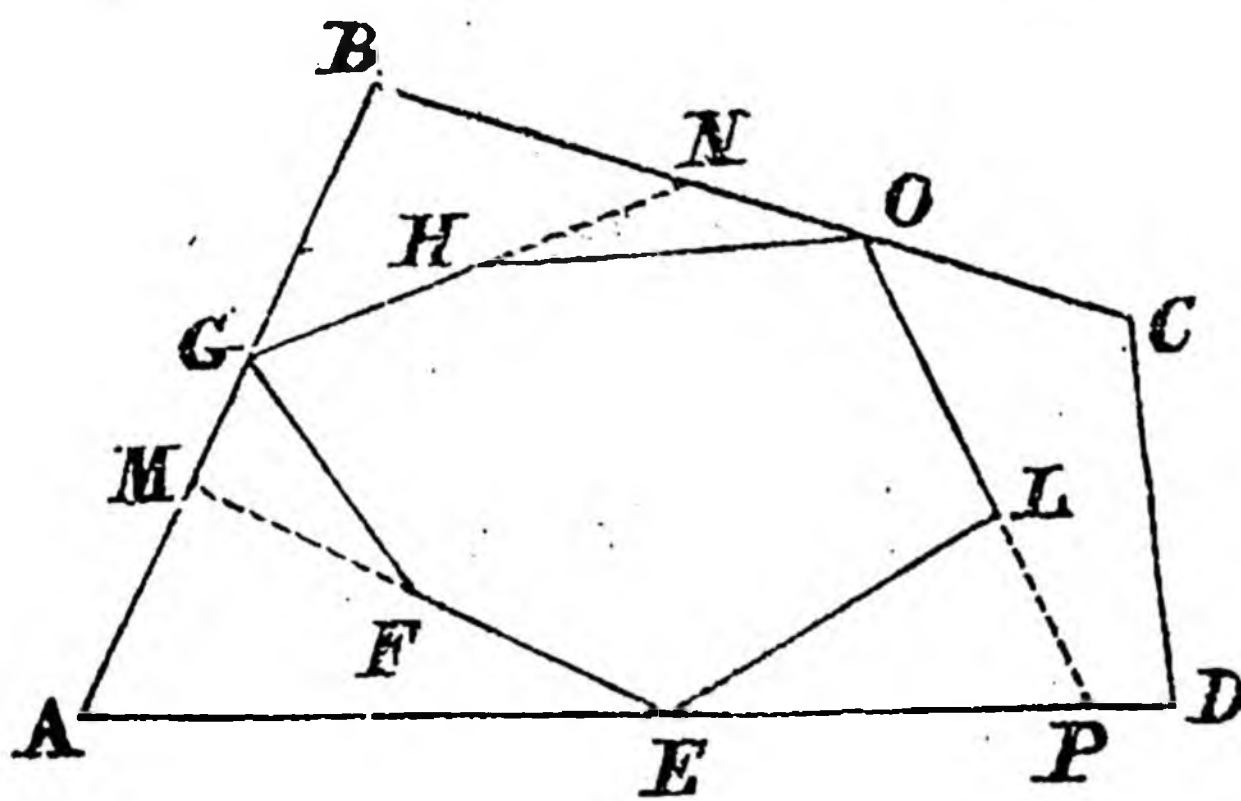
Складывая, получимъ:

$$AE < AB + BC + CD + DE.$$

Это послѣднее неравенство существуетъ, каковы бы ни были число и малость сторонъ ломанной линіи, а слѣдовательно и предѣлъ ломанной—кривая линія, имѣющая одни концы съ прямою, болѣе сей послѣдней.

*Предложеніе 16.* Замкнутая выпуклая ломанная линія, ограниченная со всѣхъ сторонъ также выпуклой ломанной меньше этой послѣдней (фиг. 294).

Фиг. 294.



*Доказат.* Пусть  $ABCD$  будетъ ломанная, ограничивающая со всѣхъ сторонъ ломанную  $EFGHOL$ , я говорю, что:

$$AB + BC + CD + DA > EF + FG + GH + HO + OL + LE.$$



Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ слѣдующія неравенства (кн. 1, пред. 20):

$$AE+AM>EF+FM.$$

$$FM+MG>FG,$$

$$GB+BN>GH+HN,$$

$$HN+NO>HO$$

$$OC+CD+DP>OL+LP$$

$$LP+PE>LE,$$

складывая и выбрасывая общіе члены, найдемъ:

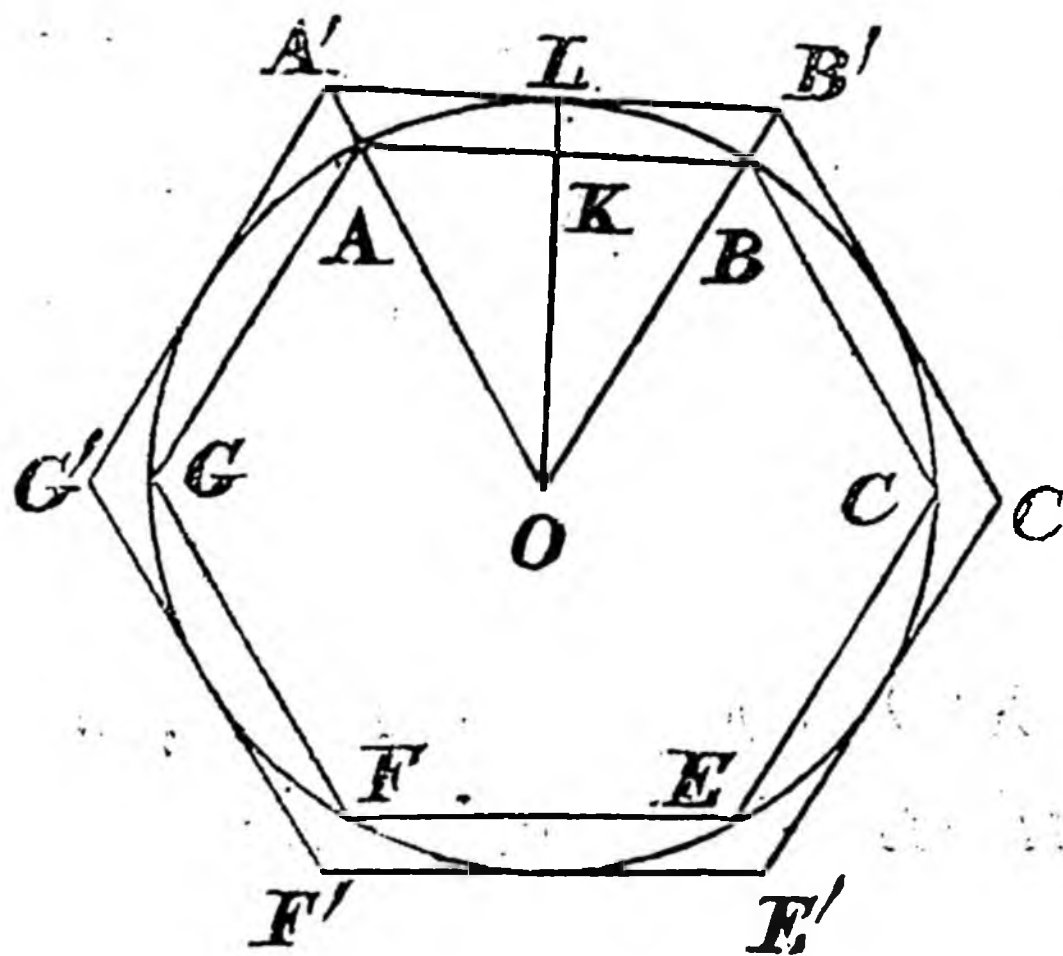
$$AB+BC+CD+DA>EF+FG+GH+HO+OL+LE.$$

Это послѣднее неравенство существуетъ какое бы ни было число и малость сторонъ двухъ выпуклыхъ ломанныхъ линій, слѣдовательно, если одна изъ нихъ или обѣ будутъ кривыя линіи, то ограничивающая всегда больше ограниченной.

*Предложеніе 17.* Окружность круга есть предѣлъ какъ вписаннаго такъ и описаннаго многоугольниковъ (фиг. 295).

*Доказат.* Впишемъ въ кругъ и опишемъ около него правильные, для простоты, многоугольники, произвольнаго числа сторонъ, положимъ  $n$ . Затѣмъ удвоимъ число сторонъ какъ вписаннаго такъ и описаннаго многоугольника и будемъ продолжать такое дѣйствіе неопредѣленно: я говорю, что оба периметра, вписанный увеличиваясь, а описанный уменьшаясь неопредѣленно, приближаются къ окружности. Въ самомъ дѣлѣ, пусть  $ABCDE...$  будетъ периметръ вписаннаго, а  $A'B'C'D'E'....$  периметръ описаннаго многоугольника, первый будетъ меньше окружности, а второй больше (пред. 16).

Фиг. 295.



Такъ какъ эти многоугольники подобны, то периметры ихъ относятся

между собою (кн. 6, прим. 17, пред. d), какъ ихъ апоѳемы, но апоѳема вписаннаго есть  $OK$ , а описаннаго есть радіусъ круга, слѣдовательно:

$$P:p=r:OK.$$

Въ многоугольникѣ величина сторонъ неопредѣленно уменьшается съ неопредѣленнымъ увеличеніемъ ихъ числа, слѣдовательно, неопредѣленно уменьшается и разность  $r-OK=KL$ , будучи меньше стороны  $AL$ , какъ видно изъ треугольника  $AKL$ , въ которомъ  $AL>KL$ . Если  $KL$  стремится къ нулю, то  $OK$  неопредѣленно приближается къ  $r$ , слѣдовательно, неопредѣленно сближаются и периметры  $P$  и  $p$ , какъ видно изъ предыдущей пропорціи. Но  $p$  меньше, а  $P$  больше окружности круга (пред. 16), слѣдовательно оба они неопредѣленно приближаются къ окружности, одинъ увеличиваясь, а другой уменьшаясь, поэтому окружность круга есть ихъ общій предѣлъ.

*Предложеніе 18.* Площадь круга есть предѣлъ площадей какъ вписаннаго такъ и описаннаго многоугольниковъ (фиг. 295).

*Доказат.* Въ самомъ дѣлѣ, многоугольники  $ABCDEFG$  и  $A'B'C'D'E'F'G'$  подобны, слѣдовательно (кн. 6, примѣч. 17, пред. d), площади ихъ относятся между собою какъ квадраты апоѳемъ, но апоѳема вписаннаго многоугольника есть  $OK$  (см. фиг. 295), а описаннаго есть радіусъ круга, слѣдовательно мы имѣемъ:

$$\frac{\text{Пл. } A'B'...F'G'}{\text{Пл. } AB...FG} = \frac{r^2}{OK^2}$$

но мы выше показали (пред. 17), что съ увеличеніемъ числа сторонъ,  $OK$  неопредѣленно приближается къ  $r$ , слѣдовательно, какъ видно изъ предыдущей пропорціи, и площадь многоугольника  $A'B'...F'G'$  неопредѣленно приближается къ площади многоугольника  $AB...FG$ . Но площадь круга меньше первой и больше второй, слѣдовательно она есть ихъ общій предѣлъ.

Показавъ, что окружность круга и площадь его можно разсматривать какъ предѣлы величинъ болѣе простыхъ, которыхъ величина можетъ быть всегда опредѣлена, я изложу основныя предложенія методы предѣловъ.

*Предложеніе 19:* Если двѣ переменныя величины, оставаясь равными, стремятся къ извѣстнымъ предѣламъ, то и предѣлы этихъ переменныхъ также равны.

*Доказат.* Пусть  $A$  и  $B$  суть предѣлы равныхъ переменныхъ, то эти переменныя можно написать въ формѣ:

$$A+x \text{ и } B+y,$$

гдѣ  $x$  и  $y$  суть переменныя, неопредѣленныя величины, имѣющія предѣломъ нуль.

По условію мы всегда имѣемъ:

$$A+x=B+y$$

откуда:

$$A-B=y-x$$

Первая часть  $A-B$  этого уравненія есть величина постоянная, а вторая  $y-x$  есть величина переменная, и притомъ неопредѣленно уменьшающаяся, что не иначе возможно какъ только тогда, когда мы имѣемъ постоянно  $x=y$ , т. е. когда  $A=B$ .

*Предложеніе 20.* Если двѣ переменныя величины, сохраняя между собою постоянное отношеніе, стремятся къ извѣстнымъ предѣламъ, то и эти предѣлы имѣютъ между собою тоже отношеніе.

*Доказат.* Пусть предѣлы переменныхъ будутъ  $A$  и  $B$ , то сами переменныя будутъ  $A+x$  и  $B+y$ . По условію мы имѣемъ:

$$\frac{A+x}{B+y} = a,$$

гдѣ  $a$  есть величина постоянная.

Это уравненіе можно написать такъ:

$$A-Ba=ay-x,$$

въ этомъ послѣднемъ уравненіи первая часть есть величина постоянная, а вторая переменная, неопредѣленно уменьшающаяся, а это возможно только тогда, когда  $ay-x=0$ , т. е. когда:

$$\frac{A}{B} = a,$$

*Методъ предѣловъ.* Когда хотять найти зависимость между величинами, которыя не легко сравниваются, то находятъ такія простѣйшія величины, которыя бы можно было легко сравнивать и которыхъ бы данныя, для сравненія величины, были предѣлами. Если такія простѣйшія величины найдутся, то задача относительно данныхъ величинъ рѣшена. Въ самомъ дѣлѣ, зависимость между найденными простѣйшими выражается, въ большей части случаевъ, уравненіемъ, въ которомъ обѣ части суть переменныя величины, имѣющія извѣстные предѣлы, слѣдовательно въ силу предложенія (19) это уравненіе существуетъ и между предѣлами взятыхъ простѣйшихъ величинъ.

Приложимъ сказанное къ кругу.



*Предложеніе 21.* Окружности двухъ круговъ относятся между собою какъ ихъ радіусы.

*Доказат.* Пусть  $r$  и  $r_1$  будутъ радіусы, а  $O$  и  $O_1$  длина окружностей. Впишемъ въ обѣ эти окружности правильные многоугольники съ однимъ и тѣмъ же числомъ сторонъ. Пусть  $P$  и  $P_1$  будутъ периметры этихъ многоугольниковъ, то мы будемъ имѣть (кн. 6, примѣч. 17, пред. d):

$$\frac{P}{P_1} = \frac{r}{r_1}.$$

Эта пропорція имѣетъ мѣсто какое бы ни было число сторонъ вписанныхъ многоугольниковъ, но, съ увеличеніемъ числа сторонъ многоугольниковъ, периметры ихъ стремятся къ своимъ предѣламъ  $O$  и  $O_1$ , слѣдовательно (пред. 20) таже пропорція будетъ имѣть мѣсто и между предѣлами, т. е. мы будемъ имѣть:

$$\frac{O}{O_1} = \frac{r}{r_1}.$$

*Слѣдствіе.* Предъидущую пропорцію можно написать въ слѣдующей формѣ:

$$\frac{O}{r} = \frac{O_1}{r_1} \quad \text{или} \quad \frac{O}{2r} = \frac{O_1}{2r_1},$$

изъ которой видно, что отношеніе окружности къ діаметру есть постоянное число для всѣхъ круговъ. Это число назвали, какъ мы видѣли уже выше, чрезъ  $\pi$ , т. е. мы всегда имѣемъ для всѣхъ круговъ.

$$\frac{O}{2r} = \pi, \quad \text{или} \quad O = 2\pi r.$$

*Предложеніе 22.* Площади двухъ круговъ относятся между собою, какъ квадраты ихъ радіусовъ.

*Доказат.* Пусть  $r$  и  $r_1$  будутъ радіусы, а  $P$  и  $P_1$  площади круговъ. Впишемъ въ оба круга правильные многоугольники съ однимъ и тѣмъ же числомъ сторонъ и означимъ площади этихъ многоугольниковъ чрезъ  $P$  и  $P_1$ , то мы будемъ имѣть:

$$\frac{P}{P_1} = \frac{r^2}{r_1^2}$$

Эта пропорція будетъ имѣть мѣсто какое бы ни было число сторонъ вписанныхъ многоугольниковъ, но, съ увеличеніемъ числа сторонъ много-

угольниковъ ихъ площади стремятся къ площадямъ круговъ, которыя суть ихъ предѣлы, слѣдовательно мы будемъ имѣть (пред. 20):

$$\frac{\Pi}{\Pi_1} = \frac{r^2}{r_1^2}$$

т. е. площади двухъ круговъ относятся между собою, какъ квадраты ихъ радиусовъ.

*Слѣдствіе.* Если предыдущую пропорцію напишемъ въ формѣ:

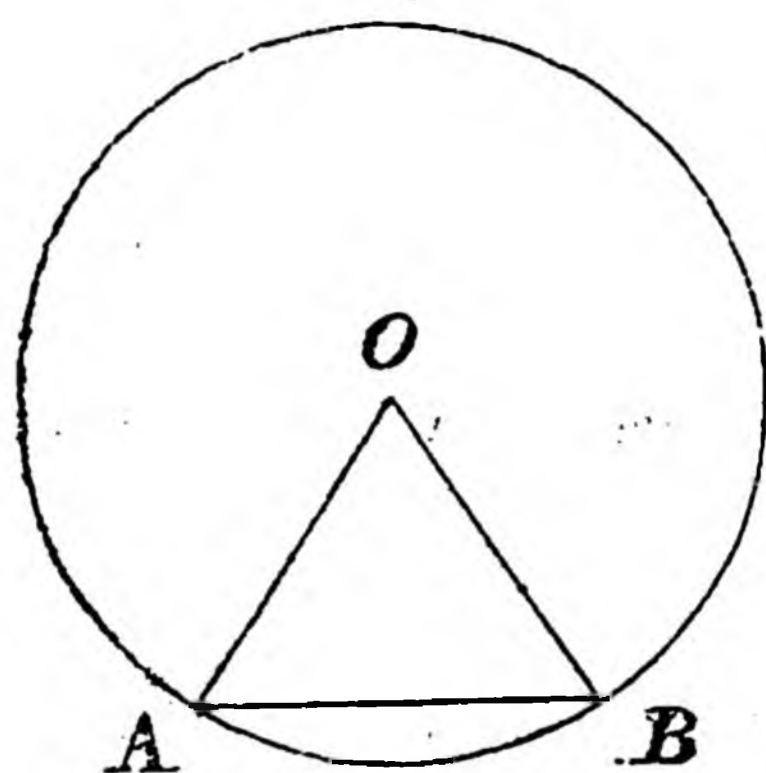
$$\frac{\Pi}{r^2} = \frac{\Pi_1}{r_1^2},$$

то видимъ, что отношеніе площади круга къ площади квадрата, построеннаго на радиусъ, есть число постоянное.

Легко показать, что отношеніе  $\frac{\Pi}{r^2}$  есть ничто иное какъ  $\pi$ . Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли, что площадь круга (прибав. VI, пред. 1) равна площади прямоугольнаго треугольника коего одинъ катетъ равенъ окружности, а другой радиусу круга, но окружность круга равна  $2\pi r$ , слѣдовательно площадь круга будетъ равна  $\pi r^2$ . Откуда  $\frac{\Pi}{r^2} = \pi$ ,

*Предложеніе 23.* Площадь сектора равна дугѣ сектора, умноженной на половину радиуса (фиг. 296).

Фиг. 296.



*Доказат.* Мы видѣли (кн. 6, пред. 33), что площади двухъ секторовъ относятся между собою какъ соотвѣтствующія дуги, слѣдовательно:

$$\text{Площ. круг.} : \text{Площ. сек.} = \text{Ок.} : \text{дуг. } AB$$

или

$$\pi r^2 : \text{Площ. сек.} = 2\pi r : \text{дуг. } AB,$$

откуда:

$$\text{Площ. сек.} = \text{дуг. } AB \cdot \frac{r}{2}.$$

Остается теперь показать какими способами новые геометры вычислили приближенное отношеніе окружности къ діаметру. Такихъ способовъ есть нѣсколько, изъ коихъ главные суть слѣдующіе: *способъ периметровъ, способъ изопериметровъ и способъ площадей.*

1. *Способъ периметровъ.* Этотъ способъ употребилъ, какъ мы видѣли, Архимедъ, онъ самый простой и самый естественный, хотя ведетъ къ довольно сложнымъ ариѳметическимъ вычисленіямъ. Новые геометры, не прибавили къ нему ничего особеннаго, приложили только свои болѣе совершенные ариѳметическіе и алгебраическіе приемы.

Мы выше видѣли, что окружность есть предѣлъ, къ которому стремятся, съ увеличеніемъ числа сторонъ, правильные вписанные и описанные многоугольники, одинъ увеличиваясь, а другой уменьшаясь. Слѣдовательно, вычисляя периметры такихъ многоугольниковъ все съ большимъ и большимъ числомъ сторонъ мы получимъ рядъ чиселъ попарно, между каждою парою которыхъ будетъ заключаться числовая величина окружности.

Если  $r$  есть радіусъ даннаго круга, а  $a_n$  есть сторона правильнаго вписаннаго многоугольника съ  $n$  сторонами, то стороны  $a_{2n}$  и  $A_{2n}$  вписаннаго и описаннаго правильныхъ многоугольниковъ съ удвоеннымъ числомъ сторонъ будутъ:

$$a_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a_n^2}}, \quad A_{2n} = \frac{2ra_{2n}}{\sqrt{4r^2 - a_{2n}^2}}$$

Принимая радіусъ круга за единицу, предъидущія формулы слѣдуютъ:

$$a_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}, \quad A_{2n} = \frac{2a_{2n}}{\sqrt{4 - a_{2n}^2}}. \quad (1)$$

Если радіусъ круга равенъ единицѣ, то окружность будетъ  $2\pi$ , слѣдовательно число  $\pi$  будетъ всегда заключаться между полупериметрами вписаннаго и описаннаго многоугольниковъ. Такъ какъ сторона вписаннаго шестиугольника равна радіусу круга, то его полупериметръ есть 3, а какъ сторона описаннаго квадрата равна діаметру круга, то его полупериметръ равенъ, 4, слѣдовательно число  $\pi$  больше 3 и меньше 4, т. е.  $3 < \pi < 4$ .

Полагая для краткости:

$$u_1 = \frac{1}{2} \sqrt{4 - a_n^2}, \quad u_2 = \frac{1}{2} \sqrt{4 - a_{2n}^2}, \quad u_3 = \frac{1}{2} \sqrt{4 - a_{4n}^2}, \dots$$

и замѣчая, что  $a_6 = 1$ , найдемъ:

$$a_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}, \quad A_{12} = \frac{a_{12}}{u_1} \quad 2\pi \begin{matrix} > 12a_{12} \\ < 12A_{12} \end{matrix}$$



$$a_{24} = \sqrt{2 - 2u_1^3}, \quad A_{24} = \frac{a_{24}}{u_2}, \quad 2\pi \begin{matrix} > 24a_{24} \\ < 24A_{24} \end{matrix}$$

$$a_{48} = \sqrt{2 - 2u_2}, \quad A_{48} = \frac{a_{48}}{u_3}, \quad 2\pi \begin{matrix} > 48a_{48} \\ < 48A_{48} \end{matrix}$$

и т. д.

Такимъ образомъ, начиная съ шестиугольника, мы можемъ вычислить послѣдовательно периметры вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ съ 12, 24, 48, 96, и т. д. сторонами. Между парю такихъ периметровъ лежитъ всегда число  $2\pi$  или окружность круга, коего радиусъ=1. Если возьмемъ  $\sqrt{3}=1,732050807568877$  \*, то найдемъ послѣдовательно:

$a_{12}$	$=0,517638090205$	$12 a_{12}$	$=6,2116571$
$u_1$	$=0,965925826289$	$12 A_{12}$	$=6,4307806$
$a_{24}$	$=0,261052384440$	$24 a_{24}$	$=6,2652572$
$u_2$	$=0,991444861374$	$24 A_{24}$	$=6,3193199$
$a_{48}$	$=0,130806258460$	$48 a_{48}$	$=6,2787004$
$u_3$	$=0,997858923234$	$48 A_{48}$	$=6,2921724$
$a_{96}$	$=0,065438165643$	$96 a_{96}$	$=6,2820639$
$u_4$	$=0,999464587476$	$96 A_{96}$	$=6,2854292$
$a_{192}$	$=0,032723463253$	$192 a_{192}$	$=6,2829049$
$u_5$	$=0,999866137909$	$192 A_{192}$	$=6,2837461$
$a_{384}$	$=0,016362279208$	$384 a_{384}$	$=6,2831152$
$u_6$	$=0,999966535917$	$384 A_{384}$	$=6,2833260$
$a_{768}$	$=0,008181208052$	$768 a_{768}$	$=6,2831678$
$u_7$	$=0,999991633444$	$768 A_{768}$	$=6,2832203$
$a_{1536}$	$=0,004090612582$	$1536 a_{1536}$	$=6,2831809$
$u_8$	$=0,999997908359$	$1536 A_{1536}$	$=6,2831941$
$a_{3072}$	$=0,002045307361$	$3072 a_{3072}$	$=6,2831842$
$u_9$	$=0,999999477089$	$3072 A_{3072}$	$=6,2831875$
$a_{6144}$	$=0,001022653814$	$6144 a_{6144}$	$=6,2831850$
$u_{10}$	$=0,999999869272$	$6144 A_{6144}$	$=6,2831858$
$a_{12288}$	$=0,000511326924$	$12288 a_{12288}$	$=6,2831852$
$u_{11}$	$=0,999999967318$	$12288 A_{12288}$	$=6,2831854$

\* Mémoires de l'Académie des Sciences, 1747, pag. 443.

Если рассмотрим периметры вписанного и описанного многоугольниковъ, то увидимъ, что по мѣрѣ возрастанія числа сторонъ периметры имѣютъ все болѣе и болѣе общихъ десятичныхъ знаковъ, такъ что периметры—12288 угольниковъ отличаются только седьмой десятичной цифрой, следовательно первая семь цифръ общія обоимъ периметрамъ принадлежатъ, очевидно, окружности, т. е. число 6,283185 выражаетъ приближенное числовое значеніе окружности, когда радіусъ=1, съ погрѣшностью меньшею одной милліонной радіуса.

Если возьмемъ среднѣе число между периметрами вписанного и описанного 12288-угольниковъ, то получимъ число 6,2831853, которое выражаетъ окружность вѣрно включительно до послѣдней цифры, т. е. мы имѣемъ:

$$2\pi=6,2831853$$

откуда:

$$\pi=3,1415926$$

съ погрѣшностью меньшею 0,000001.

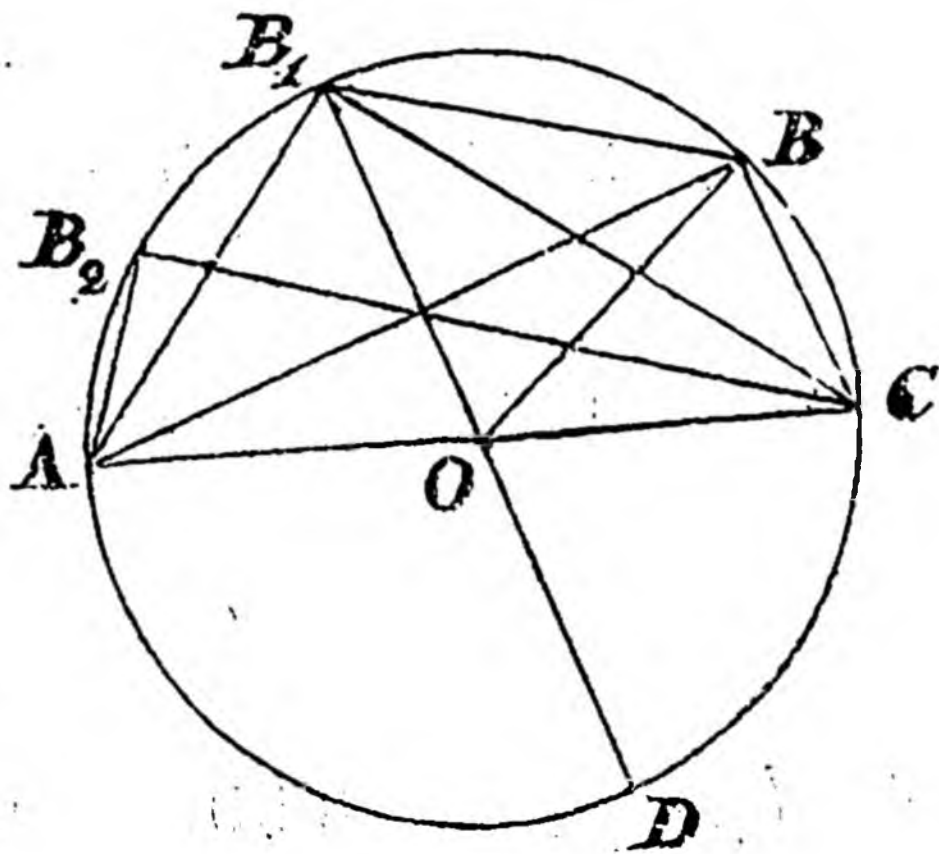
Если окружность круга примемъ за единицу, то изъ формулы  $Ок.=2\pi r$  найдемъ:

$$2r=\frac{1}{\pi}=0,3183099$$

число, выражающее діаметръ круга, коего окружность=1.

Можно уменьшить въ двое число извлеченій корней, вычисляя вмѣсто сторонъ многоугольниковъ хорды  $BC$  и  $B_1C$  дугъ, дополняющихъ дуги  $AB$ ,  $AB_1$ , до полуокружности (фиг. 297).

Фиг. 297.



Въ самомъ дѣлѣ, пусть  $AB=a_n$ ,  $AB_1=a_{2n}$ ,  $AB_2=a_{4n}$ ,  $BC=b_n$ ,  $B_1C=b_{2n}$ ,  $B_2C=b_{4n}$  и  $AC=2$ , то мы найдемъ:

$$b_n=\sqrt{4-a_n^2}, \quad b_{2n}=\sqrt{4-a_{2n}^2}$$

и какъ  $a_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}$ , то:

$$a_{2n} = \sqrt{2 - b_n}, \quad a_{2n}^2 = 2 - b_n$$

если вмѣсто  $a_{2n}^2$  подставимъ его предыдущее выраженіе въ выраженіе для  $b_{2n}$ , то получимъ:

$$b_{2n} = \sqrt{2 + b_n}.$$

Точно также найдемъ:

$$b_{4n} = \sqrt{2 + b_{2n}}$$

и т. д.

Полагая  $a_n = 1$  найдемъ  $b_n = \sqrt{3} = 1,7320508075$ . Очевидно въ этомъ случаѣ  $a_n = a_6$ , а  $b_n$ ,  $b_{2n}$ ,  $b_{4n}$ , будутъ хорды соотвѣтствующія многоугольникамъ съ 12, 24, 48 и т. д. сторонами. Если ихъ означимъ чрезъ  $b_6$ ,  $b_{12}$ ,  $b_{24}$  и т. д., то найдемъ:

$$b_{12} = \sqrt{2 + 1,7320508075} = 1,9318516525$$

$$b_{24} = \sqrt{2 + 1,9318516525} = 1,9828897227$$

$$b_{48} = \sqrt{2 + 1,9828897227} = 1,9957178465$$

$$b_{96} = \sqrt{2 + 1,9957178465} = 1,9989291749$$

$$b_{192} = \sqrt{2 + 1,9989291749} = 1,9997322758$$

$$b_{384} = \sqrt{2 + 1,9997322758} = 1,9999330678$$

$$b_{768} = \sqrt{2 + 1,9999330678} = \sqrt{3,9999330678}$$

откуда наконецъ:

$$\begin{aligned} a_{768} &= \sqrt{4 - b_{768}^2} = \sqrt{4 - 3,9999330678} = \\ &= \sqrt{0,0000669322} = 0,00818121. \end{aligned}$$

Умножая это послѣднее число на 768, получимъ периметръ 768 угольника вписаннаго, затѣмъ найдемъ периметръ 768 угольника описан-



наго, откуда, какъ было сдѣлано выше, опредѣлимъ  $\pi$  съ известнымъ приближеніемъ.

Способъ периметровъ можетъ быть измѣненъ слѣдующимъ образомъ:

Если означимъ чрезъ  $p_1$  и  $P_1$  периметры двухъ правильныхъ многоугольниковъ  $p_1$  вписаннаго, а  $P_1$  описаннаго, а чрезъ  $p_2$  и  $P_2$  также периметры вписаннаго и описаннаго многоугольниковъ, но съ двойнымъ числомъ сторонъ, то какъ мы видѣли выше, будемъ имѣть что:

$$P_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{P_1} + \frac{1}{p_1} \right), \quad \frac{1}{p_2} = \frac{1}{\sqrt{P_2 p_1}}, \quad (1)$$

слѣдовательно, числа:

$$\frac{1}{P_1}, \frac{1}{p_1}, \frac{1}{P_2}, \frac{1}{p_2}, \frac{1}{P_4}, \frac{1}{p_4}, \dots \quad (2)$$

начиная съ третьяго, суть попеременно средне-арифметическія и средне-геометрическія между двумя предшествующими каждому изъ нихъ.

Если числа:

$$\frac{1}{P_1}, \frac{1}{P_2}, \frac{1}{P_4}, \dots,$$

означимъ чрезъ:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

а числа:

$$\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \frac{1}{p_4}, \dots$$

чрезъ:

$$u_1, u_2, u_3, \dots,$$

то рядъ (2) сдѣлается:

$$a_1, u_1, a_2, u_2, a_3, u_3, \dots, a_n, u_n, \dots \quad (3)$$

а формулы (1) вообще будутъ:

$$a_n = \frac{1}{2} (a_{n-1} + u_{n-1}), \quad u_n = \sqrt{a_n u_{n-1}}.$$

Числа  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , возрастаая неопредѣленно, остаются всегда  $< \frac{1}{O_k}$  а числа  $u_1, u_2, u_3, \dots$ , уменьшаясь неопредѣленно, остаются  $> \frac{1}{O_k}$ , т. е. число  $\frac{1}{O_k}$  будетъ всегда заключаться между двумя послѣдовательными числами ряда (3).

Но мы видѣли, что каждая изъ разностей  $u_2 - a_2, u_3 - a_3, \dots, u_n - a_n$  меньше одной четверти непосредственно своей предъидущей (приб. 3, пред. 13), слѣдовательно:

$$u_n - a_n < \frac{u_1 - a_1}{4^{n-1}},$$

откуда видимъ, что разность  $u_n - a_n$  съ возрастаніемъ числа  $n$  убываетъ неопредѣленно.

Если возьмемъ кругъ, коего радіусъ  $= \frac{1}{2}$ , то мы будемъ имѣть  $\frac{1}{\pi} = \frac{1}{O_K}$ , т. е.  $\frac{1}{\pi}$  будетъ предѣлъ ряда, составленнаго изъ чиселъ обратныхъ периметрамъ правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ, коихъ число сторонъ возрастаетъ все удваиваясь. Если теперь возьмемъ периметры квадратовъ описаннаго и вписаннаго, то найдемъ, что:

$$\frac{1}{P_1} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{p_1} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

и если еще замѣтимъ, что  $\frac{1}{4}$  есть средне-арифметическое между 0 и  $\frac{1}{2}$ , а  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  есть средне-геометрическое между тѣми же числами, то будемъ имѣть слѣдующее предложеніе:

*Предложеніе 24.* Число  $\frac{1}{\pi}$  есть предѣлъ къ которому стремятся члены ряда построеннаго слѣдующимъ образомъ: начиная съ 0 и  $\frac{1}{2}$  составляютъ попеременно то средне-арифметическое, то средне-геометрическое изъ двухъ непосредственно предшествующихъ членовъ.

Если, начиная съ 0 и  $\frac{1}{2}$ , составимъ такой рядъ, то найдемъ:

Число сторонъ.	Апоемы:	Радіусы:
4	$a_1 = 0,2500000$	$u_1 = 0,3535534$
8	$a_2 = 0,3017767$	$u_2 = 0,3266407$
16	$a_3 = 0,3142087$	$u_3 = 0,3203644$
32	$a_4 = 0,3162867$	$u_4 = 0,3188217$
64	$a_5 = 0,3180541$	$u_5 = 0,3184377$
128	$a_6 = 0,3182459$	$u_6 = 0,3183418$

$\frac{1}{\pi}$  заключается между числами  $a_6$  и  $u_6$  и какъ эти два числа имѣютъ по

три общихъ десятичныхъ знаковъ, то  $\frac{1}{\pi}$  вычислено вѣрно до 0,001, т. е. съ погрѣшностью меньшею 0,001 можно принять:

$$\frac{1}{\pi} = 0,318.$$

Откуда  $\pi = \frac{1}{0,318} = 3,142$  вѣрно до одной сотой, т. е.  $\pi = 3,14$  съ погрѣшностью меньшею 0,01.

Легко видѣть, что погрѣшность, сдѣланная въ вычисленіи  $\frac{1}{\pi}$ , будетъ въ десять разъ меньше погрѣшности  $\pi$ . Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что приближенная величина  $\pi$  есть  $\pi - \alpha$ , то  $\frac{1}{\pi - \alpha} = \frac{1}{\pi} + \frac{\alpha}{\pi^2} + \dots$ , слѣдовательно погрѣшность при вычисленіи  $\frac{1}{\pi}$  будетъ меньше  $\frac{\alpha}{\pi^2}$ , если ее назовемъ чрезъ  $\beta$ , то:

$$\beta < \frac{\alpha}{\pi^2} \quad \text{или} \quad \alpha < \pi^2 \beta$$

но  $\pi > 3$  и  $< 4$ , слѣдовательно тѣмъ болѣе  $\alpha < 10\beta$ . Откуда видимъ, что, вычисливъ  $\frac{1}{\pi}$  до  $m+1$ -ой десятичной цифры, мы въ  $\pi$  можемъ только рассчитывать на  $m$  десятичныхъ знаковъ.

2. *Способъ изопериметровъ.* Положимъ, что окружность круга  $O_k = 2$ , то изъ формулы  $O_k = 2\pi r$ , мы будемъ имѣть:

$$\pi = \frac{1}{r} \quad \text{или} \quad r = \frac{1}{\pi},$$

т. е. число  $\frac{1}{\pi}$  есть радіусъ круга, коего окружность равна 2. Слѣдовательно апогема  $a$  и радіусъ  $u$ , всякаго правильнаго многоугольника, коего периметръ равенъ 2, суть приближенные величины  $\frac{1}{\pi}$ , изъ коихъ первая меньше, а вторая больше, такъ какъ окружность, вписанная въ такой многоугольникъ меньше 2, а описанная больше 2, слѣдовательно ихъ радіусы  $a$  и  $u$  должны заключать между собою радіусъ  $r$ , окружности равной 2, т. е. число  $\frac{1}{\pi}$ .

Возьмемъ квадратъ, коего сторона  $= \frac{1}{2}$ , его периметръ будетъ  $= 2$ , а апогема  $a_1 = \frac{1}{4}$ , а его радіусъ, т. е. половина діагонали  $u_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ .

Въ пред. 13 мы видѣли, что если  $a_{n-1}$  и  $u_{n-1}$  суть апогема и радіусъ,



какого нибудь правильного многоугольника, а  $a_n$  и  $u_n$  суть апогея и радиусы правильного многоугольника съ двойнымъ числомъ сторонъ, но коего периметръ равенъ периметру предыдущаго многоугольника, то:

$$a_n = \frac{1}{2} (a_{n-1} + u_{n-1}) \quad u_n = \sqrt{a_n u_{n-1}}$$

Съ помощью этихъ формулъ мы построимъ рядъ:

$$a_1, u_1, a_2, u_2, a_3, u_3, \dots, a_n, u_n, \dots$$

тождественный съ рядомъ (3) пред. 23, если начнемъ съ  $a_1 = \frac{1}{4}$ ,  $u_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ , но только въ этомъ послѣднемъ рядѣ ( $\alpha$ )  $a_1, a_2, a_3, \dots$  суть апогеи, а  $u_1, u_2, u_3, \dots$  суть радиусы правильныхъ изопериметрическихъ многоугольниковъ, между тѣмъ, какъ въ рядѣ (3)  $a_1, a_2, \dots$  суть числа обратныя периметрамъ описанныхъ правильныхъ многоугольниковъ, а  $u_1, u_2, \dots$  числа обратныя периметрамъ вписанныхъ.

3. *Способъ площадей.* Въ пред. 12 мы видѣли, что если  $p_n$  и  $P_n$  суть площади правильныхъ вписаннаго и описаннаго многоугольниковъ съ  $n$  сторонами, а  $p_{2n}$  и  $P_{2n}$  площади правильныхъ вписаннаго и описаннаго многоугольниковъ, но съ двойнымъ числомъ сторонъ, то мы имѣемъ:

$$p_{2n} = \sqrt{p_n P_n} \quad \text{и} \quad \frac{1}{P_{2n}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p_{2n}} + \frac{1}{P_n} \right) \quad (1)$$

или

$$p_{2n} = \sqrt{p_n P_n} \quad \text{и} \quad P_{2n} = \frac{2p_n P_n}{P_n + p_{2n}} \quad (2)$$

Такъ какъ площадь круга, коего радиусъ есть  $r$  есть  $\pi r^2$ , то положивъ  $r=1$  мы найдемъ что пл. кр.  $=\pi$ . Но площадь правильного, вписаннаго въ кругъ, многоугольника меньше площади круга, а площадь описаннаго больше, слѣдовательно число  $\pi$  лежитъ между площадями вписаннаго и описаннаго многоугольниковъ около круга, коего радиусъ  $=1$ . Слѣдовательно, если съ помощью формулъ (1) и (2) будемъ вычислять площади многоугольниковъ, вписаннаго и описаннаго, коихъ число сторонъ возрастаетъ удваиваясь, то будемъ имѣть два приближенія числа  $\pi$  одно больше а другое меньше, общія цифры этихъ приближеній будутъ принадлежать числу  $\pi$ .

Если формулы (1) напомнимъ въ формѣ:

$$\frac{1}{p_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{p_n P_n}}, \quad \frac{1}{P_{2n}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p_{2n}} + \frac{1}{P_n} \right) \quad (3)$$

и построимъ вписанный и описанный квадраты въ кругѣ, то найдемъ, что площадь вписаннаго будетъ=2, а описаннаго будетъ=4. Означимъ площадь вписаннаго квадрата чрезъ  $p_1$ , а описаннаго чрезъ  $P_1$ , то:

$$p_1=2, \quad P_1=4,$$

откуда:

$$\frac{1}{p_1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{P_1} = \frac{1}{4},$$

слѣдовательно, если чрезъ  $p_2$  означимъ площадь вписаннаго восьмиугольника, то найдемъ изъ (3):

$$\frac{1}{p_2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Если положимъ  $\frac{1}{P_2} = a_1 = \frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{p_2} = r_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ , то получимъ изъ формуль (3) рядъ чиселъ:

$$a_1, r_1, a_2, r_2, a_3, r_3, \dots, a_n, r_n, \dots \quad (4)$$

найденныхъ выше, между каждою парою которыхъ лежитъ число  $\frac{1}{\pi}$ .

Мы видимъ также, что разъ числа ряда (4) представляютъ обратныя числа периметрамъ вписанныхъ и описанныхъ правильныхъ многоугольниковъ, другой разъ, эти числа суть апоемы и радиусы изопериметрическихъ многоугольниковъ, и третій разъ онѣ суть числа, обратныя площадямъ правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ, слѣдовательно различныя по мысли приемы въ сущности ничѣмъ не отличаются между собою.

Лежандръ для вычисленія  $\pi$  употребилъ формулы (2):

$$p_{2n} = \sqrt{p_n P_n} \quad P_{2n} = \frac{2p_n P_n}{P_n + p_{2n}}$$

Полагая радиусъ круга=1, площади квадратовъ вписаннаго и описаннаго, какъ мы видѣли, будутъ 2 и 4, слѣдовательно, площади  $p_8$  и  $P_8$  вписаннаго и описаннаго восьмиугольниковъ будутъ:

$$p_8 = \sqrt{8} = 2,828427, \quad P_8 = \frac{16}{2 + \sqrt{8}} = 3,3187085,$$

изъ этихъ послѣднихъ значеній найдемъ площади вписаннаго и описаннаго шестнадцатиугольниковъ и т. д.

Вотъ таблица до 32768-угольниковъ вписанныхъ и описанныхъ:

Число сторонъ.	Многоуг. вписанный.	Многоуг. описанный.
4	2,0000000	4,0000000
8	2,8284271	3,3137085
16	3,0614674	3,1825979
32	3,1214451	3,1517249
64	3,1365485	3,1441184
128	3,1403311	3,1422236
256	3,1412772	3,1417504
512	3,1415138	3,1416321
1024	3,1415729	3,1416025
2048	3,1415877	3,1415951
4096	3,1415914	3,1415933
8192	3,1415923	3,1415928
16384	3,1415925	3,1415927
32768	3,1415926	3,1415926

изъ этихъ таблицъ видимъ, что площадь круга или  $\pi$  будетъ  $= 3,1415926$  съ погрѣшностью меньше 0,0000001.

Изъ этого видимъ, что вычисленіе  $\pi$ , кромѣ ариѳметическихъ трудностей, другихъ не представляетъ. Геометры старались по возможности сократить ариѳметическія вычисленія и въ этомъ отношеніи достигли слѣдующихъ результатовъ, которые принадлежатъ Снелліусу и Гюгенсу:

Изъ послѣдней таблицы видимъ, что для вѣрныхъ семи десятичныхъ знаковъ  $\pi$  надобно вычислить площади многоугольниковъ вписанныхъ и описанныхъ отъ 4 до 32768 сторонъ, Снелліусъ и Гюгенсъ дали формулы, по которымъ для полученія вѣрныхъ семи десятичныхъ знаковъ надобно вычислять площади или периметры съ гораздо меньшимъ числомъ сторонъ.

*Предложеніе 25.* Если  $p_1, p_2, p_3, \dots$  суть площади вписанныхъ правильныхъ многоугольниковъ, коихъ число сторонъ возрастаетъ удваиваясь, а  $P_1, P_2, P_3, \dots$ , площади такихъ же многоугольниковъ описанныхъ, то:



$$p_3 - p_2 > \frac{p_2 - p_1}{4} \quad P_1 - P_3 > \frac{p_2 - p_1}{2},$$

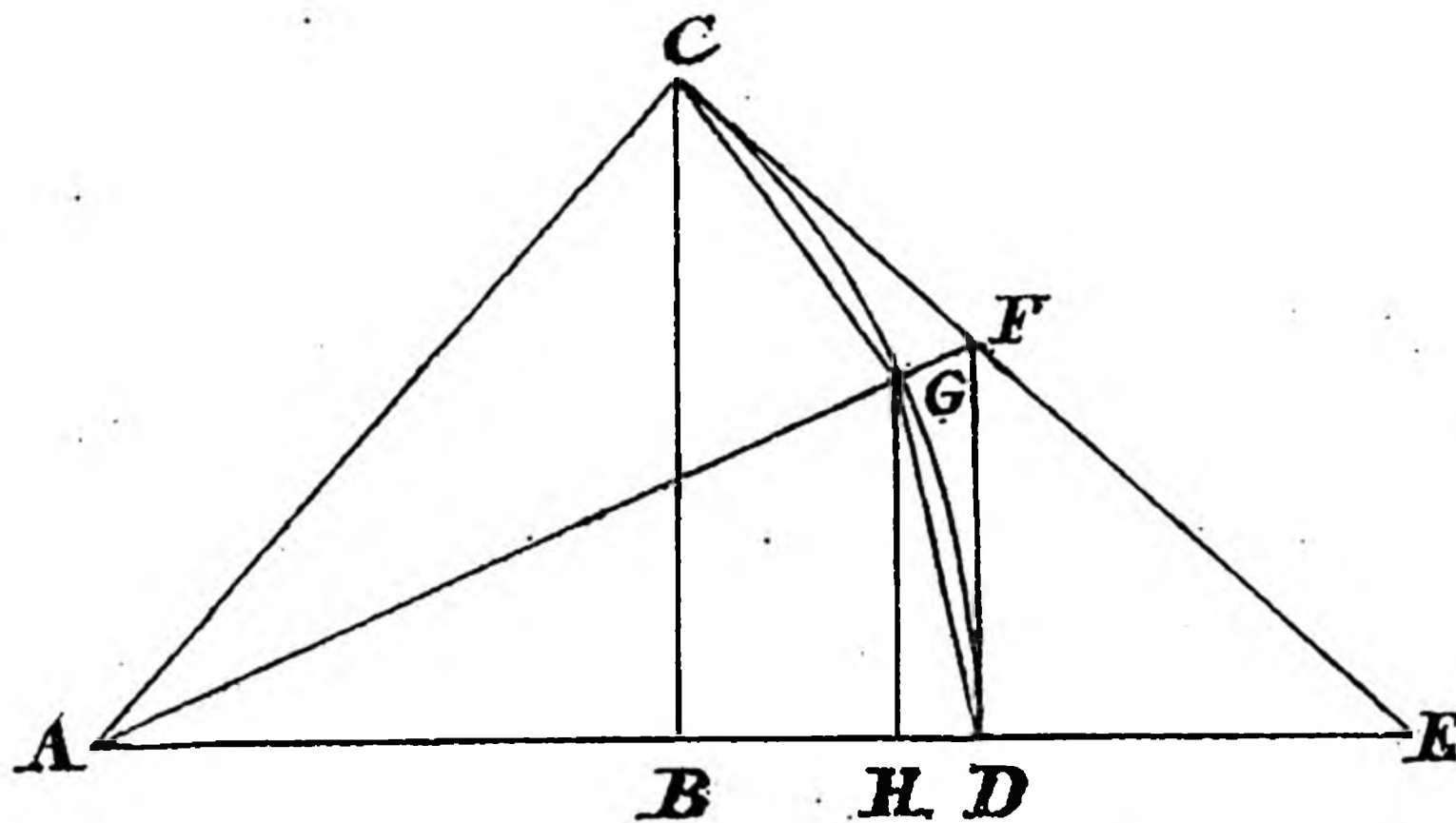
$$p_2 + \frac{p_2 - p_1}{3} < \text{Кр.} < P_1 - \frac{P_1 - p_1}{3}.$$

гдѣ Кр. есть площадь круга (фиг. 298).

*Доказат.* Пусть секторъ  $DAC$  будетъ  $2n$ -ая часть круга, углы  $CBA$ ,  $ACE$ ,  $FDA$  пусть будутъ прямые и точка  $G$  пусть будетъ середина дуги  $DC$ , то мы, очевидно, имѣемъ:

$$BDC = \frac{p_2 - p_1}{2n}, \quad DGC = \frac{p_3 - p_2}{2n}, \quad DEF = \frac{P_1 - P_2}{2n}.$$

Фиг. 298.



Проведемъ  $HG \parallel DF$ , то  $\triangle HDG$  равенъ и подобенъ половинѣ  $\triangle DGC$ . Кроме этого мы имѣемъ:

$$\frac{\triangle HDG}{\triangle BDC} = \frac{HD}{BD} \cdot \frac{HG}{BC}.$$

Но мы имѣемъ:

$$\frac{HD}{BD} = \frac{DG^2}{DC^2} > \frac{1}{4},$$

такъ какъ  $\frac{DG}{DC} > \frac{1}{2}$ ; далѣе  $\frac{HG}{BC} > \frac{1}{2}$ , потому что  $\frac{HG}{DC} = \frac{1}{2}$  и  $\frac{DC}{BC} > 1$ , следовательно:

$$\frac{\triangle HDG}{\triangle BDC} > \frac{1}{8}$$

или

$$\frac{\triangle DGC}{\triangle BDC} > \frac{1}{4}$$

т. е.:

$$p_3 - p_2 > \frac{p_2 - p_1}{4}.$$

Замѣчая, что  $CF = FD < FE$ , мы имѣемъ:

$$\frac{\triangle DEF}{\triangle BEC} = \frac{FE^2}{CE^2} > \frac{1}{4},$$

$$\frac{\triangle BEC}{\triangle BDC} = \frac{BE}{BD} = \frac{CE}{CF} > 2,$$

откуда, перемножая, получимъ:

$$\frac{\triangle DEF}{\triangle BDC} > \frac{1}{2}$$

т. е.:

$$P_1 - P_2 > \frac{p_2 - p_1}{2}.$$

Такъ какъ по мѣрѣ возрастанія числа сторонъ многоугольниковъ площади ихъ приближаются неопредѣленно къ площади круга, то  $p_\infty$  и  $P_\infty$  не будутъ отличаться отъ круга и мы получимъ:

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &= p_2 - p_1 \\ p_3 - p_2 &> \frac{1}{4}(p_2 - p_1) \\ p_4 - p_3 &> \frac{1}{4}(p_3 - p_2) > \frac{1}{16}(p_2 - p_1) \\ p_5 - p_4 &> \frac{1}{4}(p_4 - p_3) > \frac{1}{64}(p_2 - p_1) \\ &\dots \end{aligned}$$

Складывая эти неравенства и замѣчая что  $p_\infty = \text{Кр.}$ , а  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{4}{3}$ , найдемъ:

$$\text{Кр.} - p_1 > \frac{4}{3}(p_2 - p_1).$$

Изъ неравенствъ:

$$P_1 - P_2 > \frac{1}{2} (p_2 - p_1)$$

$$P_2 - P_3 > \frac{1}{2} (p_3 - p_2)$$

$$P_3 - P_4 > \frac{1}{2} (p_4 - p_3)$$

. . . . .

складывая найдемъ:

$$P_1 - \text{Кр.} > \frac{1}{2} (\text{Кр.} - p_1)$$

прибавляя къ обѣимъ частямъ по  $\text{Кр.} - p_1$ , получимъ:

$$P_1 - p_1 > \frac{3}{2} (\text{Кр.} - p_1), \quad \text{Кр.} - p_1 < \frac{2}{3} (P_1 - p_1).$$

Слѣдовательно:

$$\frac{4}{3} (p_2 - p_1) < \text{Кр.} - p_1 < \frac{2}{3} (P_1 - p_1)$$

или

$$\text{Кр.} > p_2 + \frac{p_2 - p_1}{3}$$

(a')

$$\text{Кр.} < P_1 - \frac{P_1 - p_1}{3}$$

Если означимъ чрезъ  $p'_1, p'_2, \dots, P'_1, P'_2, \dots$ , периметры многоугольниковъ коихъ площади мы означили чрезъ  $p_1, p_2, \dots, P_1, P_2, \dots$ , то будемъ имѣть:

$$p_2 = \frac{1}{2} p'_1 r, \quad P_1 = \frac{1}{2} P'_1 r, \quad \text{Кр.} = \frac{1}{2} \text{Ок.} r$$

Вторая и третья изъ этихъ формулъ очевидны, а первая получится, замѣчая, что:

$$ADGC = \triangle GAD + \triangle AGC = \frac{1}{2} AG \cdot DC.$$

Если формулы (a') измѣнимъ въ

$$\text{Кр.} > p_3 + \frac{p_3 - p_2}{3}$$

$$\text{Кр.} < P_2 - \frac{P_2 - p_2}{3}$$



а  $p_3$ ,  $p_2$ ,  $P_2$ , Кр. замѣнимъ ихъ выраженіями  $p_3 = \frac{1}{2} p_2' r$ ,  $p_2 = \frac{1}{2} p_1' r$ ,  $P_2 = \frac{1}{2} P_2' r$ , Кр.  $= \frac{1}{2}$  Ок.  $r$ , то найдемъ, что:

$$\text{Ок.} > p_2' + \frac{p_2' - p_1'}{3}$$

$$\text{Ок.} < P_2' - \frac{P_2' - p_1'}{3} \quad (b')$$

Формулы (a') и (b') значительно сокращаютъ вычисленія, такъ какъ онѣ даютъ болѣе тѣсныя предѣлы.

*Примѣръ 1.* Изъ таблицы (стр. 332) мы видимъ, что надобно было вычислить площади многоугольниковъ вписаннаго и описаннаго съ 32768 сторонами, чтобы получить вѣрныхъ семь десятичныхъ знаковъ, т. е. приближеніе до 0,0000001. По формуламъ же:

$$\text{Кр.} = \pi > p_2 + \frac{p_2 - p_1}{3}$$

$$\text{Кр.} = \pi < P_1 - \frac{P_1 - p_1}{3}$$

гдѣ  $r=1$ , слѣдовательно Кр.  $= \pi$ , достаточно вычислить площади многоугольниковъ вписаннаго и описаннаго, только до 512 сторонъ, чтобы получить приближеніе до 0,000001, между тѣмъ какъ площади вписаннаго и описаннаго 512-угольниковъ даютъ приближеніе только до 0,001.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы вычислили площади вписаннаго и описаннаго 512-угольниковъ, то имѣемъ изъ таблицы (стр. 332):

$$p_2 = 3,1415138, \quad p_1 = 3,1412772, \quad P_1 = 3,1417504,$$

откуда:

$$\frac{p_2 - p_1}{3} = 0,000788, \quad \frac{P_1 - p_1}{3} = 0,0001577,$$

слѣдовательно:

$$\pi > 3,1415926$$

$$\pi < 3,1415927$$

вѣрно до 0,000001.

*Примѣръ 2.* Изъ таблицы (стр. 332) видимъ, что надобно было вычислить периметры вписаннаго и описаннаго 12288-угольниковъ, чтобы получить приближеніе до 0,000001, между тѣмъ по формуламъ:

$$\text{Ок.} = 2\pi > p_2' - \frac{p_2' - p_1'}{3}$$

$$\text{Ок.} = 2\pi < P_2' - \frac{P_2' - p_1'}{3}.$$

Достаточно вычислить периметры вписанного и описанного 384-угольника. Въ самомъ дѣлѣ, если мы вычислили периметры вписанного и описанного 384-угольниковъ, то мы изъ таблицы (стр. 324) имѣемъ:

$$p_2' = 6,2831152,$$

$$p_1' = 6,2829049, \quad P_2' = 6,2833260,$$

откуда:

$$\frac{p_2' - p_1'}{3} = 0,0002103, \quad \frac{P_2' - p_1'}{3} = 0,0001403$$

слѣдовательно:

$$2\pi > 6,2831853$$

$$2\pi < 6,2831857,$$

откуда:

$$\pi = 3,1415926$$

вѣрно до 0,0000001.

По способу изопериметровъ, какъ видно изъ таблицы (стр. 328), вычисливъ числа обратныя периметрамъ многоугольниковъ до 128-угольниковъ вписанныхъ и описанныхъ, мы получили для  $\pi$  приближеніе только до 0,01. Слѣдующій приемъ, съ помощью той же таблицы, дастъ  $\pi$  вѣрно до 0,00001.

Въ шестой книгѣ въ 12-мъ примѣчаніи въ предложеніи с), мы показали, что если даны два числа  $a_n$  и  $u_n$ , то рядъ чиселъ,  $a_n, u_n, a_{n+1}, u_{n+1}, a_{n+2}, u_{n+2}, \dots$ , полученный слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{a_n + u_n}{2} = a_{n+1}, \quad \frac{u_n + a_{n+1}}{2} = u_{n+1}, \quad \frac{a_{n+1} + u_{n+1}}{2} = a_{n+2}, \dots$$

стремится къ числу:

$$a_n + \frac{2}{3}(u_n - a_n).$$

Въ томъ же примѣчаніи мы видѣли, что разность  $\delta$  между средне-арифметическимъ и средне-геометрическимъ двухъ чиселъ  $a$  и  $b$  меньше  $\frac{(a-b)^2}{8b}$ .

Вспомнивъ это, возьмемъ рядъ (3) стр. 327:

$$a_1, u_1, a_2, u_2, a_3, u_3, \dots, a_n, u_n,$$

въ этомъ ряду, члены  $a_2, a_3, a_4, \dots$  суть средне-арифметическія числа непосредственно двухъ предыдущихъ, а члены  $u_2, u_3, u_4, \dots$  суть средне-геометрическія числа также двухъ непосредственно предыдущихъ. Между каждою парою членовъ предыдущаго ряда лежитъ, какъ мы видѣли, число  $\frac{1}{\pi}$  или члены этого ряда неопредѣленно приближаются къ  $\frac{1}{\pi}$  изъ коихъ  $a_1, a_2, \dots$  всегда  $< \frac{1}{\pi}$ , а  $u_1, u_2, \dots$  всегда  $> \frac{1}{\pi}$ . Разность  $u_n - a_n$  съ возрастеніемъ числа  $n$  неопредѣленно убываетъ, такъ какъ мы видѣли что:

$$u_n - a_n < \frac{u_1 - a_1}{4^{n-1}}.$$

Если желаемъ вычислить  $\pi$  вѣрно до  $m$ -ой десятичной цифры включительно, то мы должны вычислять члены ряда  $a_1, u_1, a_2, u_2, \dots$  до тѣхъ поръ пока:

$$\delta < \frac{(u_n - a_n)^2}{8a_n} < \frac{1}{10^{m+1}},$$

тогда въ предѣлахъ этого приближенія мы можемъ средне-геометрическія числа  $u_{n+1}, u_{n+2}, \dots$  замѣстить средне-арифметическими  $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$ , слѣдовательно предѣлъ, къ которому стремятся члены  $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots$ , будетъ:

$$\frac{1}{\pi} = a_n + \frac{2}{3} (u_n - a_n).$$

*Примѣч. 1.* Мы видѣли, что таблица (стр. 328) дала  $\pi$  только до 0,01 вѣрно, между тѣмъ какъ съ помощью предыдущаго свойства таже таблица дастъ  $\pi$  до 0,00001.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ таблицы мы имѣемъ:

$$\begin{aligned} u_5 &= 0,3184377 \\ a_5 &= 0,3180541 \\ \hline u_5 - a_5 &= 0,0003836 \end{aligned}$$

слѣдовательно:

$$\frac{(u_5 - a_5)^2}{8a_5} < \frac{(0,0004)^2}{8,0,318} < \frac{16}{25} \cdot \frac{1}{10^7},$$

Слѣдовательно будемъ имѣть семь вѣрныхъ десятичныхъ знаковъ:

$$\frac{1}{\pi} = a_5 + \frac{2}{3} (u_5 - a_5) = 0,3180541 + 0,0002557 = 0,3183098,$$

откуда:

$$\pi = 3,141593$$

до 0,000001.



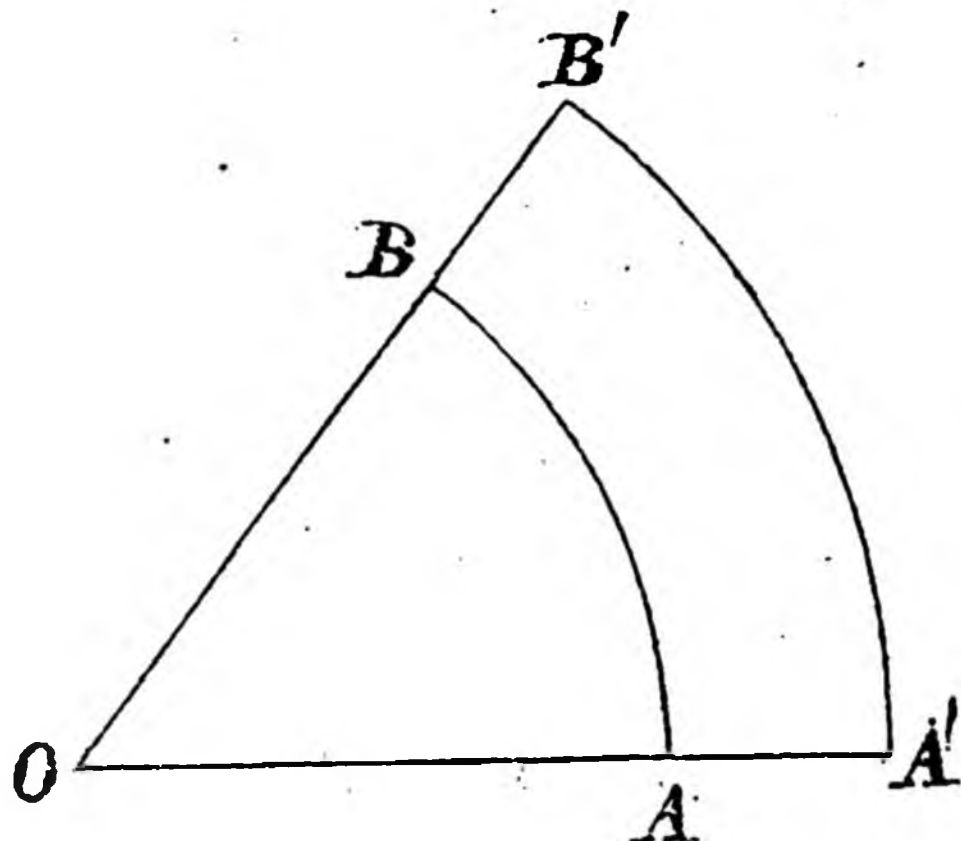
Это и все что можно сказать о способахъ, предложенныхъ геометрами для вычисления приближеннаго отношенія окружности къ діаметру. Мнѣ кажется, что преподаватель элементарной геометріи въ нашихъ гимназіяхъ долженъ обратить особенное вниманіе воспитанниковъ на эти способы и вычисленія, такъ какъ это единственный примѣръ въ элементарной геометріи, гдѣ онъ можетъ развить способъ вычисленія величинъ по приближенію. Замѣчу при этомъ, что именно эта часть у насъ проходитъ весьма неосостоятельно и какъ бы мимоходомъ, поэтому воспитанники не имѣютъ ни малѣйшаго понятія о приближеніяхъ.

*Предложеніе 26.* Двѣ дуги, соотвѣтствующія равнымъ центральнымъ угламъ въ различныхъ кругахъ, пропорціональны радіусамъ круговъ. (фиг. 299).

*Доказат.* Въ самомъ дѣлѣ, означимъ чрезъ  $s$  и  $s_1$  длины дугъ, а чрезъ  $r$  и  $r_1$  радіусы соотвѣтствующихъ круговъ. Такъ какъ углы въ одномъ и томъ же кругѣ пропорціональны дугамъ (кн. 6, пред. 33), то мы будемъ имѣть:

$$\frac{s}{2\pi r} = \frac{\angle AOB}{4d} \quad \text{и} \quad \frac{s_1}{2\pi r_1} = \frac{\angle A'OB'}{4d}$$

Фиг. 299.



гдѣ  $OA=r$ ,  $OA'=r_1$ , дуг.  $AB=s$ , дуг.  $A'B'=s_1$ , но  $\angle AOB=\angle A'OB'$ , слѣдовательно:

$$\frac{s}{2\pi r} = \frac{s_1}{2\pi r_1},$$

откуда:

$$\frac{s}{s_1} = \frac{r}{r_1}.$$

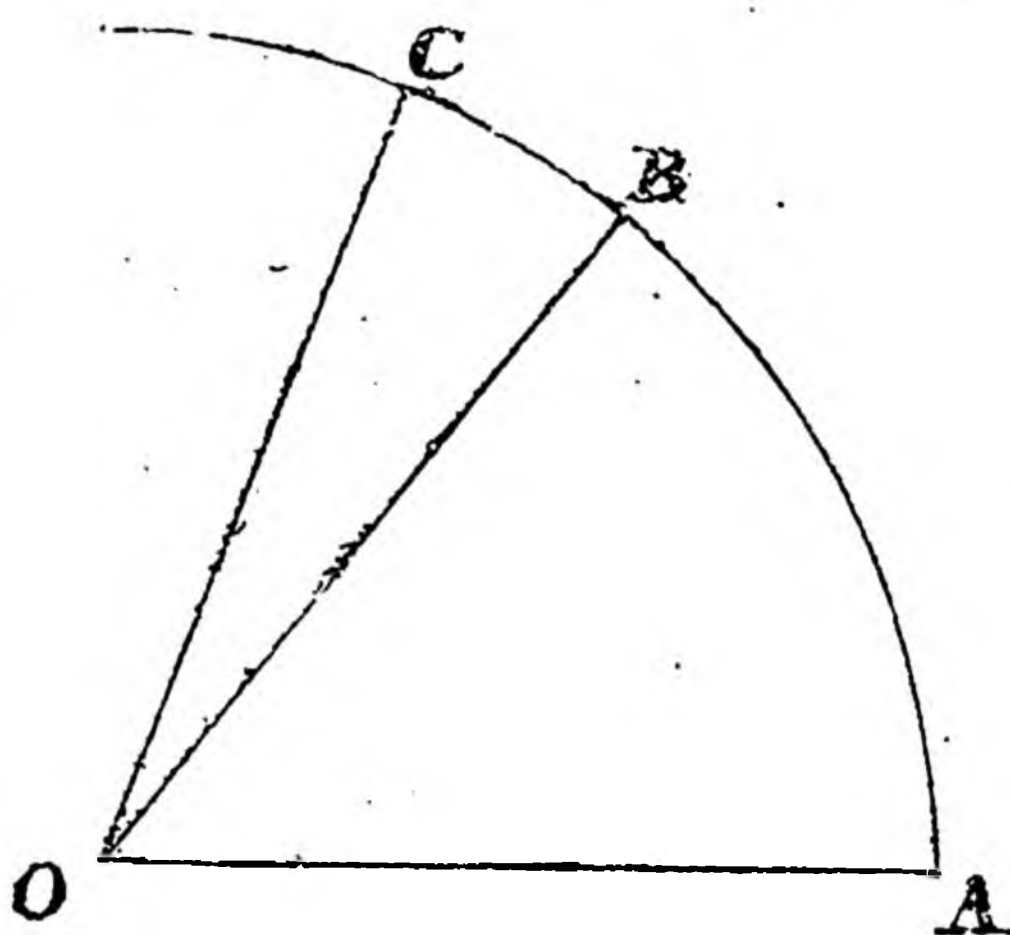
Возьмемъ уголъ  $AOB$ , и означимъ чрезъ  $\omega$  число или мѣру угла, когда уголъ  $AOC$  примемъ за единицу (фиг. 300).

То мы будемъ имѣть (кн. 6, пред. 33):

$$\frac{\angle AOB}{\angle AOC} = \omega = \frac{s}{s_1}$$

гдѣ дуга  $AB=s$ , дуга  $AC=s_1$ , слѣдовательно:

Фиг. 300.



$$s=s_1\omega \quad (1)$$

Если за единицу угловъ возьмемъ уголъ, который соотвѣтствуетъ дугѣ равной радіусу круга, то  $s_1=r$ , слѣдовательно:

$$s=r\omega \quad (2)$$

гдѣ  $\omega$  есть число выражающее мѣру угла соотвѣтствующаго дугѣ  $s$ , когда за единицу угловъ принимается уголъ соотвѣтствующій дугѣ равной, по длинѣ, радіусу круга.

Если въ формулѣ (1) примемъ за единицу дугу  $s_1$ , соотвѣтствующую углу равному единицѣ, то будемъ имѣть:

$$s=\omega. \quad (3)$$

Если радіусъ круга примемъ за единицу, то формула (2) обращается въ (3).

Въ этомъ случаѣ мы будемъ имѣть:

$$4d=2\pi=6,283184, \quad 2d=\pi=3,141592, \quad d=\frac{\pi}{2}=1,570796, \quad \frac{d}{2}=\frac{\pi}{4} \text{ и т. д.}$$

Такова мѣра угловъ въ теоріи, въ практикѣ же всякую окружность дѣлятъ на 360 равныхъ частей, которыя называютъ *градусами*, слѣдовательно градусъ есть величина неопредѣленная и зависитъ отъ радіуса круга. Прямой уголъ заключаетъ 90 градусовъ, два прямыхъ 180, три прямыхъ 270 и четыре прямыхъ 360. Градусы означаютъ символомъ  $25^\circ$  или 25 градусовъ. Каждый градусъ дѣлятъ на 60 равныхъ частей, которыя называются *минутами* и изображаются такъ  $31'$ , т. е. 31 минута; наконецъ каждая минута дѣлится на 60 равныхъ частей, которыя называются *секундами* и означаются такъ  $21''$ , т. е. 21 секунда. слѣдовательно  $25^\circ$ ,  $31'$ ,  $21''$  будетъ обозначать уголъ въ 25 градусовъ, 31 минуту и 21 секунду.

## КНИГА X.

### О п р е д ѣ л е н і я.

1. *Соизмѣримыми* величинами называются такія, которыя имѣютъ одну общую мѣру.

2. А *несоизмѣримыми* называются такія, которыя общей мѣры не имѣютъ.

3. Прямая линія называется *соизмѣримыми въ степени*, если построенные на нихъ квадраты измѣряются одною и той же площадью, т. е. имѣютъ общую мѣру.

*Примеч.* 1. Подъ степенью (*δυνάμεις*) Евклидъ разумѣетъ только вторую степень.

4. А *несоизмѣримыми въ степени* называются такія прямая, построенные на которыхъ квадраты не имѣютъ общей мѣры.

5. Съ произвольно взятою прямою существуетъ безчисленное множество другихъ прямыхъ соизмѣримыхъ или несоизмѣримыхъ съ нею и притомъ однѣ изъ нихъ соизмѣримы или несоизмѣримы какъ по длинѣ такъ и въ степени, а другія соизмѣримы только въ степени. Взятая прямая называется *раціональною* линіею (*ρῆτον, ἄλογον*).

6. *Раціональными* линіями называются также и тѣ, которыя соизмѣримы съ взятою прямою по длинѣ и въ степени, или только въ степени.

7. *Ирраціональными* прямыми называются такія, которыя несоизмѣримы съ взятою прямою.

8. Квадратъ построенный на взятой прямой называется *раціональнымъ*.

9. Площади соизмѣримыя съ этимъ квадратомъ называются также *раціональными*.

10. Площади несоизмѣримыя съ этимъ квадратомъ называются *ирраціональными*.



*Примѣч. 2.* Мы будемъ говорить, что прямая *квадратитъ* данную площадь, если построенный на ней квадратъ равенъ этой площади. Евклидъ употребляетъ для этого вы-  
 жения глаголѣ *δυνατά* (степенить). Мы будемъ еще говорить, что *прямая квадратитъ*  
*надъ другою прямою*, если квадратъ построенный на первой превосходитъ квадратъ, по-  
 строенный на второй на извѣстную площадь. Эта послѣдняя площадь есть всегда квадратъ.

11. Если прямая квадратитъ ирраціональную площадь, то она называется *ирраціональною*. Если ирраціональная площадь есть квадратъ, то ирраціо-  
 нальная прямая есть его сторона, а если ирраціональная площадь есть  
 какая нибудь фигура, то ирраціональная прямая есть сторона квадрата,  
 площадь котораго равна площади ирраціональной фигуры.

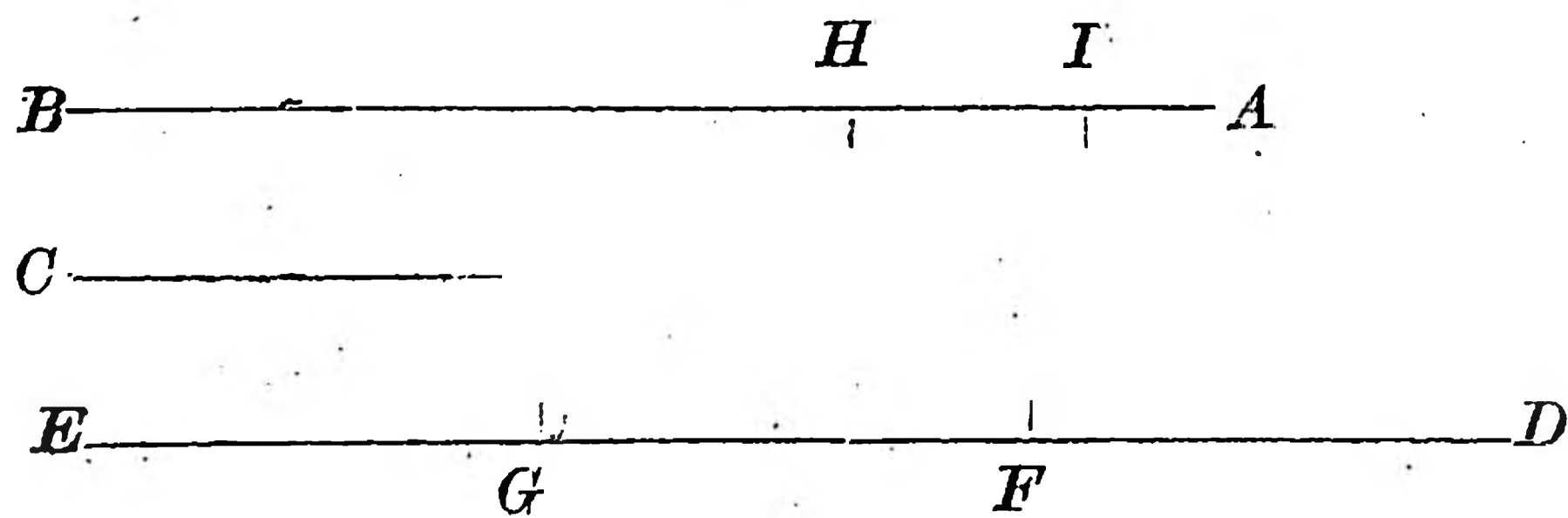
### Предложенія.

*Предложеніе 1.* Если отъ данной величины  $AB$  отымемъ часть боль-  
 шую ея половины, а отъ остатка отымемъ его часть большую его поло-  
 вины и будемъ продолжать такое дѣйствіе неопредѣленно, то наконецъ  
 получимъ такой остатокъ, который будетъ менѣе, какой угодно малой, дан-  
 ной величины  $C$  (фиг. 301).

*Доказат.* Возьмемъ величину  $DE > AB$  и кратную величины  $C$ . Пусть  
 части кратности будутъ  $DF = FG = GE = C$ .

Такъ какъ  $DE > AB$ , то, отымая отъ  $DE$  его часть  $EG < \frac{1}{2} DE$ , а  
 отъ  $AB$ ,  $BH > \frac{1}{2} AB$ , очевидно получимъ остатки  $HA$  и  $GD$  изъ коихъ  
 $GD > HA$ . Съ этими остатками поступимъ также какъ и съ величинами  
 $DE$  и  $AB$ , т. е. отъ  $GD$  отымемъ  $GF < \frac{1}{2} GD$ , и отъ  $HA$  отымемъ  
 $HI > \frac{1}{2} HA$ , то опять получимъ остатки  $IA$  и  $FD$  изъ коихъ  $IA < FD$ ,  
 но  $FD = C$ , слѣдовательно  $IA < C$ .

Фиг. 301.

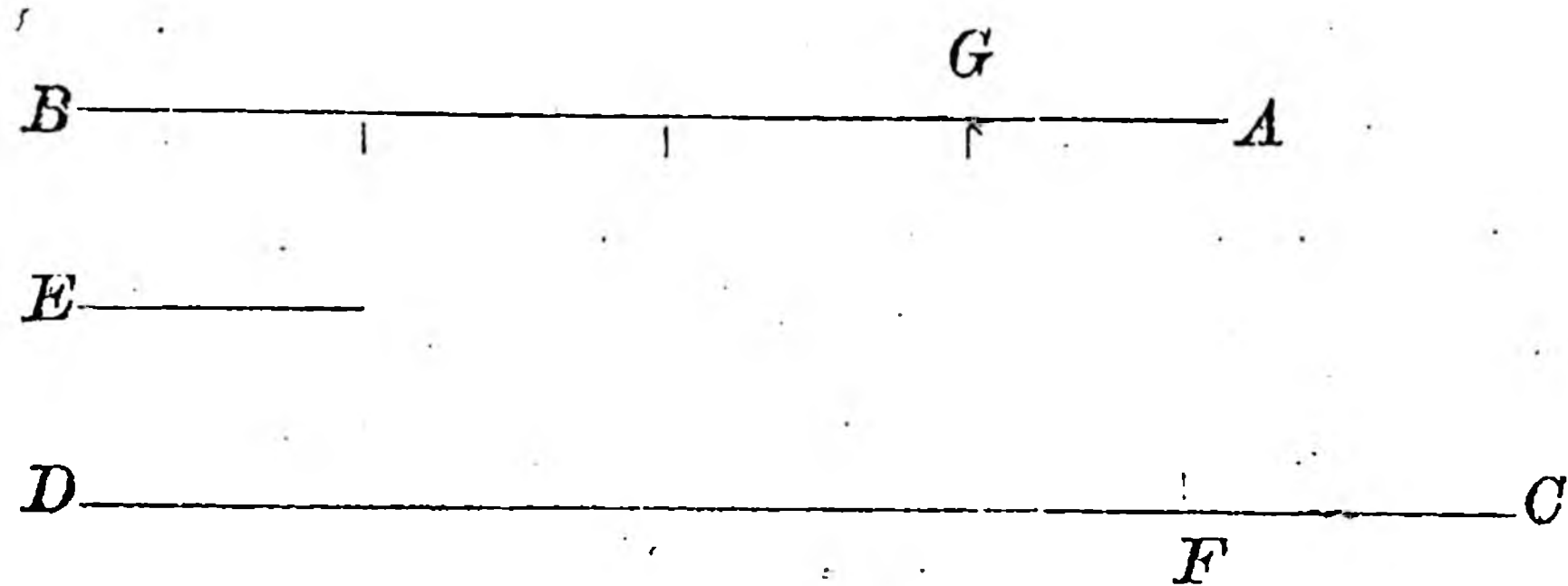


*Предложеніе 2.* Двѣ неравныя величины  $AB$  и  $CD$  будутъ несоизмѣ-  
 римы, если отымая отъ большей меньшую, отъ меньшей первый остатокъ,  
 отъ перваго остатка второй и т. д., никогда не получимъ такого остатка,  
 который бы содержался безъ остатка въ непосредственно предъидущемъ  
 остаткѣ (фиг. 302).

*Доказат.* Положимъ, что величины  $AB$  и  $CD$  соизмѣримы и пусть

$E$  будетъ ихъ общая мѣра. Наложимъ меньшую изъ величинъ  $AB$  на  $CD$  столько разъ, чтобы остатокъ  $CF$  былъ меньше  $AB$ . Этотъ остатокъ  $CF$  наложимъ на  $AB$ , столько разъ, чтобы получить остатокъ  $AG < FC$  и т. д. пока не получимъ остатокъ  $AG < E$ .

Фиг. 302.



Такъ какъ  $E$  измѣряетъ  $AB$ , а  $AB$  измѣряетъ  $DF$ , то  $E$  измѣряетъ  $DF$ , но  $E$  измѣряетъ и  $DC$ , слѣдовательно оно измѣряетъ и  $FC$ .  $E$  измѣряетъ  $FC$ , а  $FC$  измѣряетъ  $BG$ , слѣдовательно  $E$  измѣряетъ и  $AG$ . Но  $AG$  по условію меньше  $E$ , слѣдовательно невозможно, чтобы  $E$  измѣряло  $AG$ . Если это невозможно, то невозможно, чтобы величины  $AB$  и  $CD$  имѣли общую мѣру.

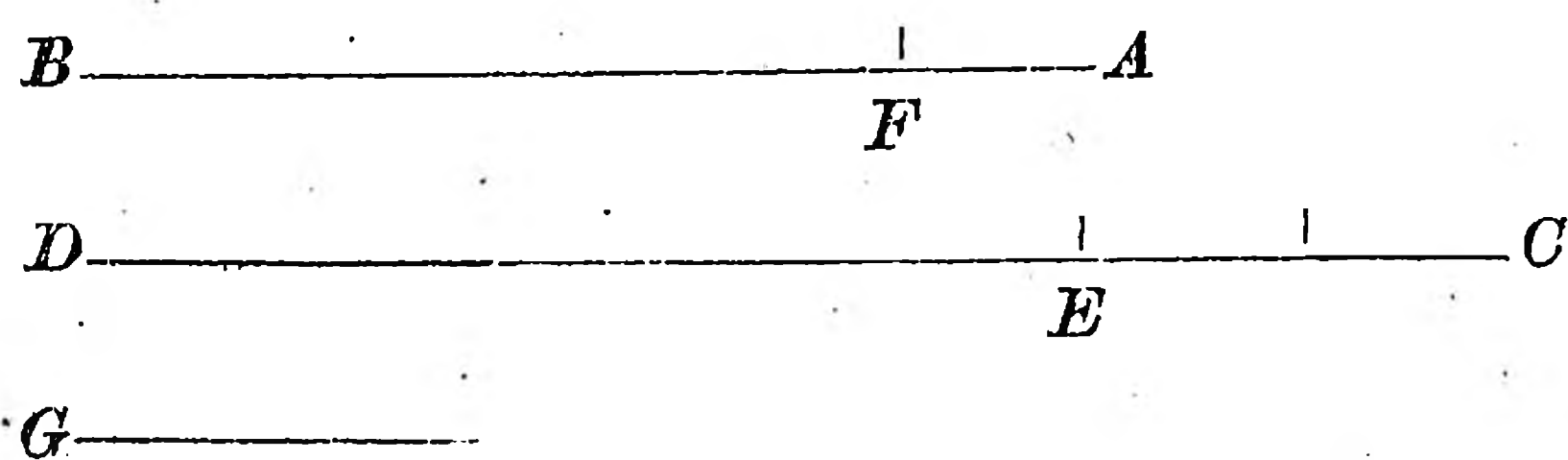
*Предложеніе 3.* Найти общую наибольшую мѣру двухъ данныхъ соизмѣримыхъ величинъ  $AB$  и  $CD$  (фиг. 303)?

*Рѣшеніе. Случай 1.* Если меньшая величина  $AB$  измѣряетъ большую  $CD$ , то она, какъ измѣряющая и сама себя, и есть общая мѣра; но она и наибольшая, такъ какъ величина большая отъ  $AB$  измѣрять ее не можетъ.

*Случай 2.* Если величина  $AB$  не измѣряетъ величины  $CD$ , то, такъ какъ онѣ соизмѣримы, отнимая отъ большей меньшую, отъ меньшей первый остатокъ и т. д. мы получимъ такой остатокъ, который измѣряетъ непосредственно предъидущій.

Пусть  $AB$  измѣряетъ  $DE$  и остатокъ  $CE < AB$ , а остатокъ  $CE$  пусть измѣряетъ  $BF$  и остатокъ  $AF < CE$ , наконецъ пусть  $AF$  содержится безъ остатка въ  $CE$ . Я говорю, что  $AF$  и будетъ общая наибольшая мѣра данныхъ величинъ  $AB$  и  $CD$ .

Фиг. 303.



Въ самомъ дѣлѣ,  $AF$  измѣряетъ  $EC$ , а  $EC$  измѣряетъ  $BF$ , слѣдовательно  $AF$  измѣряетъ  $BF$ , но  $AF$  измѣряетъ саму себя, слѣдовательно  $AF$  измѣряетъ и всю величину  $AB$ . Но  $AB$  измѣряетъ  $DE$ , слѣдова-

тельно  $AF$ , измѣряя  $AB$ , измѣряетъ и  $DE$ . Но  $AF$  измѣряетъ и  $CE$ , слѣдовательно  $AF$  измѣряетъ и всю величину  $CD$ . Если  $AF$  измѣряетъ  $AB$  и  $CD$ , то она есть ихъ общая мѣра; я говорю, что она и наибольшая.

Для этого положимъ, что есть большая отъ  $AF$  общая мѣра  $G$ . Такъ какъ  $G$  измѣряетъ  $AB$ , а  $AB$  измѣряетъ  $DE$ , то и  $G$  измѣряетъ  $DE$ . Но  $G$  также измѣряетъ и  $CD$ , слѣдовательно оно измѣряетъ и  $CE$ .  $G$  измѣряетъ  $CE$ , а  $CE$  измѣряетъ  $BF$ , слѣдовательно  $G$  измѣряетъ  $BF$ , но  $G$  измѣряетъ  $AB$ , слѣдовательно оно измѣряетъ и остатокъ  $AF$ , т. е. большая величина  $G$  измѣряетъ меньшую  $AF$ , что невозможно. слѣдовательно наибольшая общая мѣра величинъ  $AB$  и  $CD$  есть  $AF$  и другой большей быть не можетъ.

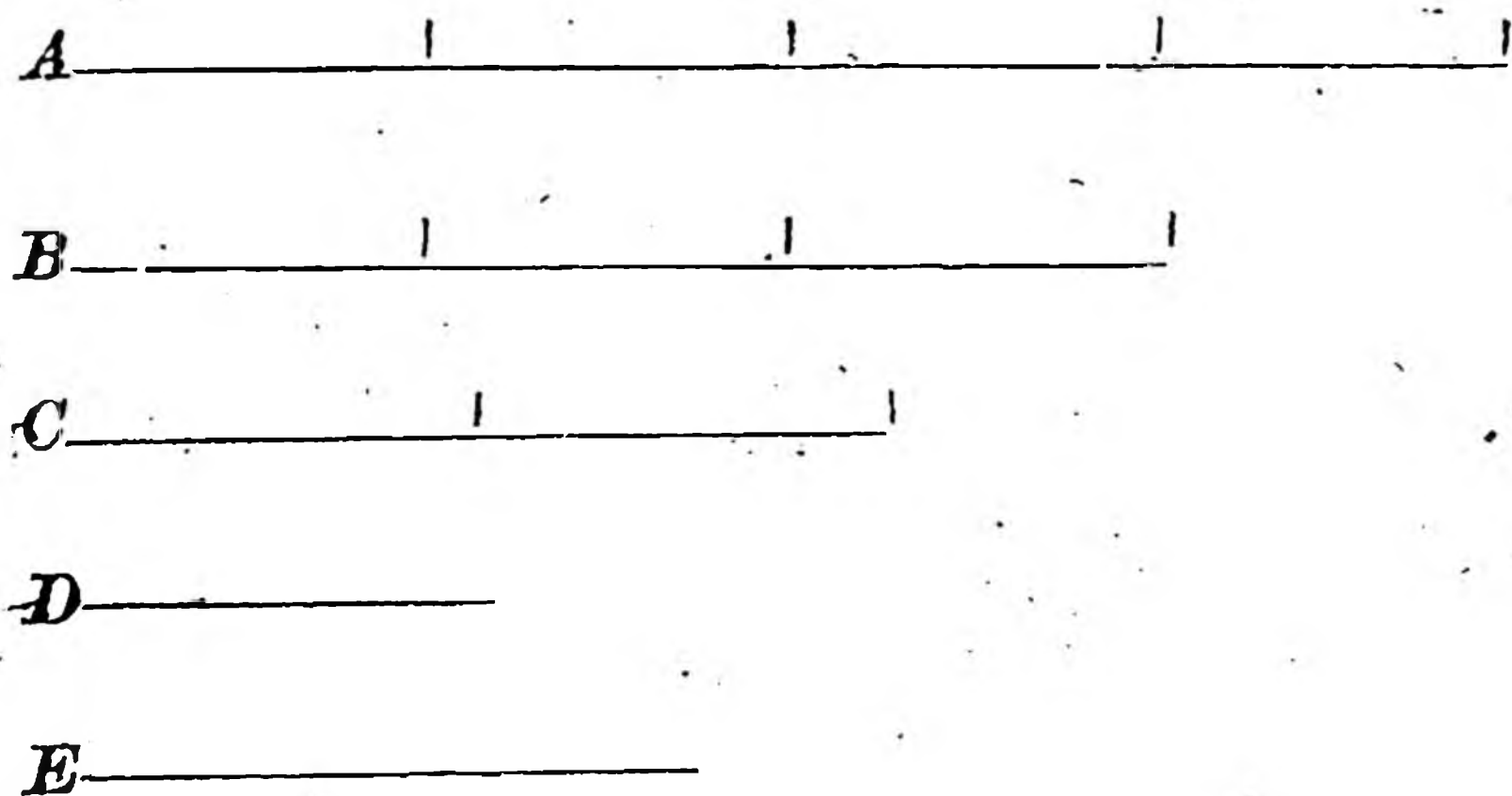
*Слѣдствіе.* Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что величина, измѣряющая двѣ величины, измѣряетъ и ихъ наибольшую общую мѣру.

*Предложеніе 4.* Найти общую наибольшую мѣру трехъ данныхъ величинъ  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (фиг. 304)?

*Рѣшеніе.* Найдемъ общую наибольшую мѣру величинъ  $A$  и  $B$  (кн. 10, пред. 3) и пусть она будетъ  $D$ .

*Случай 1.* Если  $D$  измѣряетъ и величину  $C$ , то очевидно, что  $D$  есть общая мѣра трехъ величинъ  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ; я говорю, что она и наибольшая. Въ самомъ дѣлѣ, пусть, если возможно,  $E$  будетъ еще большая общая мѣра. Такъ какъ  $E$  измѣряетъ величины  $A$ ,  $B$  и  $C$ , то она измѣряетъ  $A$  и  $B$ , а слѣдовательно и величину  $D$  (кн. 10, пред. 3, слѣд.), откуда вытекаетъ, что большая  $E$  измѣряетъ меньшую  $D$ , что невозможно.

Фиг. 304.



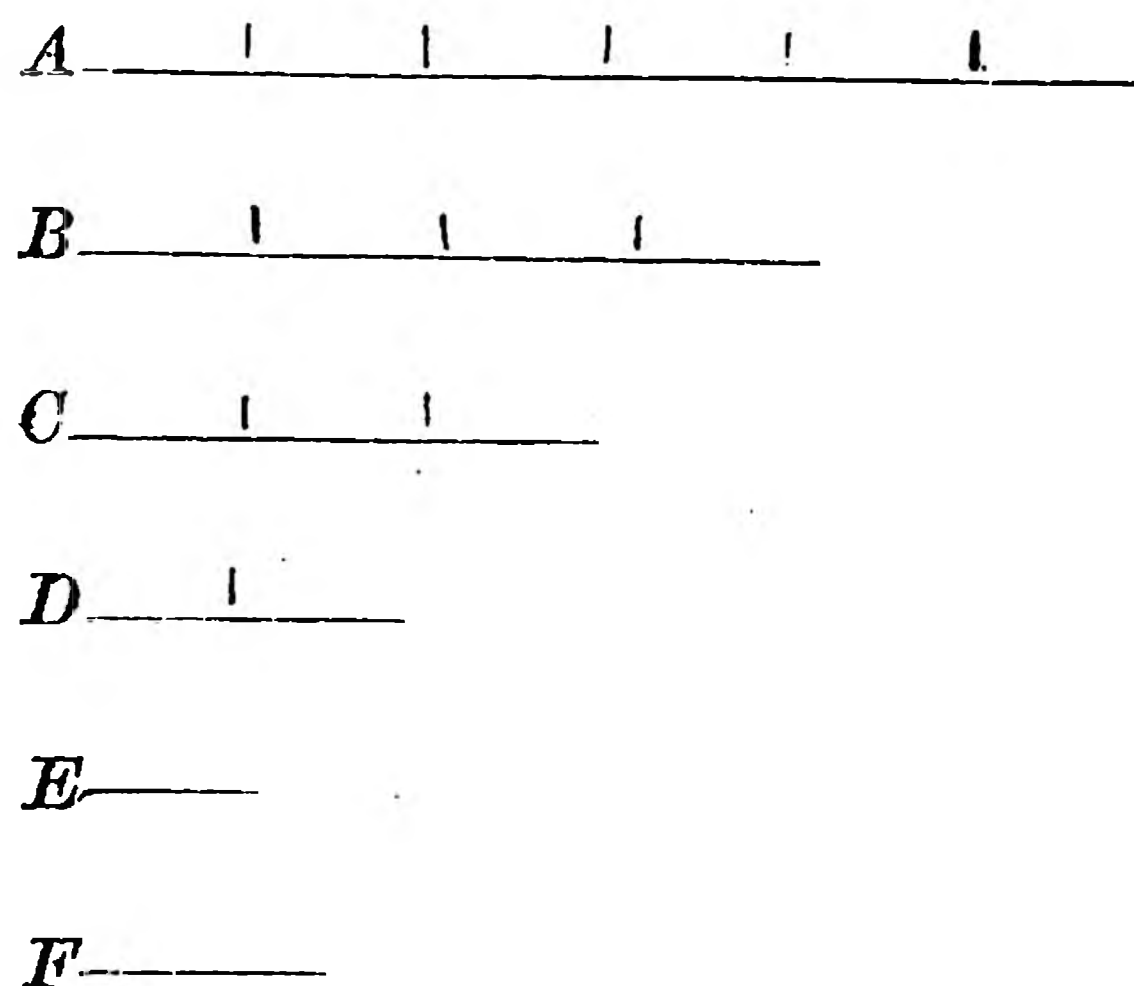
*Случай 2.* Если  $D$  не измѣряетъ величины  $C$ , то общая наибольшая мѣра  $E$ , величинъ  $C$  и  $D$ , будетъ общая наибольшая мѣра всѣхъ трехъ величинъ  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

Въ самомъ дѣлѣ, общая наибольшая мѣра величинъ  $A$ ,  $B$ ,  $C$  измѣряетъ величины  $A$  и  $B$ , слѣдовательно измѣряетъ и ихъ общую наибольшую мѣру  $D$ , но она измѣряетъ и  $C$ , слѣдовательно измѣряетъ  $C$  и  $D$ , которые поэтому суть величины соизмѣримыя.



Такъ какъ  $E$  есть общая наибольшая мѣра величинъ  $C$  и  $D$ , то  $E$  измѣряетъ  $D$ , а  $D$  измѣряетъ  $A$  и  $B$ , слѣдовательно  $E$  измѣряетъ  $A$ ,  $B$  и  $C$  и есть ихъ общая мѣра, я говорю, что она и наибольшая (фиг. 305).

Фиг. 305.



Если возможно, то пусть  $F$  будетъ еще большая общая мѣра. Такъ какъ величина  $F$  измѣряетъ  $A$  и  $B$ , то она измѣряетъ и  $D$  (кн. 10, пред. 3, слѣд.), а также и  $C$ , слѣдовательно  $C$  и  $D$ , а если  $F$  измѣряетъ  $C$  и  $D$ , то измѣряетъ и  $E$ , т. е. большая величина измѣряетъ меньшую, что невозможно. слѣдовательно величины  $A$ ,  $B$ ,  $C$  другой общей наибольшей мѣры, исключая  $E$ , имѣть не могутъ.

*Слѣдствіе.* Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что общая, измѣряющая три величины, мѣра измѣряетъ и наибольшую общую ихъ мѣру.

Точно также можно найти общую наибольшую мѣру большого числа величинъ и приложить къ ней предыдущее слѣдствіе.

*Предложеніе 5.* Соизмѣримыя величины  $A$  и  $B$  относятся между собою какъ нѣкоторыя числа (фиг. 306).

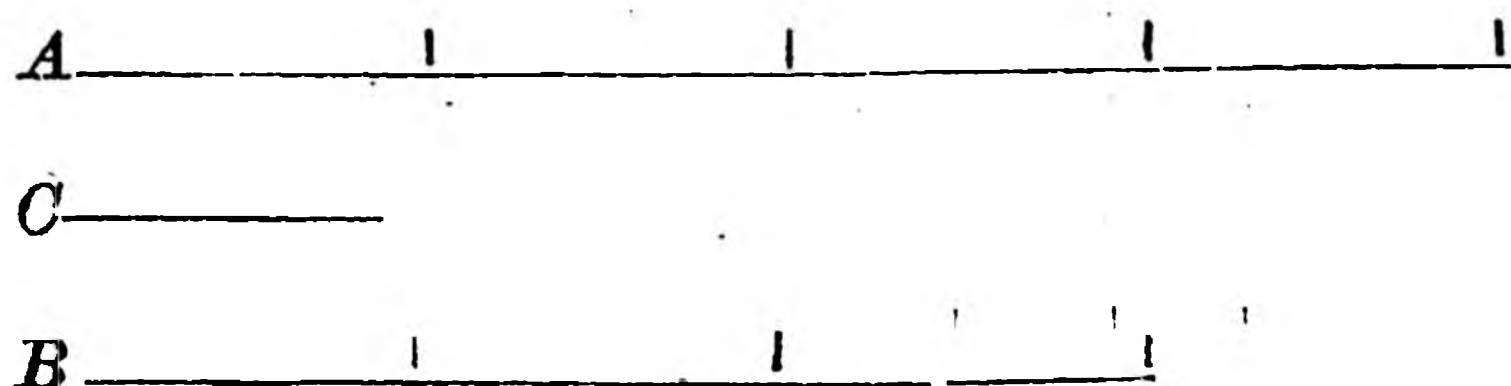
*Доказат.* Такъ какъ величины  $A$  и  $B$  соизмѣримы, то онѣ имѣютъ общую наибольшую мѣру, которая пусть будетъ  $C$ . Пусть  $C$  содержится въ  $A$   $m$  разъ, а въ  $B$   $n$  разъ, на примѣръ 4 раза въ  $A$  и 3 раза въ  $B$ , то мы будемъ имѣть:

$$A : C = m : 1, \quad C : B = 1 : n,$$

откуда:

$$A : B = m : n.$$

Фиг. 306.



*Примѣч. 3.* Если  $C$  есть общая наибольшая мѣра величинъ  $A$  и  $B$ , то мы имѣемъ:

$$A = m.C \quad B = n.C,$$

откуда, раздѣляя, получимъ:

$$A : B = m : n.$$

*Предложеніе 6.* Если величины  $A$  и  $B$  относятся между собою какъ числа  $m$  къ  $n$ , т. е. если  $A : B = m : n$ , то  $A$  и  $B$  соизмѣримы (фиг. 307).

*Доказат.* Раздѣлимъ величину  $A$  на столько равныхъ частей сколько единицъ въ числѣ  $m$  и назовемъ  $n$ -тую часть  $A$  чрезъ  $C$ . Составимъ изъ  $C$  такое кратное  $F$ , сколько единицъ въ числѣ  $n$ , то будемъ имѣть:

$$A : C = m : 1, \quad C : F = 1 : n$$

откуда:

$$A : F = m : n$$

но по положенію:

$$A : B = m : n$$

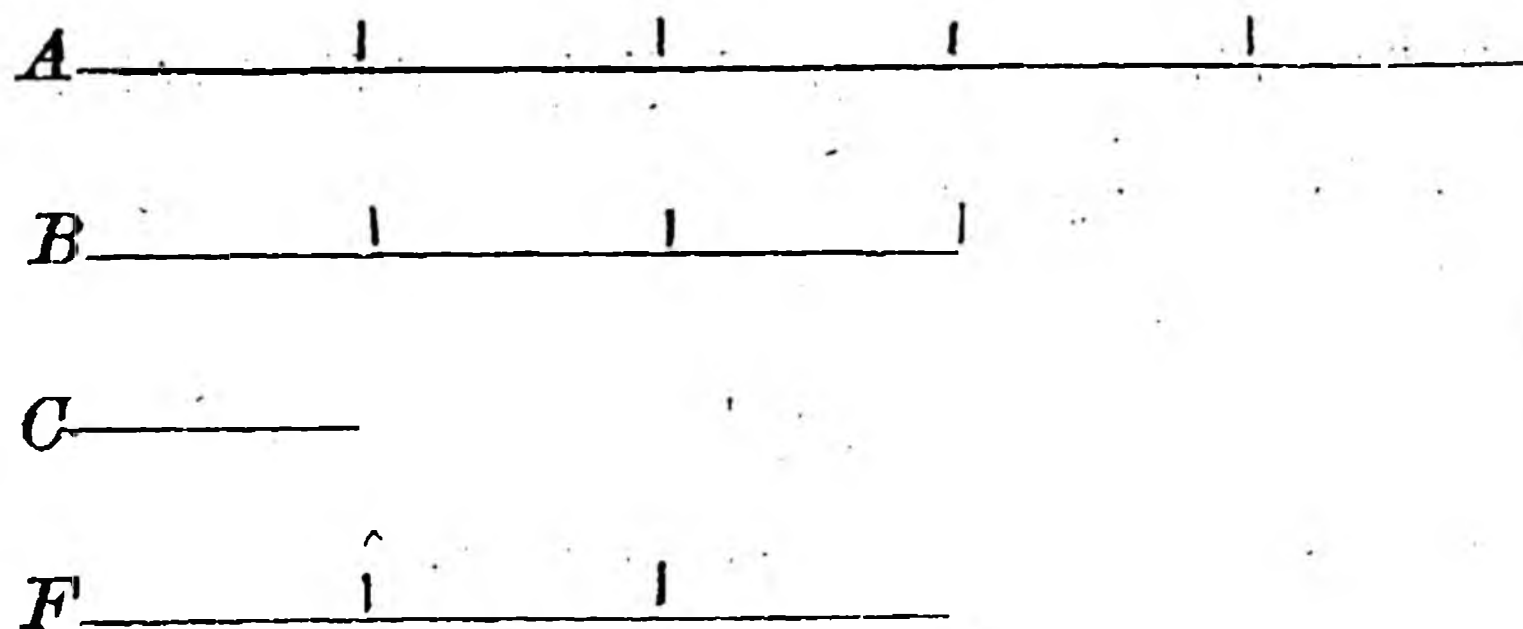
слѣдовательно:

$$A : F = A : B$$

откуда  $B = F$  (кн. 5, пред. 9).

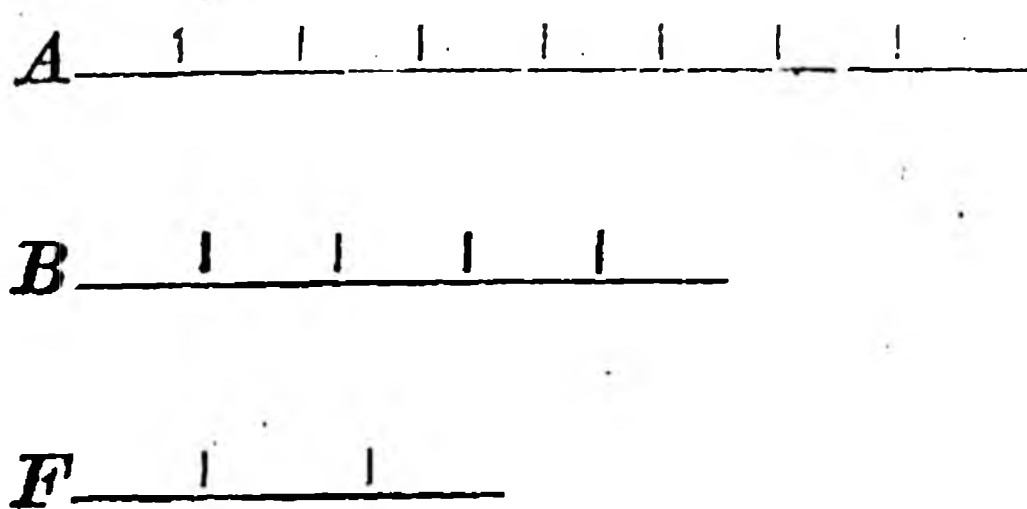
Но  $C$  измѣряетъ  $F$ , т. е.  $B$ , а также имѣряетъ и  $A$ , слѣдовательно величины  $A$  и  $B$  соизмѣримы.

Фиг. 307.



*Слѣдствіе.* Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что если даны два числа  $m$  и  $n$  и прямая линія  $A$ , то всегда можно найти другую прямую линію  $F$  такую, что (фиг. 308):

Фиг. 308.



$$m : n = A : F.$$

Если теперь построимъ прямую  $B$  средне-пропорціональную между  $A$  и  $F$ , т. е., если:

$$A : B = B : F,$$

то фигура построенная на  $A$  относится къ подобной фигурѣ, построенной на  $B$ , какъ квадраты, построенные на  $A$  и  $B$ , т. е. (кн. 6, пред. 20):

$$\text{Фиг. } A : \text{Фиг. } B = \square A : \square B,$$

но  $\square B = A \cdot F$ , слѣдовательно:

$$\text{Фиг. } A : \text{Фиг. } B = A : F,$$

или

$$\text{Фиг. } A : \text{Фиг. } B = m : n.$$

*Предложеніе 7.* Несоизмѣримыя величины  $A$  и  $B$  не могутъ относиться между собою какъ числа (фиг. 309).

Фиг. 309.

$A$  —————

$B$  —————

*Доказат.* Если-бы величины  $A$  и  $B$  относились какъ числа, то (кн. 10, пред. 6) онѣ бы были соизмѣримы.

*Предложеніе 8.* Если величины  $A$  и  $B$  не относятся между собою какъ числа, то онѣ несоизмѣримы (фиг. 310).

Фиг. 310.

$A$  —————

$B$  —————

*Доказат.* Если бы  $A$  и  $B$  были величины соизмѣримыя, то онѣ относились бы между собою какъ числа (кн. 10, пред. 5).

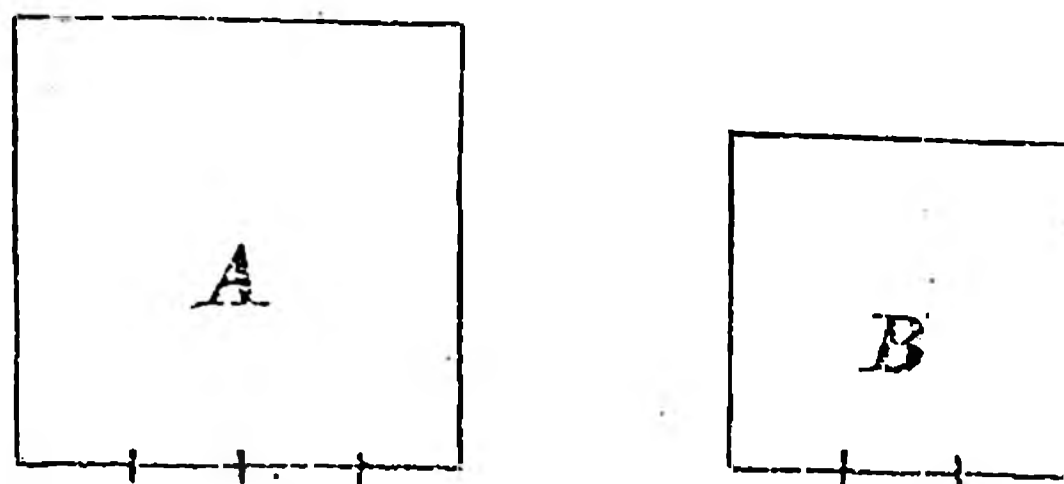
*Предложеніе 9.* Квадраты, построенные на соизмѣримыхъ по длинѣ линіяхъ  $A$  и  $B$ , относятся между собою, какъ квадраты чиселъ, а квадраты, относящіеся между собою какъ квадратныя числа, имѣютъ стороны по длинѣ соизмѣримыя. Напротивъ, квадраты, построенные на несоизмѣримыхъ по длинѣ линіяхъ  $A$  и  $B$ , не могутъ относиться между собою, какъ квадратныя числа, а квадраты, не относящіеся между собою какъ квадратныя числа имѣютъ стороны по длинѣ несоизмѣримыя (фиг. 311).

*Доказат. 1.* Такъ какъ по условію линіи  $A$  и  $B$  соизмѣримы, то



(кн. 10, пред. 6) онѣ относятся между собою какъ нѣкоторыя числа  $m$  и  $n$ , т. е.:

Фиг. 311.



$$A : B = m : n.$$

Но мы имѣемъ (кн. 6, пред. 20):

$$\square A : \square B = 2 (A : B)$$

и

$$\square m : \square n = 2 (m : n)$$

слѣдовательно:

$$\square A : \square B = m^2 : n^2.$$

2. Положимъ теперь, что мы имѣемъ:

$$\square A : \square B = m^2 : n^2$$

Я говорю, что мы будемъ имѣть:

$$A : B = m : n.$$

Въ самомъ дѣлѣ:

$$\square A : \square B = 2 (A : B) \quad \text{и} \quad m^2 : n^2 = 2 (m : n),$$

слѣдовательно:

$$A : B = m : n,$$

т. е.  $A$  и  $B$  соизмѣримы.

3. Если прямая  $A$  и  $B$  по длинѣ несоизмѣримы, то квадраты, построенные на нихъ, не могутъ относиться между собою какъ квадратныя числа, въ противномъ случаѣ прямая  $A$  и  $B$  были бы по длинѣ соизмѣримы (кн. 10, пред. 9, случ. 1).

4. Если квадраты, построенные на прямыхъ  $A$  и  $B$ , не могутъ относиться между собою какъ квадратныя числа, то  $A$  и  $B$  будутъ несоизмѣримы, въ противномъ случаѣ онѣ бы относились между собою какъ квадратныя числа (кн. 10, пред. 9, случ. 2).

*Слѣдствіе.* Изъ доказаннаго слѣдуетъ, что всѣ соизмѣримыя по длинѣ прямая линіи соизмѣримы и въ степени; но не всѣ соизмѣримыя линіи въ степени соизмѣримы и по длинѣ. Далѣе также видно, что не всѣ несоизмѣримыя по длинѣ линіи несоизмѣримы и въ степени; но всѣ несоизмѣримыя въ степени линіи несоизмѣримы и по длинѣ.

1. Квадраты соизмѣримыхъ по длинѣ линій относятся между собою какъ квадратныя числа, т. е. какъ числа, слѣдовательно они соизмѣримы (кн. 10, пред. 5).

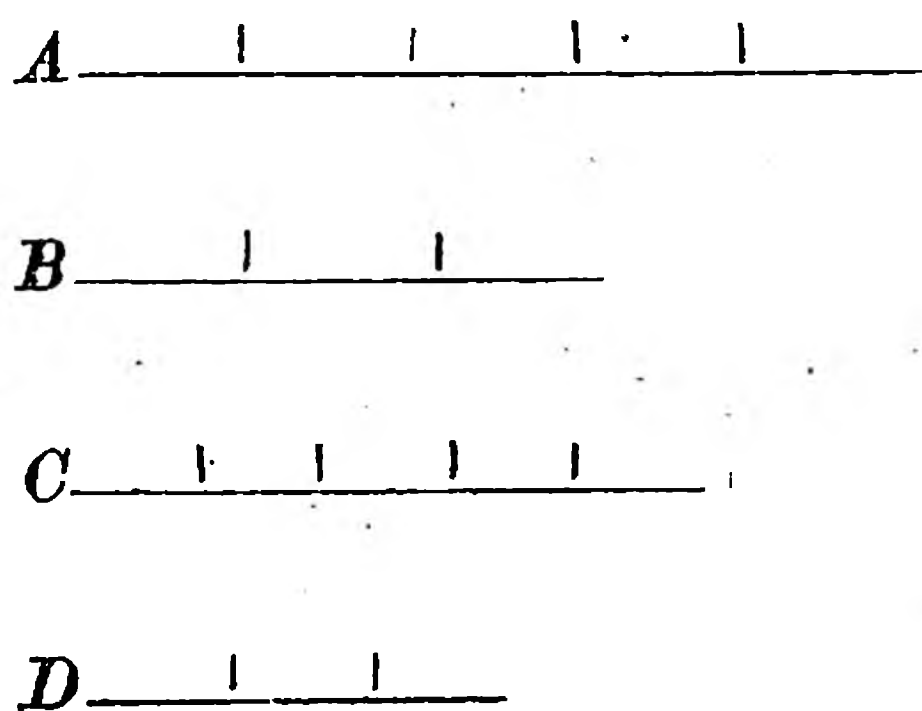
2. Если прямыя линіи соизмѣримы въ степени, то ихъ квадраты относятся между собою какъ числа (кн. 10, пред. 5), но эти числа могутъ быть или полныя квадраты или просто какія нибудь числа. Въ первомъ случаѣ, прямыя какъ стороны квадратовъ будутъ по длинѣ соизмѣримы, а во второмъ случаѣ онѣ будутъ по длинѣ несоизмѣримы. слѣдовательно соизмѣримыя въ степени прямыя линіи, тогда только соизмѣримы и по длинѣ, когда ихъ квадраты относятся между собою какъ квадратныя числа.

3. Не всѣ несоизмѣримыя линіи по длинѣ несоизмѣримы и въ степени, такъ какъ прямыя линіи соизмѣримыя въ степени могутъ быть по длинѣ несоизмѣримы.

4. Всѣ несоизмѣримыя въ степени прямыя линіи несоизмѣримы и по длинѣ. Въ самомъ дѣлѣ, если бы онѣ были соизмѣримы по длинѣ, то онѣ были бы соизмѣримы и въ степени, что противурѣчитъ положенію.

*Предложеніе 10.* Если изъ четырехъ пропорціональныхъ величинъ  $A, B, C, D$  первыя двѣ соизмѣримы, то и послѣднія будутъ соизмѣримы, а если первыя двѣ несоизмѣримы, то и послѣднія будутъ также несоизмѣримы (фиг. 312).

Фиг. 312.



*Доказат.* Если  $A$  и  $B$  соизмѣримы, то онѣ относятся между собою какъ числа (кн. 10, пред. 5), но мы имѣемъ:

$$A : B = C : D$$

слѣдовательно и  $C$  и  $D$  относятся между собою, какъ тѣже числа (кн. 10, пред. 6), а слѣдовательно и онѣ соизмѣримы.

Но если  $A$  и  $B$  несоизмѣримы, то онѣ не могутъ относиться между собою какъ числа (кн. 10, пред. 7), слѣдовательно не могутъ относиться между собою какъ числа и величины  $C$  и  $D$ , слѣдовательно онѣ несоизмѣримы (кн. 10, пред. 8).

*Предложение 11.* По данной прямой линии  $A$  найти двѣ другія, изъ коихъ одна была бы несоизмѣрима только по длинѣ, а другая и въ степени (фиг. 313)?

Фиг. 313.

$A$  —————

$E$  —————

$D$  —————

*Рѣшеніе 1.* Возьмемъ два числа  $m$  и  $n$ , которыя не относятся между собою какъ квадратныя числа, слѣдовательно не суть числа подобныя; построимъ пропорцію:

$$m : n = \square A : \square D$$

я говорю, что  $A$  и  $D$  будутъ прямыя несоизмѣримыя только по длинѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ:

$$m : n = \square A : \square D$$

то  $\square A$  и  $\square D$  относятся между собою не какъ квадратныя числа, а просто какъ числа, слѣдовательно (кн. 10, пред. 9)  $A$  и  $D$  несоизмѣримы.

2. Возьмемъ прямую  $E$  средне-пропорціональную между  $A$  и  $D$ , т. е., что:

$$A : E = E : D$$

я говорю, что прямая  $E$  будетъ несоизмѣрима съ  $A$  не только по длинѣ, но и въ степени.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ:

$$A : E = E : D$$

то (кн. 6, пред. 20):

$$A : D = \square A : \square E$$

слѣдовательно  $\square A$  и  $\square E$  относятся между собою, какъ несоизмѣримыя числа  $A$  и  $D$ , а поэтому  $A$  и  $E$  несоизмѣримы и въ степени.

*Примѣч. 4.* Составныя числа, т. е. числа разлагающіеся на множители—Евклидъ называетъ *площадными* (ἐπίπεδοι) потому, что, будучи разложены на два множителя, могутъ выражать площадь фигуры. Подобными числами онъ называетъ тація, въ которыхъ множители пропорціональны. Напримѣръ, если число  $A = m \cdot n$ , а  $B = p \cdot q$  и при этомъ мы имѣемъ:

$$m : n = p : q$$



то числа  $A$  и  $B$  подобны. Я говорю, что такіа числа относятся между собою какъ евад-  
ратныя числа. Въ самомъ дѣлѣ:

$$\frac{A}{B} = \frac{m \cdot n}{p \cdot r} = \frac{m}{p} \cdot \frac{n}{r}$$

но по условію мы имѣемъ:

$$\frac{m}{p} = \frac{n}{r}$$

слѣдовательно:

$$\frac{A}{B} = \frac{m^2}{p^2} = \frac{n^2}{r^2} \quad \text{и} \quad A \cdot B = m^2 \cdot r^2 = n^2 p^2$$

*Предложеніе 12.* Если величины  $A$  и  $B$  порознь соизмѣримы съ ве-  
личиною  $C$ , то онѣ соизмѣримы и между собою (фиг. 314).

*Доказат.* Такъ какъ  $A$  и  $C$ ,  $B$  и  $C$  соизмѣримы, то онѣ относятся  
между собою какъ числа, поэтому пусть:

$$A : C = m : n \quad \text{и} \quad C : B = p : q \quad (1)$$

Возьмемъ три числа  $r, s, t$  въ слѣдующей зависимости:

$$m : n = r : s \quad \text{и} \quad p : q = s : t$$

Такъ какъ:

$$A : C = m : n \quad \text{и} \quad m : n = r : s$$

то:

$$A : C = r : s$$

точно также мы найдемъ, что:

$$C : B = s : t$$

откуда:

$$A : B = r : t$$

слѣдовательно  $A$  и  $B$  относятся между собою какъ числа, поэтому онѣ  
соизмѣримы.

Фиг. 314.

$A$  \_\_\_\_\_

$C$  \_\_\_\_\_

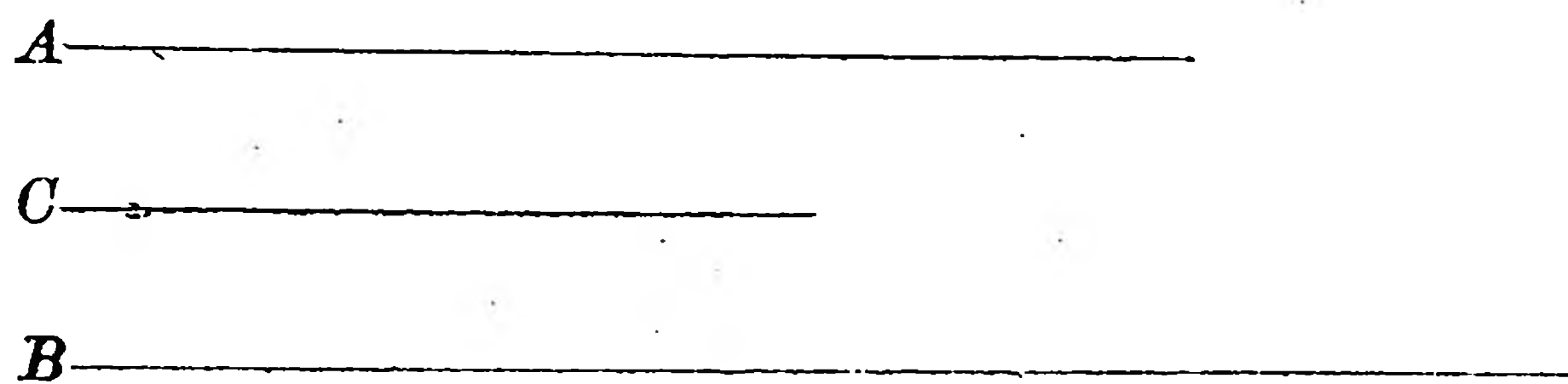
$B$  \_\_\_\_\_

$$(m=6, n=4, p=2, q=5, r=3, s=2, t=5).$$

*Предложение 13.* Если изъ двухъ величинъ  $A$  и  $B$  одна, на примѣръ  $A$ , соизмѣрима съ третьею  $C$ , а другая несоизмѣрима съ  $C$ , то  $A$  и  $B$  несоизмѣримы между собою (фиг. 315).

*Доказат.* Положимъ, что величины  $A$  и  $B$  будутъ соизмѣримы. По условію  $A$  соизмѣрима съ  $C$ , и величина  $B$  будетъ соизмѣрима съ  $C$  (кн. 10, пред. 12), что противурѣчитъ положенію, слѣдовательно величины  $A$  и  $B$  несоизмѣримы.

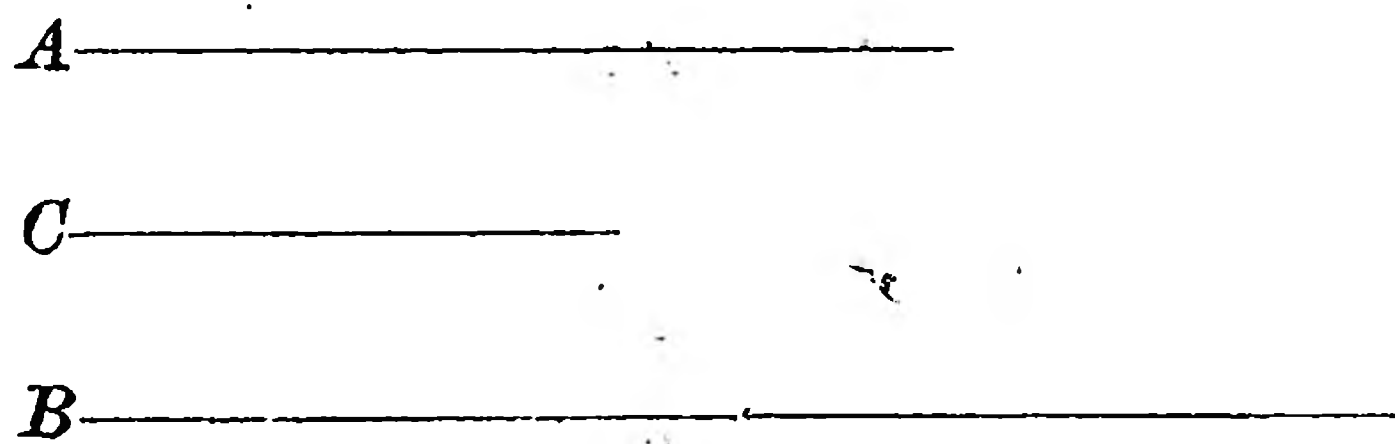
Фиг. 315.



*Предложение 14.* Если изъ двухъ соизмѣримыхъ между собою величинъ  $A$  и  $B$  одна, на примѣръ  $A$ , несоизмѣрима съ третьею  $C$ , то и другая  $B$  будетъ также несоизмѣрима съ  $C$  (фиг. 316).

*Доказат.* Положимъ, что величина  $B$  соизмѣрима съ  $C$ , то какъ по условію  $A$  несоизмѣрима съ  $C$ , а  $B$  соизмѣрима, то (кн. 10, пред. 12) и величины  $A$  и  $B$  будутъ несоизмѣримы между собою, что противурѣчитъ положенію, слѣдовательно величина  $B$  будетъ несоизмѣрима съ  $C$ .

Фиг. 316.



*Слѣдствіе.* По двумъ даннымъ не равнымъ прямымъ  $AB$  и  $C$  найти на сколько квадратъ построенный на большей  $AB$  превосходитъ квадратъ, построенный на меньшей  $C$  (фиг. 317)?

*Рѣшеніе.* На прямой  $AB$  опишемъ полуокружность  $ADB$  и впишемъ въ нее хорду  $AD=C$  (кн. 4, пред. 1); соединимъ  $D$  съ  $B$ , я говорю, что квадратъ построенный на  $DB$  и будетъ искомая величина.

Въ самомъ дѣлѣ, въ треугольникѣ  $ADB$  уголъ  $ADB$  есть прямой (кн. 3, пред. 31), слѣдовательно (кн. 1, пред. 47):

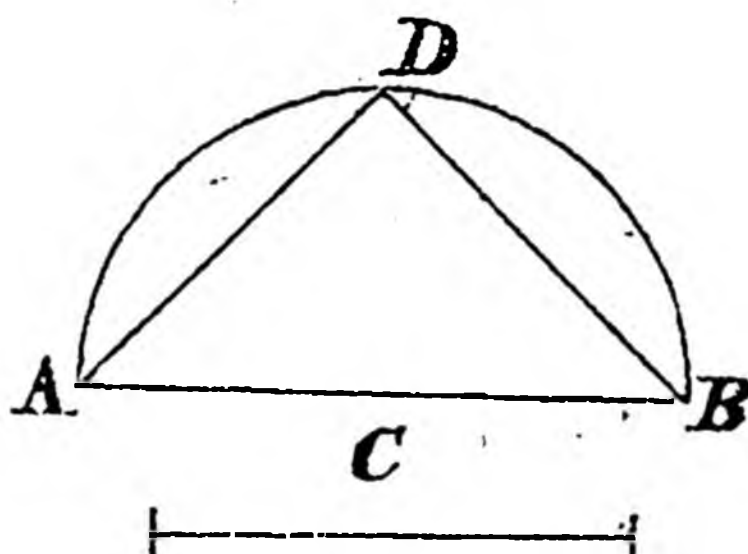
$$\square AB - \square AD = \square BD$$

но  $AD=C$ , слѣдовательно:

$$\square AB - \square C = \square BD$$

Найти прямую, квадратъ которой былъ бы равенъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на двухъ данныхъ прямыхъ  $AD$  и  $BD$  (фиг. 317)?

Фиг. 317.



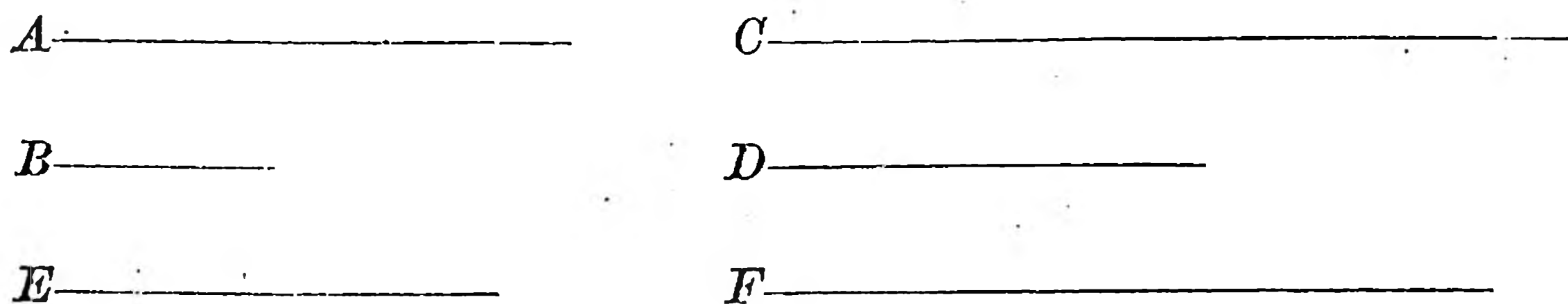
*Рѣшеніе.* На сторонахъ прямого угла надобно взять отрѣзки  $AD$  и  $DB$  и соединить прямою  $AB$ ; квадратъ, построенный на  $AB$ , и будетъ искомый.

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ (кн. 1, пред. 47):

$$\square AD + \square DB = \square AB.$$

*Предложеніе 15.* Если изъ четырехъ пропорціональныхъ прямыхъ  $A, B, C, D$ , первая  $A$  квадратитъ надъ второю  $B$  на квадратъ, коего сторона  $E$  соизмѣрима или несоизмѣрима съ  $A$ ; то и третья прямая  $C$  квадратитъ надъ четвертою  $D$  на квадратъ, коего сторона  $F$  будетъ соизмѣрима въ первомъ случаѣ и несоизмѣрима во второмъ съ третьею прямою  $C$  (фиг. 318).

Фиг. 318.



*Доказат.* Такъ какъ по условію мы имѣемъ:

$$A : B = C : D$$

то (кн. 6, пред. 22):

$$\square A : \square B = \square C : \square D$$

Но кромѣ того мы еще имѣемъ по условію:

$$\square A = \square B + \square E, \quad \square C = \square D + \square F$$

слѣдовательно:

$$\square B + \square E : \square B = \square D + \square F : \square D,$$



откуда (кн. 5, пред. 17):

$$\square E : \square B = \square F : \square D,$$

а изъ этой пропорціи слѣдуетъ (кн. 6, пред. 22):

$$E : B = F : D \quad \text{или} \quad B : E = D : F$$

но

$$A : B = C : D,$$

слѣдовательно:

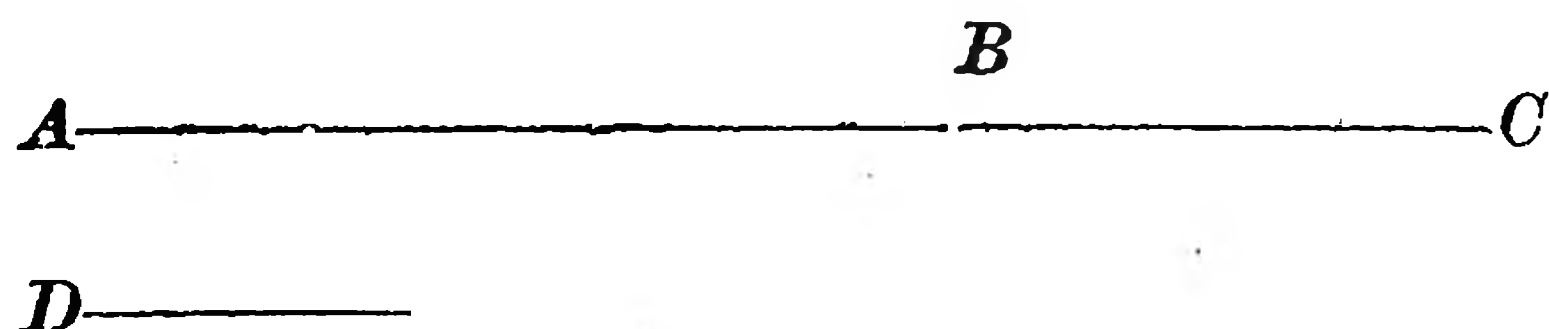
$$A : E = C : F,$$

откуда видимъ, что если  $E$  есть прямая соизмѣримая или несоизмѣримая съ  $A$ , то и прямая  $F$  будетъ соизмѣрима или несоизмѣрима съ прямою  $C$  (кн. 10, пред. 10).

*Предложеніе 16.* Если сложимъ двѣ соизмѣримыя величины  $AB$  и  $BC$ , то цѣлая  $AC$  будетъ величина соизмѣримая съ каждою изъ частей  $AB$  и  $BC$ ; или, если цѣлая  $AC$  будетъ соизмѣрима съ одною изъ частей  $AB$  или  $BC$ , то и эти части будутъ соизмѣримы между собою (фиг. 319).

*Доказат.* 1. Если  $AB$  и  $BC$  соизмѣримы, то онѣ имѣютъ общую наибольшую мѣру  $D$ , которая, измѣряя величины  $AB$  и  $BC$ , очевидно измѣряетъ и цѣлую величину  $AC$ . Слѣдовательно всѣ три величины  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  будутъ соизмѣримы.

Фиг. 319.



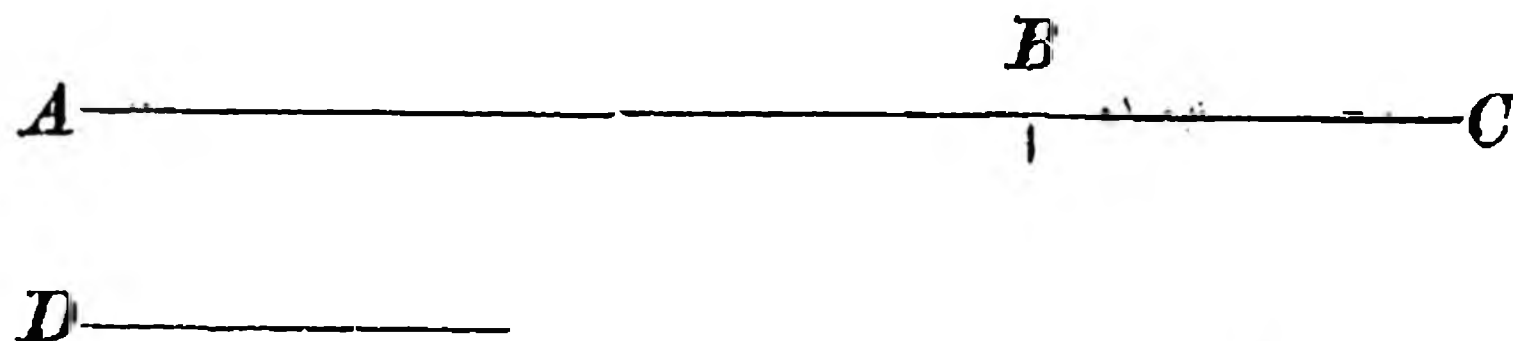
2. Если цѣлая  $AC$  соизмѣрима съ ея частью  $AB$ , то эти величины имѣютъ общую наибольшую мѣру  $D$ , которою, очевидно будетъ измѣряться и остатокъ  $BC$ , но она измѣряетъ  $AB$ , слѣдовательно  $AB$  и  $BC$  соизмѣримы.

*Предложеніе 17.* Если сложимъ двѣ несоизмѣримыя величины  $AB$  и  $BC$ , то цѣлая величина  $AC$  будетъ несоизмѣрима съ каждою  $AB$  и  $BC$ ; или, если цѣлая  $AC$  будетъ несоизмѣрима съ одною изъ частей  $AB$  или  $BC$ , то и эти части будутъ несоизмѣримы между собою (фиг. 320).

*Доказат.* 1. Пусть величины  $AB$  и  $BC$  будутъ несоизмѣримы между собою. Если бы цѣлая  $AC$  была соизмѣрима, напримѣръ съ  $AB$ , то онѣ имѣли бы общую наибольшую мѣру  $D$ . Очевидно мѣра  $D$ , измѣряя  $AC$  и

$AB$ , будетъ измѣрять и остатокъ  $BC$ , слѣдовательно величины  $AB$  и  $BC$  будутъ соизмѣримы, что противорѣчитъ положенію.

Фиг. 320.



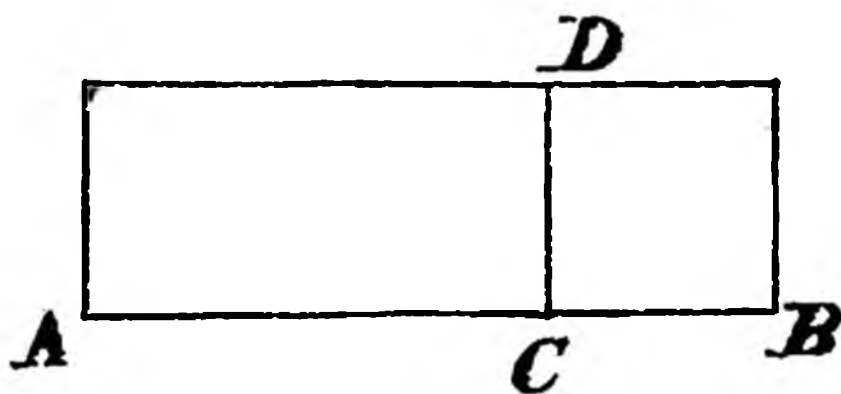
2. Пусть теперь цѣлая  $AC$  будетъ величина несоизмѣримая съ  $AB$ . Если бы части  $AB$  и  $BC$  были соизмѣримы между собою, то и цѣлая  $AC$  была бы величина соизмѣримая съ каждою  $AB$  и  $BC$ , что противорѣчитъ положенію.

*Слѣдствіе.* Если на прямой  $AB$  построимъ прямоугольникъ  $AD$ , коего дополненіе  $BD$  есть квадратъ, то стороны прямоугольника будутъ  $AC$  и  $CB$  (фиг. 321).

Въ самомъ дѣлѣ,  $AD=AC \cdot CD$ , но  $BD$  есть по условію квадратъ, слѣдовательно  $CD=CB$ , откуда:

$$AD=AC \cdot CB.$$

Фиг. 321.



*Предложеніе 18.* Если на большей  $BC$  изъ двухъ данныхъ прямыхъ  $BC$  и  $A$  построимъ прямоугольникъ, равный четвертой части квадрата, построеннаго на меньшей прямой  $A$ , при томъ такъ, чтобы его дополненіе было квадратъ и кромѣ того стороны по длинѣ соизмѣримы; то большая прямая  $BC$  квадратитъ надъ меньшею  $A$  на квадратъ, коего сторона есть величина соизмѣримая по длинѣ съ  $BC$ . Обратно, если на прямой  $BC$  построимъ прямоугольникъ, равный четвертой части квадрата, построеннаго на  $A$ , при томъ такъ, чтобы его дополненіе было квадратъ и кромѣ того если  $BC$  квадратитъ надъ  $A$  на квадратъ, коего сторона соизмѣрима съ  $BC$ ; то стороны, построеннаго прямоугольника будутъ соизмѣримы между собою (фиг. 322).

*Доказат.* 1. Раздѣлимъ прямую  $BC$  въ точкѣ  $E$  пополамъ и сдѣлаемъ  $DE=EF$ , то будемъ имѣть  $DC=BF$ . Такъ какъ (кн. 2, пред. 5):

$$BD \cdot DC + \square ED = \square EC$$

то:

$$4(DB \cdot DC) + 4\Box ED = 4\Box EC.$$

Но по условию:

$$4(BD \cdot DC) = \Box A$$

а по построению:

$$4\Box ED = \Box DF \quad \text{и} \quad 4\Box EC = \Box BC,$$

потому что:

$$2ED = DF \quad \text{и} \quad 2EC = BC$$

следовательно:

$$\Box A + \Box DF = \Box BC$$

откуда:

$$\Box BC - \Box A = \Box DF$$

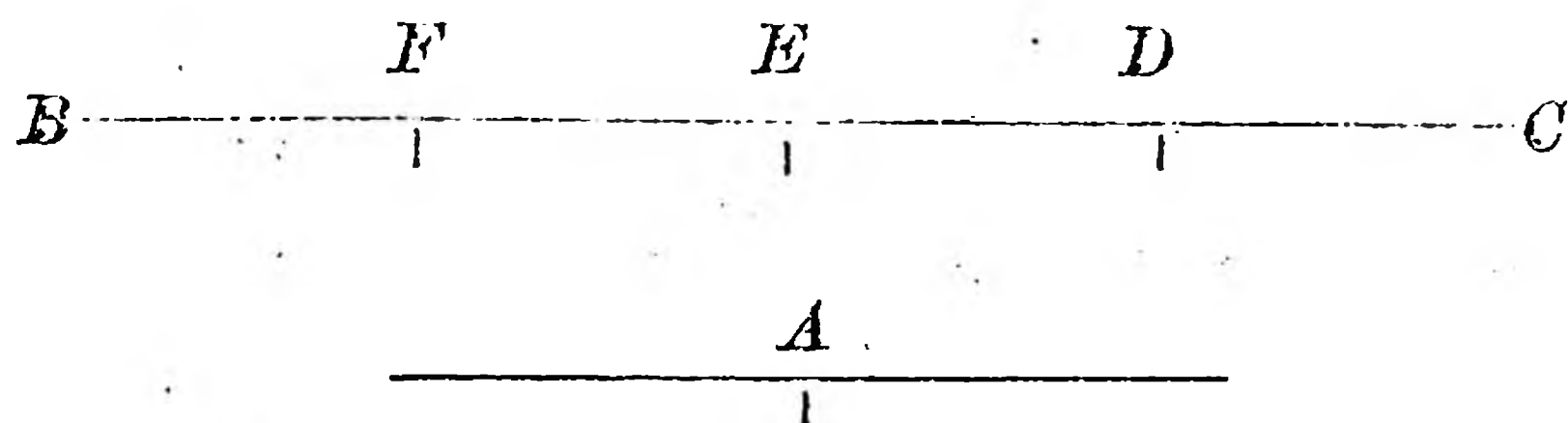
т. е. прямая  $BC$  квадратитъ надъ  $A$  на  $\Box DF$ . Остается показать, что  $BC$  и  $DF$  соизмѣримы.

По условию прямая  $BD$  и  $DC$  соизмѣримы, следовательно соизмѣримы и прямая  $BC$  и  $DC$ . Но  $DC = BF$ , следовательно:

$$DC : DC + BF = 1 : 2$$

откуда видимъ (кн. 10, пред. 6), что  $DC$  и  $DC + BF$  соизмѣримы, но  $DC$  соизмѣрима съ  $BC$ , следовательно  $BC$  и  $DC + BF$  также соизмѣримы (кн. 10, пред. 6). Если наконецъ  $BC$  и  $DC + BF$  соизмѣримы, то (кн. 10, пред. 16) соизмѣримы и прямая  $BC$  и  $DF$ .

Фиг. 322.



2. Если въ предыдущемъ построении:

$$\Box BC - \Box A = \Box FD$$

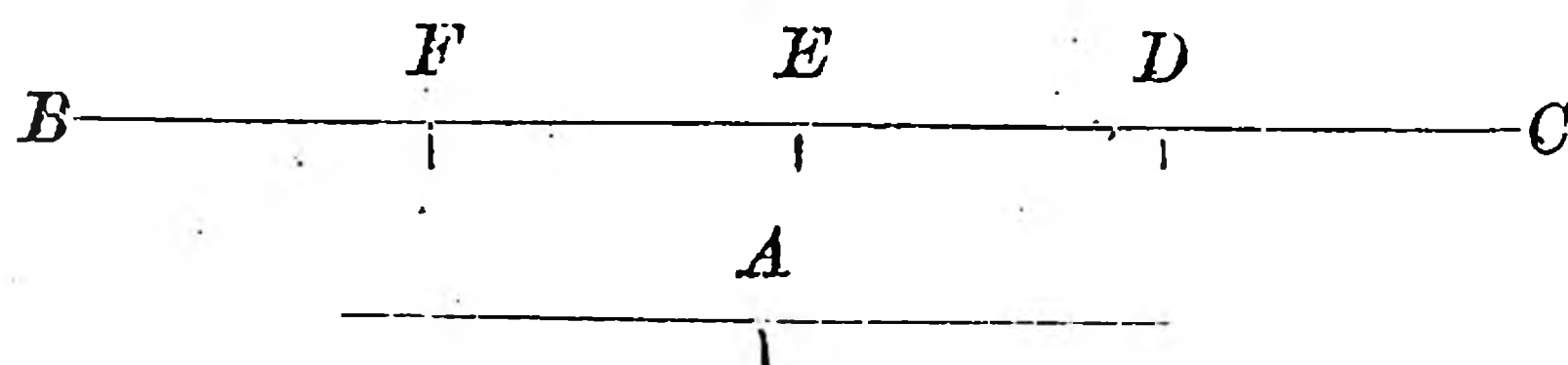
прямая  $BC$  и  $DF$  соизмѣримы, то соизмѣримы (кн. 10, пред. 16) и прямая  $BC$  и  $DC + BF$ . Но  $BF = DC$ , следовательно прямая  $BF + DC$  и  $DC$  соизмѣримы, а также соизмѣримы и прямая  $BC$  и  $DC$ , откуда наконецъ соизмѣримы и прямая  $BD$  и  $DC$ .

*Предложение 19.* Если на большей  $BC$  изъ двухъ прямыхъ  $BC$  и  $A$  построимъ прямоугольникъ, равный четвертой части квадрата, построеннаго на меньшей прямой  $A$ , и при томъ такъ, чтобы его дополненіе было квадратъ, и кромѣ того стороны  $BD$  и  $DC$  по длинѣ несоизмѣримы, то большая



прямая  $BC$  квадратитъ надъ  $A$  на квадратъ, коего сторона несоизмѣрима по длинѣ съ  $BC$ . Обратно, если на прямой  $BC$  построимъ прямоугольникъ, равный четвертой части квадрата, построеннаго на  $A$  и при томъ такъ, чтобы его дополненіе былъ квадратъ, и кромѣ того, если прямая  $BC$  квадратитъ надъ  $A$  на квадратъ, коего сторона несоизмѣрима съ  $BC$ , то стороны  $BD$  и  $DC$ , построеннаго прямоугольника, будутъ по длинѣ несоизмѣримы между собою (фиг. 323).

Фиг. 323.



*Доказат.* 1. Построеніе, подобное предъидущему даетъ:

$$\square BC - \square A = \square DF.$$

По условію прямая  $BD$  и  $DC$  несоизмѣримы, слѣдовательно (кн. 10, пред. 17) несоизмѣримы и прямая  $BC$  и  $DC$ . Такъ какъ  $DC = BF$ , то:

$$DC : DC + BF = 1 : 2,$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 6)  $DC$  и  $DC + BF$  соизмѣримы, откуда (кн. 10, пред. 14) прямая  $BC$  несоизмѣрима съ  $DC + BF$ , и наконецъ (кн. 10, пред. 17) несоизмѣримы и прямая  $DF$  и  $BC$ .

Слѣдовательно прямая  $BC$  квадратитъ надъ  $A$  на квадратъ, коего сторона  $DF$  несоизмѣрима по длинѣ съ  $BC$ .

2. Если въ предъидущемъ построеніи:

$$\square BC - \square A = \square DF$$

прямая  $BC$  и  $DF$  по длинѣ несоизмѣримы, то несоизмѣримы и  $BC$  и  $DC + FB$  (кн. 10, пред. 17). Но прямая  $DC$  и  $DC + BF$  соизмѣримы (кн. 10, пред. 6), слѣдовательно (кн. 10, пред. 14)  $BC$  и  $DC$  несоизмѣримы, въ слѣдствіе чего стороны  $BD$  и  $DC$  по длинѣ несоизмѣримы (кн. 10, пред. 17).

*Замѣчаніе.* Было показано (кн. 10, пред. 9, слѣд.), что прямая, соизмѣримая по длинѣ, всегда соизмѣрима и въ степени, но прямая, соизмѣримая въ степени, не всегда соизмѣрима по длинѣ, онѣ по длинѣ могутъ быть соизмѣримыми и несоизмѣримыми. Изъ этого явствуетъ, (кн. 10, опред. 6), что:

1. Прямая линія, по длинѣ соизмѣримая съ извѣстною раціональною

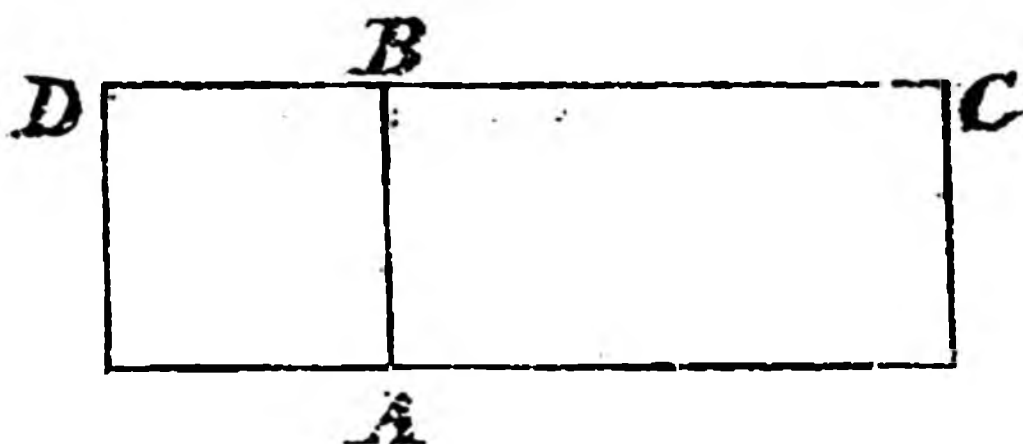
линією, раціональна и называется соизмѣримою по длинѣ и въ степени съ взятою прямою.

2. Прямая линія, въ степени соизмѣримая съ извѣстною раціональною линією, если въ тоже время и по длинѣ съ нею соизмѣрима, то также называется раціональною; но если она по длинѣ несоизмѣрима, то будетъ называться раціональною, но только въ степени соизмѣримою.

*Предложеніе 20.* Прямоугольникъ, имѣющій раціональныя по длинѣ соизмѣримыя стороны, будетъ раціональный (фиг. 324).

*Доказат.* Пусть  $AB$  и  $BC$  будутъ раціональныя, по длинѣ соизмѣримыя стороны прямоугольника  $AC$ ; я говорю, что этотъ прямоугольникъ будетъ раціональный.

Фиг. 324.



Построимъ на прямой  $AB$  квадратъ  $AD$ , такъ какъ прямая  $AD$  раціональна, то раціоналенъ и квадратъ  $AD$  (кн. 10, пред. 8). Но по условію прямыя  $AB$  и  $BC$  соизмѣримы, а  $AB=BD$ , слѣдовательно соизмѣримы и прямыя  $BD$  и  $BC$ . Но мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$BD : BC = AD : AC$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 10) площади  $AD$  и  $AC$  соизмѣримы. Но такъ какъ  $AD$  есть раціональная площадь, то (кн. 10, пред. 9) и площадь  $AC$  раціональна.

*Предложеніе 21.* Раціональный прямоугольникъ  $AC$ , построенный на раціональной прямой  $AB$ , будетъ имѣть раціональную, по длинѣ соизмѣримую съ ней, высоту  $BC$  (фиг. 325).

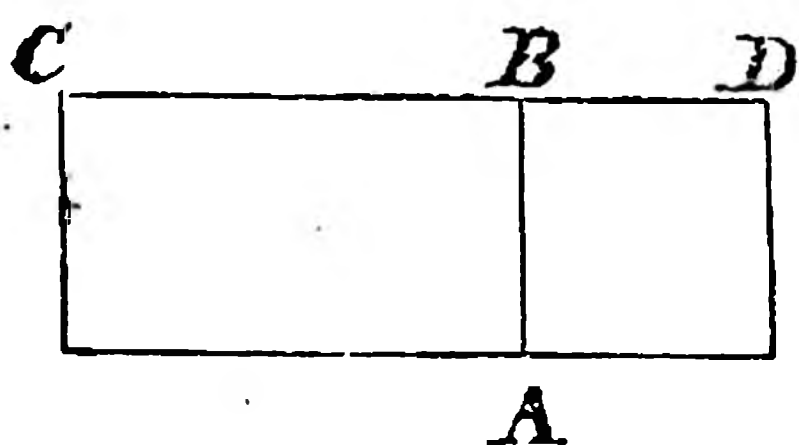
*Доказат.* Построимъ на прямой  $AB$  квадратъ  $AD$ , этотъ квадратъ будетъ раціональный. Такъ какъ по условію прямоугольникъ  $AC$  раціональный, то онъ соизмѣримъ (кн. 10, пред. 19, замѣч.) съ квадратомъ  $AD$ . Но мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$AD : AC = BD : BC$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 15) прямыя  $BD$  и  $BC$  соизмѣримы. Но  $BD=AB$ , слѣдовательно  $AB$  и  $BC$  соизмѣримы. По условію  $AB$  есть

раціональна пряма, слѣдовательно и  $BC$  будетъ раціональная, по длинѣ соизмѣримая, пряма съ  $AB$ .

Фиг. 325.



*Слѣдствіе.* Пряма  $A$ , квадратищая ирраціональную площадь фигуры, сама ирраціональна (фиг. 326).

Фиг. 326.



Въ самомъ дѣлѣ, если бы пряма  $A$  была раціональна, то (кн. 10, пред. 8)  $\square A$  былъ бы раціоналенъ, слѣдовательно и площадь фигуры, равной ему, была бы раціональною, что противорѣчитъ положенію.

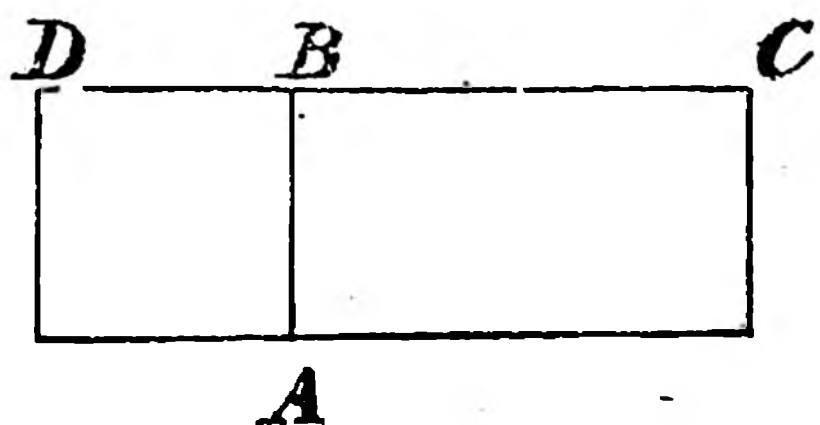
*Предложеніе 22.* Прямоугольникъ  $AC$ , коего стороны  $AB$  и  $BC$  суть раціональныя прямыя, соизмѣримыя только въ степени, будетъ ирраціональнымъ и пряма, квадратищая его площадь будетъ также ирраціональною и называется *среднею прямою* (фиг. 327).

*Доказат.* Построимъ на  $AB$  квадратъ  $AD$ , этотъ квадратъ будетъ раціональный. Такъ какъ по условію  $AB$  и  $BC$  соизмѣримы только въ степени, и  $AB=BD$ , то  $BD$  и  $BC$  несоизмѣримы по длинѣ. Но мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$BD:BC=AD:AC$$

откуда видимъ (кн. 10, пред. 15), что  $AD$  и  $AC$  несоизмѣримы и какъ  $AD$  есть раціональный квадратъ, то  $AC$  будетъ ирраціональный прямоугольникъ. Слѣдовательно пряма, квадратищая его площадь, будетъ также ирраціональная (кн. 10, пред. 21, слѣд.).

Фиг. 327.



*Замѣчаніе.* Среднею эта пряма называется потому, что квадратъ, построенный на ней, равенъ прямоугольнику  $AB \cdot BC$ , т. е. она есть средне-пропорціональная линія между раціональными по длинѣ только несоизмѣрими линіями  $AB$  и  $BC$ .

*Слѣдствіе.* Двѣ прямыя  $AB$  и  $BC$  относятся между собою такъ, какъ



квадратъ, построенный на одной изъ нихъ, наиримѣръ на  $AB$ , относится къ прямоугольнику, коего стороны суть эти прямыя (фиг. 327).

*Доказат.* Построимъ на прямой  $AB$  квадратъ и дополнимъ его прямоугольникомъ такъ, чтобы  $AC=AB \cdot BC$ . Мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$BD:BC=\square AB:AC$$

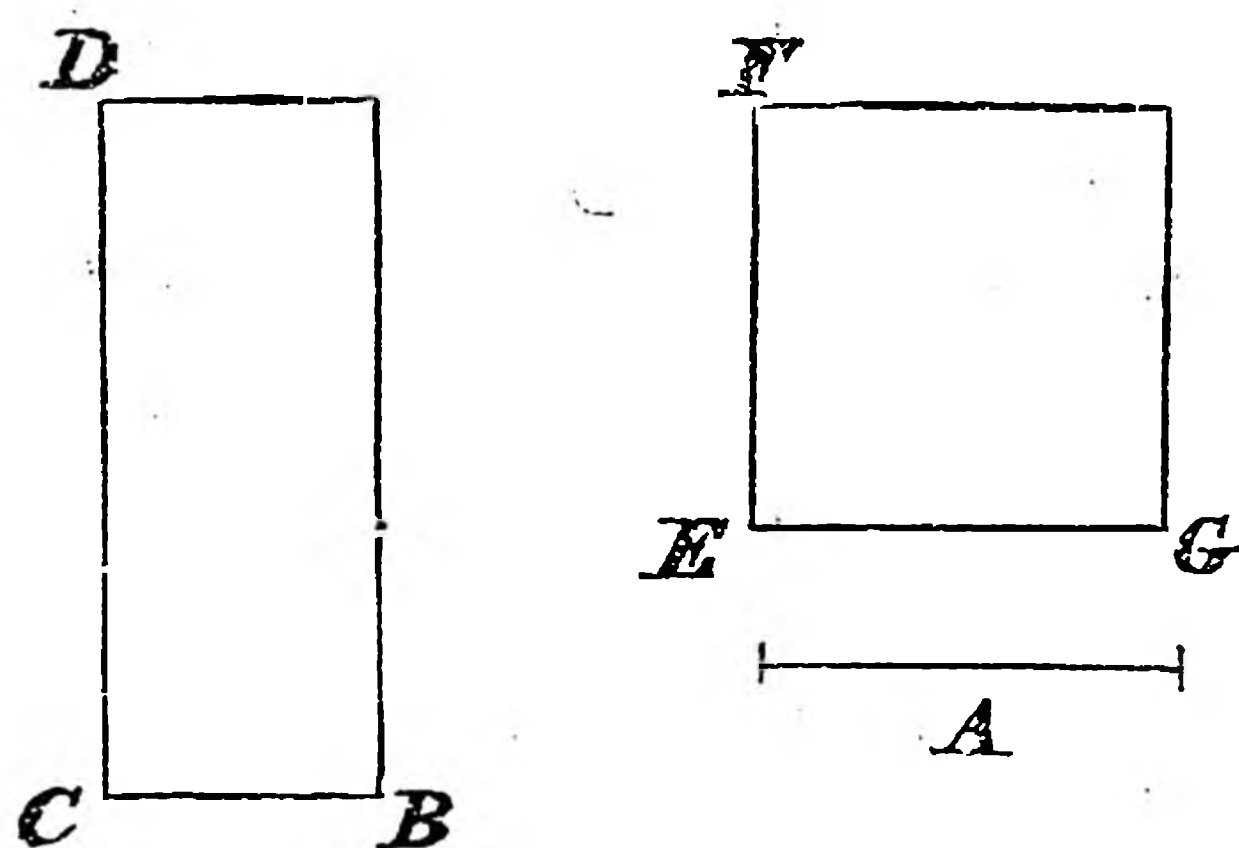
но  $BD=AB$ , слѣдовательно:

$$AB:BC=\square AB:AB \cdot BC.$$

*Предложеніе 23.* Прямоугольникъ  $BD$ , построенный на рациональной прямой  $BC$ , равный квадрату, построенному на средней прямой  $A$ , будетъ имѣть высоту  $DC$ , рациональную по длинѣ несозмѣримую съ  $BC$  (фиг. 328).

*Доказат.* Пусть  $\square A=GF=GE \cdot EF$ . Такъ какъ  $A$  есть средняя прямая, то (кн. 10, пред. 22) прямыя  $GE$  и  $EF$  созмѣримы только въ степени.

Фиг. 328.



По условію  $\square A=BD$ , слѣдовательно прямоугольникъ  $BD=GF$  а такъ какъ они и равноугольны, то (кн. 6, пред. 14):

$$BC:EG=EF:CD$$

откуда (кн. 6, пред. 22):

$$\square BC:\square EG=\square EF:\square CD.$$

Но прямыя  $BC$  и  $EG$  рациональны, а потому квадраты  $\square BC$  и  $\square EG$  созмѣримы, слѣдовательно созмѣримы и квадраты  $\square EF$  и  $\square CD$  (кн. 10, пред. 10). Но квадратъ  $\square EF$  рациональный, слѣдовательно и  $\square CD$  также рациональный. Откуда и сторона его  $CD$  есть рациональная прямая. Такъ какъ стороны  $EF$  и  $EG$  созмѣримы только въ степени, а мы имѣемъ (кн. 10, пред. 22, слѣд.):

$$EF:EG=\square EF:EF \cdot EG$$

то  $\square EF$  несоизмѣримъ съ прямоугольникомъ  $EF.EG$  (кн. 10, пред. 10). Но мы имѣемъ:

$$EF.EG = \square A = DC.CB$$

и какъ по предыдущему  $\square EE$  и  $\square CD$  соизмѣримы, то (кн. 10, пред. 13)  $\square CD$  несоизмѣримъ съ прямоугольникомъ  $DC.CB$ . Но (кн. 10, пред. 22, слѣд.):

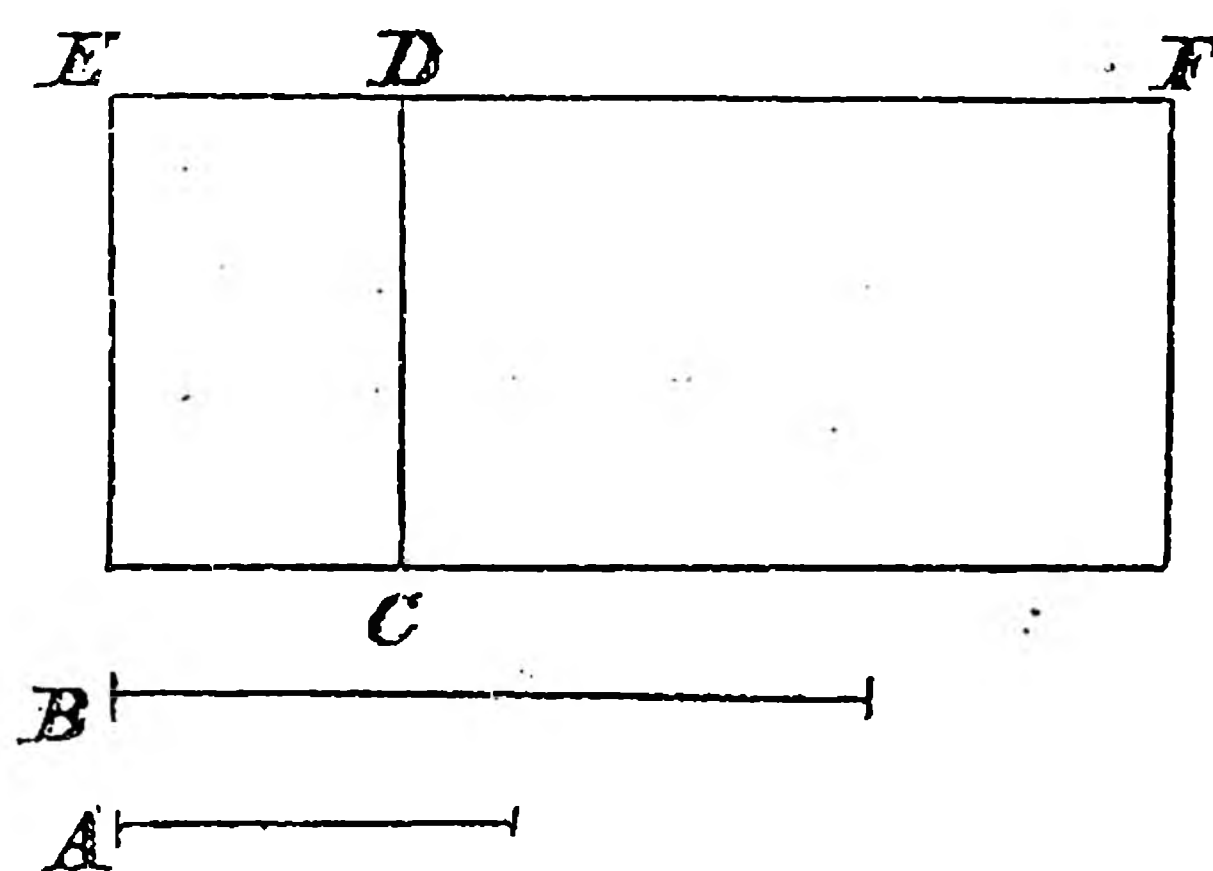
$$\square CD : DC.CB = DC : CB$$

слѣдовательно,  $CD$  и  $CB$  по длинѣ несоизмѣримы. А потому прямая  $DC$  раціональна и съ прямою  $CB$  по длинѣ несоизмѣрима.

*Предложеніе 24.* Каждая прямая  $B$  соизмѣримая съ среднею прямою  $A$  есть сама средняя (фиг. 329).

*Доказат.* Построимъ на раціональной прямой  $CD$  прямоугольникъ  $CE$ , равный квадрату, построенному на  $A$ . Стороны  $CD$  и  $DE$ , построеннаго прямоугольника, будутъ по длинѣ несоизмѣримы (кн. 10, пред. 23).

Фиг. 329.



Построимъ на  $CD$  прямоугольникъ  $CF$ , равный квадрату, построенному на  $B$  и пусть его другая сторона будетъ  $DF$ .

По условію  $A$  и  $B$  соизмѣримы, слѣдовательно (кн. 10, пред. 9, слѣд.) и квадраты  $\square A$ ,  $\square B$  также соизмѣримы. Но  $\square A = CE$ ,  $\square B = CF$ , слѣдовательно и прямоугольники  $CE$  и  $CF$  также соизмѣримы. Но (кн. 6, пред. 1):

$$CE : CF = ED : DF$$

слѣдовательно и прямые  $ED$  и  $DF$  соизмѣримы (кн. 10, пред. 10). Но  $ED$  есть раціональная прямая, по длинѣ несоизмѣрима съ  $CD$ , слѣдовательно (кн. 10, пред. 13) прямая  $DF$  раціональна и по длинѣ несоизмѣрима съ прямою  $CD$ . Откуда видимъ, что прямые  $CD$  и  $DF$  раціональны соизмѣримы только въ степени. Но  $CF$  есть раціональный прямоугольникъ (кн. 10, пред. 22), а мы имѣемъ  $\square B = CD.DF$ , слѣдовательно, прямая  $B$  ирраціональна (кн. 10, пред. 22) и есть средняя.

*Слѣдствіе.* Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что фигура, т. е. ея площадь, соизмѣримая съ площадью средней фигуры, сама есть средняя. Въ самомъ дѣлѣ, прямыя, квадратыя обѣ площади, соизмѣримы только въ степени, и какъ одна изъ нихъ есть средняя, то и другая будетъ также средняя. Что было сказано относительно раціональныхъ линій, то можно сказать и о среднихъ, именно: каждая прямая линія, соизмѣримая съ среднею, есть сама средняя и съ ней и по длинѣ и въ степени вмѣстѣ, или только въ степени соизмѣрима.

*Предложеніе 25.* Прямоугольникъ  $AC$ , имѣющій стороны *среднія*, по длинѣ соизмѣримыя прямыя  $AB$  и  $BC$ , есть самъ *средній* (фиг. 330).

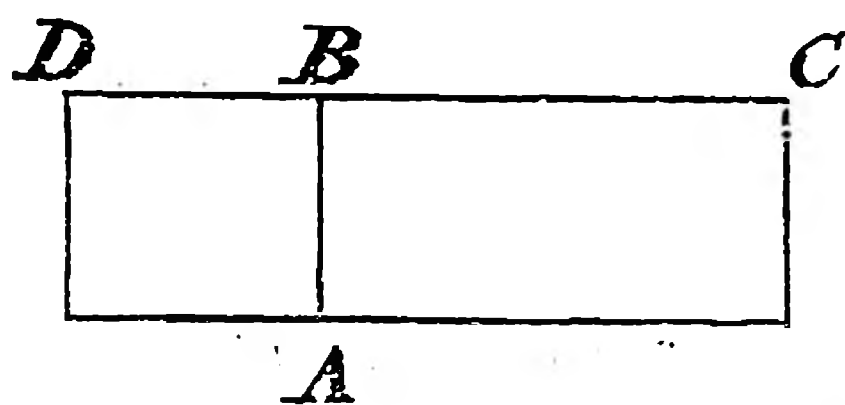
*Доказат.* Пусть  $AB$  и  $BC$  будутъ стороны прямоугольника *среднія* и по длинѣ соизмѣримыя прямыя; я говорю, что прямоугольникъ  $AC$  есть *средній*.

Въ самомъ дѣлѣ, построимъ на прямой  $AB$  квадратъ  $AD$ , который будетъ *средній*. Такъ какъ  $AB$  и  $BC$  соизмѣримы, а  $AB=BD$ , то  $BC$  и  $BD$  также соизмѣримы. Но мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$BD : BC = AD : AC$$

слѣдовательно  $AD$  и  $AC$  соизмѣримы. Но  $AD$  есть *средній* квадратъ, слѣдовательно и прямоугольникъ  $AC$  есть *средній* (кн. 10, пред. 24).

Фиг. 330.



*Предложеніе 26.* Прямоугольникъ  $AC$ , коего стороны суть *среднія*, только въ степени соизмѣримыя линіи  $AB$  и  $BC$ , будетъ или *раціональный* или *средній* (фиг. 331).

*Доказат.* Пусть  $AB$  и  $BC$  будутъ стороны прямоугольника  $AC$ . Если онѣ *среднія*, только въ степени соизмѣримыя, то прямоугольникъ  $AC$  будетъ или *раціональный* или *средній*.

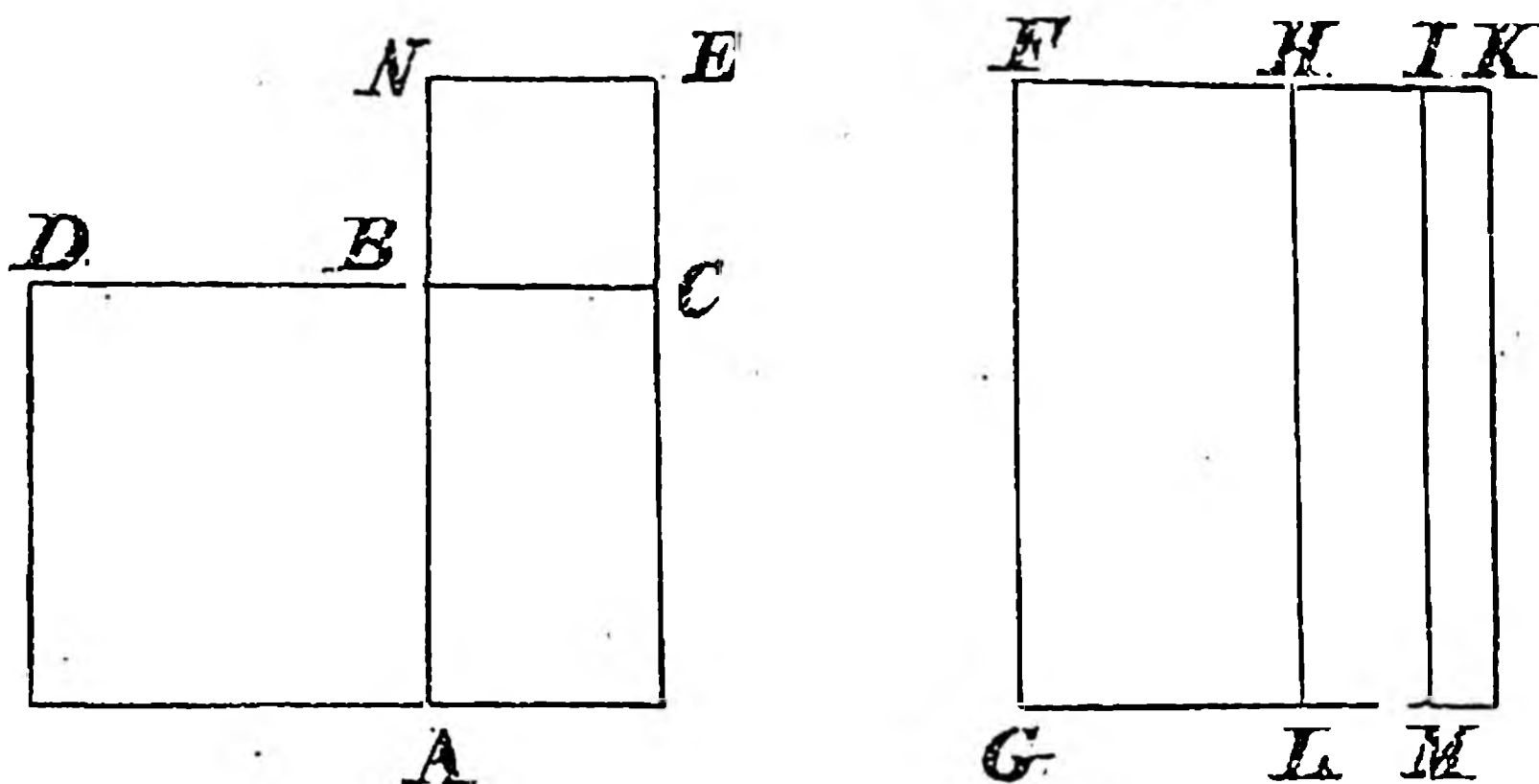
Построимъ на  $AB$  и  $BC$  квадраты  $AD$  и  $BE$ , эти квадраты будутъ *средніе*. Возьмемъ раціональную прямую  $FG$  и построимъ на ней прямоугольникъ  $GH$ , равный квадрату  $AD$ ; пусть его другая сторона будетъ  $FN$ .

На сторонѣ  $HL$  построимъ прямоугольникъ  $LI$  равный прямоугольнику  $AC$  и пусть другая его сторона будетъ  $HI$ . Наконецъ построимъ на  $MI$  прямоугольникъ  $MK$ , равный квадрату  $BE$  и пусть другая его сторона будетъ



*IK*. Стороны *FH*, *HI*, *IK*, построенных прямоугольников *GH*, *LI*, *MK*, составляют одну прямую линию (кн. 1, пред. 14).

Фиг. 331.



Такъ какъ квадраты *AD* и *BE* суть *средние*, то и равные имъ прямоугольники *GH* и *MK* суть также *средние*, но сторона *FG* по условию рациональна, слѣдовательно *FH* и *IK* также рациональны по длинѣ несоизмѣримыя прямыя съ *FG*. Но площадь *AD* соизмѣрима съ площадью *BE*, слѣдовательно и площадь *GH* соизмѣрима съ площадью *MK*. Такъ какъ мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$GH:MK=FH:IK$$

то (кн. 10, пред. 10) *FH* и *IK* соизмѣримы. Слѣдовательно прямыя *FH* и *IK* рациональны и по длинѣ соизмѣримы, откуда и прямоугольникъ *FH.IK* рациональный.

Такъ какъ *BD=AB* и *BC=BN*, то мы имѣемъ:

$$BD:BC=AB:BN$$

но (кн. 6, пред. 1):

$$BD:BC=AD:AC \text{ и } AB:BN=AC:BE$$

слѣдовательно:

$$AD:AC=AC:BE.$$

Но *AD=GH*, *AC=LI*, *BE=MK*, слѣдовательно:

$$GH:LI=LI:MK \text{ и } FH:HI=HI:IK$$

откуда (кн. 6, пред. 17):

$$\square HI=FH.IK.$$

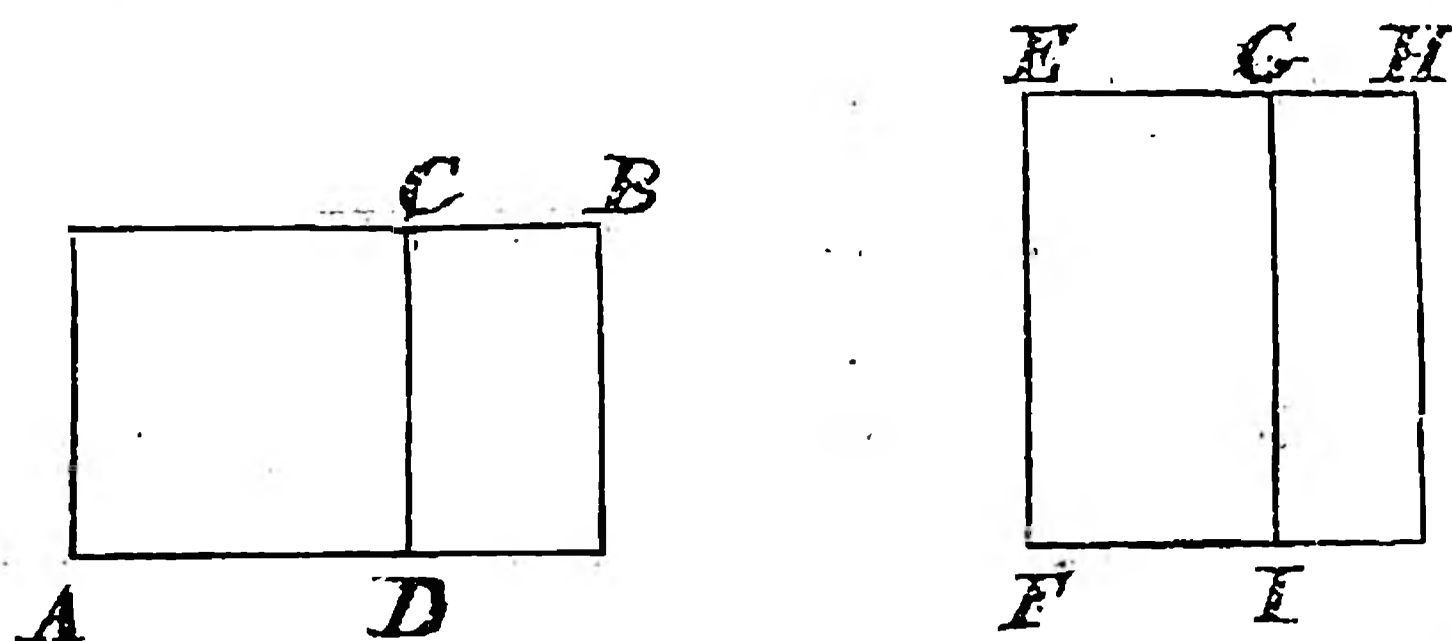
Мы выше показали, что прямоугольникъ *FH.IK* рациональный, слѣдовательно и  $\square HI$  рациональный, а слѣдовательно его сторона *HI* рациональна.

Если  $HI$  соизмѣрима съ  $HL$ , т. е. если  $HI$  соизмѣрима съ  $FG$ , то прямоугольникъ  $LI$  будетъ рациональный; если же  $HI$  и  $FG=HL$  несоизмѣримы, то прямая  $HI$  и  $HL$  суть рациональныя, только въ степени соизмѣримыя линіи, слѣдовательно прямоугольникъ  $LI$  (кн. 10, пред. 22) будетъ *средній*. Откуда видимъ, что прямоугольникъ  $AC=LI$  есть или *рациональный* или *средній*.

*Предложеніе 27.* Избытокъ средняго прямоугольника  $AB$  надъ среднимъ прямоугольникомъ  $AC$  не можетъ быть рациональною площадью (фиг. 332).

*Доказат.* Положимъ, что это возможно и пусть избытокъ  $DB$  будетъ рациональная площадь. Возьмемъ рациональную прямую  $EF$  и построимъ на ней прямоугольникъ  $FH$  равный прямоугольнику  $AB$ , пусть его другая сторона будетъ  $EH$ . Отъ  $FH$  отынемъ прямоугольникъ  $FG=AC$ , то  $BD=IH$ . Но мы допустили, что  $BD$  есть рациональный прямоугольникъ, слѣдовательно и прямоугольникъ  $IH$  будетъ также рациональный.

Фиг. 332.



Такъ какъ, по условію, прямоугольники  $AB$  и  $AC$  суть средніе, то и равные имъ прямоугольники  $FH$  и  $FG$  суть также средніе. Но сторона  $EF$  есть рациональная прямая, слѣдовательно и стороны  $EH$  и  $EG$  суть рациональныя прямая (кн. 10, пред. 23), по длинѣ несоизмѣримыя съ  $EF$ . Но  $IH=BD$  и одна изъ сторонъ  $IG=EF$  рациональна, слѣдовательно и другая сторона  $GH$  рациональна (кн. 10, пред. 21) по длинѣ несоизмѣрима съ  $EF$ . Откуда видимъ, что стороны  $EG$  и  $GH$  несоизмѣримы, потому что несоизмѣримы прямая  $EG$  и  $EF$  (кн. 10, пред. 13). Но мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$EG : GH = \square EG : EG \cdot GH$$

откуда видимъ (кн. 10, пред. 10), что  $\square EG$  и прямоугольникъ  $EG \cdot GH$  несоизмѣримы. Такъ какъ  $\square EG$  и  $\square GH$  рациональны, то  $\square EG$  соизмѣрима съ  $\square EG + \square GH$  и прямоугольникъ  $EG \cdot GH$  соизмѣрима съ  $2(EG \cdot GH)$ , слѣдовательно (кн. 10, пред. 17):

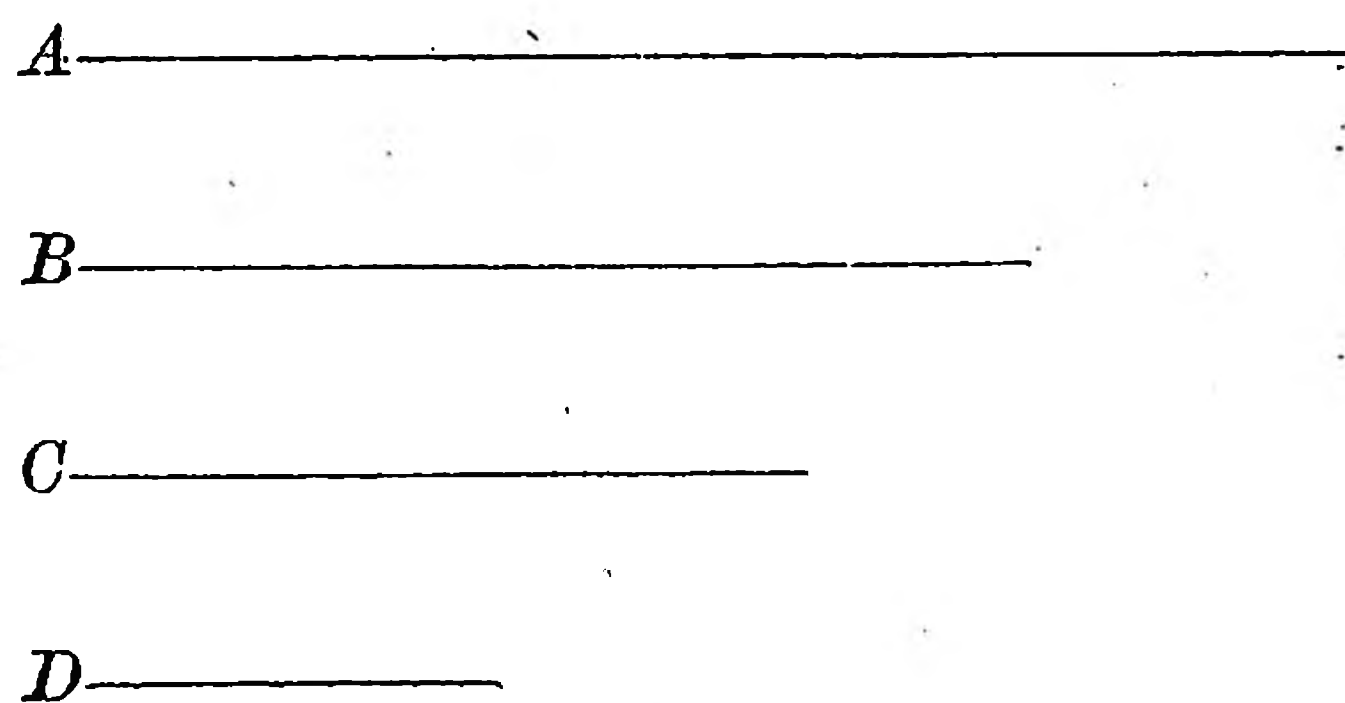
$$\square EG + \square GH \text{ несоизмѣр. съ } 2(EG \cdot GH)$$

а слѣдовательно  $\square EG + \square GH$  несоизмѣримъ съ  $\square EG + \square GH + 2(EG \cdot GH) = \square EH$  (кн. 2, пред. 4). Итакъ площадь  $\square EG + \square GH$  несоизмѣрима съ площадью  $\square EH$ . Но площадь  $\square EG + \square GH$  рациональна, слѣдовательно квадратъ  $\square EH$  и его сторона  $EH$  ирраціональны; мы выше показали, что  $EH$  рациональна, а теперь, что она ирраціональна, слѣдовательно наше положеніе, что избытокъ  $DB$  есть рациональная площадь, невозможно.

*Предложеніе 28.* Найти двѣ среднія прямыя, соизмѣримыя только въ степени, которыя бы были сторонами рациональнаго прямоугольника (фиг. 333)?

*Рѣшеніе.* Пусть  $A$  и  $B$  будутъ двѣ рациональныя только въ степени соизмѣримыя линіи. Построимъ прямую  $C$  средне-пропорціональную между  $A$  и  $B$  (кн. 6, пред. 13) и прямую  $D$  четвертую пропорціональную къ тремъ прямымъ  $A, B, C$  (кн. 6, пред. 12). Такъ какъ прямыя  $C$  и  $D$  суть среднія, только въ степени соизмѣримыя, то  $C \cdot D$  будетъ рациональный прямоугольникъ.

Фиг. 333.



Такъ какъ прямыя  $A$  и  $B$  суть рациональныя соизмѣримыя только въ степени, то прямоугольникъ  $A \cdot B = \square C$  будетъ средній, а также и прямая  $C$ . По построенію мы имѣемъ:

$$A : B = C : D$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 10) прямыя  $C$  и  $D$  соизмѣримы только въ степени, но прямая  $C$  есть *средняя*, слѣдовательно (кн. 10, пред. 24) и  $D$  есть *средняя*. Итакъ прямыя  $C$  и  $D$  суть *среднія* только въ степени соизмѣримыя.

Изъ пропорціи  $A : B = C : D$  мы имѣемъ  $A : C = B : D$ , но  $A : C = C : B$ , слѣдовательно:

$$C : B = B : D,$$

откуда (кн. 6, пред. 17):

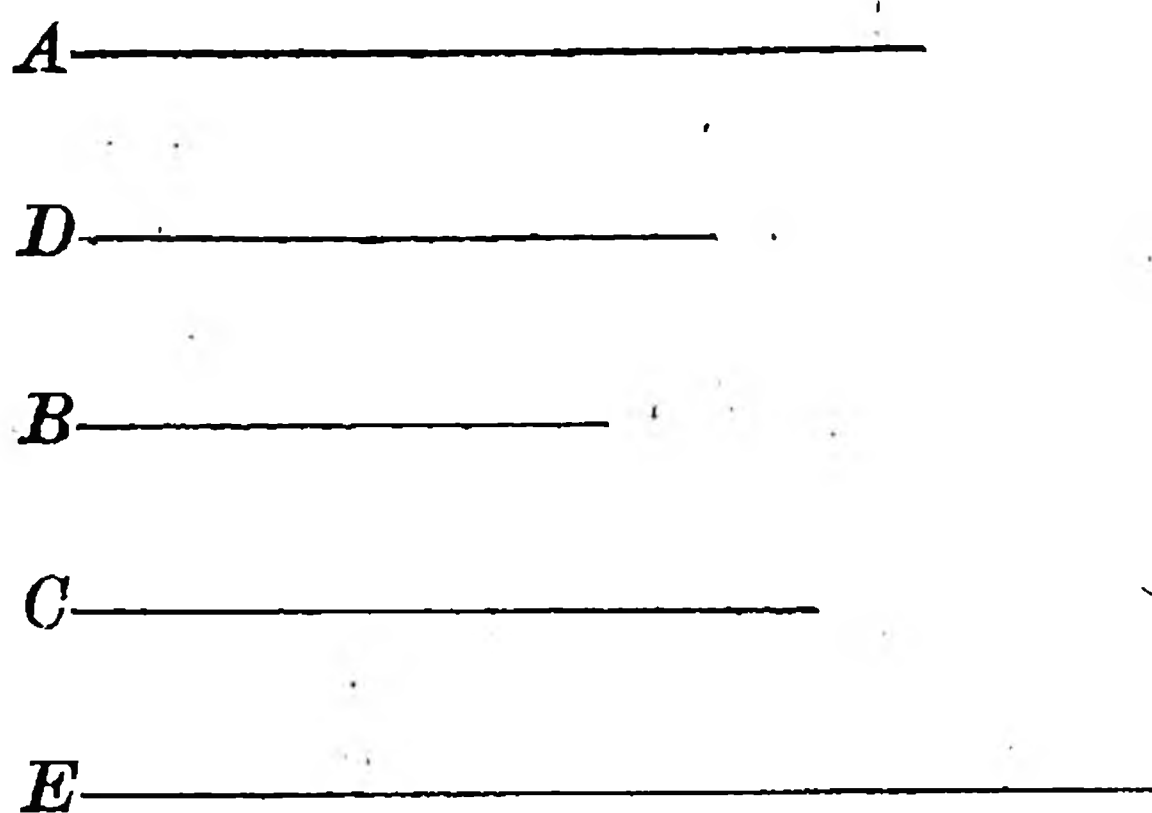
$$\square B = C \cdot D.$$

Но  $\square B$  есть рациональный квадратъ, слѣдовательно и прямоугольникъ  $C \cdot D$  есть также рациональный.



*Предложеніе 29.* Найти двѣ среднія прямыя, соизмѣримыя только въ степени, которыя были бы сторонами *средняго* прямоугольника (фиг. 334)?

Фиг. 334.



*Рѣшеніе.* Возьмемъ три прямыя, только въ степени соизмѣримыя линіи,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Построимъ средне-пропорціональную прямую  $D$  между  $A$  и  $B$  (кн. 6, пред. 13) и четвертую пропорціональную  $E$  къ тремъ прямымъ  $B$ ,  $C$  и  $D$  (кн. 6, пред. 12). Такъ какъ  $D$  и  $E$  суть среднія, только въ степени соизмѣримыя, прямыя (кн. 10, пред. 25), то прямоугольникъ  $D.E$  есть средній.

Такъ какъ  $A$  и  $B$  суть прямыя раціональныя, только въ степени соизмѣримыя, то (кн. 10, пред. 22)  $A.B = \square D$  есть средній квадратъ. Такъ какъ прямыя  $B$  и  $C$  соизмѣримы только въ степени и мы имѣемъ:

$$B : C = D : E \quad (a)$$

то  $D$  и  $E$  соизмѣримы только въ степени (кн. 10, пред. 10). Но  $D$  есть средняя прямая, слѣдовательно (кн. 10, пред. 24) и прямая  $E$  есть также средняя.

Изъ пропорціи (а) мы имѣемъ:

$$B : D = C : E$$

но мы еще имѣемъ:

$$B : D = D : A$$

слѣдовательно:

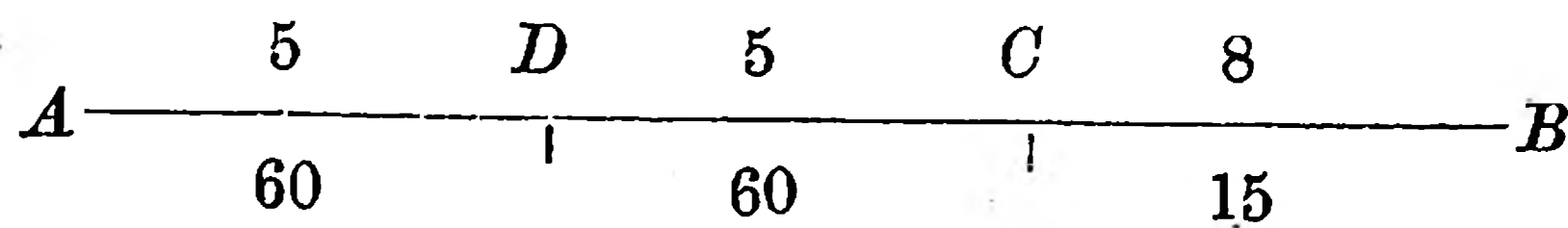
$$D : A = C : E$$

откуда (кн. 6, пред. 16)  $A.C = D.E$ . Но  $A.C$  есть средній прямоугольникъ, слѣдовательно и  $D.E$  есть также *средній* (кн. 10, пред. 22).

*Слѣдствіе 1.* Найти два квадратныхъ числа, которыхъ бы сумма была число квадратное (фиг. 335)?

*Рѣшеніе.* Возьмемъ два подобныя площадныя числа  $AB$  и  $BC$  (кн. 10, примѣч. 4) или два квадратныя. Мы видѣли, что произведеніе  $AB.BC$  такихъ чиселъ есть число квадратное (кн. 10, примѣч. 4):

Пусть два взятых числа  $AB$  и  $BC$  будутъ оба четныя или оба нечетныя. Ихъ разность  $AC$  въ обоихъ случаяхъ будетъ четная. Раздѣлимъ эту разность въ точкѣ  $D$  пополамъ, то мы будемъ имѣть (кн. 2, пред. 6):



четныя. Ихъ разность  $AC$  въ обоихъ случаяхъ будетъ четная. Раздѣлимъ эту разность въ точкѣ  $D$  пополамъ, то мы будемъ имѣть (кн. 2, пред. 6):

$$AB \cdot BC + \square CD = \square BD$$

слѣдовательно квадраты искомыхъ чиселъ суть  $AB \cdot BC$  и  $\square CD$ .

*Примѣръ.*  $AB=18$ ,  $BC=8$ , эти числа подобны, такъ какъ мы имѣемъ:

$$AB=18=3 \cdot 6 \quad BC=8=2 \cdot 4$$

и

$$3:6=2:4$$

слѣдовательно:

$$AB \cdot BC=144, \quad CD=5$$

и

$$144+25=169, \quad 12^2+5^2=13^2.$$

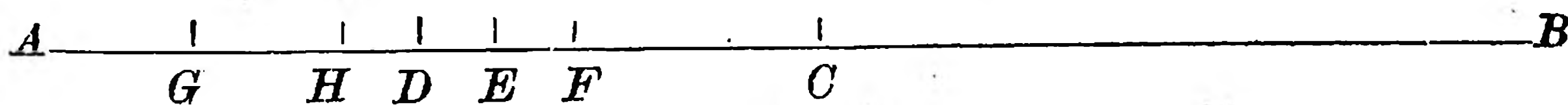
Изъ этого видно, что можно найти два числа  $BD^2$  и  $CD^2$ , коихъ разность  $AB \cdot BC$  есть число квадратное.

*Слѣдствіе 2.* Найти два квадратныя числа коихъ сумма не есть число квадратное (фиг. 336)?

*Рѣшеніе.* Возьмемъ всѣ данныя предыдущаго слѣдствія, то мы будемъ имѣть, какъ выше:

$$AB \cdot BC + \square CD = \square BD.$$

Фиг. 336.



Если отъ  $CD$  отымемъ единицу  $DE$ , то получимъ:

$$AB \cdot BC + \square CE < \square BD$$

я говорю, что  $AB \cdot BC + \square CE$  не есть число квадратное.

Въ самомъ дѣлѣ, если бы  $AB \cdot BC + \square CE$  было число квадратное, то сторона квадрата, выражаемаго этимъ числомъ, была бы или больше, или

равна, или меньше числа  $BE$ , непосредственно меньшаго числа  $BD$ . Я говорю, что не одно изъ этихъ положеній не можетъ имѣть мѣста.

1. Не можетъ имѣть мѣста положеніе:

$$AB \cdot BC + \square CE > \square BE$$

такъ какъ ближайшее большее отъ  $\square BE$  число  $\square BD$  больше предыдущей суммы.

2. Невозможно также и положеніе:

$$AB \cdot BC + \square CE = \square BE.$$

Въ самомъ дѣлѣ,  $GA = 2DE$ ,  $AC = 2DC$ ,  $GC = 2CE$ , т. е.  $GC$  въ точкѣ  $E$  дѣлится пополамъ, слѣдовательно (кн. 2, пред. 6):

$$GB \cdot BC + \square CE = \square BE$$

но по положенію мы имѣемъ:

$$AB \cdot BC + \square CE = \square BE$$

слѣдовательно  $GB = AB$ , что невозможно.

3. Наконецъ невозможно и положеніе:

$$AB \cdot BC + \square CE < \square BE.$$

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ  $AN = 2DF$ ,  $CH = 2CF$ , слѣдовательно  $HC$  въ точкѣ  $F$  дѣлится пополамъ, откуда (кн. 2, пред. 6):

$$BH \cdot BC + \square CF = \square BF.$$

Но какъ  $\square BF$  есть ближайшее меньшее отъ  $\square BE$  квадратное число, то:

$$AB \cdot BC + \square CE = \square BF$$

откуда:

$$HB \cdot BC + \square CF = AB \cdot BC + \square CE$$

а это невозможно.

Итакъ  $AB \cdot BC + \square CE$  квадратнымъ числомъ быть не можетъ; слѣдовательно всегда возможно найти два квадратныхъ числа, коихъ сумма не есть число квадратное.

*Предложеніе 30.* Найти двѣ рациональныя, соизмѣримыя только въ степени, прямыя линіи, изъ коихъ большая квадратитъ надъ меньшею на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ большей (фиг. 337)?



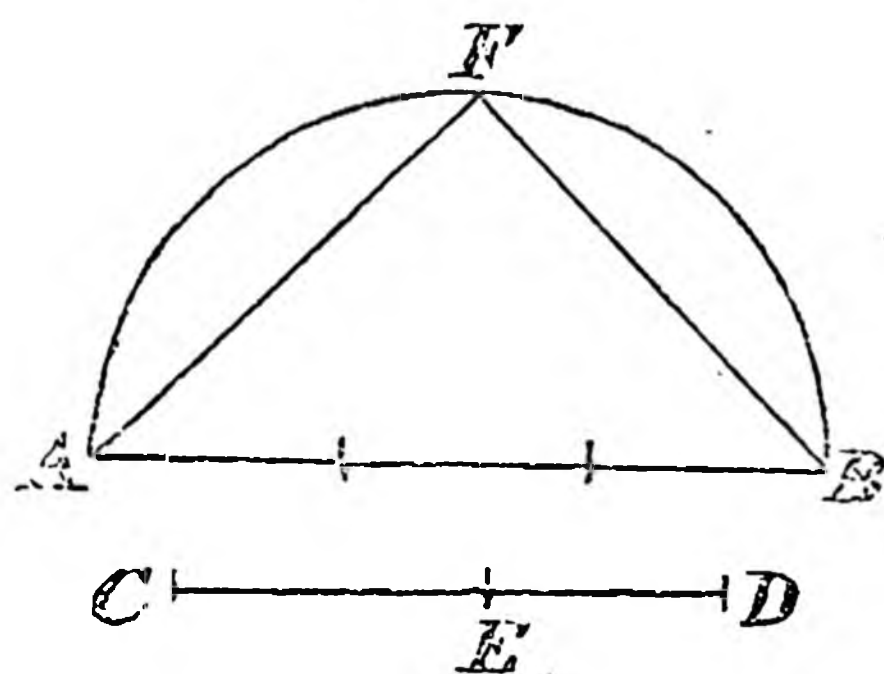
*Рѣшеніе.* Пусть  $AB$  будетъ, какая нибудь раціональная линія, а  $CD$  и  $DE$  два квадратныя числа (кн. 10, пред. 29, слѣд.), коихъ разность  $CE$  не есть число квадратное. На  $AB$  какъ на діаметръ опишемъ полукругъ  $AFB$  и сдѣлаемъ (кн. 10, пред. 6):

$$DC:CE=\square AB:\square AF$$

впишемъ въ полукругъ хорду  $AF$  и соединимъ точку  $F$  съ  $B$ . Я говорю, что искомыя раціональныя прямыя суть  $AB$  и  $AF$ , а  $FB$  есть прямая по длинѣ соизмѣримая съ  $AB$  и коей квадратъ есть разность квадратовъ построенныхъ на  $AB$  и  $AF$ , т. е.  $AB$  квадратитъ надъ  $AF$ :

$$\square AB-\square AF=\square BF.$$

Фиг. 337.



Такъ какъ:

$$\square AB:\square AF=DC:CE$$

а  $CD$  и  $CE$  не суть оба квадратныя числа, то (кн. 10, пред. 6)  $\square AB$  и  $\square AF$  соизмѣримы, а такъ какъ  $\square AB$  раціональный, то  $\square BF$ , а слѣдовательно и линія  $AF$  также раціональна; слѣдовательно  $AB$  и  $AF$  несоизмѣримы по длинѣ (кн. 10, пред. 9). Слѣдовательно прямыя  $AB$  и  $AF$  суть раціональныя соизмѣримыя только въ степени.

Изъ пропорціи:

$$DC:CE=\square AB:\square AF$$

слѣдуетъ (кн. 5, пред. 19, и кн. 1, пред. 47):

$$CD:DE=\square AB:\square BF$$

но  $CD$  и  $DE$  суть числа квадратныя, слѣдовательно (кн. 10, пред. 9), прямыя  $AB$  и  $BF$  соизмѣримы по длинѣ. Но мы имѣемъ (кн. 1, пред. 47):

$$\square AB=\square AF+\square BF$$

откуда:

$$\square AB-\square AF=\square BF$$

что и требовалось доказать.

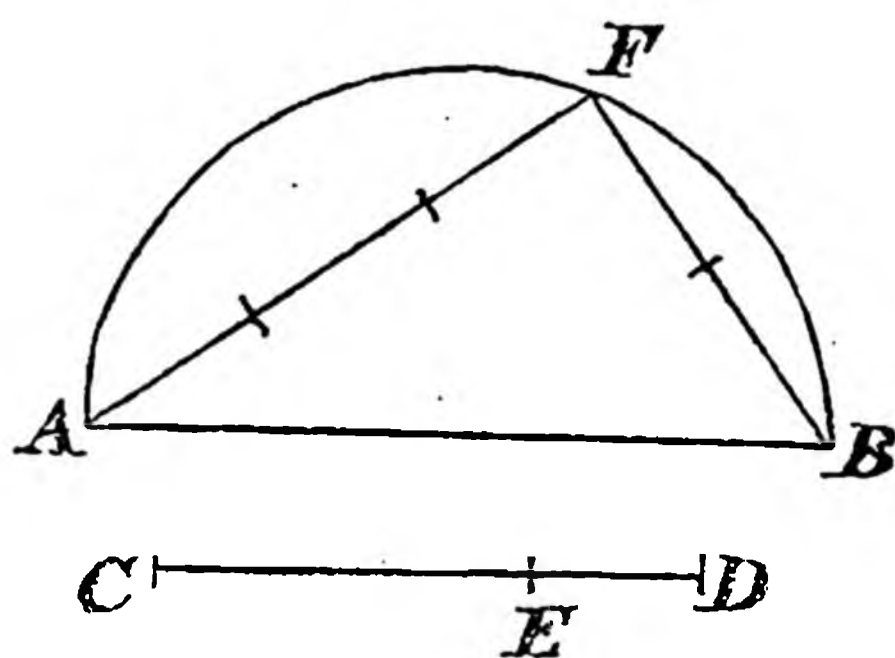
*Предложение 31.* Найти двѣ рациональныя прямыя соизмѣримыя только въ степени, изъ коихъ большая квадратитъ надъ меньшею на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ большей (фиг. 338)?

*Рѣшеніе.* Пусть  $AB$  будетъ, какая нибудь рациональная линія, а  $CE$  и  $ED$  два квадратныя числа (кн. 10, пред. 29, слѣд. 2), коихъ сумма не есть число квадратное. На  $AB$  какъ на діаметрѣ опишемъ полукругъ  $AFB$  (кн. 10, пред. 6, слѣд.) и сдѣлаемъ:

$$DC:CE=\square AB:\square AF.$$

Впишемъ въ полукругъ хорду  $AF$  и точку  $F$  соединимъ съ точкою  $B$ . Я говорю, что искомыя рациональныя прямыя суть  $AB$  и  $AF$ , и  $FB$  по длинѣ несоизмѣрима съ  $AB$ .

Фиг. 338.



Легко видѣть, какъ выше, что  $AB$  и  $AF$  суть рациональныя только въ степени соизмѣримыя линіи. Но мы имѣемъ:

$$DC:CE=\square AB:\square AF$$

и (кн. 5, пред. 19 и кн. 1, пред. 47):

$$CD:DE=\square AB:\square BF$$

такъ какъ  $CD$  и  $DE$  не суть оба числа квадратныя, то  $AB$  и  $BF$  несоизмѣримы (кн. 10, пред. 9). Но мы имѣемъ:

$$\square AB - \square AF = \square BF$$

слѣдовательно  $AB$  и  $AF$  суть искомыя прямыя.

*Слѣдствіе.* Большая изъ двухъ прямыхъ линій  $AB$  и  $BC$  относится къ меньшей, какъ прямоугольникъ содержащійся между обѣими къ квадрату построенному на меньшей (фиг. 339).

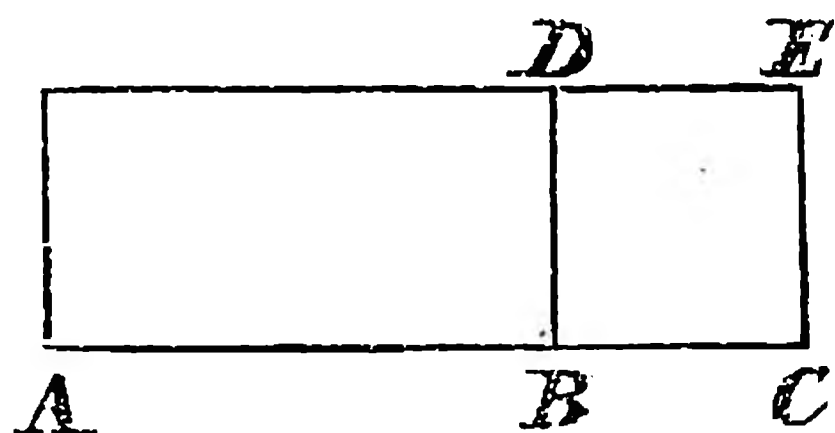
*Доказат.* На прямой  $BC$  построимъ квадратъ  $BE$  и дополнимъ его до прямоугольника  $AD$ , то (кн. 6, пред. 1):

$$AB:BC=AD:BE$$

Но  $AD=AB$ .  $BD=AB \cdot BC$ , такъ какъ  $BD=BC$ ; слѣдовательно:

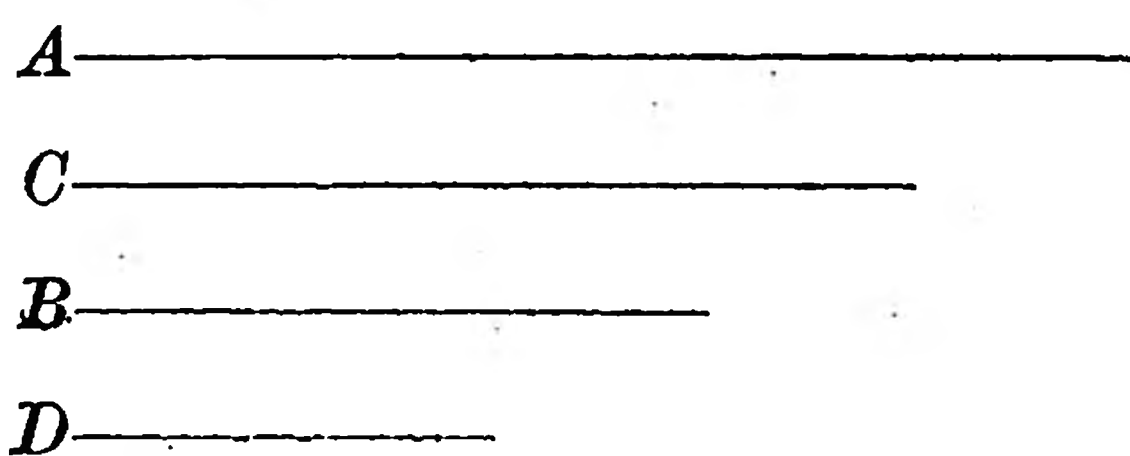
$$AB:BC=AB \cdot BC:\square BC.$$

Фиг. 339.



*Предложеніе 32.* Найти двѣ среднія прямыя соизмѣримыя только въ степени, которыя были-бы сторонами раціональнаго прямоугольника и при томъ такъ, чтобы большая изъ искомымъ прямыхъ квадратила надъ меньшею на квадратъ, коего сторона соизмѣрима по длинѣ съ большею (фиг. 340)?

Фиг. 340.



*Рѣшеніе.* Пусть  $A$  и  $B$  будутъ двѣ раціональныя прямыя соизмѣримыя только въ степени (кн. 10, пред. 30), изъ коихъ большая  $A$  квадратитъ надъ меньшею  $B$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ  $A$ . Построимъ прямыя  $C$  и  $D$  по слѣдующимъ условіямъ (кн. 6, пред. 12, 13):

$$A:C=C:B, \quad C:B=B:D$$

откуда:

$$\square C=A \cdot B, \quad \square B=C \cdot D$$

я говорю, что  $C$  и  $D$  суть искомыя прямыя.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ  $A \cdot B$  есть *средній* прямоугольникъ (кн. 10, пред. 22), то и  $\square C$  есть также *средній*, а слѣдовательно и прямая  $C$  есть *средняя*.

Такъ какъ  $\square B=C \cdot D$  и  $\square B$  есть раціональный, слѣдовательно и прямоугольникъ  $C \cdot D$  есть также раціональный.

Но мы имѣемъ (кн. 10, пред. 31, слѣд.).

$$A:B=A \cdot B:\square B$$

и

$$A \cdot B=\square C, \quad C \cdot D=\square B$$

то:

$$A:B=\square C:C \cdot D$$



но кромѣ этого мы еще имѣемъ (кн. 10, пред. 31, слѣд.):

$$C:D=\square C:C.D$$

откуда:

$$A:B=C:D.$$

Изъ этой пропорціи (кн. 10, пред. 10) видимъ, что  $C$  и  $D$  суть прямыя соизмѣримыя только въ степени. Но  $C$  есть *средняя*, слѣдовательно и  $D$  есть также *средняя* (кн. 10, пред. 24).

Изъ пропорціи:

$$A:B=C:D$$

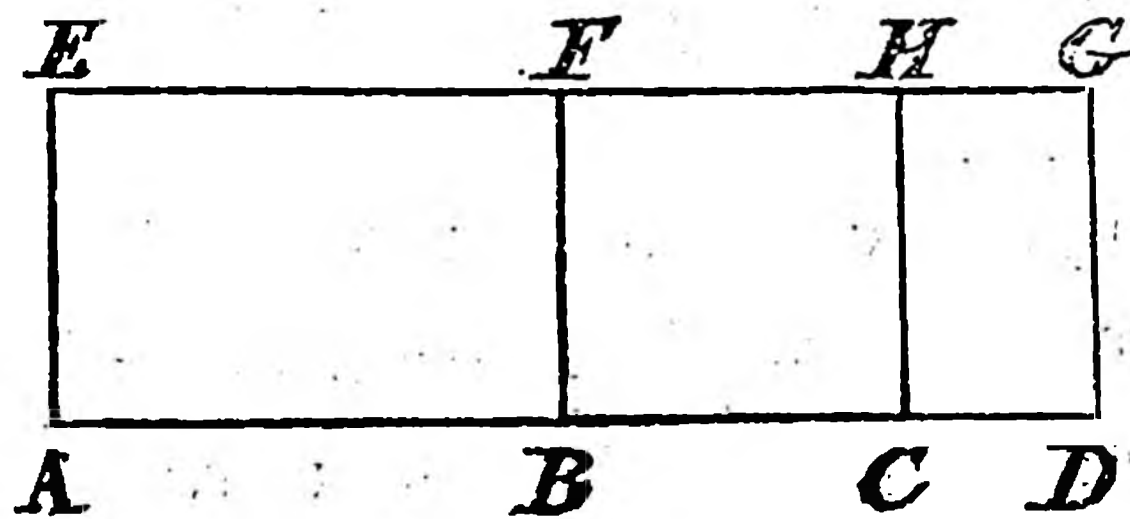
слѣдуетъ также (кн. 10, пред. 15), что  $C$  квадратитъ надъ  $D$  на квадратъ, коего сторона ссизмѣрима по длинѣ съ  $C$ , ибо тоже имѣетъ мѣсто для прямыхъ  $A$  и  $B$ .

*Замѣчаніе.* Точно также мы найдемъ эти линіи, если большая должна квадратитъ надъ меньшею на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ большею, если прямыя  $A$  и  $B$  будутъ такъ взяты, что  $A$  квадратитъ надъ  $B$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ  $A$ .

*Лемма.* Изъ трехъ прямыхъ  $AB, BC, CD$  всегда первая такъ относится къ третьей, какъ прямоугольникъ, содержащійся между первою и второю, къ прямоугольнику, содержащемуся между второю и третьею (фиг. 341).

*Доказат.* Изъ точки  $A$  къ прямой  $AB$  возставимъ перпендикуляръ  $AE$ , сдѣлаемъ  $AE=BC$  и чрезъ точку  $E$  проведемъ параллельную  $EG$  къ прямой  $AD$ ; чрезъ точки  $B, C$  и  $D$  проведемъ линіи  $BF, CH$  и  $DG$  параллельныя  $AE$ .

Фиг. 341.



Такъ какъ (кн. 6, пред. 1):

$$AB:BC=AF:BF \text{ и } BC:CD=BH:CG$$

то:

$$AB:CD=AF:CG.$$

Но  $AF=AB.BC$  и  $CG=CD.BC$ , потому что:

$$AE=BC, CH=AE=BC$$

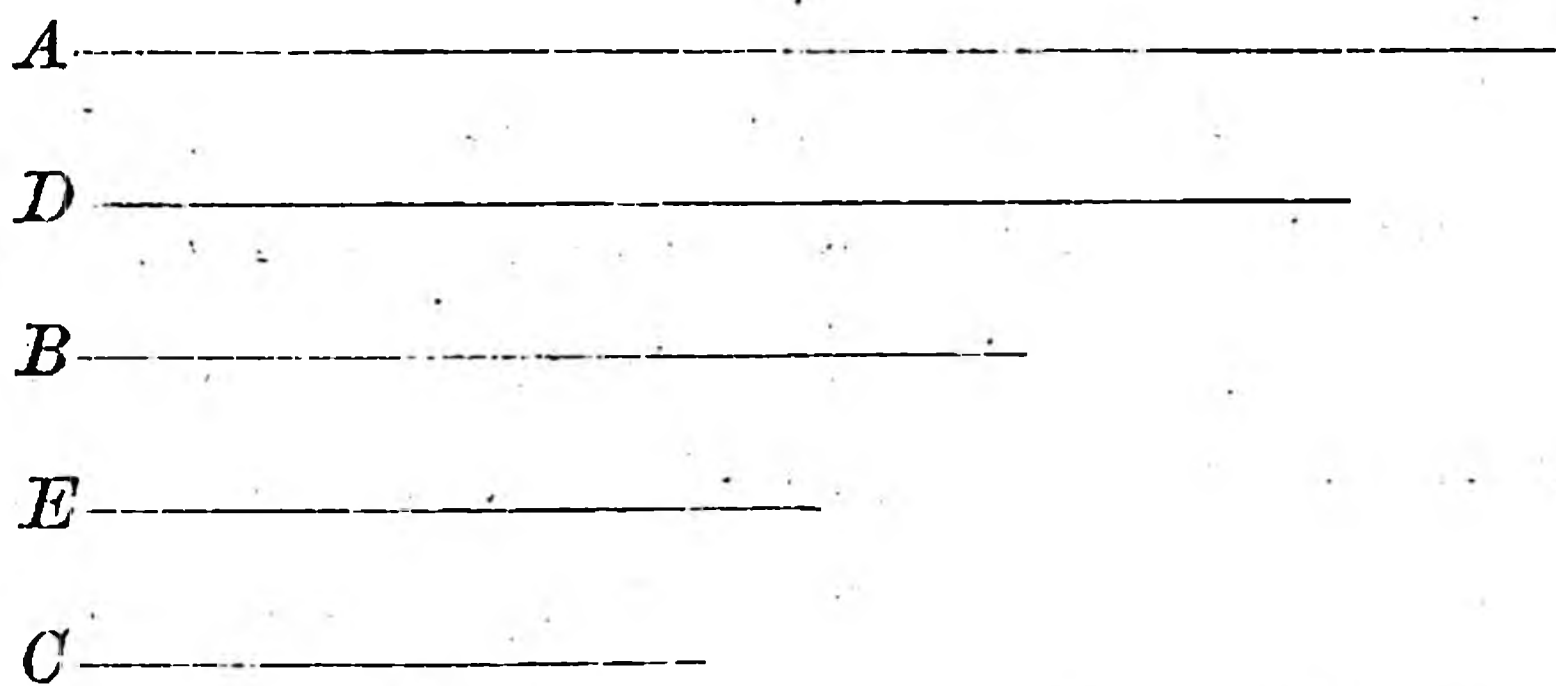
слѣдовательно:

$$AB : CD = AB \cdot BC : BC \cdot CD$$

*Предложеніе 33.* Найти двѣ *среднія* только въ степени соизмѣримыя прямыя, которыя были бы сторонами *средняго* прямоугольника и изъ коихъ большая квадратила бы надъ меньшею на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ большею (фиг. 342)?

*Рѣшеніе.* Пусть  $A, B, C$  будутъ три раціональныя только въ степени соизмѣримыя прямыя (кн. 10, пред. 30), изъ коихъ  $A$  квадратитъ надъ  $C$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ  $A$ .

Фиг. 342.



Построимъ  $D$  и  $E$  такъ (кн. 6, пред. 13 и 12), чтобы:

$$A : D = D : B, \quad D : B = C : E$$

слѣдовательно:

$$\square D = A \cdot B, \quad B \cdot C = D \cdot E.$$

Я говорю, что  $D$  и  $E$  суть искомыя прямыя.

Въ самомъ дѣлѣ, (кн. 10, пред. 22), такъ какъ  $A \cdot B$  есть *средняя* площадь, то и  $\square D$  есть также *средній*, слѣдовательно и прямая  $D$  есть *средняя*. Но мы имѣемъ:

$$A \cdot B : B \cdot C = A : C$$

и

$$A \cdot B = \square D, \quad B \cdot C = D \cdot E$$

слѣдовательно:

$$A : C = \square D : D \cdot E$$

но (кн. 10, пред. 31):

$$\square D : D \cdot E = D : E$$

слѣдовательно:

$$A : C = D : E.$$

Такъ какъ, по условію, прямыя  $A$  и  $C$  соизмѣримы только въ степени, то (кн. 10, пред. 10) и прямыя  $D$  и  $E$  соизмѣримы только въ степени. Но  $D$  есть *средняя* прямая, слѣдовательно и  $E$  есть также *средняя*

(кн. 10, пред. 24). Итакъ прямыя  $D$  и  $E$  суть *среднія* только въ степени соизмѣримыя. Далѣе, такъ какъ:

$$B \cdot C = D \cdot E$$

а  $B \cdot C$  есть средній прямоугольникъ, то (кн. 10, пред. 22) и  $D \cdot E$  есть также *средній*.

Изъ пропорціи:

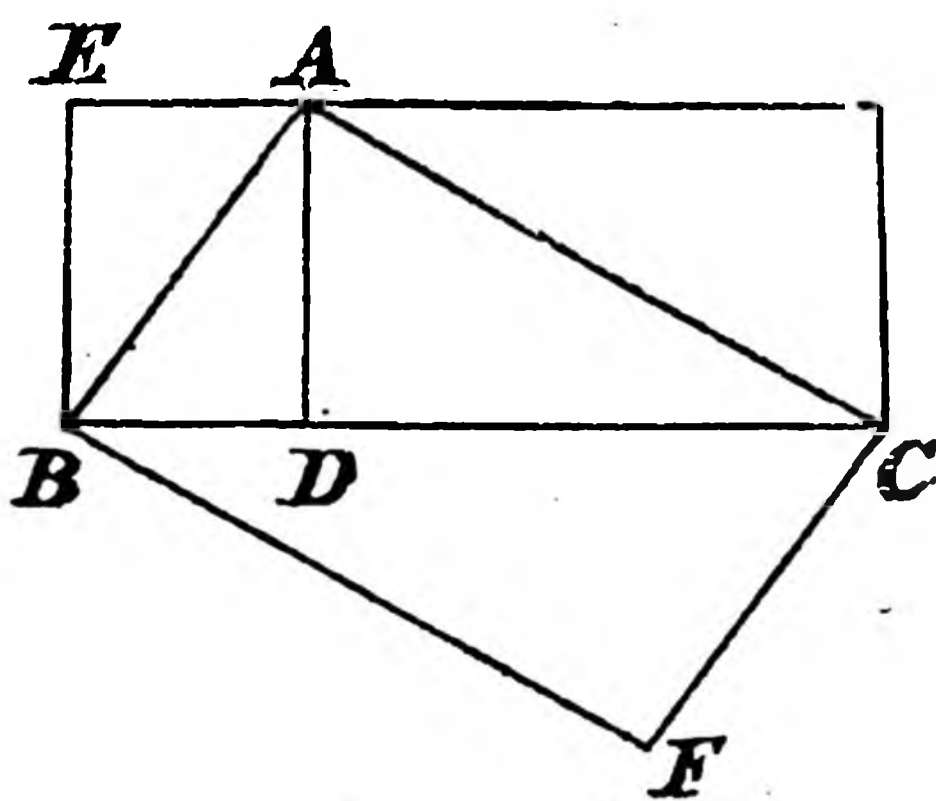
$$A : C = D : E$$

также слѣдуетъ (кн. 10, пред. 15), что  $D$  квадратитъ надъ  $E$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ  $D$ , ибо это же имѣетъ мѣсто по условію для  $A$  и  $C$ .

*Замѣчаніе.* Также точно найдемъ прямыя линіи, если большая должна квадратитъ надъ меньшею на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ большею, взявъ  $A$  и  $B$  такъ, чтобы  $A$  квадратила надъ  $B$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ  $A$ .

*Лемма 1.* Если въ прямоугольномъ треугольникѣ  $BAC$  (фиг. 343) опустимъ изъ вершины прямого угла  $A$  перпендикуляръ  $AD$  на гипотенузу  $BC$ , то:

Фиг. 343.



1. Мы имѣемъ:

$$CB \cdot BD = \square AB$$

такъ какъ (кн. 6, пред. 8, слѣд.) мы имѣемъ:

$$BC : BA = BA : BD.$$

2. Мы имѣемъ еще:

$$BC \cdot CD = \square AC$$

такъ какъ (кн. 6, пред. 8):

$$BC : CA = CA : CD.$$



3. Мы имѣемъ:

$$BD \cdot DC = \square AD$$

такъ какъ (кн. 6, пред. 8):

$$BD : AD = AD : DC.$$

4. И наконецъ мы имѣемъ:

$$BC \cdot AD = BA \cdot AC$$

такъ какъ (кн. 6, пред. 8):

$$BC : AC = AB : AD.$$

Или, если построимъ прямоугольники  $CE$  и  $AF$ , то каждый изъ нихъ  $= 2\triangle BAC$ , слѣдовательно  $CE = AF$ , т. е.:

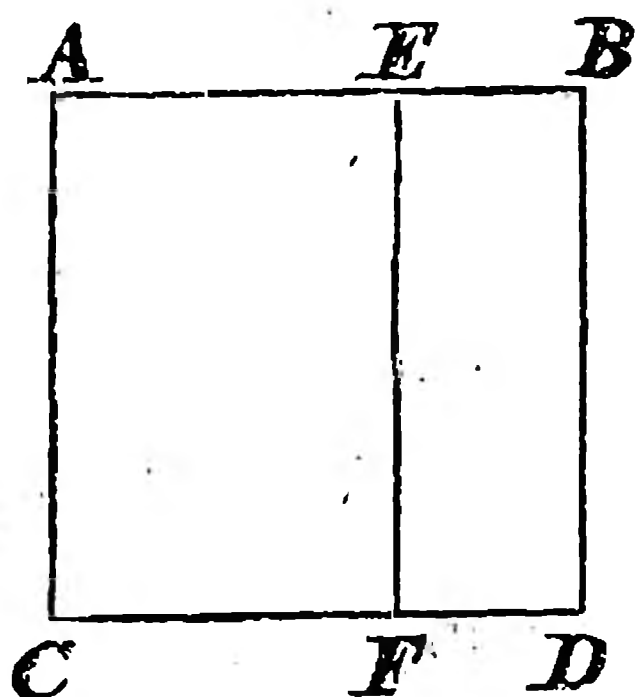
$$BC \cdot AD = AB \cdot AC$$

*Лемма 2.* Если прямую линію  $AB$ , въ точкѣ  $E$  раздѣлимъ на двѣ неравныя части  $AE$  и  $EB$ , то большая  $AE$  такъ относится къ меньшей  $EB$ , какъ прямоугольники, содержащіеся между цѣлою  $AB$  и меньшимъ отрѣзкомъ  $EB$  (фиг. 344).

*Доказат.* На данной прямой  $AB$  построимъ квадратъ  $AD$  и чрезъ точку  $E$  проведемъ  $EF \parallel AC$ , то (кн. 6, пред. 1):

$$AE : EB = AF : FB$$

Фиг. 344.



Но  $AF = AB \cdot AE$ ,  $FB = AB \cdot BE$ , такъ какъ  $AB = AC = BD$ . Слѣдовательно:

$$AE : EB = AB \cdot AE : AB \cdot BE$$

*Лемма 3.* Если изъ двухъ неравныхъ прямыхъ  $AB$  и  $BC$ , меньшую  $BC$ , въ точкѣ  $D$ , раздѣлимъ пополамъ, то прямоугольникъ, содержащійся

между  $AB$  и  $BC$  равенъ двойному прямоугольнику, содержащемуся между большею  $AB$  и половиною меньшей  $BC$  (фиг. 345).

*Доказат.* Изъ точки  $B$  возставимъ перпендикуляръ  $BE=AB$  къ прямой  $AC$  и построимъ прямоугольникъ  $BG$ .

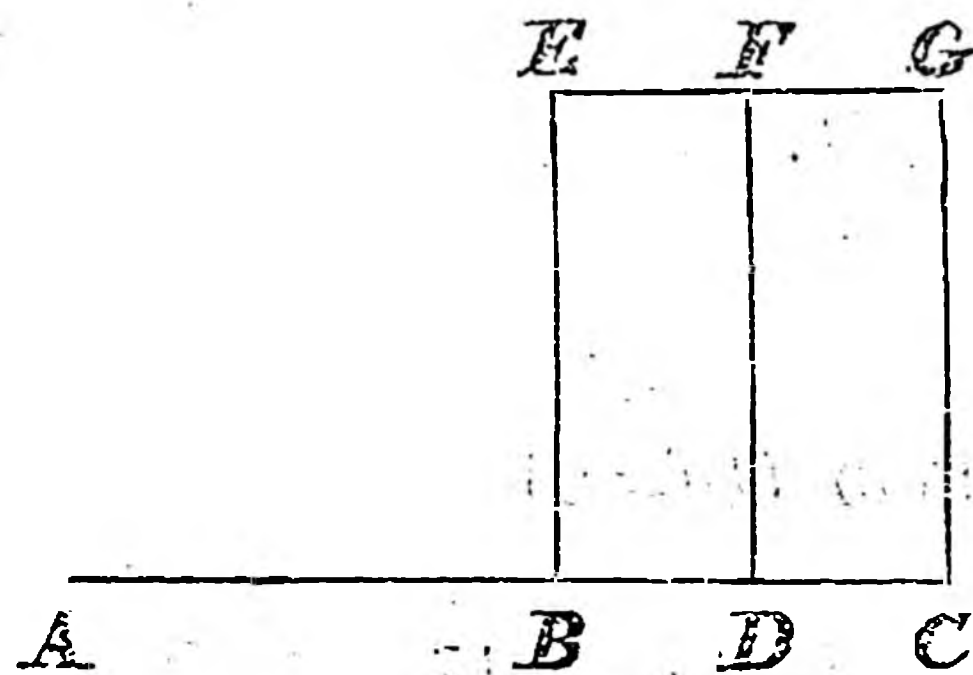
Такъ какъ (кн. 6, пред. 1):

$$DB:DC=BF:DG$$

то:

$$BC:DC=BG:DG$$

Фиг. 345.



откуда, замѣчая, что  $BC=2DC$  имѣемъ,  $BG=2DG$ .

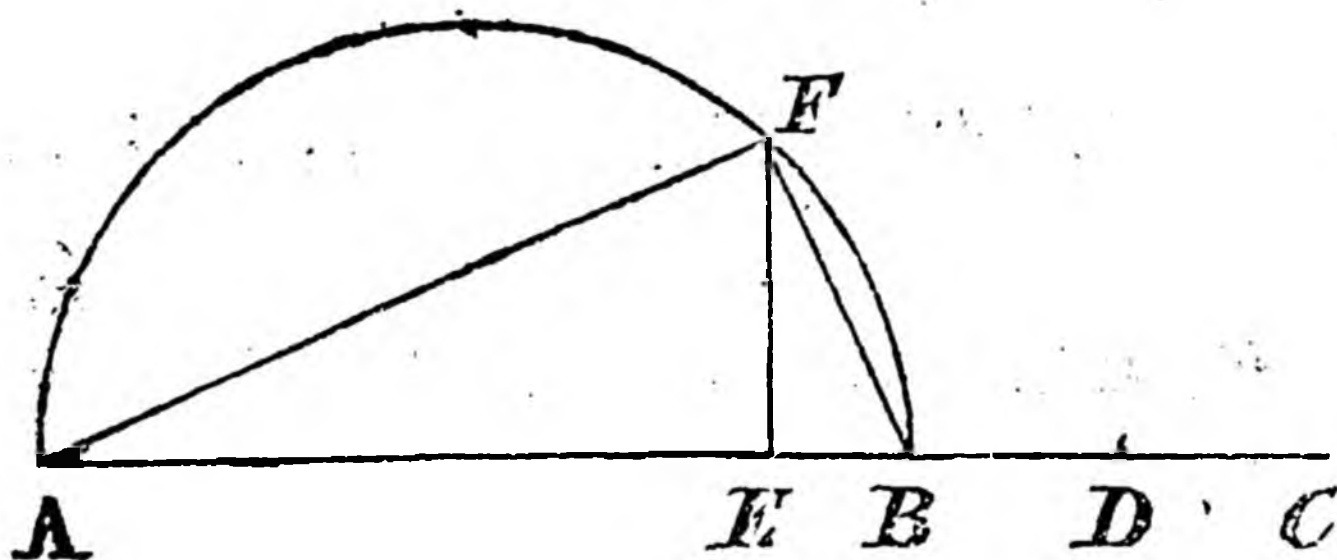
Но  $BG=AB \cdot BC$ ,  $DG=AB \cdot BD$ , потому что  $AB=BE$  и  $BD=DC$ , слѣдовательно:

$$AB \cdot BC=2(AB \cdot BD).$$

*Предложеніе 34.* Найти двѣ прямыя соизмѣримыя только въ степени, которыя бы были сторонами средняго прямоугольника и коихъ вмѣстѣ взятые квадраты составляли бы раціональную площадь (фиг. 346)?

*Рѣшеніе.* Пусть  $AB$  и  $BC$  будутъ раціональными прямыми только въ степени соизмѣримыя (кн. 10, пред. 31), изъ коихъ  $AB$  квадратитъ надъ  $BC$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ  $AB$ . Раздѣлимъ прямую  $BC$  въ точкѣ  $D$  пополамъ и на  $AB$  (кн. 6, пред. 28) построимъ прямоугольникъ  $AE \cdot EB$  равный четвертой части  $\square BC$ , т. е.  $\square BD$  и коего дополненіе есть квадратъ. На  $AB$ , какъ на діаметръ опишемъ полукругъ  $AFB$ . Изъ точки  $E$  возставимъ перпендикуляръ  $EF$  и проведемъ прямыя  $AF$  и  $FB$ . Я говорю, что  $AF$  и  $FB$  будутъ искомыя прямыя.

Фиг. 346.



Въ самомъ дѣлѣ, по построенію (кн. 10, пред. 19)  $AE$  несоизмѣрима съ  $EB$ . Но мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$AE:EB=BA.AE:BA.BE$$

по (кн. 10, пред. 33)  $AB.AE=\square AF$  и  $BA.EB=\square FB$ , слѣдовательно:

$$AE:EB=\square AF:\square FB$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 10)  $\square AF$  и  $\square FB$ , а также  $AF$  и  $FB$  въ степени несоизмѣримы.

Такъ какъ  $AB$  есть раціональная прямая, то  $\square AB$  есть раціональная площадь, но (кн. 1, пред. 47):

$$\square AB=\square AF+\square FB$$

слѣдовательно и  $\square AF+\square FB$  есть раціональная площадь.

Далѣе, (кн. 10, пред. 33, лемма 1)  $AE.EB=\square EF$ , а по построению  $AE.EB=\square BD$ , слѣдовательно  $EF=BD$  и  $BC=2EF$ , откуда (кн. 6, пред. 1)  $AB.BC=2(AB.EF)$ , но (кн. 10, пред. 22)  $AB.BC$  есть *средній* прямоугольникъ, слѣдовательно и  $AB.EF$  есть также *средній*; но мы имѣемъ (кн. 10, пред. 33):

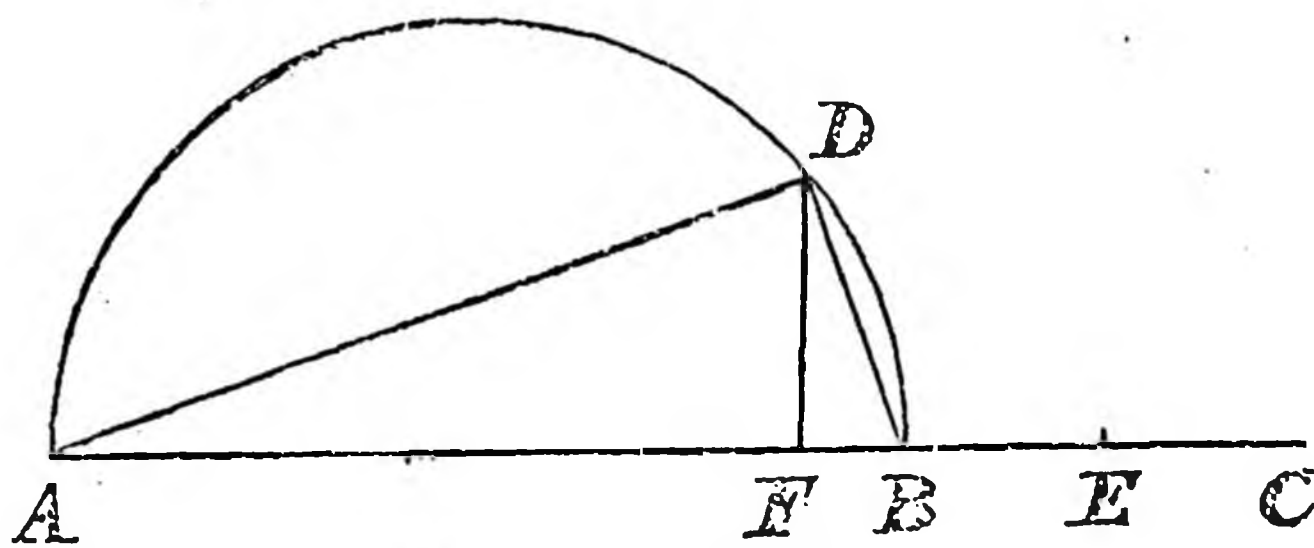
$$AB.EF=AF.FB$$

слѣдовательно и прямоугольникъ  $AF.FB$  есть *средній*.

*Предложеніе 35.* Найти двѣ прямыя линіи, несоизмѣримыя въ степени, которыя были бы сторонами раціональнаго прямоугольника и коихъ сумма квадратовъ была-бы *средняя* площадь (фиг. 347)?

*Рѣшеніе.* Пусть  $AB$  и  $BC$  будутъ двѣ среднія прямыя (кн. 10, пред. 32) соизмѣримыя только въ степени, содержащія раціональный прямоугольникъ и изъ коихъ  $AB$  квадратитъ надъ  $BC$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ  $AB$ . Раздѣлимъ прямую  $BC$ , въ точкѣ  $E$ , пополамъ, и на  $AB$  построимъ (кн. 6, пред. 28) прямоугольникъ  $AF.FB$ , равный квадрату  $\square BC$ , коего дополненіе есть квадратъ. На  $AB$ , какъ на діаметрѣ, опишемъ полукругъ  $ADB$ , изъ точки  $F$  возставимъ перпендикуляръ  $FD$  и проведемъ хорды  $AD$  и  $DB$ . Я говорю, что  $AD$  и  $DB$  суть искомыя прямыя.

Фиг. 347.



Въ самомъ дѣлѣ, по построению (кн. 10, пред. 19) прямая  $AF$  несоизмѣрима съ  $FB$ , слѣдовательно (кн. 6, пред. 1, и кн. 10, пред. 10):



$AB \cdot AF$  несоизмѣримъ съ  $AB \cdot BF$

Но мы имѣемъ (кн. 10, пред. 33, лемма 1):

$$AB \cdot AF = \square AD \quad \text{и} \quad AB \cdot BF = \square BD$$

слѣдовательно и  $\square AD$  несоизмѣримъ съ  $\square BD$ , откуда и прямыя  $AD$  и  $BD$  несоизмѣримы.

Такъ какъ  $\square AB$  есть *средній* квадратъ, а мы имѣемъ (кн. 1, пред. 47):

$$\square AB = \square AD + \square DB$$

поэтому и  $\square AD + \square DB$  есть *средняя* площадь; слѣдовательно, квадраты, построенные на прямыхъ  $AD$  и  $DB$  составляютъ *среднюю* площадь.

Далѣе, по построенію, мы имѣемъ  $AF \cdot FB = \square BE$  и (кн. 10, пред. 33)  $AF \cdot FB = \square DF$ , слѣдовательно  $BE = DF$ , откуда  $BC = 2BE = 2DF$ ; слѣдовательно:

$$AB \cdot BC = 2(AB \cdot DF)$$

изъ этого видимъ, что прямоугольникъ  $AB \cdot BC$  соизмѣримъ съ прямоугольникомъ  $AB \cdot DF$ . Но, по построенію  $AB \cdot BC$  есть площадь раціональная, слѣдовательно и площадь  $AB \cdot DF$  есть также площадь раціональная. Но мы имѣемъ (кн. 10, пред. 33):

$$AB \cdot DF = AD \cdot DB$$

слѣдовательно и  $AD \cdot DB$  есть раціональная площадь.

*Предложеніе 36.* Найти двѣ прямыя, несоизмѣримыя въ степени, на которыхъ сумма построенныхъ квадратовъ была бы *средняя* площадь и которыя содержали бы *средній* прямоугольникъ, несоизмѣримый съ *среднею* площадью (фиг. 347)?

*Рѣшеніе.* Пусть  $AB$  и  $BC$  (кн. 10, пред. 33) будутъ двѣ *среднія* прямыя только въ степени соизмѣримыя, заключающія *средній* прямоугольникъ и изъ коихъ  $AB$  квадратитъ надъ  $BC$  на квадратъ, коего сторона несоизмѣрима съ  $AB$ .

Сдѣлавъ тоже построеніе какъ въ предыдущемъ предложеніи, найдемъ, что  $AD$  и  $DB$  суть искомыя прямыя.

Въ самомъ дѣлѣ,  $AF$  несоизмѣрима съ  $FB$ , слѣдовательно  $AD$  и  $DB$  несоизмѣримы въ степени; но  $\square AB$  есть *средній*, слѣдовательно и  $\square AD + \square DB$  есть *средняя* площадь.

Но мы и здѣсь имѣемъ  $BC = 2DF$ , слѣдовательно  $AB \cdot BC = 2(AB \cdot FD)$ , но такъ какъ  $AB \cdot BC$  есть *средній* прямоугольникъ, то и  $AB \cdot FD$  есть также *средній*. Но мы имѣемъ:

$$AB \cdot FD = AD \cdot DB$$

слѣдовательно  $AD \cdot DB$  есть *средній* прямоугольникъ.

По условію  $AB$  и  $BC$  несоизмѣримы, но  $BC$  и  $BE$  соизмѣримы, слѣдовательно,  $AB$  и  $BE$  несоизмѣримы, откуда (кн. 6, пред. 1 и кн. 10, пред. 10)  $\square AB$  и  $AB \cdot BE$  несоизмѣримы. Но мы имѣемъ:

$$\square AB = \square AD + \square DB$$

и

$$AB \cdot BE = AB \cdot FD = AD \cdot DB$$

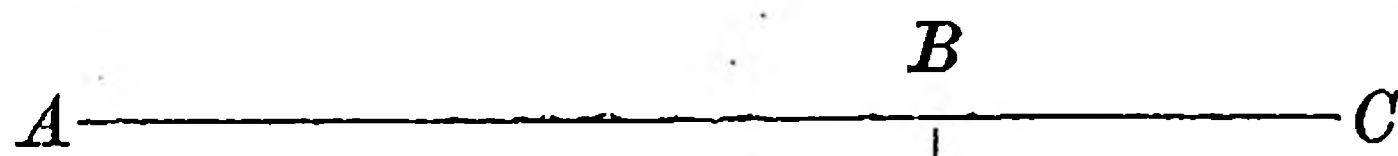
слѣдовательно, площадь  $\square AD + \square DB$  несоизмѣрима съ площадью  $AD \cdot DB$ .



Шесть отъ сложенія происшедшихъ ирраціональностей.

*Предложеніе 37.* Если сложимъ двѣ раціональныя, только въ степени соизмѣримыя линіи  $AB$  и  $BC$ , то цѣлая линія  $AC$  будетъ ирраціональная и называется *биноміальною* (фиг. 348).

Фиг. 348.



*Доказат.* Такъ какъ прямыя  $AB$  и  $BC$  соизмѣримы только въ степени, то сами онѣ несоизмѣримы. Но мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$AB : BC = AB \cdot BC : \square BC$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 10) прямоугольникъ  $AB \cdot BC$  несоизмѣримъ съ квадратомъ  $\square BC$ .

Кромѣ этого (кн. 10, пред. 6), прямоугольникъ  $AB \cdot BC$  соизмѣримъ съ  $2(AB \cdot BC)$  и (кн. 10, пред. 16) квадратъ  $\square BC$  соизмѣримъ съ  $\square AB + \square BC$ , слѣдовательно площадь  $2(AB \cdot BC)$  несоизмѣрима съ площадью  $\square AB + \square BC$ , а слѣдовательно (кн. 10, пред. 17) и площадь  $\square AB + 2(AB \cdot BC) + \square BC = \square AC$  (кн. 2, пред. 4) несоизмѣрима съ  $\square AB + \square BC$ . Но  $\square AB + \square BC$  есть раціональная площадь, слѣдовательно площадь  $\square AC$  есть ирраціональная, откуда и прямая  $AC$  есть также ирраціональная.

*Предложеніе 38.* Если сложимъ двѣ *среднія*, только въ степени соизмѣримыя, прямыя  $AB$  и  $BC$ , которыя содержатъ раціональную площадь, то цѣлая прямая  $AC$  будетъ ирраціональная и называется *первою бимедіальною (среднею)* (фиг. 349).

*Доказат.* По условію прямая  $AB$  несоизмѣрима съ прямою  $BC$  и площадь  $\square AB + \square BC$  несоизмѣрима съ  $2(AB \cdot BC)$  (кн. 10, пред. 13), слѣдовательно (кн. 2, пред. 4) и площадь:

$$\square AB + 2(AB \cdot BC) + \square BC = \square AC$$

несоизмѣрима съ площадью  $AB \cdot BC$ , но  $AB \cdot BC$  есть раціональная площадь, слѣдовательно  $\square AC$  есть ирраціональная площадь, а слѣдовательно и прямая  $AC$  есть ирраціональная.

Фиг. 349.



*Предложеніе 39.* Если сложимъ двѣ *среднія*, только въ степени соизмѣримыя прямыя  $AB$  и  $BC$ , которыя содержатъ *средній* прямоугольникъ, то цѣлая прямая  $AC$  будетъ ирраціональная и называется *второю бимедіальною (среднею)* (фиг. 350).

*Доказат.* Пусть  $DE$  будетъ, какая нибудь, раціональная линія на которой построимъ прямоугольникъ:

$$DF = ED \cdot DG$$

равный квадрату, построенному на  $AC$  и прямоугольникъ  $EH = ED \cdot DH$ , равный суммѣ квадратовъ, построенныхъ на  $AB$  и  $BC$ , т. е.  $EH = \square AB + \square BC$ .

Такъ какъ (кн. 2, пред. 4):

$$\square AC = \square AB + \square BC + 2(AB \cdot BC)$$

то  $HF = 2(AB \cdot BC)$ . Но,  $AB$  и  $BC$ , а также и  $\square AB$ ,  $\square BC$  и  $2(AB \cdot BC)$  суть *среднія*, слѣдовательно,  $EH$  и  $HF$  суть также *среднія*. По условію  $DE$  есть раціональная прямая, слѣдовательно (кн. 10, пред. 23)  $DH$  и  $HG$  суть также раціональныя по длинѣ несоизмѣримыя прямыя съ  $DE$ . Такъ какъ  $AB$  и  $BC$  соизмѣримы только въ степени, а мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

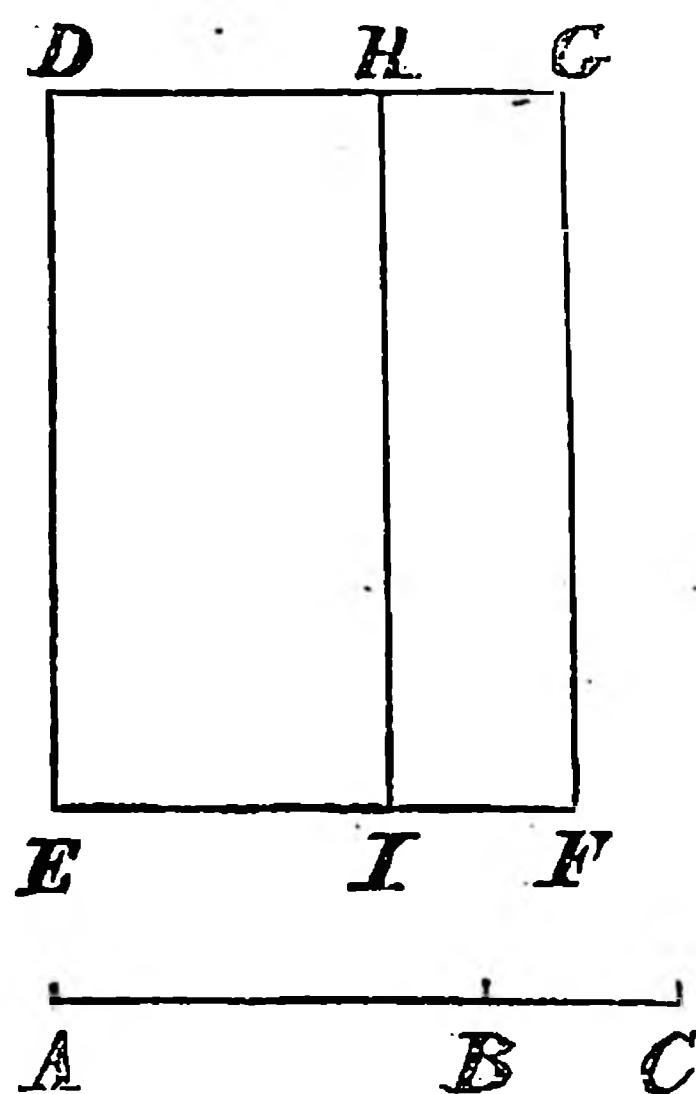
$$AB : BC = \square AB : AB \cdot BC$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 10)  $\square AB$  и  $AB \cdot BC$  несоизмѣримы. По условію  $\square AB$  соизмѣримъ съ  $\square AB + \square BC$  и  $AB \cdot BC$  есть площадь соизмѣримая съ  $2(AB \cdot BC)$ , слѣдовательно и  $\square AB + \square BC$  есть площадь несоизмѣримая съ  $2(AB \cdot BC)$ , т. е.  $EH$  несоизмѣрима съ  $HF$ , а также и  $DH$  несоизмѣрима съ  $HG$ .



Откуда видимъ, что  $DG$  и  $HG$  суть раціональныя прямая только въ степени соизмѣримыя. Слѣдовательно (кн. 10, пред. 37)  $DG$  есть ир-

Фиг. 350.



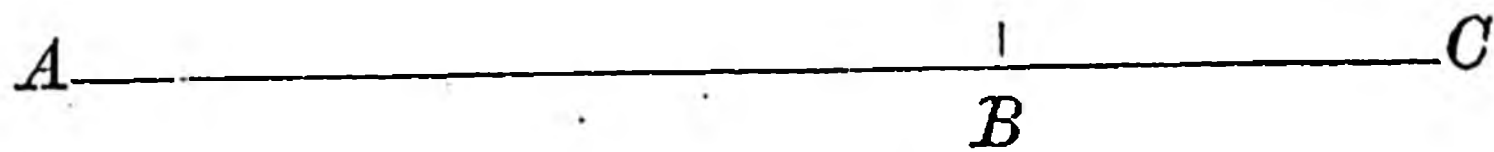
раціональная прямая, откуда, такъ какъ  $DE$  есть раціональная прямая, то  $ED \cdot DG$  (кн. 10, пред. 21), т. е.  $DF$  или  $\square AC$  есть площадь ирраціональная, а слѣдовательно и прямая  $AC$  есть ирраціональная.

*Примѣч. 5.* Евклидъ потому прямую  $AC$  называетъ второю медіальною, что въ этомъ случаѣ прямоугольникъ  $AB \cdot BC$  есть средний, а не раціональный, какъ въ предыдущемъ предложеніи.

*Предложеніе 40.* Если сложимъ двѣ въ степени несоизмѣримыя прямая  $AB$  и  $BC$ , которыя заключаютъ средний прямоугольникъ и построенные на которыхъ квадраты составляютъ раціональную площадь, то цѣлая прямая  $AC$  будетъ ирраціональная и называется наибольшою ирраціональною (фиг. 351).

*Доказат.* Такъ какъ  $AB \cdot BC$  есть средний прямоугольникъ, а также (кн. 10, пред. 24) и  $2(AB \cdot BC)$ , а  $\square AB + \square BC$  по условію есть раціональная площадь, то  $2(AB \cdot BC)$  несоизмѣрима съ площадью  $\square AB + \square BC$ , слѣдовательно (кн. 10, пред. 17)  $\square AB + \square BC + 2(AB \cdot BC) = \square AC$  (кн. 2, пред. 4) несоизмѣрима съ  $\square AB + \square BC$ , откуда, такъ какъ  $\square AB + \square BC$  есть раціональная площадь, то  $\square AC$  и прямая  $AC$  суть величины ирраціональныя.

Фиг. 351.



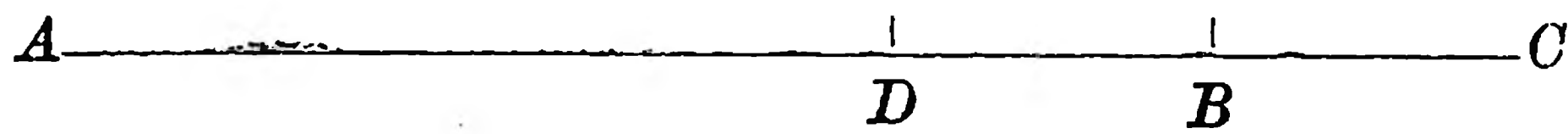
*Примѣч. 6.* Наибольшею ирраціональною прямою  $AC$  Евклидъ называетъ потому, что  $\square AB + \square BC > 2(AB \cdot BC)$ .

Въ самомъ дѣлѣ,  $AB$  не можетъ быть равна  $BC$ , ибо мы бы имѣли:

$$\square AB + \square BC = 2(AB \cdot BC)$$

слѣдовательно площадь  $AB \cdot BC$  была бы рациональная, что противорѣчитъ положенію. Поэтому положимъ  $AB > BC$  и отложимъ  $BD = BC$  (фиг. 352).

Фиг. 352.



Мы имѣемъ (кн. 2, пред. 7):

$$\square AB + \square BD = 2(AB \cdot BD) + \square AD$$

но  $BD = BC$ , слѣдовательно:

$$\square AB + \square BC = 2(AB \cdot BC) + \square AD$$

откуда:

$$\square AB + \square BC > 2(AB \cdot BC).$$

*Предложеніе 41.* Если сложимъ двѣ несоизмѣримыя въ степени прямыя  $AB$  и  $BC$ , заключающія рациональный прямоугольникъ и коихъ сумма квадратовъ даетъ среднюю площадь, то цѣлая прямая  $AC$  будетъ иррациональная и называется *рациональною и среднюю степеняющею* (фиг. 353).

Фиг. 353.



*Доказат.* Такъ какъ по условію  $\square AB + \square BC$  есть средняя площадь, и  $2(AB \cdot BC)$  есть площадь рациональная; то  $\square AB + \square BC$  несоизмѣрима съ  $2(AB \cdot BC)$ , слѣдовательно и (кн. 2, пред. 4 и кн. 10, пред. 17)  $\square AC$  несоизмѣримъ съ  $2(AB \cdot BC)$ . Но  $2(AB \cdot BC)$  есть рациональный прямоугольникъ, слѣдовательно  $\square AC$  есть иррациональный квадратъ, а слѣдовательно и прямая  $AC$  есть иррациональная.

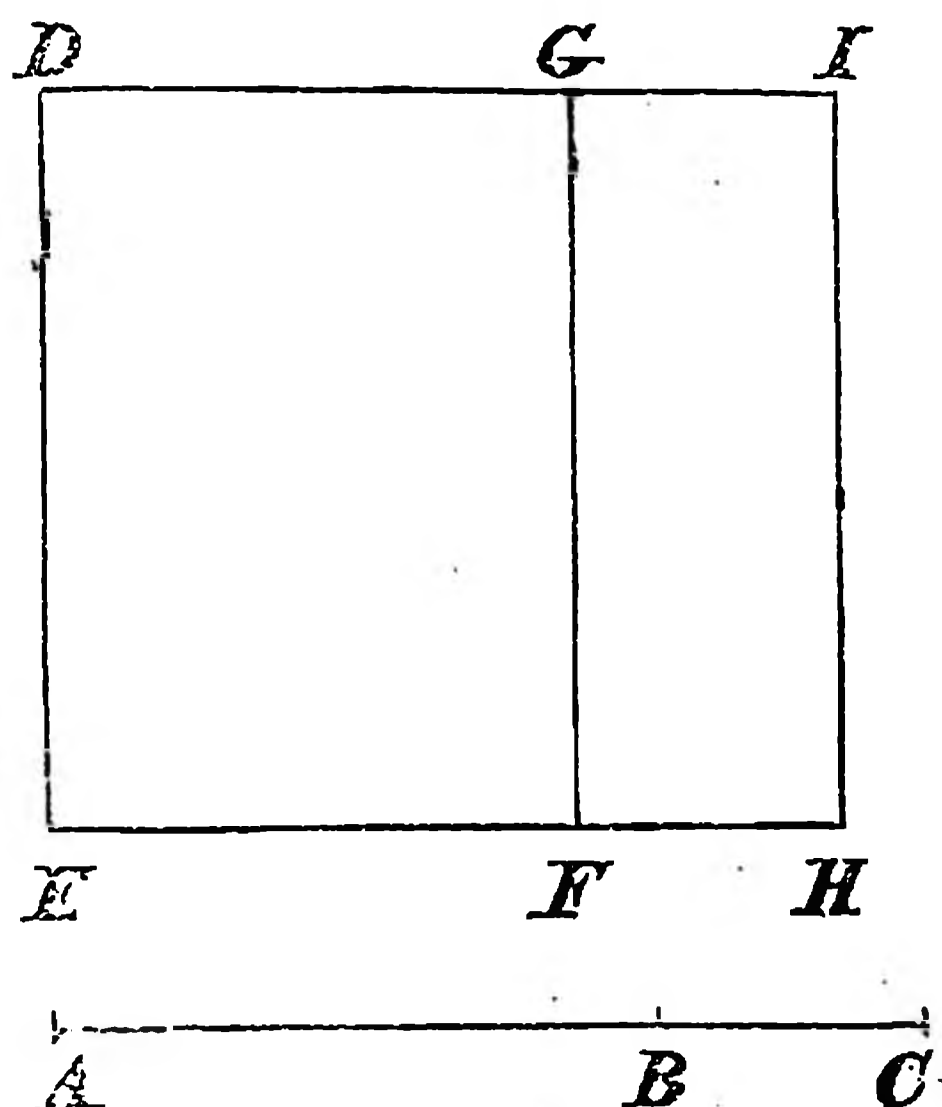
*Примѣч. 7.* Прямую  $AC$  Евклидъ называетъ рациональною и среднюю степеняющею потому, что построенный на ней квадратъ равенъ двумъ фигурамъ изъ коихъ одна рациональная, а другая средняя.

*Предложеніе 42.* Если сложимъ двѣ несоизмѣримыя въ степени прямыя  $AB$  и  $BC$ , коихъ сумма квадратовъ есть средняя площадь и которыя заключаютъ среднюю площадь несоизмѣримою съ предыдущей, то цѣлая прямая  $AC$  иррациональна и называется *второю среднюю степеняющею* (фиг. 354).

*Доказат.* Пусть  $DE$  есть, какая нибудь, рациональная прямая, на которой построимъ (кн. 1, пред. 45) прямоугольникъ  $DF = ED \cdot DG$  равный

суммѣ квадратовъ  $\square AB + \square BC$ , а также построимъ прямоугольникъ  $GH = ED \cdot GI$  равный  $2(AB \cdot BC)$ , слѣдовательно  $DH = \square AC$  (кн. 2, пред. 4).

Фиг. 354.



Такъ какъ по условію  $\square AB + \square BC$  есть *средняя* площадь и равна площади  $DF$ , то  $DF = ED \cdot DG$  есть также *средняя* площадь; но  $DE$  есть рациональная прямая (кн. 10, пред. 23), слѣдовательно  $DG$  рациональна по длинѣ несоизмѣрима съ  $DE$ . По той же причинѣ  $GI$  рациональна по длинѣ несоизмѣрима съ  $DE$ . Теперь, такъ какъ  $\square AB + \square BC$  несоизмѣримъ съ  $2(AB \cdot BC)$ , т. е.  $DF$  несоизмѣрима съ  $GH$ , слѣдовательно (кн. 6, пред. 1 и кн. 10, пред. 10) прямая  $DG$  несоизмѣрима съ  $GI$ . Откуда видимъ что  $DG$  и  $GI$  суть рациональныя прямыя только въ степени соизмѣримыя, слѣдовательно (кн. 10, пред. 37) двучленъ  $DI$  есть иррациональная прямая, откуда, такъ какъ  $DE$  есть рациональная прямая, то прямоугольникъ (кн. 10, пред. 39)  $DH$ , т. е.  $\square AC$  будетъ иррациональный, а слѣдовательно и его сторона  $AC$  также иррациональна.

*Примѣч. 8.* Происхожденіе названія такое же какъ и выше. Мы ниже покажемъ, что всѣ шесть выше показанныхъ иррациональностей могутъ быть разложены на тѣ члены изъ коихъ онѣ сложены. Но прежде мы предложимъ слѣдующую теорему.

*Теорема.* Если прямую  $AB$  раздѣлимъ (фиг. 355) въ двухъ точкахъ  $C$  и  $D$  такъ, что  $AC > DB$ , то мы имѣемъ:

$$\square AC + \square CB > \square AD + \square DB.$$

*Доказат.* Раздѣлимъ прямую  $AB$  въ точкѣ  $E$  пополамъ. Такъ какъ  $AC > DB$ , то, отнимая по  $DC$ , найдемъ  $AD > CB$ ; но  $AE = EB$ , то, если отъ  $AE$  отнимемъ  $AD$ , и отъ  $EB$  отнимемъ  $CB$ , получимъ  $DE < EC$ . Слѣдовательно точки  $C$  и  $D$  лежатъ не въ равномъ разстояніи отъ точки  $E$ .

Такъ какъ мы имѣемъ (кн. 2, пред. 5):

$$AC \cdot CB + \square CE = \square EB = AD \cdot DB + \square DE$$

и

$$\square DE < \square CE$$



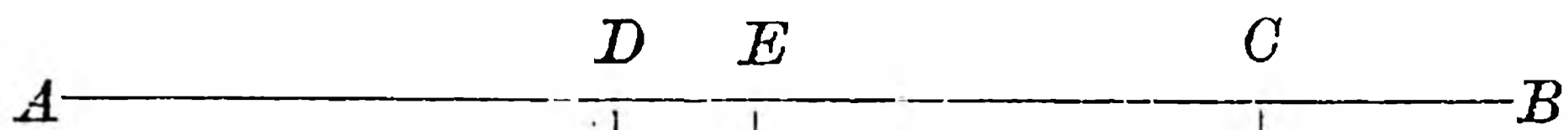
то:

$$AC \cdot CB < AD \cdot DB,$$

слѣдовательно и

$$2(AC \cdot CB) < 2(AD \cdot DB).$$

Фиг. 355.



Но мы имѣемъ (кн. 2, пред. 4):

$$\square AC + \square BC + 2(AC \cdot CB) = \square AB = \square AD + \square DB + 2(AD \cdot DB)$$

откуда:

$$\square AC + \square CB > \square AB + \square DB.$$

*Предложеніе 43.* Биноміальная  $AB$  разлагается только въ одной точкѣ  $C$  на свои составныя части или члены  $AC$  и  $CB$  (фиг. 356).

Фиг. 356.



*Доказат.* Пусть  $D$  будетъ другая точка того же свойства, т. е., что  $AD$  и  $DB$  суть раціональныя прямыя, соизмѣримыя только въ степени; очевидно невозможно имѣть  $AC = DB$ , такъ какъ мы бы имѣли и  $AD = BC$ , слѣдовательно  $AC : CB = BD : DA$  и прямая  $AB$  была бы одинаково раздѣлена въ точкахъ  $C$  и  $D$ , что мы устраняемъ. Слѣдовательно точки  $C$  и  $D$  лежатъ не въ равныхъ разстояніяхъ отъ середины прямой  $AB$ . Слѣдовательно мы имѣемъ (кн. 10, пред. 42):

$$\square AC + \square CB > \square AD + \square DB.$$

Но мы имѣемъ (кн. 2, пред. 4):

$$\square AC + \square CB + 2(AC \cdot CB) = \square AB = \square AD + \square DB + 2(AD \cdot DB).$$

откуда:

$$\square AC + \square CB - (\square AD + \square DB) = 2(AD \cdot DB) - 2(AC \cdot CB).$$

Но квадраты раціональны, слѣдовательно и ихъ разность, т. е. раціональна и разность прямоугольниковъ, что (кн. 10, пред. 27) невозможно. Слѣдовательно биноміальная  $AB$  ни въ какой другой точкѣ, исключая  $C$ , на свои члены разложится не можетъ.

*Предложеніе 44.* Первая бимедіальная  $AB$  можетъ раздѣлиться на свои члены  $AC$  и  $CB$  только въ одной точкѣ  $C$  (фиг. 357).

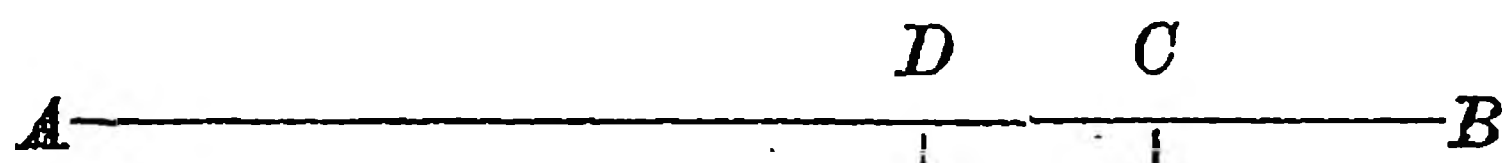
*Доказат.* Пусть первая биноміальная  $AB$  раздѣляется, если возможно, еще въ другой точкѣ  $D$  на свои члены  $AD$  и  $DB$ . Если  $AD$  и  $DB$  бу-

дуть члены биноміальной  $AB$ , то они будутъ соизмѣримы только въ степени и будутъ заключать раціональный прямоугольникъ. Поэтому мы будемъ опять имѣть:

$$2(AD \cdot DB) - 2(AC \cdot CB) = \square AC + \square CB - (\square AD + \square DB)$$

изъ чего видимъ, что такъ какъ прямоугольники раціональны, то и разность квадратовъ будетъ раціональна, что невозможно (кн. 10, пред. 27). Слѣдовательно первая бимедіальная можетъ раздѣлиться на свои члены только въ одной точкѣ.

Фиг. 357.



*Предложеніе 45.* Вторую бимедіальную  $AB$  можно раздѣлить на ея члены  $AC$  и  $CB$  только въ одной точкѣ  $C$  (фиг. 358).

*Доказат.* Положимъ что есть другая точка  $D$ , въ которой прямая такъ дѣлится на части  $AD$  и  $DB$ , что онѣ суть *среднія* только въ степени соизмѣримыя прямыя и заключающія *средній* прямоугольникъ; но въ тоже время  $AC$  не равно  $BD$ , а  $AC > DB$ , поэтому мы будемъ имѣть (кн. 10, пред. 42, слѣд.):

$$\square AC + \square CB > \square AD + \square DB.$$

Возьмемъ раціональную линію  $EF$  и построимъ на ней (кн. 1, пред. 45) прямоугольники:

$$EI = \square AB, \quad EG = \square AC + \square CB, \quad EK = \square AD + \square DB$$

то если отъ  $EI$  отымемъ  $EG$ , и отъ  $EI$  отымемъ  $EK$ , то получимъ:

$$HI = 2(AC \cdot CB), \quad LI = 2(AD \cdot DB).$$

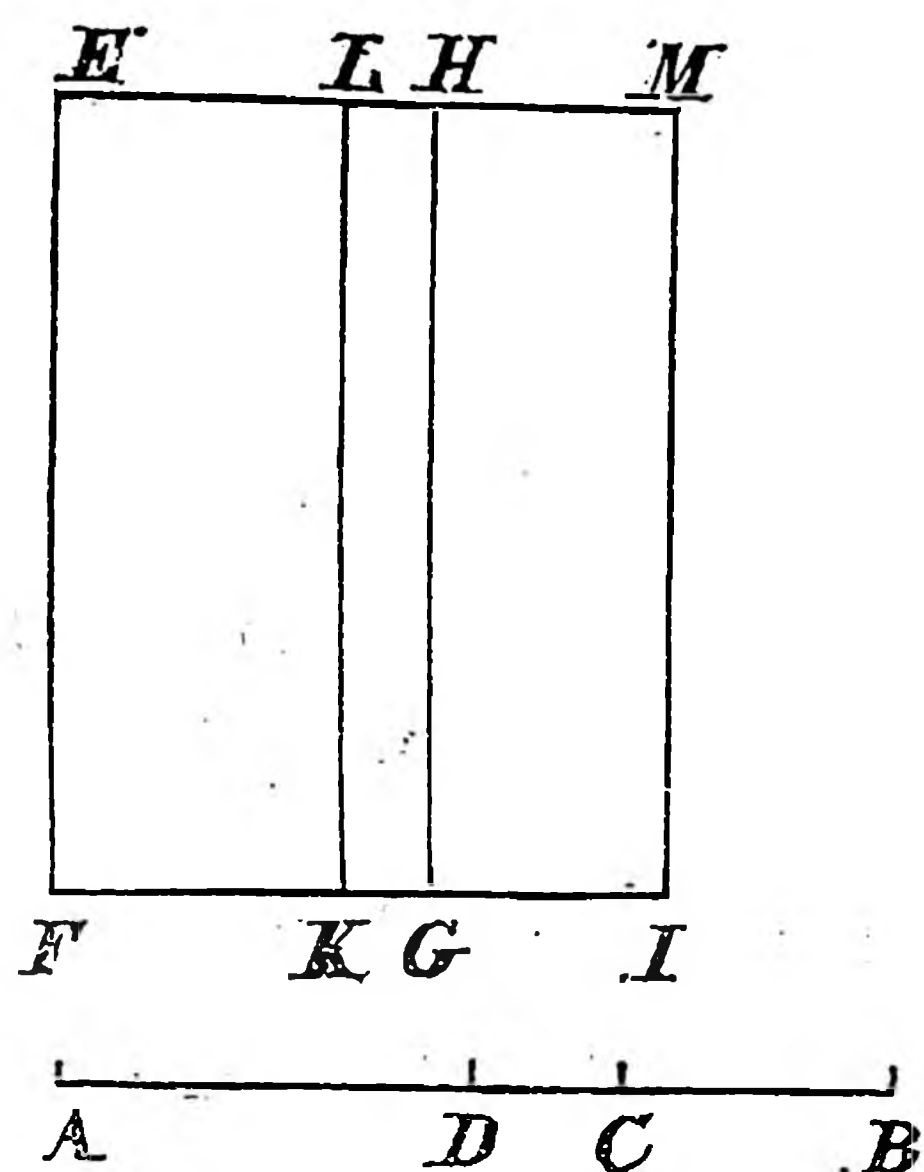
Такъ какъ (кн. 10, пред. 38)  $\square AC + \square CB = EG = EF \cdot EH$  есть средняя площадь, а  $EF$  линія раціональная, то (кн. 10, пред. 23)  $EH$  также есть линія раціональная по длинѣ несоизмѣримая съ  $EF$ . По той же причинѣ  $HM$  есть раціональная прямая по длинѣ несоизмѣримая съ  $EF$ .

Далѣе, такъ какъ (кн. 10, пред. 38)  $AC$  и  $CB$  суть *среднія* прямыя только въ степени соизмѣримыя, то  $AC$  и  $CB$  несоизмѣримы, но мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$AC : CB = \square AC : AC \cdot CB$$

слѣдовательно площади (кн. 10, пред. 10)  $\square AC$  и  $AC \cdot CB$  несоизмѣримы. Но  $\square AC$  соизмѣрима съ  $\square AC + \square CB$  (кн. 10, пред. 16), потому что  $AC$  и  $CB$  соизмѣримы только въ степени, а также  $AC \cdot CB$  соизмѣрима съ  $2(AC \cdot CB)$ . Слѣдовательно  $\square AC + \square CB$  несоизмѣрима съ  $2(AC \cdot CB)$ , т. е.

Фиг. 358.



площадь  $EG$  несоизмѣрима съ площадью  $HI$ , слѣдовательно (кн. 10, пред. 23) несоизмѣримы и прямые  $EH$  и  $HM$ . Откуда видимъ, что прямые  $EH$  и  $HM$  раціональны только въ степени соизмѣримы. Изъ этого заключаемъ (кн. 10, пред. 37), что прямая  $EM$  есть биноміальная раздѣленная въ точкѣ  $H$  на свои члены.

Точно также можно доказать, что  $EL$  и  $LM$  суть раціональныя прямые только въ степени соизмѣримыя, а слѣдовательно  $EM$  есть биноміальная раздѣленная на свои члены въ точкѣ  $L$ , и притомъ  $EH$  не равна  $LM$ ; въ самомъ дѣлѣ (кн. 10, пред. 43, слѣд.)  $\square AC + \square CB > \square AD + \square DB$ , но  $\square AD + \square DB > 2(AD \cdot DB)$ , а тѣмъ болѣе  $\square AC + \square CB > 2(AD \cdot DB)$ , т. е.  $EG > LI$ , а потому и  $EH > LM$ .

Изъ этого видимъ, что если бы вторая биноміальная  $AB$  была раздѣлена не только въ точкѣ  $C$ , но еще и въ другой точкѣ  $D$  на свои члены, то биноміальная  $EM$  была бы раздѣлена въ двухъ точкахъ  $H$  и  $L$  на свои члены, что невозможно (кн. 10, пред. 43). Слѣдовательно вторая биноміальная можетъ быть раздѣлена на свои члены только въ одной точкѣ.

**Предложеніе 46.** Наибольшая ирраціональная  $AB$  можетъ быть раздѣлена на свои члены  $AC$  и  $CB$  только въ одной точкѣ  $C$  (фиг. 359).

**Доказат.** Положимъ, что  $AB$  можетъ быть также раздѣлена и въ другой точкѣ  $D$  на свои члены  $AD$  и  $DB$ , которые, въ такомъ случаѣ, будутъ несоизмѣримы только въ степени, будутъ заключать среднюю площадь и сумма ихъ квадратовъ будетъ раціональная площадь.

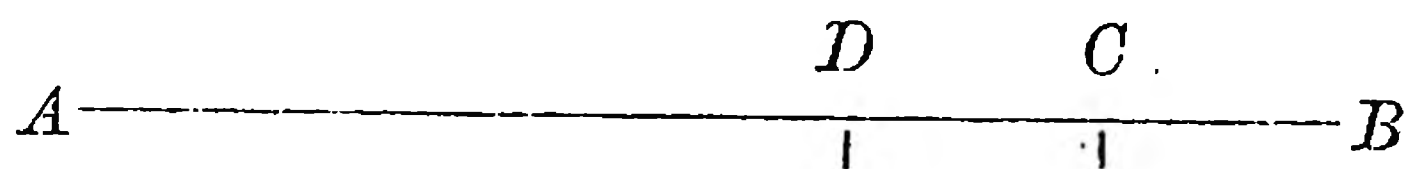
Такъ какъ (кн. 2, пред. 4):

$$\square AC + \square CB - \square (AB + \square DB) = 2(AD \cdot DB) - 2(AC \cdot CB)$$



и первая часть рациональна, следовательно рациональна и вторая часть, т. е. разность средних прямоугольников, что невозможно (кн. 10, пред. 27). Следовательно *наибольшая иррациональная* на свои члены может быть раздѣлена только въ одной точкѣ.

Фиг. 359.



*Предложеніе 47.* Рациональная средняя степенящая прямая  $AB$  можетъ быть раздѣлена на свои члены  $AC$  и  $CB$  только въ одной точкѣ  $C$  (фиг. 360).

*Доказат.* Допустимъ, что есть и другая такого же свойства точка  $D$ , то  $AD$  и  $DB$  будутъ прямыя несоизмѣримыя въ степени, заключающія рациональную площадь и сумма ихъ квадратовъ будетъ средняя площадь.

Такъ какъ (кн. 2, пред. 4):

$$2(AD \cdot DB) - 2(AC \cdot CB) = (\square AC + \square CB) - (\square AD + \square DB)$$

Фиг. 360.



и первая часть есть рациональная площадь, то и вторая будетъ также рациональная площадь, что невозможно, потому что сумма квадратовъ есть площадь средняя (кн. 10, пред. 27). Следовательно, *рациональная средняя степенящая* можетъ быть раздѣлена на свои члены только въ одной точкѣ.

*Предложеніе 48.* Вторая средняя степенящая  $AB$  можетъ быть раздѣлена на свои члены  $AC$  и  $CB$  только въ одной точкѣ  $C$  (фиг. 361).

*Доказат.* Допустимъ что есть еще другая точка  $D$ , для которой  $AD$  и  $DB$  заключаютъ средній прямоугольникъ и коихъ сумма квадратовъ есть средняя площадь, но при этомъ  $AC$  не равно  $DB$ , а  $AC > DB$ .

Пусть  $EF$  есть, какая нибудь рациональная линія, построимъ на ней прямоугольники:

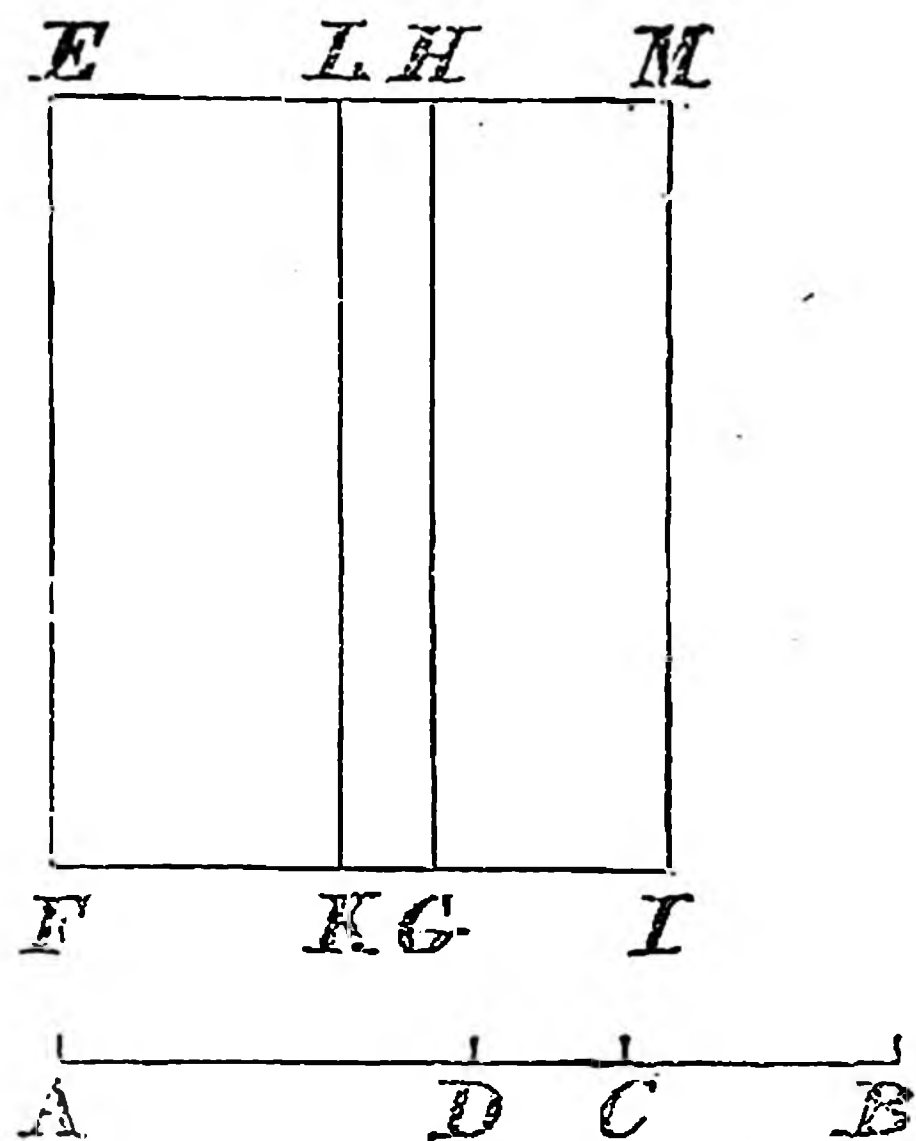
$$EG = \square AC + \square CB, \quad HI = 2(AC \cdot CB), \quad EL = \square AD + \square DB$$

то мы будемъ имѣть:

$$EI = \square AB, \quad LI = 2(AD \cdot DB).$$

Такъ какъ по условію  $\square AC + \square CB = EG = FE$ .  $EH$  есть средняя площадь, а  $EF$  есть раціональная прямая (кн. 10, пред. 23), то  $EH$  будетъ

Фиг. 361.



также раціональная прямая, по длинѣ несоизмѣрима съ  $EF$ . По той же причинѣ  $HM$  есть раціональная прямая, по длинѣ несоизмѣрима съ  $EF$ .

Далѣе, такъ какъ площадь  $\square AC + \square CB$  несоизмѣрима съ  $2(AC \cdot CB)$ , т. е.  $EG$  несоизмѣрима съ  $HI$ , то (кн. 10, пред. 10) и  $EH$  несоизмѣрима  $HM$ . Слѣдовательно прямыя  $EH$  и  $HM$  раціональны только въ степени соизмѣримы, поэтому прямая  $EM$  есть биноміальная, раздѣленная въ точкѣ  $H$  на свои члены. Точно также можно показать, что таже прямая и въ точкѣ  $L$  раздѣлена на свои члены, что быть не можетъ, такъ какъ  $EH$  не равно  $LM$ . Слѣдовательно, если вторая средняя степенящая прямая  $AB$ , кромѣ точки  $C$  еще въ другой точкѣ  $D$  раздѣлена на свои члены, то биноміальная  $EM$  будетъ раздѣлена въ двухъ точкахъ  $H$  и  $L$  на свои члены, что (кн. 10, пред. 43) невозможно. Слѣдовательно и то невозможно чтобы  $AB$  была раздѣлена въ двухъ точкахъ на свои члены.

#### Шесть порядковъ биноміальныхъ отрѣзковъ прямой.

1. Биноміальный отрѣзокъ, коего больший членъ квадратитъ надъ меньшимъ на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ большимъ членомъ называется *первымъ биноміальнымъ отрѣзкомъ*, если больший членъ соизмѣримъ съ данною раціональною линіею.

2. Онъ называется *вторымъ биноміальнымъ отрѣзкомъ*, если меньший членъ по длинѣ соизмѣримъ съ данною соизмѣримою линіею.

3. Онъ называется *третьимъ биноміальнымъ отрѣзкомъ*, если ни одинъ изъ членовъ не соизмѣримъ по длинѣ съ данною раціональною линіею.

4. Биноміальний отрѣзокъ, коего большій членъ квадратитъ надъ меньшимъ на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ боль- шимъ членомъ, называется *четвертымъ биноміальнымъ отрѣзкомъ*, если большій членъ соизмѣримъ съ данною раціональною линіею.

5. Онъ называется *пятымъ биноміальнымъ отрѣзкомъ*, если меньшій членъ соизмѣримъ съ данною раціональною линіею.

6. Онъ называется *шестымъ биноміальнымъ отрѣзкомъ*, если ни одинъ изъ членовъ не соизмѣримъ по длинѣ съ данною раціональною линіею.

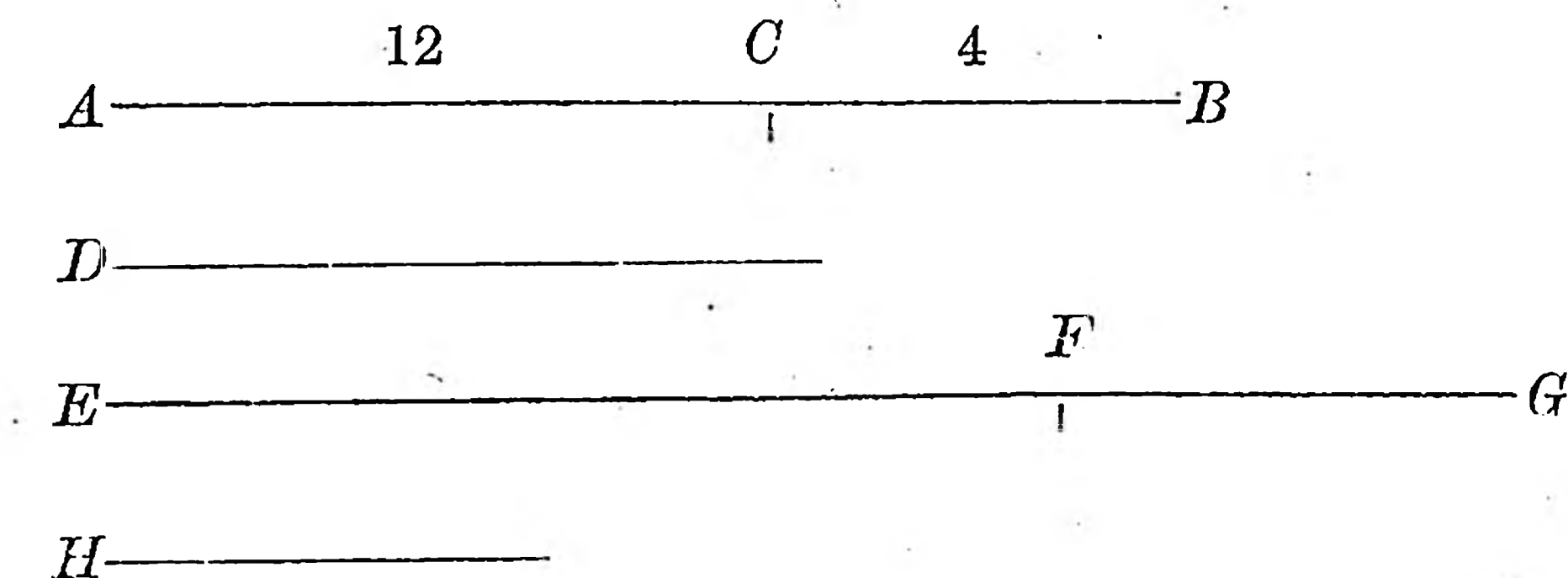
*Предложеніе 49.* Найти первый биноміальный отрѣзокъ (фиг. 362)?

*Рѣшеніе.* Возьмемъ два числа  $AC$  и  $CB$ , коихъ сумма  $AB$  относится къ  $BC$ , а не къ  $AC$ , какъ квадратныя числа (кн. 10, пред. 29, слѣд.). Пусть  $D$  будетъ данная раціональная линія, и  $EF$  прямая по длинѣ соизмѣримая съ  $D$  и пусть (кн. 10, пред. 6):

$$AB:AC=\square EF:\square FG$$

я говорю, что прямая  $EG$ , составленная изъ отрѣзковъ  $EF$  и  $FG$  и бу- детъ искомый *первый биноміальный отрѣзокъ*.

Фиг. 362.



Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ:

$$AB:AC=\square EF:\square FG \quad (1)$$

то (кн. 10, пред. 6)  $\square EF$  соизмѣримъ съ  $\square FG$ , но прямая  $EF$  соизмѣрима съ  $D$ , слѣдовательно раціональна, а потому раціональна и прямая  $FG$ , но (кн. 10, пред. 9)  $EF$  несоизмѣрима съ  $FG$ . Откуда ви- димъ, что прямая  $EF$  и  $FG$  раціональны и соизмѣримы только въ сте- пени. Слѣдовательно (кн. 10, пред. 37) прямая  $EG$  есть биноміальный от- рѣзокъ, коего члены суть  $EF$  и  $FG$ .

Изъ пропорціи (1), гдѣ  $AB > AC$ , слѣдуетъ также, что  $\square EF > \square FG$ . Если положимъ, что  $\square EF - \square FG = \square H$ , то найдемъ (кн. 5, пред. 19):

$$AB:CB=\square EF:\square H.$$



Но  $AB$  и  $CB$  относятся какъ квадратныя числа, слѣдовательно  $\square EF$  и  $\square H$  также относятся какъ квадратныя числа, откуда (кн. 10, пред. 9) прямая  $EF$  соизмѣрима съ  $H$ . Изъ этого видимъ, что  $EF$  квадратитъ надъ  $FG$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ  $H$ , но  $EF$  соизмѣрима съ  $D$ , слѣдовательно  $EG$  есть *первый биноміальный отрѣзокъ*.

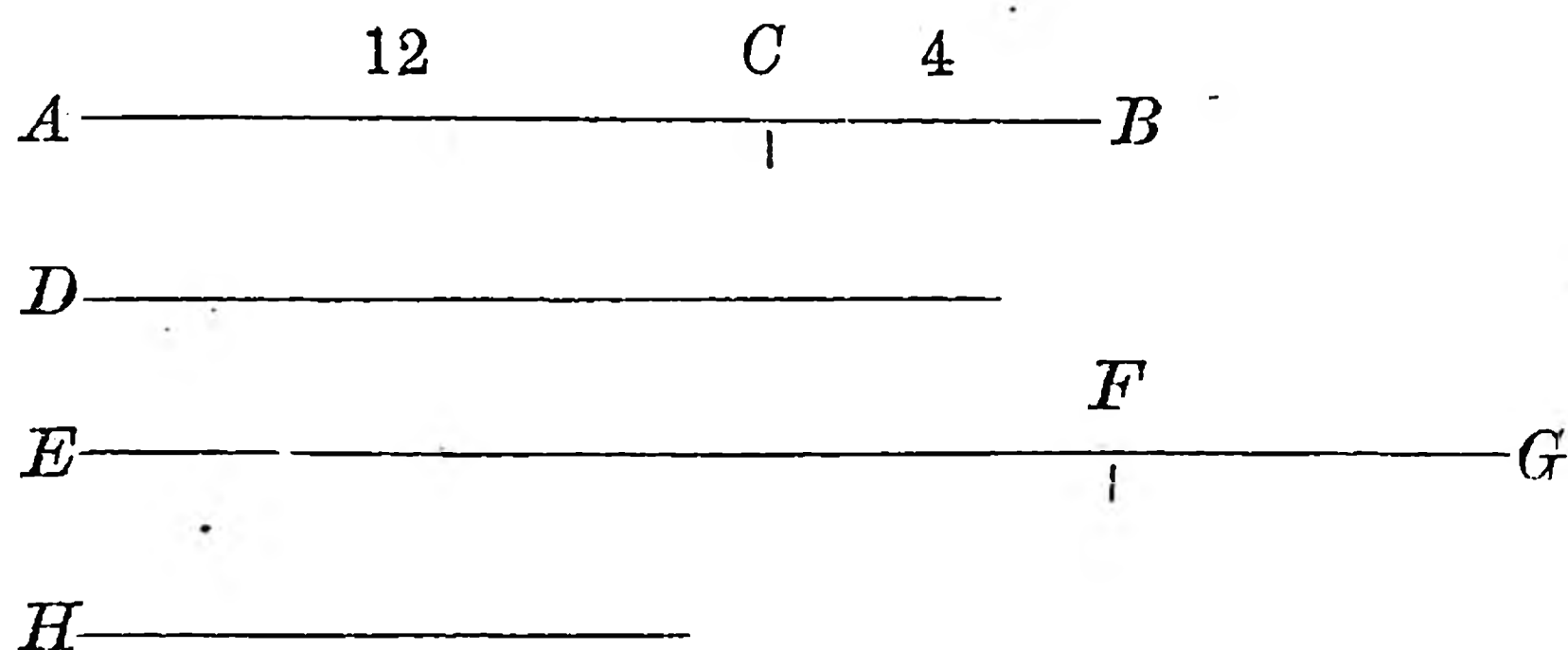
*Предложеніе 50.* Найти второй биноміальный отрѣзокъ (фиг. 363)?

*Рѣшеніе.* Возьмемъ два числа  $AC$  и  $CB$ , коихъ сумма  $AB$  относится къ  $CB$ , но не къ  $AC$ , какъ квадратныя числа. Пусть  $D$  будетъ данная раціональная линія и  $FG$  прямая по длинѣ соизмѣрмая съ  $D$ , сдѣлаемъ (кн. 10, пред. 6):

$$AC:AB=\square GF:\square FE. \quad (1)$$

Я говорю, что прямая  $EG$ , составленная изъ отрѣзковъ  $EF$  и  $FG$  и есть *вторая биноміальная*.

Фиг. 363.



Изъ пропорціи (1) мы видимъ (кн. 10, пред. 6), что  $\square EF$  соизмѣримъ съ  $\square FG$ ; но прямая  $GF$  соизмѣрима съ  $D$ , слѣдовательно раціональна, а потому раціональна также и прямая  $EF$ ; но (кн. 10, пред. 9) прямая  $EF$  и  $FG$  несоизмѣримы. Откуда видимъ, что  $EF$  и  $FG$  суть прямая, раціональныя только въ степени соизмѣримыя. слѣдовательно (кн. 10, пред. 37) прямая  $EG$ , составленная изъ отрѣзковъ  $EF$  и  $FG$  есть биноміальная, коей члены суть  $EF$  и  $FG$ .

Изъ пропорціи (1), гдѣ  $AC < AB$ , слѣдуетъ также, что  $\square GF < \square EF$ . Положимъ теперь  $\square EF - \square FG = \square H$ , то найдемъ (кн. 5, пред. 19), что:

$$AB:BC=\square EF:\square H.$$

Но  $AB$  и  $BC$  относятся между собою какъ квадратныя числа, слѣдовательно  $\square EF$  и  $\square H$  относятся также между собою какъ квадратныя числа. слѣдовательно (кн. 10, пред. 9) прямая  $EF$  и  $H$  соизмѣримы. Откуда видимъ, что  $EF$  квадратитъ надъ  $FG$  на квадратъ, коего сторона  $H$

по длинѣ соизмѣрима съ  $FG$ , но  $FG$  и  $D$  соизмѣримы, слѣдовательно  $EG$  есть вторая биноміальная.

*Предложеніе 51.* Найти третью биноміальную (фиг. 364)?

*Рѣшеніе.* Возьмемъ два числа  $AC$  и  $CB$ , коихъ сумма относится къ  $CB$ , но не  $AC$ , какъ квадратныя числа, возьмемъ третье число  $D$ , которое не есть квадратное и ни къ одному изъ чиселъ  $AC$  и  $CB$  не относится какъ квадратное число. Пусть еще будетъ  $E$  раціональная прямая и кромѣ этого пусть будетъ (кн. 10, пред. 6):

$$D : AB = \square E : \square FG \quad (1)$$

и

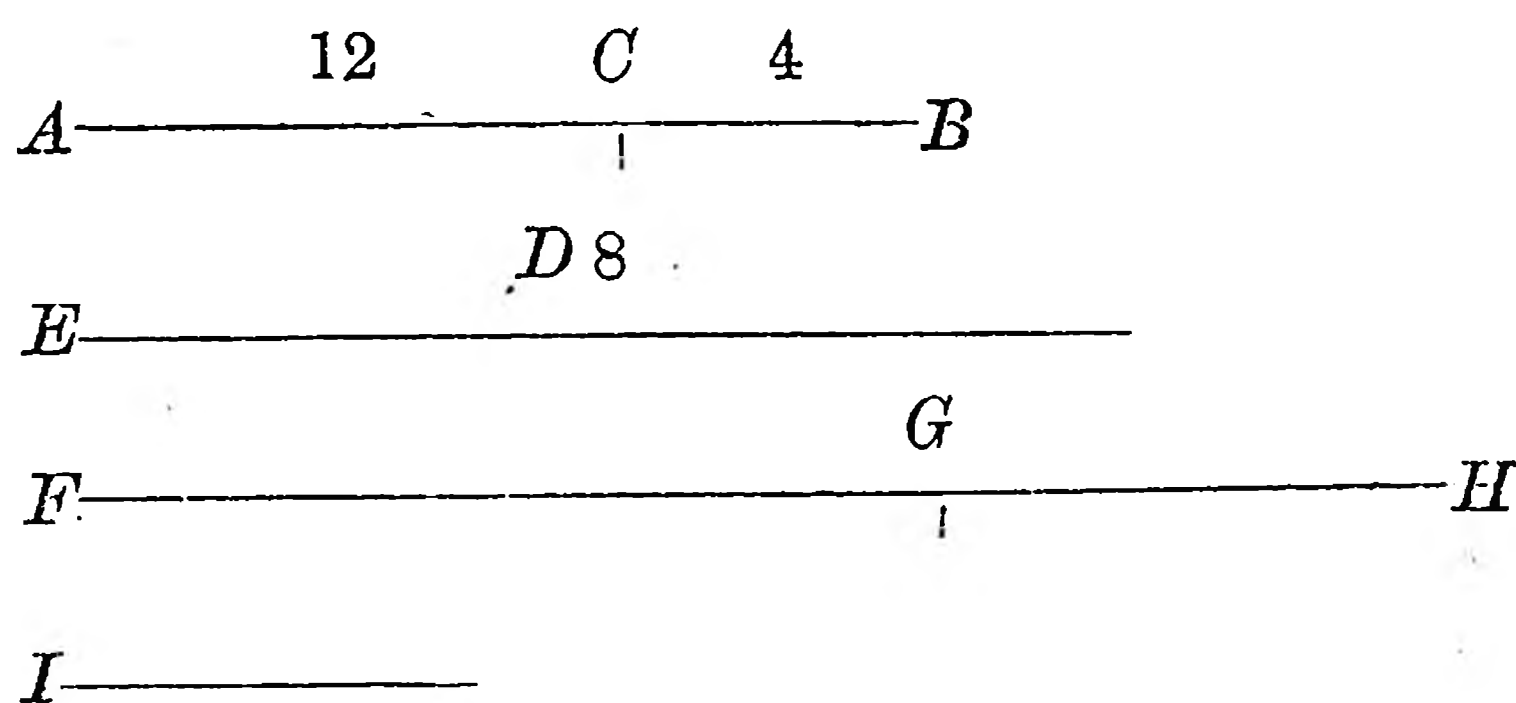
$$AB : AC = \square FG : \square GH. \quad (2)$$

Я говорю, что прямая  $FH$ , составленная изъ отрѣзковъ  $FG$  и  $GH$  и есть искомая *третья биноміальная*.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ пропорціи (1) видимъ, что  $\square E$  и  $\square FG$  соизмѣримы, и какъ прямая  $E$  раціональна, то и  $FG$  также раціональна, но (кн. 10, пред. 9)  $E$  и  $FG$  по длинѣ несоизмѣримы.

Изъ пропорціи (2) еще видимъ, что  $\square FG$  и  $\square GH$  соизмѣримы, слѣдовательно, какъ  $FG$  есть раціональная прямая, то и  $GH$  есть также раціональная, но (кн. 10, пред. 9)  $FH$  и  $GH$  по длинѣ несоизмѣримы. Изъ этого видимъ, что прямая  $FG$  и  $GH$  раціональны и соизмѣримы только въ степени, а слѣдовательно (кн. 10, пред. 37)  $FH$  есть биноміальная прямая, коей члены суть  $FG$  и  $GH$ .

Фиг. 364.



Въ силу обѣихъ предъидущихъ пропорцій (1) и (2) (кн. 5, пред. 22) мы имѣемъ:

$$D : AC = \square E : \square GH$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 9) прямая  $E$  и  $GH$  несоизмѣримы, далѣе, такъ какъ  $AB > AC$ , то и  $\square FG > \square GH$ . Положимъ теперь  $\square FG - \square GH = \square I$ , то (кн. 5, пред. 19):

$$AB:CB=\square FG:\square I$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 9) прямыя  $FG$  и  $I$  соизмѣримы. Откуда наконецъ видимъ, что  $FG$  квадратитъ надъ  $GH$  на квадратъ, коего сторона  $I$  по длинѣ соизмѣрима съ  $FG$ , а  $FG$  и  $GH$  съ прямою  $I$  несоизмѣримы, слѣдовательно  $FH$  есть *третья биноміальная прямая*.

*Предложеніе 52.* Найти четвертую биноміальную (фиг. 365)?

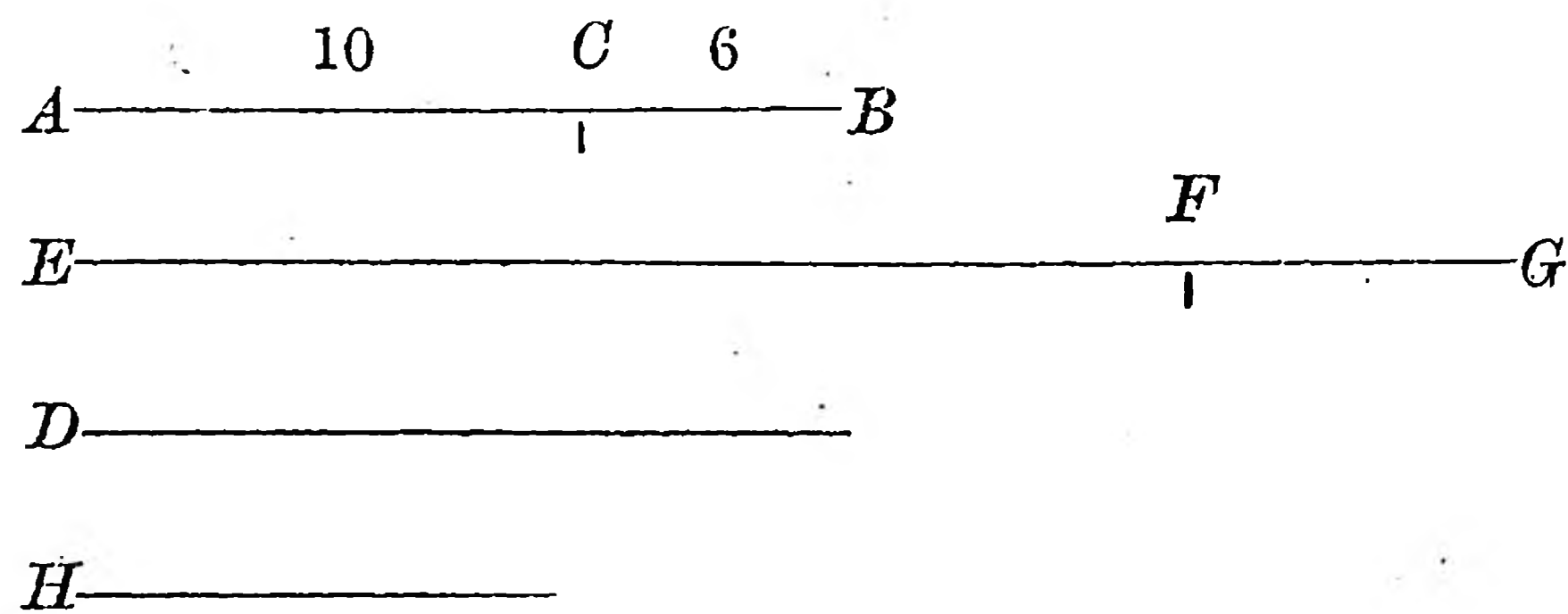
*Рѣшеніе.* Возьмемъ два числа  $AC$  и  $CB$ , коихъ сумма  $AB$  ни къ одному изъ чиселъ  $AC$  и  $CB$  не относится какъ квадратное число. Пусть еще  $D$  будетъ раціональная линія, а  $EF$  прямая по длинѣ соизмѣримая съ  $D$ , далѣе пусть будетъ (кн. 10, пред. 6):

$$AB:AC=\square EF:\square FG \quad (1)$$

я говорю, что прямая  $EG$ , составленная изъ  $EF$  и  $FG$  есть *четвертая биноміальная*.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ пропорціи (1) слѣдуетъ что  $\square EF$  и  $\square FG$  соизмѣримы, слѣдовательно, такъ какъ  $EF$  соизмѣрима съ  $D$ , а  $D$  есть раціональная прямая, то  $EF$ , а также и  $FG$  суть раціональныя прямыя, но (кн. 10, пред. 9) прямыя  $EF$  и  $FG$  несоизмѣримы. Изъ этого слѣдуетъ, что  $EF$  и  $FG$  суть раціональныя прямыя, только въ степени соизмѣримы, откуда видимъ, что (кн. 10, пред. 37)  $EG$  есть *биноміальная* прямая, коей члены суть  $EF$  и  $FG$ .

Фиг. 365.



Изъ пропорціи (1), гдѣ  $AB > AC$ , слѣдуетъ что и  $\square EF > \square FG$ . Пусть будетъ:

$$\square EF - \square FG = \square H,$$

то мы будемъ имѣть:

$$AB:BC=\square EF:\square H$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 9) прямыя  $EF$  и  $H$  несоизмѣримы. Изъ этого видимъ, что прямая  $EF$  квадратитъ надъ  $FG$  на квадратъ, коего



сторона  $H$  несоизмѣрима съ  $FG$ , но по условію  $EF$  и  $D$  соизмѣримы, слѣдовательно  $EG$  есть четвертая биноміальная.

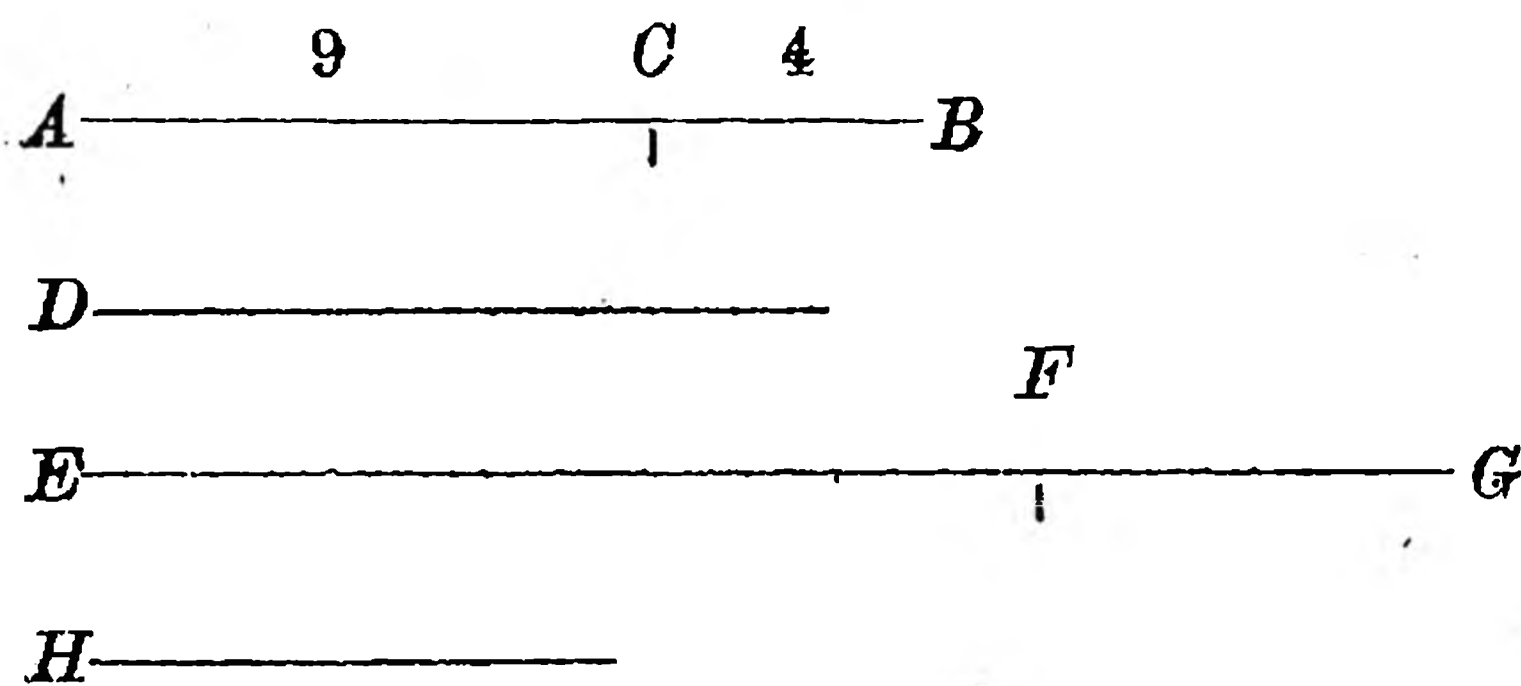
*Предложеніе 53.* Найти пятую биноміальную (фиг. 366)?

*Рѣшеніе.* Возьмемъ два числа  $AC$  и  $CB$ , коихъ сумма ни къ одному изъ чиселъ  $AC$  и  $CB$  не относится какъ квадратныя числа. Пусть  $D$  будетъ данная раціональная прямая и  $GF$  прямая по длинѣ соизмѣрима съ  $D$ , пусть далѣе будетъ (кн. 10, пред. 6):

$$AC:AB=\square GF:\square EF \quad (1)$$

и говорю, что прямая  $EG$ , составленная изъ отрѣзковъ  $EF$  и  $GF$  и будетъ искомая пятая биноміальная.

Фиг. 366.



Изъ пропорціи (1) слѣдуетъ, какъ выше было показано, что прямая  $GF$  и  $EF$  раціональны, соизмѣримы только въ степени, слѣдовательно (кн. 10, пред. 37) прямая  $EG$  есть биноміальная, коей члены суть  $EF$  и  $GF$ . Далѣе изъ той же пропорціи слѣдуетъ, что  $\square GF < \square EF$ . Если теперь положимъ:

$$\square EF - \square GF = \square H$$

то будемъ имѣть:

$$AB:BC=\square EF:\square H$$

слѣдовательно прямая  $EF$  и  $H$  несоизмѣримы (кн. 10, пред. 9). Изъ этого слѣдуетъ, что прямая  $EF$  квадратитъ надъ  $GF$  на квадратъ, коего сторона  $H$  по длинѣ несоизмѣрима съ  $EF$ , и какъ прямая  $GF$  и  $D$  соизмѣримы, то  $EG$  есть искомая пятая биноміальная.

*Предложеніе 54.* Найти шестую биноміальную (фиг. 367)?

*Рѣшеніе.* Возьмемъ два числа  $AC$  и  $CB$  коихъ сумма ни къ одному изъ нихъ не относится какъ квадратныя числа. Возьмемъ третье число  $D$ , которое не есть квадратное и не относится ни къ одному изъ взятыхъ чиселъ какъ квадратныя числа. Пусть еще  $C$  будетъ раціональная прямая и (кн. 10, пред. 6, слѣд.):

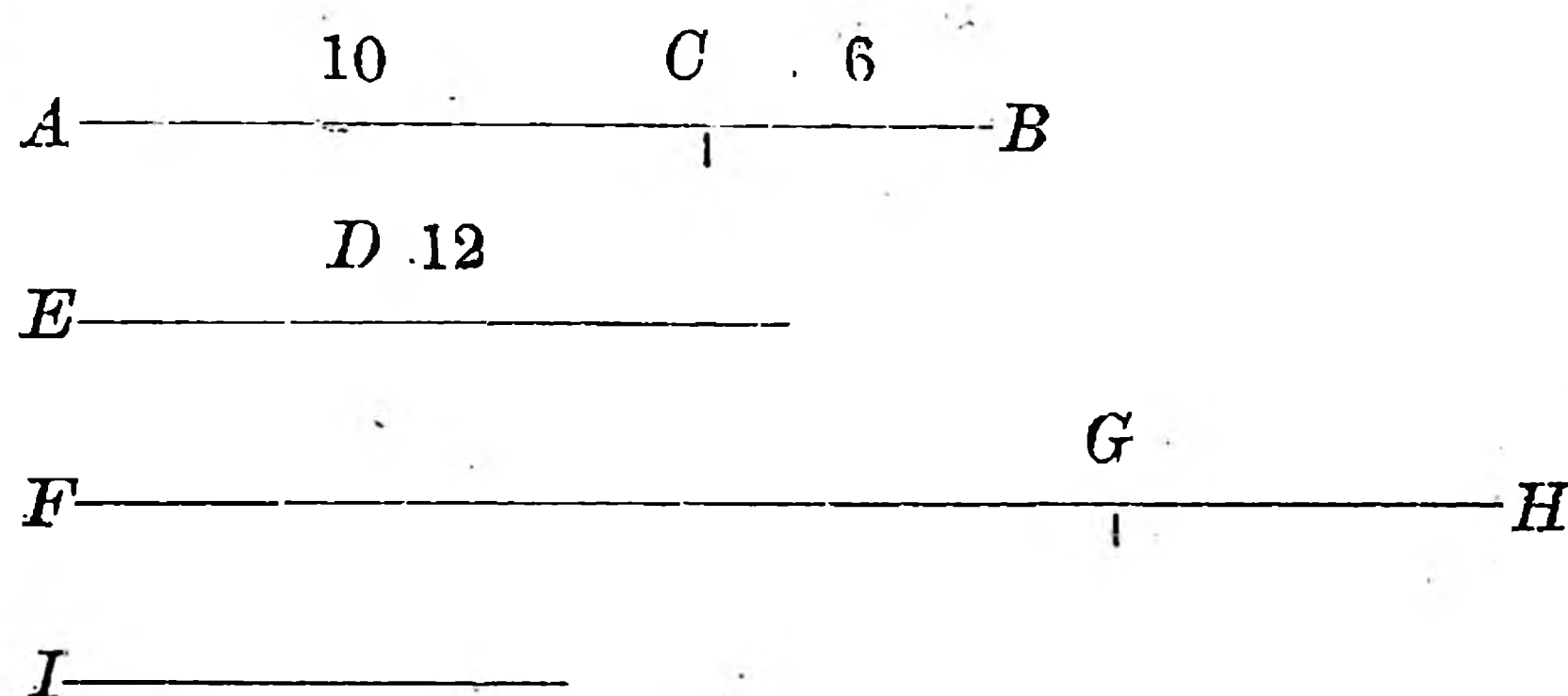
$$D:AB=\square E:\square FG \quad (1)$$

а также:

$$AB:AC=\square FG:\square GH \quad (2)$$

я говорю, что прямая  $FH$ , составленная изъ отръзковъ  $FG$  и  $GH$  и есть искомая *шестая биноміальная*.

Фиг. 367.



Изъ пропорціи (1) слѣдуетъ, что прямая  $FG$  рациональна, но несоизмѣрима съ  $E$ , а изъ пропорціи (2) слѣдуетъ, что  $GH$  рациональна, но несоизмѣрима съ  $FG$ ; слѣдовательно (кн. 10, пред. 37) прямая  $FG$  есть биноміальная, коей члены суть  $FG$  и  $GH$ .

Изъ пропорцій (1) и (2) слѣдуетъ:

$$D:AC=\square E:\square GH$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 9) прямая  $E$  и  $GH$  несоизмѣримы.

Такъ какъ  $AB > AC$ , то и  $\square FG > \square GH$ . Пусть  $\square FG - \square GH = \square I$ , то:

$$AB:BC=\square FG:\square I$$

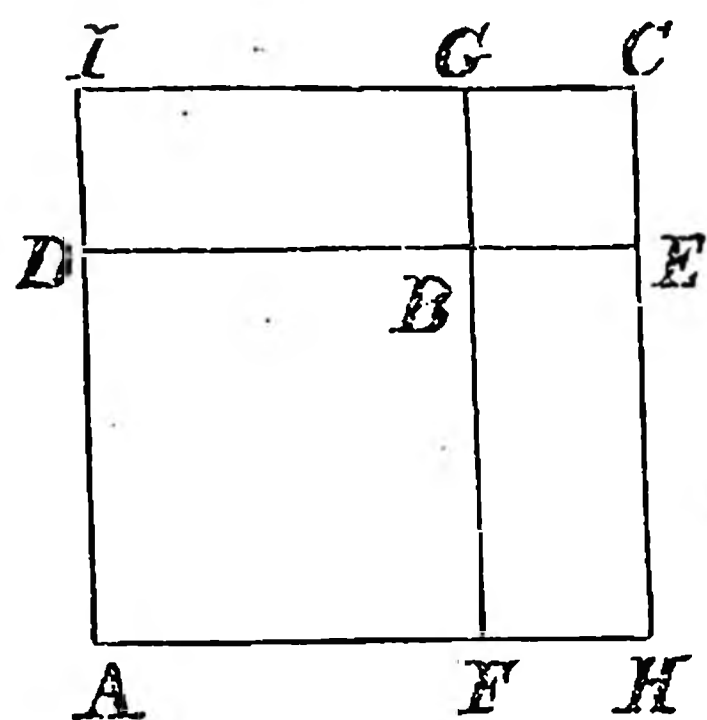
слѣдовательно (кн. 10, пред. 9),  $FG$  и  $I$  несоизмѣримы. А потому  $FG$  квадратитъ надъ  $GH$  на квадратъ, коего сторона  $I$  несоизмѣрима съ  $FG$ . Но мы имѣли, что  $FG$  и  $GH$  несоизмѣримы съ  $E$ , слѣдовательно  $FH$  есть *шестая биноміальная*.

*Лемма.* Совмѣстимъ два квадрата  $AB$  и  $BC$  такъ, чтобы ихъ стороны  $DB$  и  $BE$  составляли одну прямую  $DE$ , то и стороны  $FB$  и  $BG$  составятъ также одну прямую  $FG$  (кн. 1, пред. 14). Построимъ параллелограмъ  $AC$ . Я говорю, что площадь параллелограмма  $DG$  будетъ средне-пропорціональная между площадями квадратовъ  $AB$  и  $BC$ , а площадь параллелограмма  $DC$  будетъ средне-пропорціональная между площадями  $AC$  и  $BC$  (фиг. 368).

1. Параллелограмъ  $AC$  есть квадратъ. Въ самомъ дѣлѣ,  $DB=FB$  и  $BE=BG$ , слѣдовательно и  $DE=FG$ . Но мы имѣемъ  $DE=AH=IC$  и

$FG=AI=HC$ . Следовательно  $AC$  есть равносторонний четырехугольник, но онъ прямоугольный, следовательно онъ есть квадратъ.

Фиг. 368.



2. Мы имѣемъ:

$$AB:DG=DG:BC$$

но

$$FB:BG=DB:BE$$

но мы также имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$FB:BG=AB:DG$$

и

$$DB:BE=DG:BC$$

следовательно (кн. 5, пред. 11):

$$AB:DG=DG:BC$$

3. Мы имѣемъ:

$$AB:DG=DG:BC$$

Такъ какъ  $AD=DB=IG$  и  $DI=BG=GC$ , то:

$$AD:DI=IG:GC$$

откуда:

$$AI:DI=IC:GC.$$

Но мы имѣемъ:

$$AI:DI=AC:DC \text{ и } IC:GC=DC:BC$$

следовательно:

$$AC:DC=DC:BC.$$

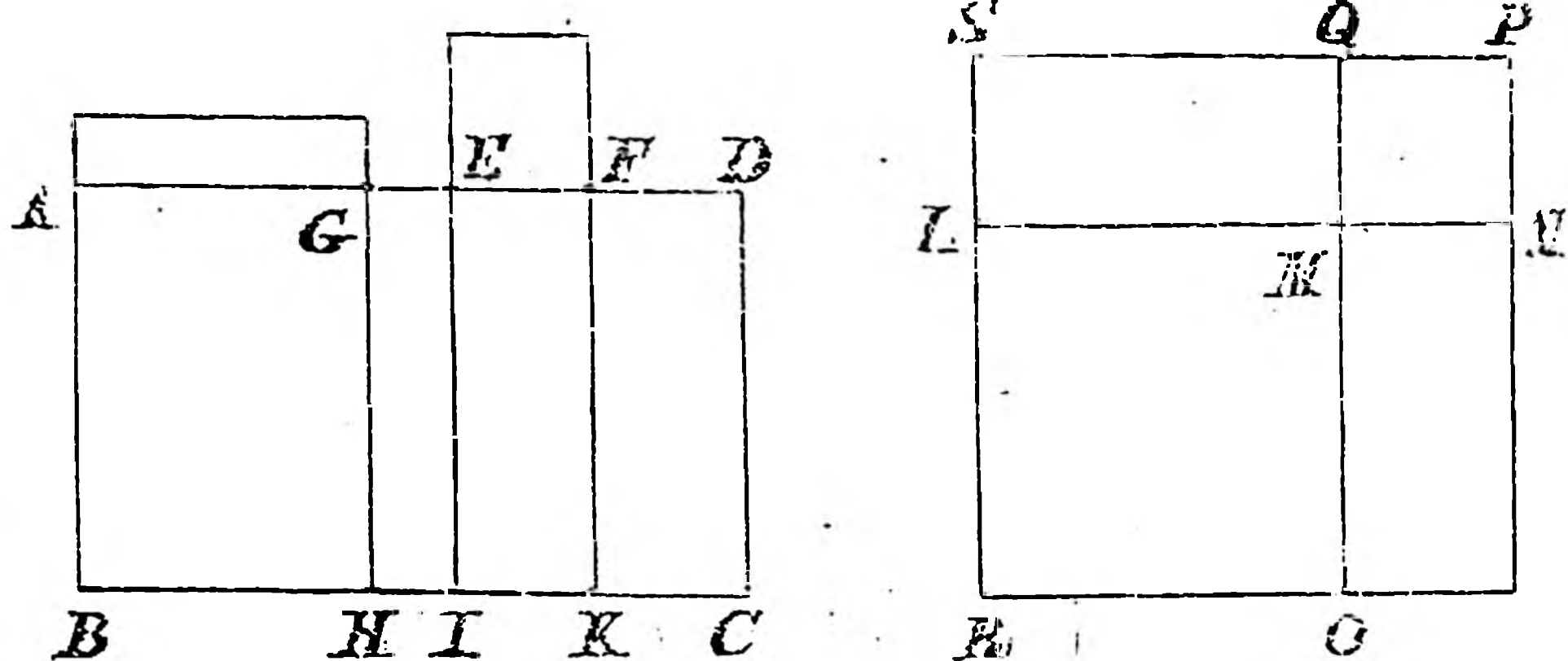
*Предложеніе 55.* Площадь прямоугольника  $ABCD$ , заключеннаго между рациональною линіею  $AB$  и первою биноміальною  $AD$ , квадратить биноміальная прямая (фиг. 369)?

*Доказат.* Пусть первая биноміальная  $AD$  въ точкѣ  $E$  будетъ раздѣлена на свои члены  $AE$  и  $ED$ , изъ коихъ  $AE$  большій; то (кн. 10, пред. 37)



отрѣзки  $AE$  и  $ED$  будутъ только въ степени соизмѣримы, а также большій членъ  $AE$  по длинѣ соизмѣримъ съ рациональною прямою  $AB$  и  $AE$  квадратитъ надъ  $ED$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ  $AE$ .

Фиг. 369.



Раздѣлимъ прямую  $ED$  въ точкѣ  $F$  пополамъ, и (кн. 6, пред. 28) построимъ прямоугольникъ  $= \frac{1}{4} \square ED = \square EF$ , коего дополненіе есть квадратъ, построенный на  $AE$ , поэтому, если  $AG \cdot GE$  есть такой прямоугольникъ, то  $AG$  и  $GE$  по длинѣ соизмѣримы (кн. 10, пред. 18). Чрезъ точки  $G, E, F$  проведемъ параллельныя  $GH, EI, FK$  прямой  $AB$  или  $CD$ .

Построимъ (кн. 2, пред. 14) квадраты  $RM=AH$  и  $MP=GI$  и помѣстимъ ихъ такъ, чтобы прямая  $LM$  и  $MN$ , а слѣдовательно и  $QM$  и  $MO$  составляли прямая линіи и дополнимъ параллелограмъ  $RP$ , то этотъ параллелограмъ будетъ (кн. 10, пред. 54, слѣд.) квадратъ.

Теперь надобно показать, что прямая  $LN$  квадратитъ площадь  $AC$  и составлена изъ прямыхъ  $LM$  и  $LN$  только въ степени соизмѣримыхъ, слѣдовательно  $LN$  есть биноміальная.

1. Такъ какъ  $AG \cdot GE = \square EF$ , то (кн. 6, пред. 17):

$$AG : EF = EF : GE$$

слѣдовательно (кн. 6, пред. 1):

$$AH : EK = EK : GI$$

откуда видимъ, что  $EK$  есть величина средне-пропорціональная между  $AH$  и  $GI$ , но  $AH=RM$  и  $GI=MP$ , слѣдовательно  $EK$  есть средне-пропорціональная между  $RM$  и  $MP$ . Но  $LQ$  (кн. 10, пред. 54, слѣд.) есть средне-пропорціональная также между  $RM$  и  $MP$ , слѣдовательно  $EK=LQ$ . Такъ какъ (кн. 1, пред. 36)  $EK=FC$  и (кн. 1, пред. 43)  $LQ=ON$ , то  $FC=ON$ . слѣдовательно  $EK+FC=EC=LQ+ON$ . Но по условію мы имѣемъ  $AH=RM$  и  $GI=MP$ . слѣдовательно:

$$AC=RP=\square LN$$

т. е.  $LN$  квадратитъ площадь  $AC$ .

2. Такъ какъ прямая  $AG$  и  $GE$  соизмѣримы, (кн. 10, пред. 16) то прямая  $AE$  соизмѣрима съ обѣими, а по условію  $AE$  соизмѣрима съ  $AB$ , слѣдовательно  $AG$  и  $GE$  соизмѣримы съ  $AB$ , а также раціональны, слѣдовательно (кн. 10, пред. 20)  $AN$  и  $GI$  раціональны и (кн. 10, пред. 10) соизмѣримы. Но  $AN=RM$  и  $GI=MP$ , слѣдовательно  $RM$  и  $MP$ , т. е.  $\square LM$  и  $\square MN$  раціональны и соизмѣримы.

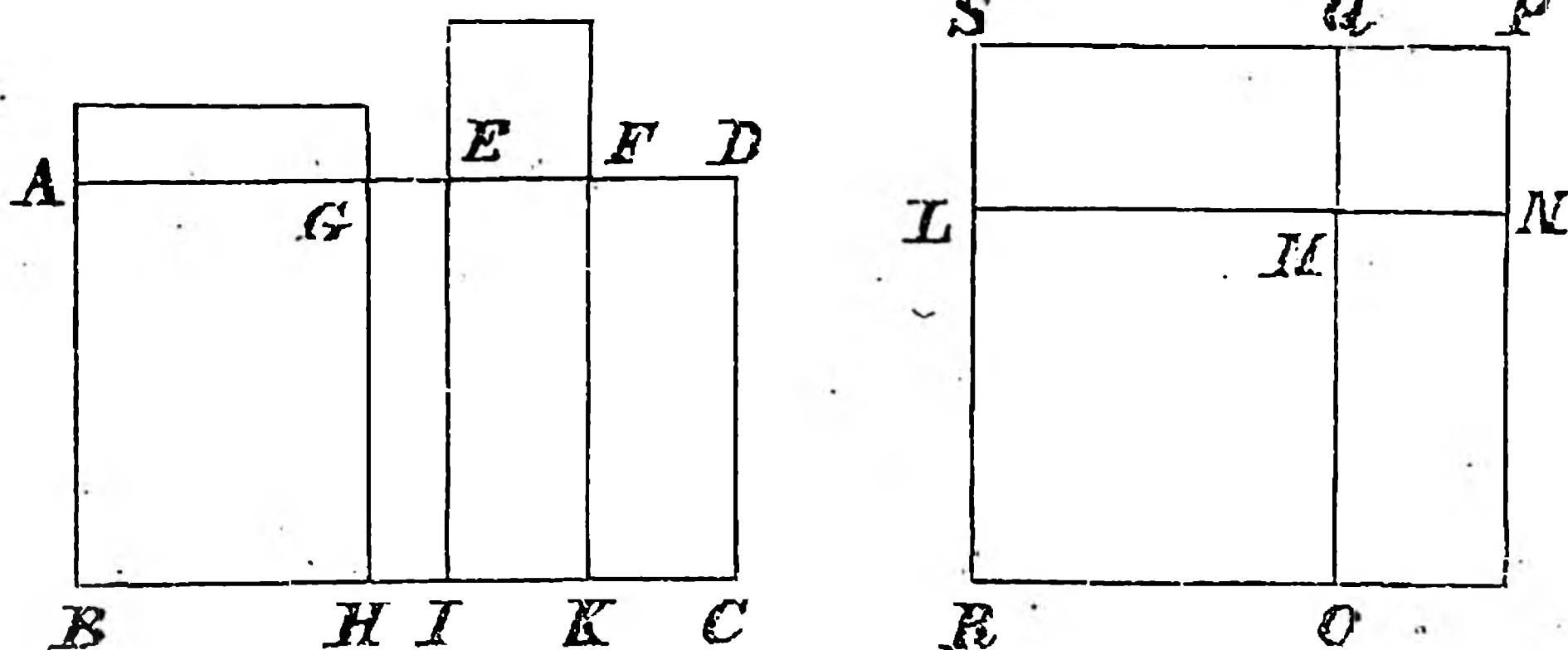
Такъ какъ (кн. 10, пред. 37) прямая  $AE$  и  $ED$  несоизмѣримы, а  $AE$  и  $AG$  соизмѣримы, а также соизмѣримы и  $ED$  и  $EF$ , то  $AG$  и  $EF$  несоизмѣримы, слѣдовательно несоизмѣримы  $AN$  и  $EK$ , т. е.  $RM$  и  $LQ$ . Но мы имѣемъ:

$$RM:LQ=OM:MQ$$

откуда видимъ, что  $OM$  и  $MQ$ , т. е.  $LM$  и  $MN$  несоизмѣримы, слѣдовательно  $LM$  и  $MN$  только въ степени соизмѣримы, а изъ этого слѣдуетъ, что прямая  $LN$ , квадратищая площадь  $AC$ , составлена изъ двухъ раціональныхъ прямыхъ, соизмѣримыхъ только въ степени, слѣдовательно она есть *биноміальная* (кн. 10, пред. 37).

*Предложеніе 56.* Площадь прямоугольника  $ABCD$ , заключеннаго между раціональною прямою  $AB$  и второю биноміальною  $AD$ , квадратитъ первая биноміальная (фиг. 370).

Фиг. 370.



*Доказат.* Сдѣлаемъ тоже построеніе какъ и въ предыдущемъ предложеніи, то разница будетъ только въ томъ, что здѣсь *меньшій членъ*  $ED$  будетъ соизмѣримъ по длинѣ съ взятою раціональною прямою  $AB$ . Точно также будетъ доказано, что прямая  $LN$  квадратитъ площадь  $AC$ . слѣдовательно остается показать, что прямая  $LN$  составлена изъ среднихъ прямыхъ  $LM$  и  $MN$ , соизмѣримыхъ только въ степени и что  $LM \cdot MN$  есть раціональная площадь, а слѣдовательно  $LN$  есть *первая бимедіальная*.

1. Такъ какъ (кн. 10, пред. 37) прямая  $AE$  и  $ED$  несоизмѣримы, а прямая  $ED$  и  $AB$  соизмѣримы, то (кн. 10, пред. 14) прямая  $AE$  и  $AB$  несоизмѣримы.

Но,  $AG$  и  $GE$  соизмѣримы, слѣдовательно (кн. 10, пред. 16)

$AG$  и  $GE$  соизмѣримы съ  $AE$  и рациональны какъ и сама прямая  $AE$ . Откуда слѣдуетъ, что  $AG$  и  $GE$  съ  $AB$  по длинѣ несоизмѣримы. Слѣдовательно  $AB$ ,  $AG$ ,  $GE$  суть рациональныя, только въ степени соизмѣримыя линіи, а слѣдовательно (кн. 10, пред. 22)  $AN$  и  $GI$ , т. е.  $RM$  и  $MP$ , а также  $LM$  и  $MN$  суть *среднія*.

Такъ какъ  $AG$  соизмѣрима съ  $GE$ , то  $AN$  соизмѣрима съ  $GI$ , т. е.  $RM$  соизмѣрима съ  $MP$ , т. е.  $\square LM$  соизмѣримъ съ  $\square MN$ . Слѣдовательно прямыя  $LM$  и  $MN$  соизмѣримы въ степени. Такъ какъ  $AE$  несоизмѣрима съ  $ED$ , а  $AE$  соизмѣрима съ  $AG$ , и  $ED$  соизмѣрима съ  $EF$ , то  $AG$  несоизмѣрима съ  $EF$ , слѣдовательно  $AN$  и  $EK$  несоизмѣримы, т. е.  $RM$  и  $LQ$  или  $OM$  и  $MQ$ , или  $LM$  и  $MN$  также несоизмѣримы. Слѣдовательно прямыя  $LM$  и  $MN$  только въ степени соизмѣримы.

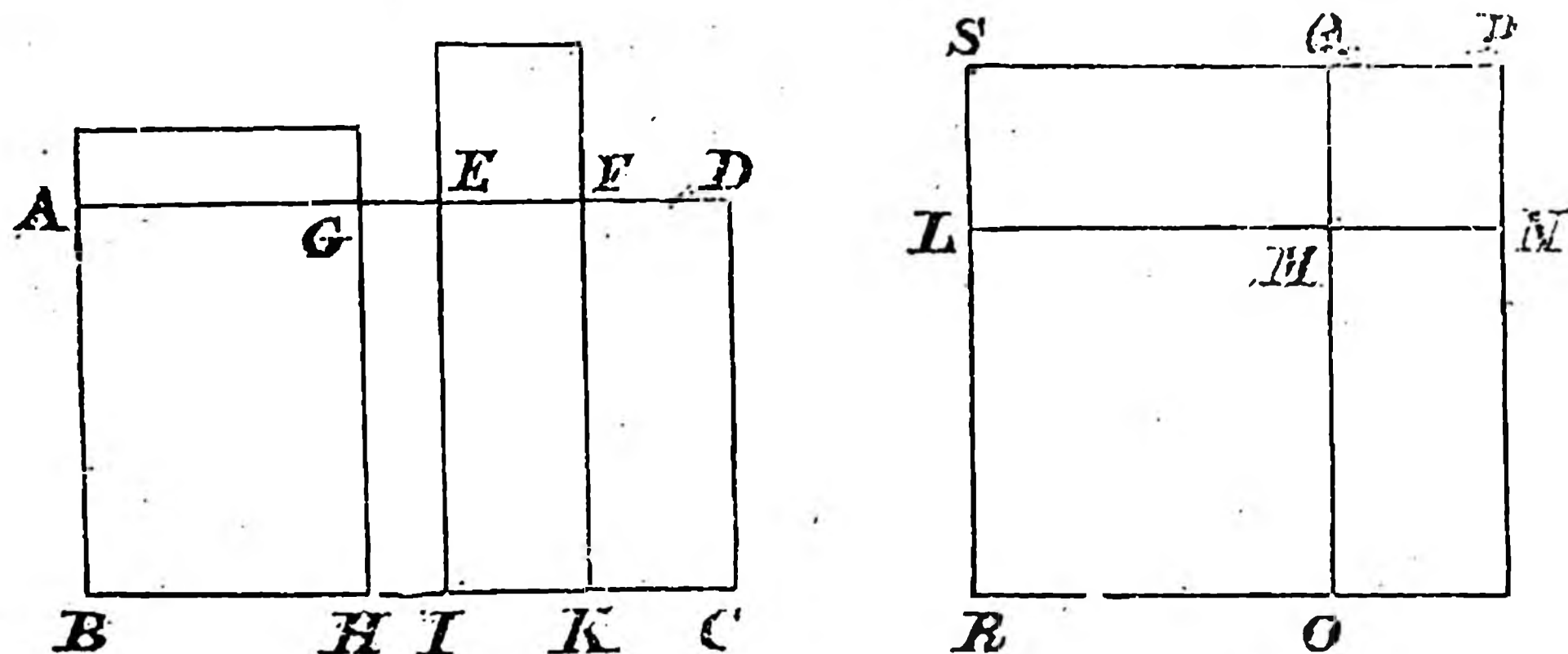
2. Такъ какъ прямая  $DE$  соизмѣрима съ  $AB$  и  $EF$ , то  $EF$  и  $EI$  соизмѣримы и рациональны. Слѣдовательно  $EK$  (кн. 10, пред. 20), т. е.  $LQ = LM \cdot MN$  есть рациональная площадь.

Изъ этого видимъ, что прямая  $LN$ , квадратающая площадь  $AC$  составленная изъ двухъ среднихъ, только въ степени соизмѣримыхъ линій, содержащихъ рациональный прямоугольникъ, (кн. 10, пред. 38) есть *первая биноміальная*.

*Предложеніе 57.* Площадь прямоугольника  $ABCD$ , заключеннаго между рациональною прямою  $AB$  и *третьею биноміальною*  $AD$ , квадратитъ *вторая бимедіальная* (фиг. 371).

*Доказат.* Сдѣлаемъ тоже построеніе, какъ и въ предъидущей теоремѣ, то все останется какъ и тамъ, съ тою только разницею, что здѣсь члены  $AE$  и  $ED$  не будутъ соизмѣримы по длинѣ съ рациональною линіею  $AB$ . Также точно какъ и тамъ можно доказать, что прямая  $LN$  квадратитъ площадь  $AC$  и что  $LN$  составлена изъ среднихъ  $LM$  и  $MN$  соизмѣримыхъ только въ степени. Остается только показать, что  $LM \cdot MN$  есть средняя площадь, а слѣдовательно прямая  $LN$  есть *вторая бимедіальная*.

Фиг. 371.



Такъ какъ прямая  $DE$  несоизмѣрима съ  $AB$  и  $EI$ , но соизмѣрима



съ  $EF$ , то прямая  $EI$  и  $EF$  несоизмѣримы. Прямая  $EI$  и  $EF$  раціональны, слѣдовательно онѣ соизмѣримы только въ степени. Откуда видимъ, что  $EK$ , т. е.  $LQ=LM.MN$  есть *средняя площадь*.

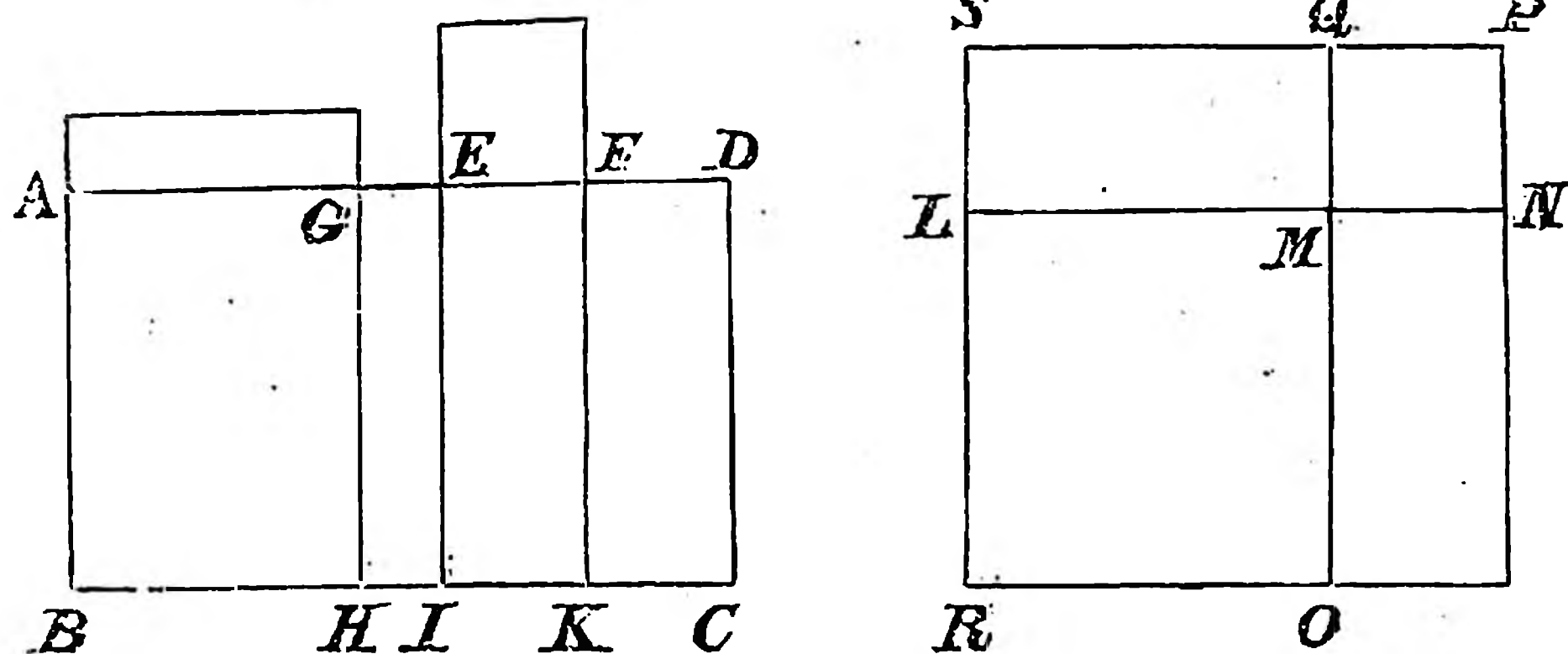
Итакъ видимъ, что прямая  $LN$ , квадратищая площадь  $AC$ , составлена изъ двухъ среднихъ прямыхъ, соизмѣримыхъ только въ степени и заключающихъ *среднюю площадь*, слѣдовательно она есть *вторая бимедиальная*.

**Предложеніе 58.** Площадь прямоугольника  $ABCD$ , заключеннаго между раціональною прямою  $AB$  и четвертою биноміальною  $AD$ , квадратишь *наибольшая ирраціональная* (фиг. 372).

**Доказат.** Сдѣлаемъ построение такое, какое сдѣлано въ 55-мъ предложеніи, то все останется какъ тамъ, только съ тою разницею, что *большій членъ*  $AE$ , который здѣсь по длинѣ соизмѣримъ съ раціональною прямою  $AB$ , квадратишь надъ меньшимъ членомъ  $ED$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ  $AE$ , слѣдовательно (кн. 10, пред. 19) прямая  $AG$  и  $GE$  несоизмѣримы.

Точно также какъ и тамъ можно доказать, что  $LN$  квадратишь площадь  $AC$ . Остается только показать, что прямая  $LM$  и  $MN$ , составляющія прямую  $LN$  несоизмѣримы въ степени и содержатъ *среднюю площадь*, но сумма ихъ квадратовъ есть *раціональная площадь*, слѣдовательно  $LN$  есть *наибольшая ирраціональная*.

Фиг. 372.



Такъ какъ  $AG$  и  $GE$  несоизмѣримы, то (кн. 1, пред. 6 и кн. 10, пред. 10)  $AN$  и  $GI$ , т. е.  $BM$  и  $MP$ , т. е.  $\square LM$  и  $\square MN$  несоизмѣримы.

Такъ какъ  $AE$  и  $AB$  несоизмѣримы, то  $AI$ , т. е.  $\square LM + \square MN$  есть *раціональная площадь*.

Такъ какъ  $DE$  несоизмѣрима съ  $AB$ , т. е. съ  $EI$ , а соизмѣрима съ  $EF$ , то  $EF$  и  $EI$  несоизмѣримы. слѣдовательно  $EF$  и  $EI$  суть раціональныя прямая, только въ степени соизмѣримыя. Откуда видимъ (кн. 10, пред. 22), что  $KE=LQ=LM.MN$  есть *средняя площадь*.

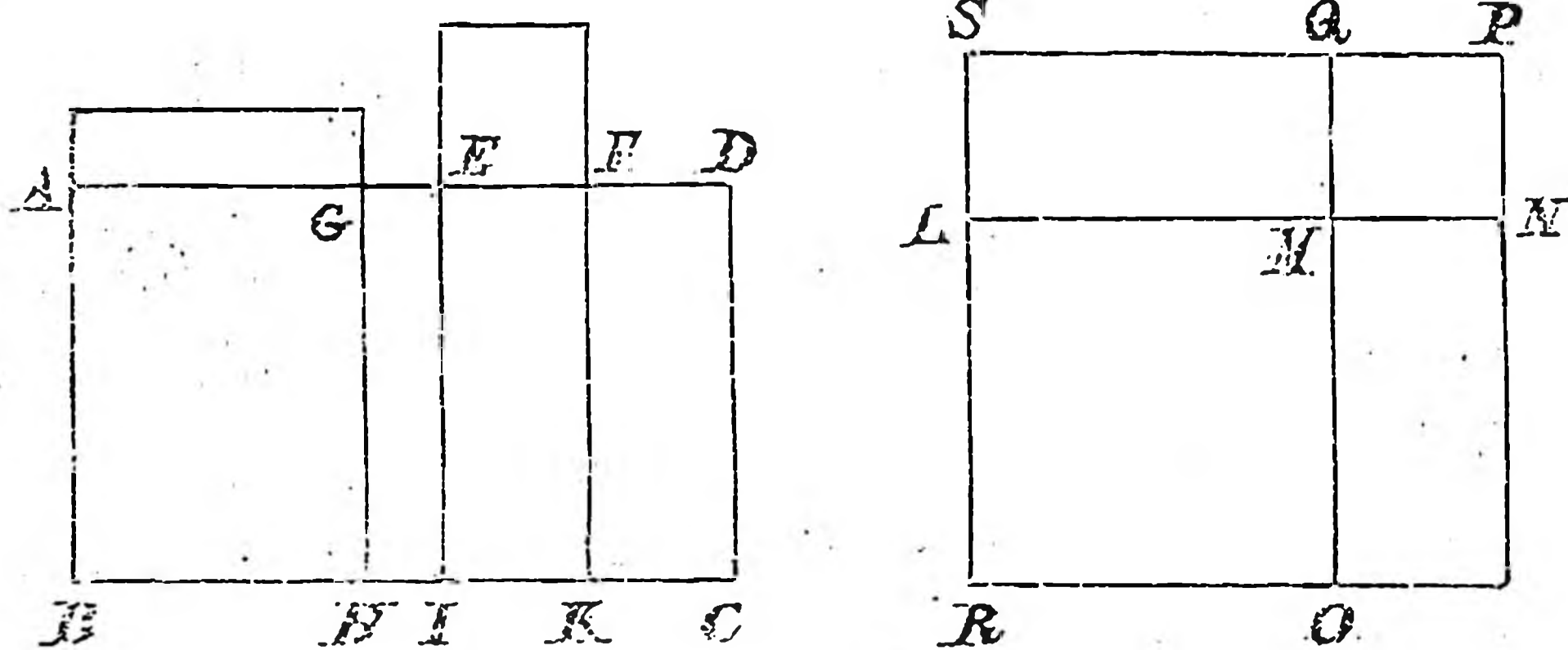
Изъ показаннаго слѣдуетъ, что прямая  $LN$ , квадратищая площадь  $AC$ , составлена изъ двухъ прямыхъ несоизмѣримыхъ въ степени, содер-

жащихъ среднюю площадь и коихъ сумма квадратовъ есть раціональная площадь, есть наибольшая ирраціональная (кн. 10, пред. 40).

*Предложеніе 59.* Площадь прямоугольника  $ABCD$ , заключеннаго между раціональною прямою  $AB$  и пятою биноміальною  $AD$ , квадратитъ прямая степенящая раціональную и среднюю площадь (фиг. 373).

*Доказат.* Сдѣлаемъ тоже построеніе, что и въ 58 предложеніи, то все будетъ какъ и тамъ, но только здѣсь меньшій членъ  $ED$  соизмѣримъ съ прямою  $AB$ . Точно также можно доказать, какъ и выше, что  $LN$  квадратитъ площадь  $AC$ . Остается только показать, что  $LM$  и  $MN$  несоизмѣримы въ степени, содержатъ раціональную площадь и сумма ихъ квадратовъ есть средняя площадь, слѣдовательно  $LN$  будетъ степенящая раціональную и среднюю площадь.

Фиг. 373.



Такъ какъ  $AG$  и  $GE$  несоизмѣримы, то  $AN$  и  $NE$ , т. е.  $\square LM$  и  $\square MN$  также несоизмѣримы. слѣдовательно прямая  $LN$  и  $MN$  несоизмѣримы въ степени.

Такъ какъ  $ED$  и  $AB$  соизмѣримы, а  $AE$  и  $ED$  несоизмѣримы, то  $AB$  и  $AE$  несоизмѣримы. слѣдовательно  $AB$  и  $AE$  суть раціональныя прямая только въ степени соизмѣримыя. Откуда  $AI = \square LM + \square MN$  есть средняя площадь.

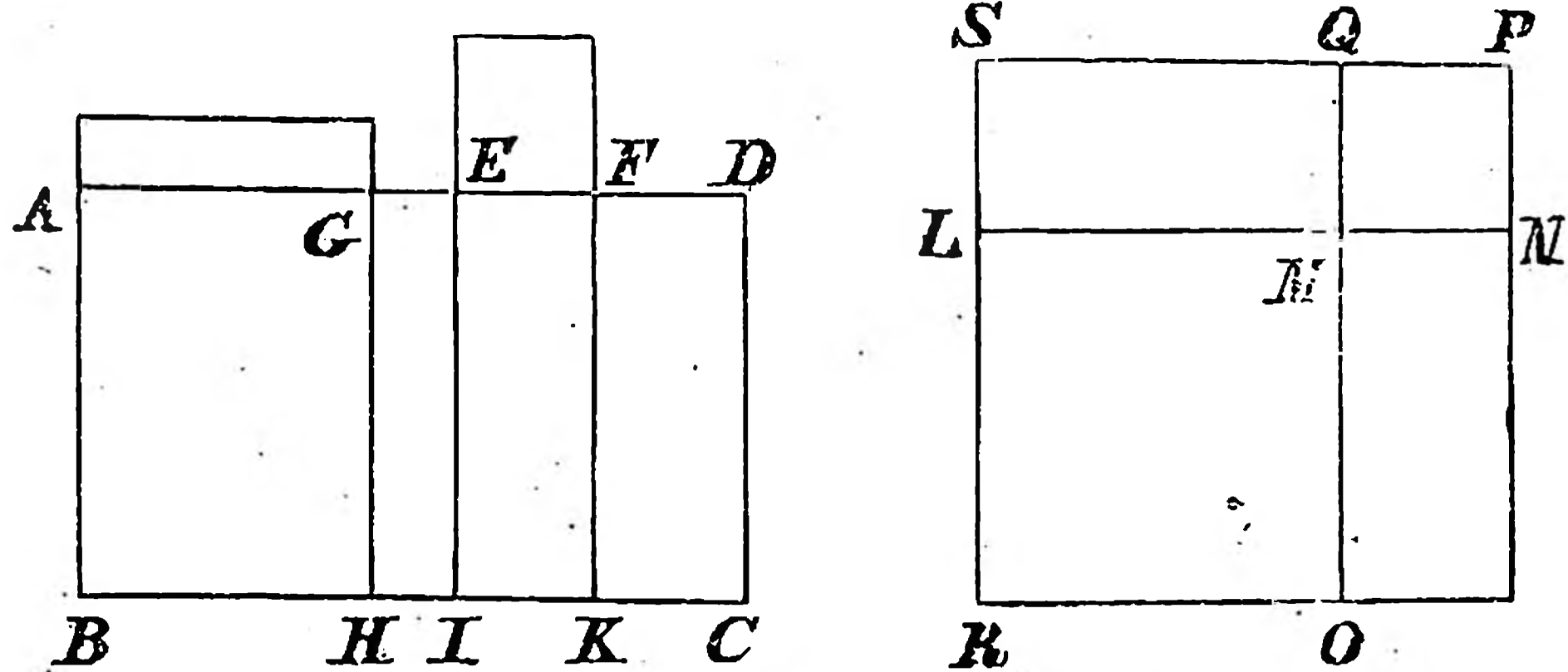
Но такъ какъ  $DE$  и  $AB$  соизмѣримы, т. е.  $DE$  и  $EI$  соизмѣримы и  $DE$  и  $EF$  также соизмѣримы, то  $EI$  и  $EF$  соизмѣримы; но  $EI$  есть раціональная прямая, слѣдовательно (кн. 10, пред. 20)  $EK = LQ = LM \cdot MN$  есть раціональная площадь.

Изъ этого видимъ, что прямая  $LN$ , квадратающая площадь  $AC$ , составлена изъ двухъ прямыхъ  $LM$  и  $MN$  несоизмѣримыхъ въ степени, содержащихъ раціональную площадь и коихъ сумма квадратовъ есть средняя площадь, слѣдовательно (кн. 10, пред. 41) она есть степенящая раціональную и среднюю площадь.

*Предложеніе 60.* Площадь прямоугольника  $ABCD$ , заключеннаго между раціональною прямою  $AB$  и шестю биноміальною  $AD$ , квадратитъ степенящая двѣ среднія (фиг. 374).

*Доказат.* Сдѣлаемъ тоже построение что и въ 58-мъ предложеніи, только здѣсь оба члена по длинѣ несоизмѣримы съ  $AB$ . Точно также, какъ и выше, можно доказать, что  $LN$  квадратируетъ площадь  $AC$ . Остается только показать, что  $LM$  и  $MN$  несоизмѣримы въ степени и что сумма ихъ квадратовъ составляетъ среднюю площадь, но  $LM$  и  $MN$  содержатъ среднюю площадь несоизмѣримую съ суммою квадратовъ, слѣдовательно прямая  $LN$  будетъ *степенящая двѣ среднія* площади.

Фиг. 374.



Такъ какъ  $GA$  и  $GE$  несоизмѣримы только въ степени, то  $LM$  и  $MN$  соизмѣримы въ степени.

Такъ какъ  $AE$  и  $AB$  несоизмѣримы только въ степени, то онѣ раціональны, откуда (кн. 10, пред. 22)  $AI = \square LM + \square MN$  есть *средняя* площадь.

Такъ какъ  $ED$  и  $AB$  по длинѣ несоизмѣримы, т. е. несоизмѣримы  $ED$  и  $EI$ , а  $ED$  и  $EF$  соизмѣримы по длинѣ, то  $EI$  и  $EF$  несоизмѣримы только въ степени. Слѣдовательно  $EI$  и  $EF$  суть раціональныя прямая соизмѣримыя только въ степени. Откуда видимъ (кн. 10, пред. 20), что  $EK = LQ = LM \cdot MN$  есть *средняя* площадь.

Но, такъ какъ  $EA$  по длинѣ несоизмѣрима съ  $EF$  и  $AI$  по длинѣ несоизмѣрима съ  $EK$ , то  $LM \cdot MN$  есть площадь несоизмѣримая съ площадью  $\square LM + \square MN$ .

Изъ этого видимъ, что прямая  $LN$ , квадратирующая площадь  $AC$ , составлена изъ двухъ прямыхъ  $LM$  и  $MN$  несоизмѣримыхъ въ степени, которыхъ сумма квадратовъ составляетъ среднюю площадь и которыя сами содержатъ среднюю площадь несоизмѣримую съ предыдущей, а потому (кн. 10, пред. 42)  $LN$  есть *степенящая двѣ среднія*.

*Лемма.* Если прямую  $AB$  раздѣлимъ въ точкѣ  $C$  на два неравные отрезка  $AC$  и  $CB$ , то сумма квадратовъ, построенныхъ на этихъ отрезкахъ, больше удвоеннаго прямоугольника, котораго онѣ суть стороны (фиг. 375).

*Доказат.* Раздѣлимъ прямую  $AB$  въ точкѣ  $D$  пополамъ, то будемъ имѣть (кн. 2, пред. 5):



$$AC \cdot CB + \square CD = \square AD$$

слѣдовательно:

$$AC \cdot CB < \square AD$$

или

$$2(AC \cdot CB) < 2\square AD.$$

Фиг. 375.



Но мы имѣемъ (кн. 2, пред. 9):

$$\square AC + \square CB = 2(\square AD + \square DC)$$

слѣдовательно:

$$\square AC + \square CB > 2(AC \cdot CB).$$

*Предложеніе 61.* Прямоугольникъ  $DEFG$ , построенный на рациональной прямой  $ED$ , равный квадрату построенному на биноміальной прямой  $AB$ , будетъ имѣть высоту  $DG$  первую биноміальную (фиг. 376).

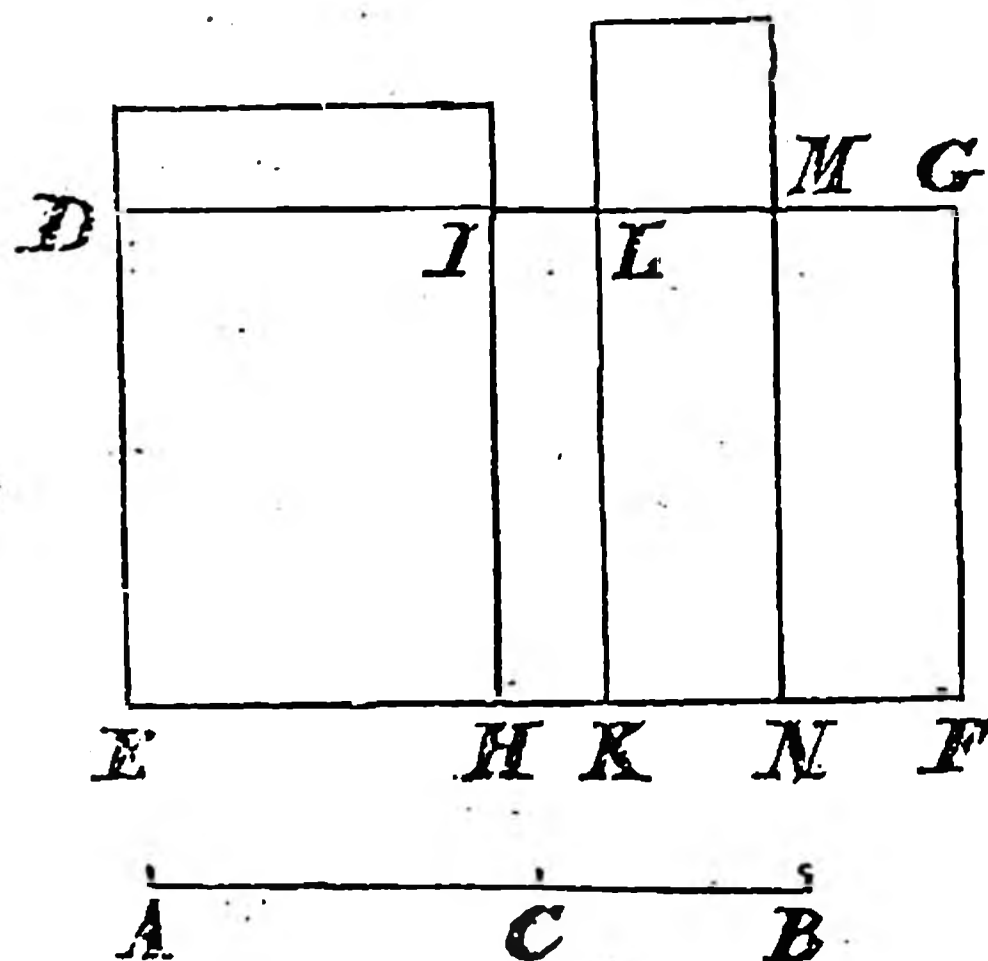
*Доказат.* Пусть биноміальная  $AB$  въ точкѣ  $C$  раздѣлена на свои члены  $AC$  и  $CB$  такъ, что  $AC$  есть больший членъ. На  $DE$  построимъ прямоугольники:

$$DH = \square AC \quad \text{и} \quad IK = \square CB$$

то, потому что  $2(AC \cdot CB) = LF$  (кн. 2, пред. 4),  $\square AB = DEFG$ .

Раздѣлимъ  $LG$  въ точкѣ  $M$  пополамъ и проведемъ  $MN$  параллельно  $LK$  или  $GF$ , то будемъ имѣть  $AC \cdot CB = LN = MF$ . Теперь надобно доказать:

Фиг. 376.



1. Что  $DG$  есть биноміальная. Такъ какъ  $AB$  есть биноміальная прямая, то (кн. 10, пред. 37)  $AC$  и  $CB$  суть рациональныя, только въ степени соизмѣримыя прямыя, слѣдовательно  $\square AC$  и  $\square CB$  рациональны и

соизмѣримы. Откуда видимъ (кн. 10, пред. 16), что  $\square AC + \square CB$  есть площадь соизмѣримая какъ съ  $\square AC$ , такъ и съ  $\square CB$ ; слѣдовательно  $\square AC + \square CB = DK = ED \cdot DL$  есть раціональная площадь, но  $ED$  раціональная прямая, слѣдовательно (кн. 10, пред. 21)  $DL$  есть раціональная прямая соизмѣримая съ  $DE$ .

Такъ какъ  $AC$  и  $CB$  раціональны и только въ степени соизмѣримы, то  $2(AC \cdot CB) = LF = LK \cdot LG = ED \cdot LG$  есть средняя площадь, слѣдовательно (кн. 10, пред. 23)  $LG$  есть раціональная прямая несоизмѣримая съ  $ED$ . Но раціональныя прямая  $DL$  и  $ED$  соизмѣримы, слѣдовательно (кн. 10, пред. 13)  $DL$  и  $LG$  несоизмѣримы. Изъ этого видимъ, что  $DL$  и  $LG$  суть прямая раціональная и соизмѣримая только въ степени, а слѣдовательно (кн. 10, пред. 37)  $DG$  есть *биноміальная*.

2. Что  $DG$  есть *первая биноміальная*.

Такъ какъ,  $\square AC : AC \cdot CB = AC \cdot CB : \square CB$  (кн. 10, пред. 54, слѣд. 2), т. е.:

$$DH : LN = LN : IK$$

то (кн. 6, пред. 1):

$$DI : LM = LM : IL$$

слѣдовательно (кн. 6, пред. 17)  $DI \cdot LI = \square LM = \frac{1}{4} \square LG$ .

Далѣе, такъ какъ  $\square AC$  соизмѣримъ съ  $\square CB$ , т. е.  $DH$  соизмѣримъ съ  $IK$ , то (кн. 10, пред. 10)  $DI$  и  $LI$  соизмѣримы. Но мы имѣемъ (кн. 10, пред. 60, слѣд.):

$$\square AC + \square CB > 2(AC \cdot CB)$$

т. е.  $DK > LF$ , то  $DL > LG$ .

Откуда видимъ (кн. 10, пред. 18), что  $DL$  квадратитъ надъ  $LG$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ  $DL$ . Но  $DL$  и  $LG$  раціональны, и  $DL$  соизмѣрима съ  $DE$ , слѣдовательно  $DG$  есть *первая биноміальная*.

*Предложеніе 62.* Прямоугольникъ  $DEFG$ , построенный на раціональной прямой  $ED$ , коего площадь равна площади квадрата построеннаго на *первой биноміальной*  $AB$ , имѣетъ высоту  $DG$  *вторую биноміальную* (фиг. 377).

*Доказат.* Сдѣлавъ тоже построение, что и въ 61 предложеніи, слѣдуетъ доказать:

1. Что прямая  $DG$  есть *биноміальная*.

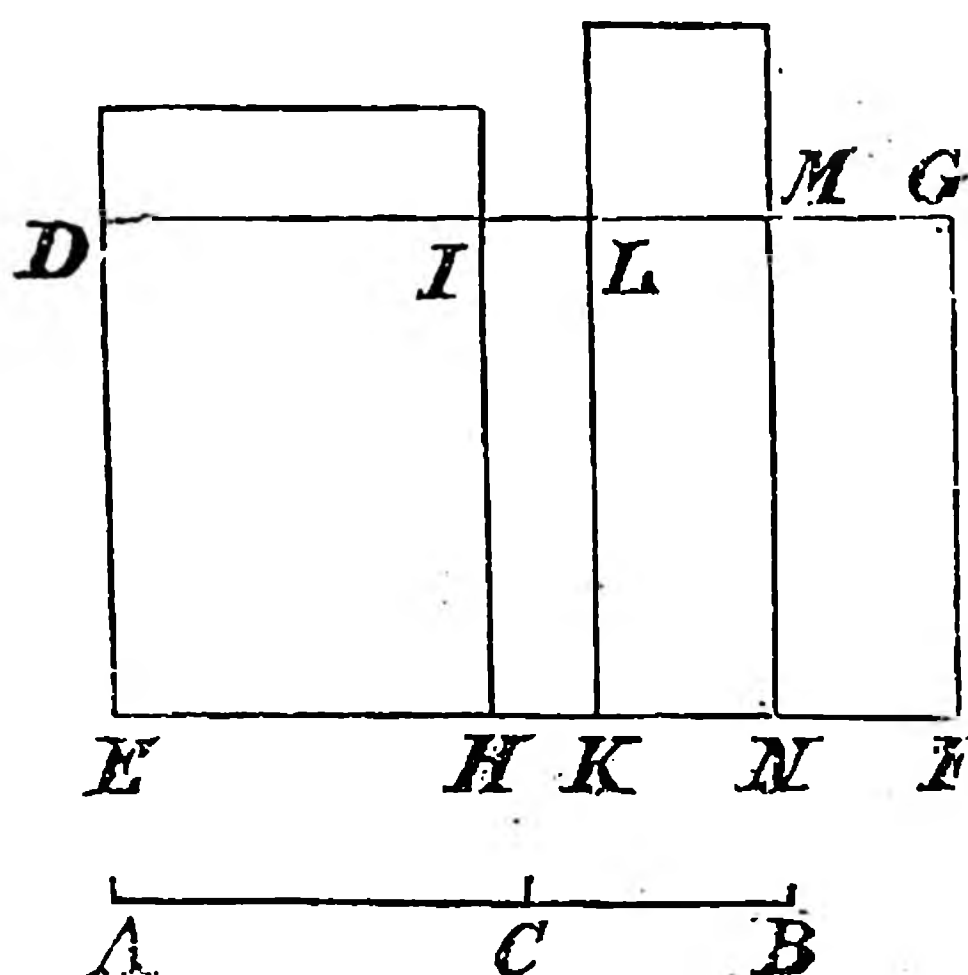
Такъ какъ  $AB$  есть *первая биноміальная*, то (кн. 10, пред. 38) ея члены  $AC$  и  $CB$  суть *среднія*, только въ степени соизмѣримыя линіи, заключающія раціональный прямоугольникъ. Но:

$$\square AB + \square BC = DK = ED \cdot DL$$

есть средняя площадь, но, какъ  $ED$  есть рациональная прямая, то  $DL$  будетъ также рациональная (кн. 10, пред. 23) съ  $ED$  несоизмѣримая прямая. Далѣе:

$$2(AB \cdot BC) = LE = KL \cdot LG = ED \cdot LG$$

Фиг. 377.



есть рациональная площадь, слѣдовательно (кн. 10, пред. 21) и  $LG$  будетъ рациональная прямая съ  $ED$  по длинѣ соизмѣримая. Откуда слѣдуетъ (кн. 10, пред. 13), что  $DL$  по длинѣ несоизмѣрима съ  $LG$ , слѣдовательно  $DL$  и  $LG$  суть рациональныя прямыя, только въ степени соизмѣримыя, откуда (кн. 10, пред. 37)  $DG$  есть *биноміальная*.

2. Что  $DG$  есть *вторая биноміальная*.

Такъ какъ (кн. 10, пред. 60, слѣд.):

$$\square AC + \square BC > 2(AC \cdot CB)$$

т. е.

$$DK > LF, \text{ то } DL > LG.$$

Такъ какъ  $\square AC$  соизмѣримъ съ  $\square BC$ , т. е.  $DH$  соизмѣрима съ  $IK$  то и прямая  $DI$  соизмѣрима съ  $IL$ . Наконецъ мы имѣемъ еще  $DI \cdot LI = \square LM = \frac{1}{4} \square LG$ . Слѣдовательно (кн. 10, пред. 18) прямая  $DL$  квадратитъ надъ прямою  $LG$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ  $DL$ . Но  $LG$  и  $ED$  соизмѣримы, а потому  $DG$  есть *вторая биноміальная*.

**Предложеніе 63.** Прямоугольникъ  $DEFG$ , построенный на рациональной прямой  $ED$ , равный квадрату построенному на второй бимедіальной  $AB$ , имѣетъ высоту  $DG$  *третью биноміальную* (фиг. 378).

**Доказат.** Все какъ въ 61 предложеніи, а слѣдуетъ доказать:

1. Что  $DG$  есть *биноміальная*.

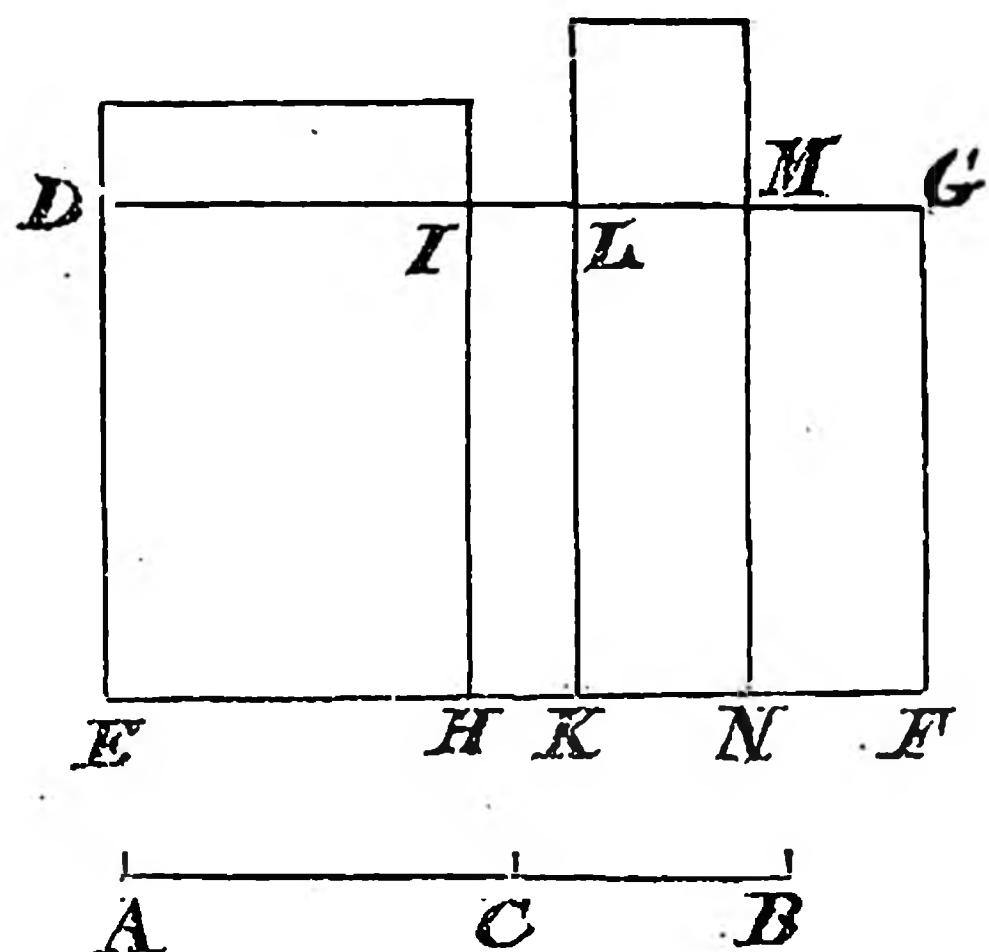
Такъ какъ  $AB$  есть *вторая бимедіальная*, то ея части  $AC$  и  $CB$  (кн. 10, пред. 39) суть *среднія*, только въ степени соизмѣримыя прямыя, заключающія *средній* прямоугольникъ. Но мы имѣемъ:

$$\square AC + \square CB = DK = ED \cdot DL$$



есть средняя площадь, следовательно, какъ  $ED$  рациональная прямая, то (кн. 10, пред. 23)  $DL$  также рациональная прямая несоизмѣримая съ  $ED$ .

Фиг. 378.



По той же причинѣ  $LG$  есть рациональная прямая съ  $ED$  несоизмѣримая. Следовательно прямые  $DL$  и  $LG$  рациональны по длинѣ несоизмѣримы съ  $ED$ . Такъ какъ (кн. 6, пред. 1);

$$AC:CB=\square AC:AC.CB$$

а  $AC$  и  $CB$  несоизмѣримы, то несоизмѣримы также и  $\square AC$  съ  $AC.CB$  и  $\square AC+\square CB$  несоизмѣримы съ  $2(AC.CB)$ , т. е. несоизмѣримы  $DK$  съ  $LF$ , а также и  $DL$  съ  $LG$  несоизмѣримы. Откуда видимъ, что  $DL$  и  $LG$  суть рациональныя прямая, только въ степени соизмѣримыя, следовательно (кн. 10, пред. 37)  $DG$  есть биноміальная прямая.

2. Что  $DG$  есть третья биноміальная.

Точно также, какъ и въ 61 предложеніи можно заключить, что  $DL>LG$  и что  $DI$  и  $IL$  несоизмѣримы. Мы имѣемъ:

$$DI.IL=\square LM=\frac{1}{4}\square LG.$$

Следовательно (кн. 10, пред. 18)  $DL$  квадратитъ надъ  $LG$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ  $DL$ . Но мы видѣли, что  $DL$  и  $LG$  по длинѣ несоизмѣримы съ  $ED$ , следовательно  $DG$  есть третья биноміальная.

**Предложеніе 64.** Прямоугольникъ  $DEFG$ , построенный на рациональной прямой  $ED$ , равный квадрату построенному на большей иррациональной  $AB$ , имѣетъ высоту  $DG$  четвертую биноміальную (фиг. 379).

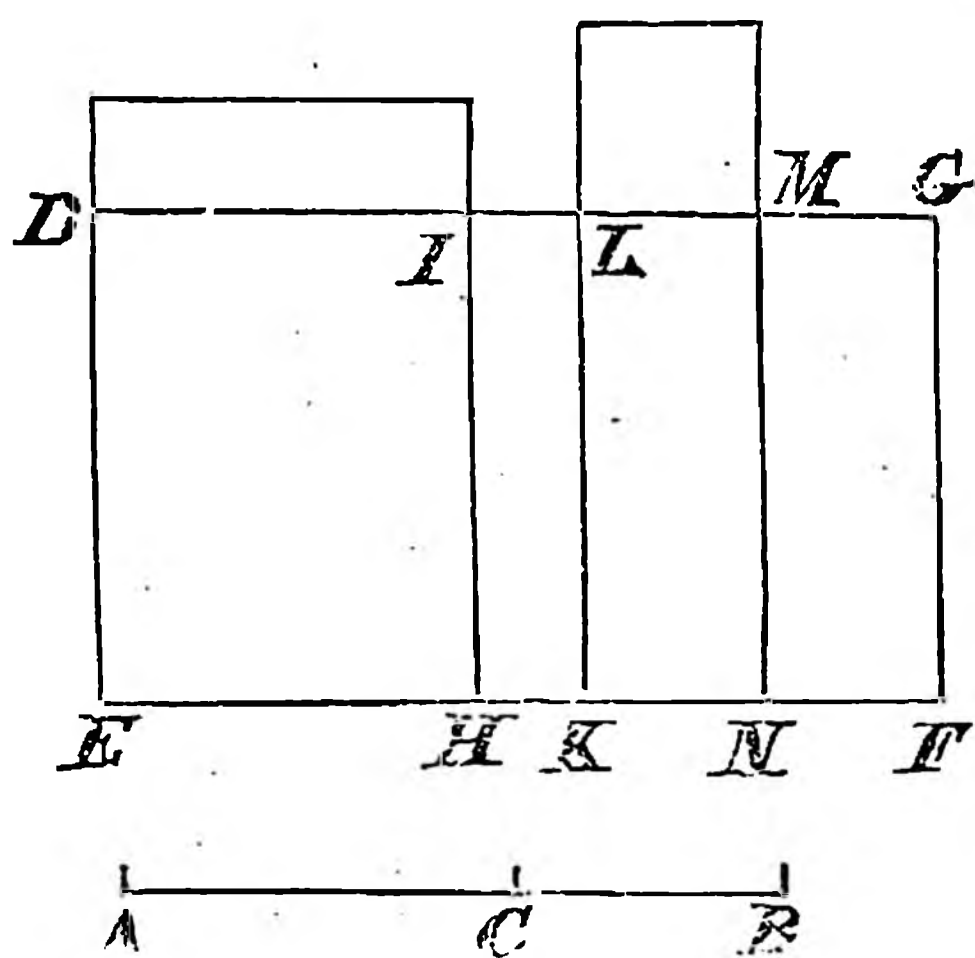
**Доказат.** Тоже построеніе что и въ 61 предложеніи; а слѣдуетъ доказать:

1. Что  $DG$  есть биноміальная прямая.

Такъ какъ  $AB$  есть большая ирраціональная, то (кн. 10, пред. 40) ея члены  $AC$  и  $CB$  несоизмѣримы въ степени, онѣ содержатъ средній прямоугольникъ и сумма ихъ квадратовъ раціональна. Мы имѣемъ:

$$\square AC + \square CB = DK = ED \cdot DL$$

Фиг. 379.



слѣдовательно  $DK$  есть раціональная площадь, откуда (кн. 10, пред. 21)  $DL$  есть раціональная прямая соизмѣримая по длинѣ съ  $ED$ . Но:

$$2(AC \cdot CB) = LF = ED \cdot LG$$

есть средняя площадь, а  $ED$  есть раціональная прямая, слѣдовательно (кн. 10, пред. 23) прямая  $LG$  раціональна и съ  $ED$  несоизмѣрима. Слѣдовательно прямая  $DL$  и  $LG$  несоизмѣримы, а потому  $DL$  и  $LG$  раціональны и только въ степени соизмѣримы, слѣдовательно (кн. 10, пред. 37)  $DG$  есть биноміальная прямая.

2. Что  $DG$  есть четвертая биноміальная.

Точно также какъ и въ предыдущемъ предложеніи можно заключить, что  $DL > LG$  и  $DI \cdot IL = \square LM = \frac{1}{4} \square LG$ . Также и здѣсь  $\square AC$  и  $\square CB$  несоизмѣримы, т. е.  $DH$  и  $IK$  несоизмѣримы, а слѣдовательно несоизмѣримы и прямая  $DI$  и  $IL$ . Откуда слѣдуетъ (кн. 10, пред. 19), что  $DL$  квадратитъ надъ  $LG$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ  $DL$ . Но мы видѣли, что  $DL$  и  $ED$  соизмѣримы по длинѣ, слѣдовательно  $DG$  есть четвертая биноміальная.

**Предложеніе 65.** Прямоугольникъ  $DEFG$ , построенный на раціональной прямой  $ED$ , равный квадрату построенному на раціональной средней степенящей  $AB$ , имѣетъ высоту  $DG$  пятую биноміальную (фиг. 380).

**Доказат.** Сдѣлавъ тоже построеніе, что и въ 61 предложеніи, а слѣдуетъ доказать:

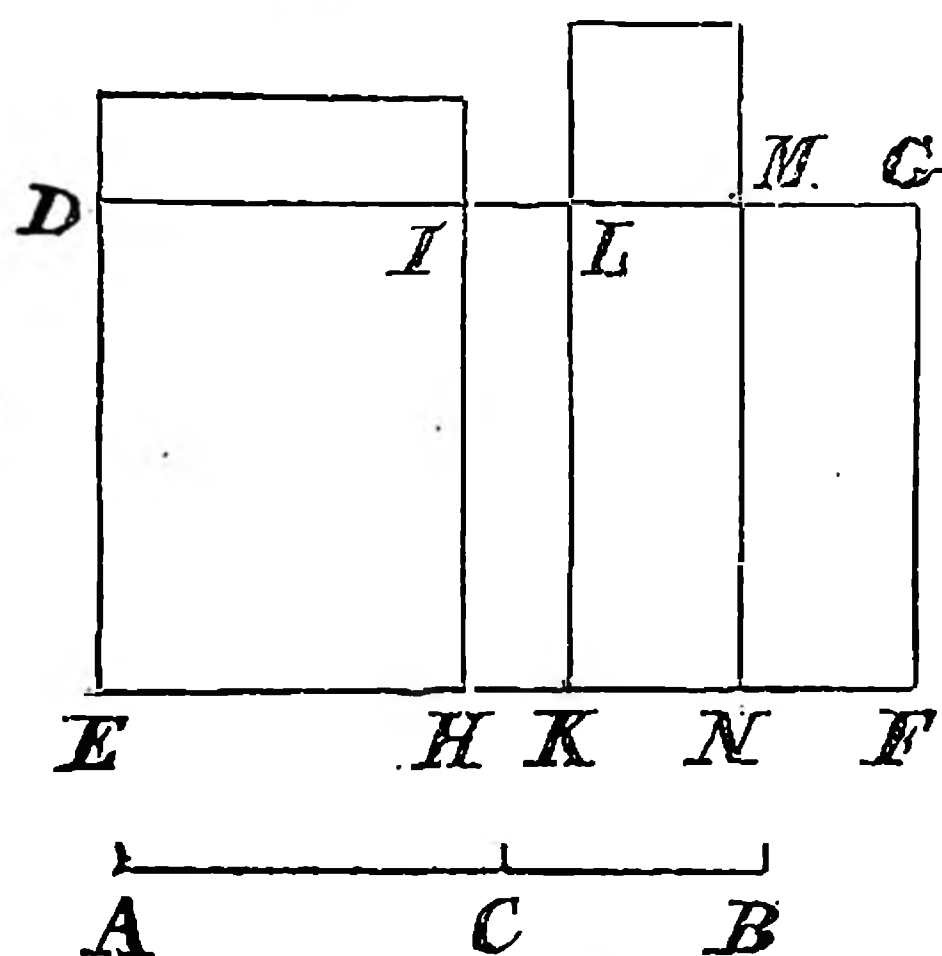
1. Что  $DG$  есть биноміальная прямая.

Такъ какъ  $AB$  есть раціональная и средняя степенящая, то (кн. 10, пред. 41) ея члены  $AC$  и  $CB$  въ степени несоизмѣримы и заключаютъ

раціональний прямокутникъ, а сумма ихъ квадратовъ есть *средняя* площадь. Площадь:

$$\square AC + \square CB = DK = ED \cdot DL$$

Фиг. 380.



есть *средняя*, слѣдовательно (кн. 10, пред. 23)  $DL$  есть раціональная прямая съ  $ED$  несоизмѣримая. Но  $2(AC \cdot CB) = LF$  есть раціональная площадь, слѣдовательно (кн. 10, пред. 21)  $LG$  есть раціональная прямая съ  $ED$  соизмѣримая.

Откуда прямая  $DL$  и  $LG$  несоизмѣримы. слѣдовательно  $DL$  и  $LG$  суть прямая раціональныя, только въ степени соизмѣримыя, а потому (кн. 10, пред. 37) прямая  $DG$  есть *биноміальная*.

2. Что  $DG$  есть *пятая биноміальная*.

Можно показать какъ выше, что  $DI \cdot IL = \square LM$  и что  $DI$  и  $IL$  несоизмѣримы, поэтому (кн. 10, пред. 19)  $DL$  квадратитъ надъ  $LG$ , на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ  $DL$ . Но было показано, что прямая  $LG$  и  $ED$  соизмѣримы, слѣдовательно  $DG$  есть *пятая биноміальная*.

*Предложеніе 66.* Прямоугольникъ  $DEFG$ , построенный на раціональной прямой  $ED$ , равный квадрату построенному на прямой  $AB$  *второй средней степенящей*, имѣетъ высоту  $DG$  *шестую биноміальную* (фиг. 381).

*Доказат.* Тоже построение, что и въ 61 предложеніи, а слѣдуетъ доказать:

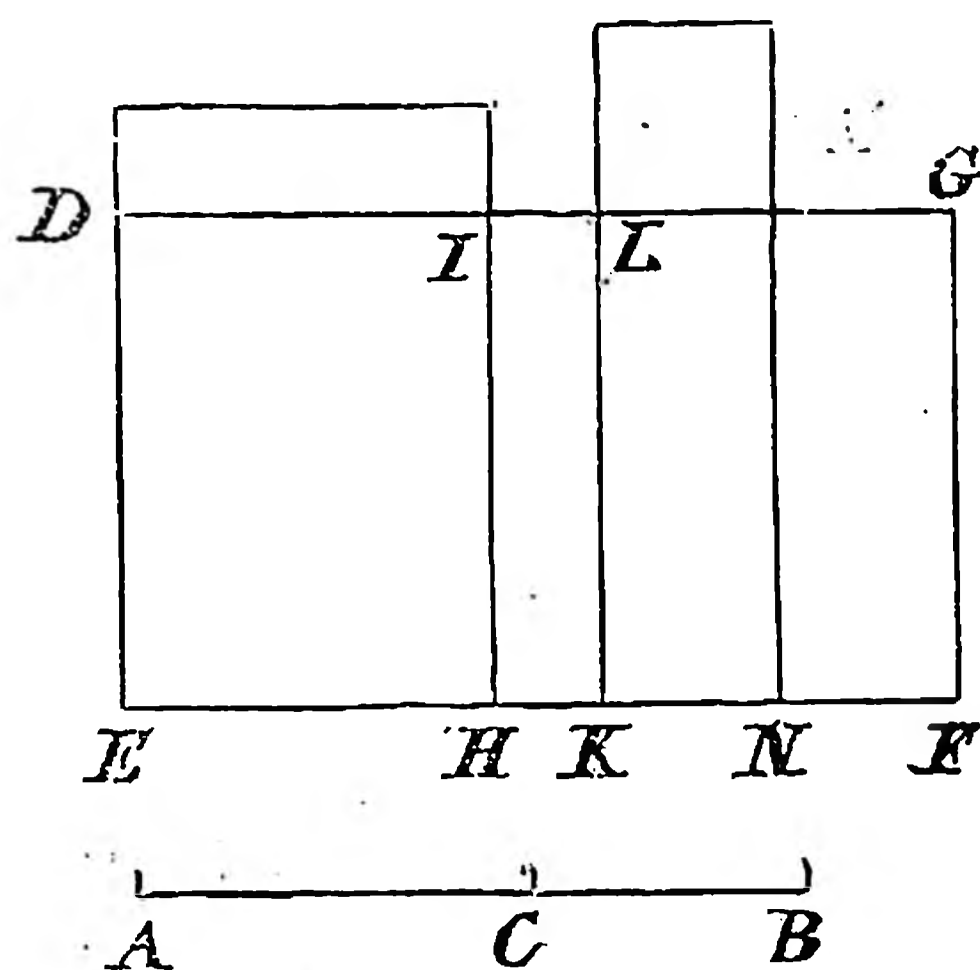
1. Что  $DG$  есть *биноміальная*.

Такъ какъ  $AB$  есть *вторая средняя степенящая*, то (кн. 10, пред. 42) ея члены  $AC$  и  $CB$  несоизмѣримы въ степени и сумма ихъ квадратовъ есть *средняя* площадь и кромѣ этого онѣ содержатъ прямоугольникъ несоизмѣримый съ суммою ихъ квадратовъ. Прямая  $DK$  и  $LF$  суть *средняя*, но  $ED$  раціональна, слѣдовательно (кн. 10, пред. 23)  $DL$  и  $LG$  раціональны и съ  $ED$  по длинѣ несоизмѣримы. Но площадь  $\square AC + \square CB$  не-



соизмѣрима съ  $2(AC \cdot CB)$ , слѣдовательно  $DK$  и  $LF$  несоизмѣримы, а слѣдовательно несоизмѣримы и прямыя  $DL$  и  $LG$ . Откуда видимъ, что  $DL$

Фиг. 381.



и  $LG$  только въ степени соизмѣримы, а поэтому (кн. 10, пред. 37) прямая  $DG$  есть *биноміальная*.

2. Что  $DG$  есть *шестая биноміальная*.

Можно доказать, какъ выше, что  $DI \cdot IL = LM$  и что  $DI$  и  $IL$  несоизмѣримы, слѣдовательно прямая  $DL$  квадратитъ (кн. 10, пред. 19) надъ  $LG$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ  $DL$ . Но какъ  $DL$  и  $LG$  съ  $DE$  по длинѣ несоизмѣримы, то  $DG$  есть *шестая биноміальная*.

*Предложеніе 67.* Всякая прямая  $CD$ , по длинѣ соизмѣримая съ биноміальною  $AB$ , есть биноміальная того же порядка (фиг. 382).

*Доказат.* 1. Пусть прямая  $AB$  въ точкѣ  $E$  раздѣлена на свои члены  $AE$  и  $EB$  и притомъ пусть  $AE$  есть большій членъ. Прямые  $AE$  и  $EB$  будутъ раціональны только въ степени соизмѣримыя (кн. 10, пред. 37). Сдѣлаемъ (кн. 6, пред. 12):

$$AB : CD = AE : CF$$

то будемъ имѣть также (кн. 5, пред. 19):

$$EB : FD = AB : CD$$

замѣчая, что  $AB$  и  $CD$  соизмѣримы, мы будемъ имѣть (кн. 10, пред. 10), что  $AE$  съ  $CF$  и  $EB$  съ  $FD$  также соизмѣримы. Но  $AE$  и  $EB$  раціональны, слѣдовательно  $CF$  и  $FD$  также раціональны. Такъ какъ мы имѣемъ (кн. 6, пред. 11):

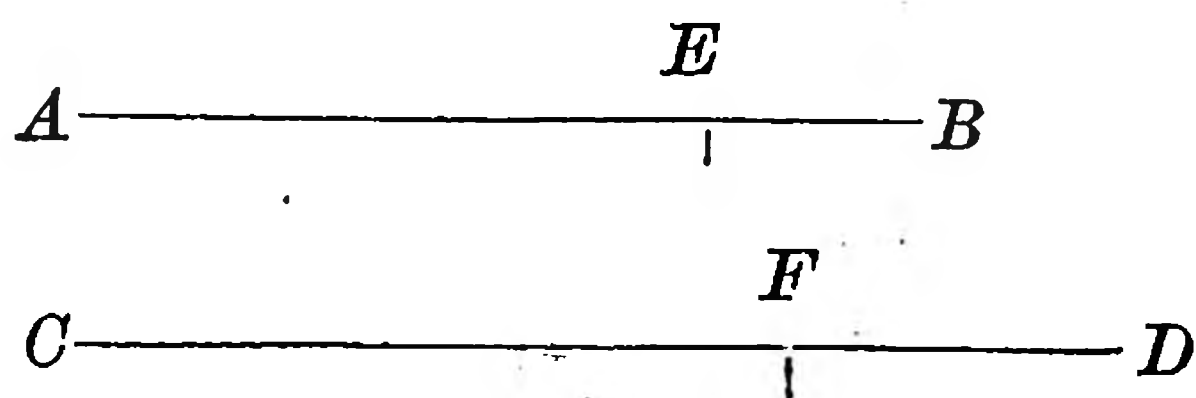
$$AE : CF = EB : FD$$

и откуда (кн. 5, пред. 16):

$$AE : EB = CF : FD$$

но, какъ  $AE$  и  $EB$  только въ степени соизмѣримы, то  $CF$  и  $FD$  будутъ также только въ степени соизмѣримы. Откуда прямая  $CF$  и  $FD$  рациональны только въ степени соизмѣримы, а поэтому (кн. 10, пред. 37)  $CD$  есть биноміальная прямая.

Фиг. 382.



2. Прямая  $AB$  можетъ быть или первою, или второю, или третьею биноміальною, т. е. квадратитъ, въ пропорціи:

$$AE:EB=CF:FD$$

$AE$  надъ  $EB$ , на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ  $AE$  или съ  $EB$ , или ни одна изъ нихъ по длинѣ не соизмѣрима съ данною рациональною прямою, слѣдовательно (кн. 10, пред. 15)  $CF$  квадратитъ надъ  $FD$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ  $CF$  и по той же причинѣ  $CF$  или  $FD$ , или ни одна изъ нихъ не соизмѣрима съ данною рациональною прямою; слѣдовательно  $CD$  вмѣстѣ съ  $AB$  будетъ или первою, или второю, или третьею биноміальною.

Точно также можетъ быть доказано, что  $CD$  вмѣстѣ съ  $AB$  будетъ четвертая, пятая или шестая биноміальная. Слѣдовательно прямая  $AB$  и  $CD$  всегда суть биноміальныя одного порядка.

*Предложеніе 68.* Прямая  $CD$  по длинѣ соизмѣримая съ бимедіальною  $AB$  будетъ сама бимедіальная того же порядка (фиг. 383).

*Доказат.* 1. Пусть будетъ бимедіальная  $AB$  въ точкѣ  $E$  раздѣлена на свои составныя части  $AE$  и  $EB$  и притомъ такъ, что  $AE > EB$ , то (кн. 10, пред. 38 и 39) прямая  $AE$  и  $EB$  будутъ *среднія* только въ степени соизмѣримы. Построимъ и здѣсь какъ выше пропорцію:

$$AB:CD=AE:CF$$

то (кн. 5, пред. 19):

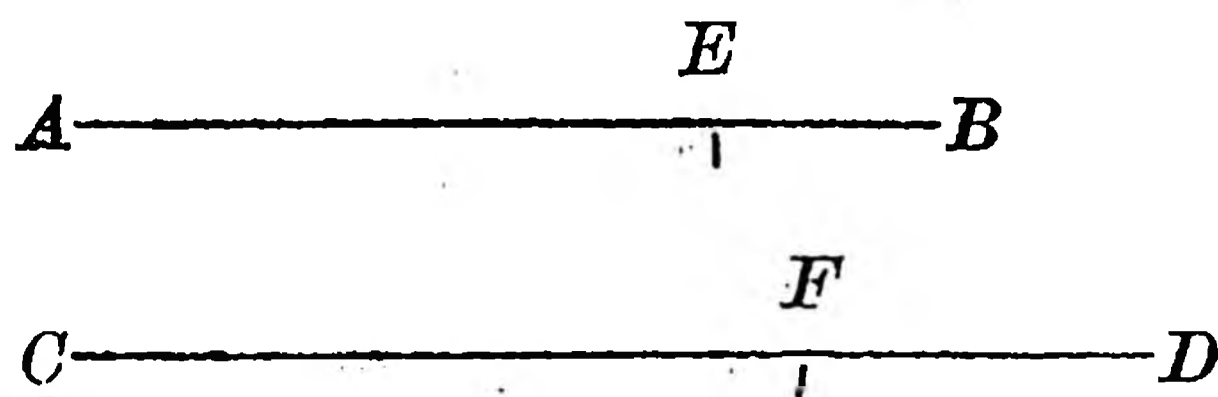
$$EB:FD=AB:CD$$

Откуда видимъ, что такъ какъ  $AB$  и  $CD$  соизмѣримы, то соизмѣримы  $AE$  и  $CF$ , а также  $EB$  и  $FD$ . Но  $AE$  и  $EB$  суть *среднія*, слѣдовательно (кн. 10, пред. 24)  $CF$  и  $FD$  суть также *среднія*. Такъ какъ  $AE$  и  $EB$  суть прямая соизмѣримыя только въ степени, а мы имѣемъ (кн. 5, пред. 11 и 16):

$$AE:EB=CF:FD$$

то и прямая  $CF$  и  $FD$  соизмѣримы только въ степени. Изъ этого видимъ, что прямая  $CF$  и  $FD$  суть *среднія*, только въ степени соизмѣримыя, слѣдовательно (кн. 10, пред. 38 и 39) прямая  $CD$  есть *бимедіальная*.

Фиг. 383.



2. Изъ пропорціи:

$$AE:EB=CF:FD$$

слѣдуетъ (кн. 5, пред. 11 и кн. 6, пред. 1):

$$\square AE:AE.EB=\square CF:CF.FD$$

откуда (кн. 5, пред. 16):

$$\square AE:\square CF=AE.EB:CF.FD$$

но  $\square AE$  и  $\square CF$  соизмѣримы, слѣдовательно соизмѣримы  $AE.EB$  и  $CF.FD$ . Прямая  $AB$  можетъ быть первою, или второю биноміальною, поэтому (кн. 10, пред. 38 и 39)  $AE.CB$  будетъ или раціональная или средняя площадь. Откуда площадь  $CF.FD$  будетъ или раціональная или средняя, слѣдовательно прямая  $CD$  вмѣстѣ съ  $AB$  будетъ или *первая* или *вторая* бимедіальная.

*Предложеніе 69.* Прямая  $CD$  по длинѣ соизмѣримая съ *наибольшею* ирраціональною  $AB$  будетъ сама большею ирраціональною (фиг. 384).

*Доказат.* Пусть прямая  $AB$  въ точкѣ  $E$  раздѣлена на свои члены  $AE$  и  $EB$ , то они (кн. 10, пред. 40) несоизмѣримы въ степени, содержатъ *средній* прямоугольникъ и сумма ихъ квадратовъ есть раціональная площадь.

Сдѣлаемъ тоже построеніе, что и въ пред. 68, то:

$$AB:CD=AE:CF=EB:FD \quad (1)$$

но  $AB$  и  $CD$  соизмѣримы, слѣдовательно соизмѣримы  $AE$  и  $CF$ ,  $EB$  и  $FD$  откуда, такъ какъ  $AE$  и  $EB$  несоизмѣримы въ степени,  $CF$  и  $FD$  также несоизмѣримы въ степени.



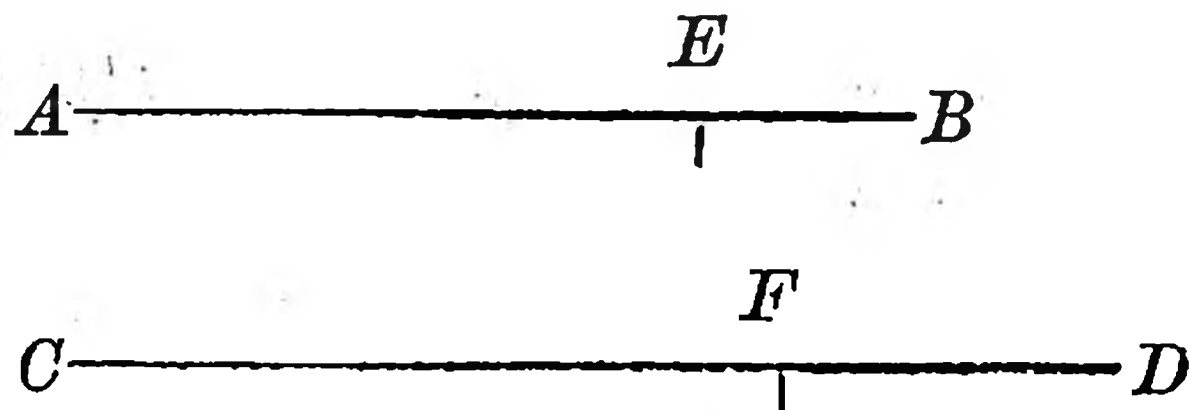
Изъ пропорціи (1) мы имѣемъ:

$$AE:EB=CF:FD$$

откуда (кн. 5, пред. 18):

$$AB:EB=CD:DF$$

Фиг. 384.



откуда еще (кн. 6, пред. 22):

$$\square AB:\square EB=\square CD:\square DF.$$

Точно также можно доказать, что:

$$\square AB:\square AE=\square CD:\square CF$$

слѣдовательно (кн. 5, пред. 24):

$$\square AB:\square AE+\square EB=\square CD:\square CF+\square FD$$

или

$$\square AB:\square CD=\square AE+\square EB:\square CF+\square FD$$

но  $\square AB$  и  $\square CD$  соизмѣримы, слѣдовательно соизмѣримы площади  $\square AE+\square EB$ , и  $\square CF+\square FD$ , но  $\square AE+\square EB$  есть раціональная площадь, слѣдовательно и площадь  $\square CF+\square FD$  также раціональна.

Точно также площади  $2(AE \cdot EB)$  и  $2(CF \cdot FD)$  соизмѣримы, слѣдовательно, такъ какъ  $AE \cdot EB$  есть средняя площадь, то  $CF \cdot FD$  есть также средняя площадь (кн. 10, пред. 24, слѣд.).

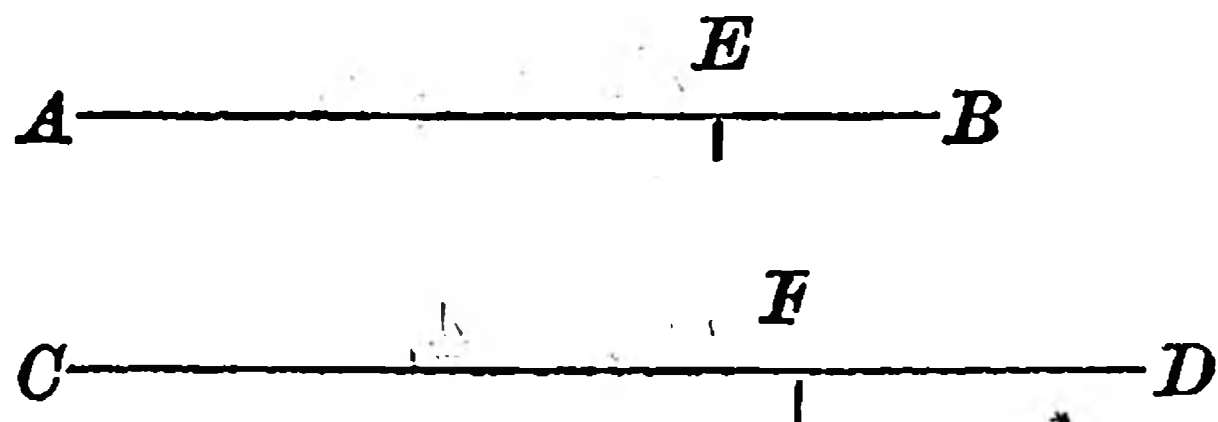
Откуда (кн. 10, пред. 40)  $CD$  есть наибольшая ирраціональная.

*Предложеніе 70.* Прямая  $CD$  по длинѣ соизмѣримая съ раціональною и среднею степенящею  $AB$ , есть сама раціональная и средняя степенящая (фиг. 385).

*Доказат.* Пусть прямая  $AB$  въ точкѣ  $E$  раздѣлена на свои члены  $AE$  и  $EB$ , то они несоизмѣримы въ степени, содержатъ раціональный прямоугольникъ и сумма ихъ квадратовъ есть средняя площадь.

Сдѣлавъ тоже построение, что и въ предыдущемъ предложеніи, точно также можно доказать, что  $CF$  и  $FD$  несоизмѣримы въ степени, что пло-

Фиг. 385.

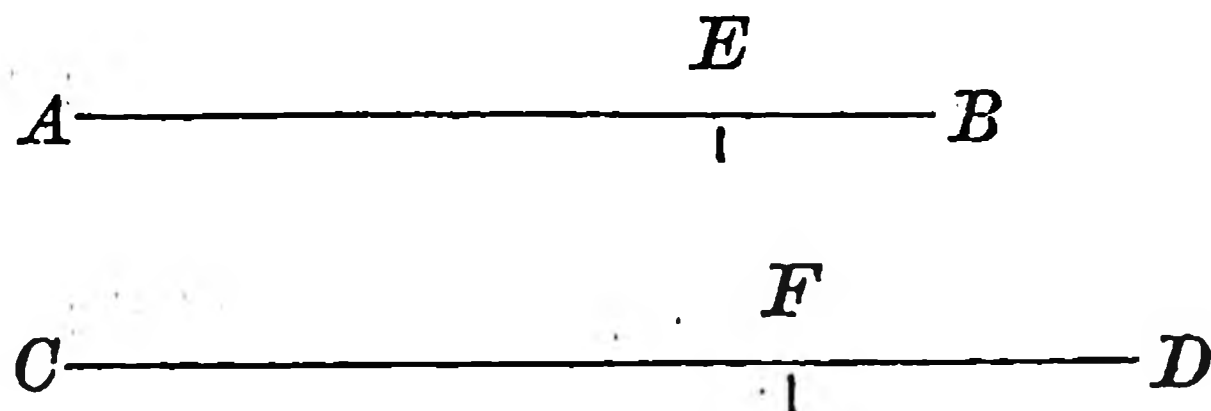


щадь  $\square AE + \square EB$  соизмѣрима съ площадью  $\square CF + \square FD$  и что прямоугольникъ  $AE \cdot EB$  соизмѣримъ съ  $CF \cdot FD$ , слѣдовательно  $\square CF + \square FD$  есть *средняя* площадь, а  $CF \cdot FD$  есть площадь *раціональная*. Откуда видимъ (кн. 10, пред. 41), что прямая  $CD$  есть *раціональная и средняя степенящая*.

*Предложеніе 71.* Прямая  $CD$  по длинѣ соизмѣримая съ второю *среднею степенящею*  $AB$  будетъ сама *вторая средняя степенящая* (фиг. 386).

*Доказат.* Пусть прямая  $AB$  въ точкѣ  $E$  раздѣлена на свои составные члены  $AE$  и  $EB$ , то они (кн. 10, пред. 42) несоизмѣримы въ степени и сумма ихъ квадратовъ есть *средняя* площадь, но они содержатъ среднюю площадь несоизмѣримую съ суммою ихъ квадратовъ.

Фиг. 386.



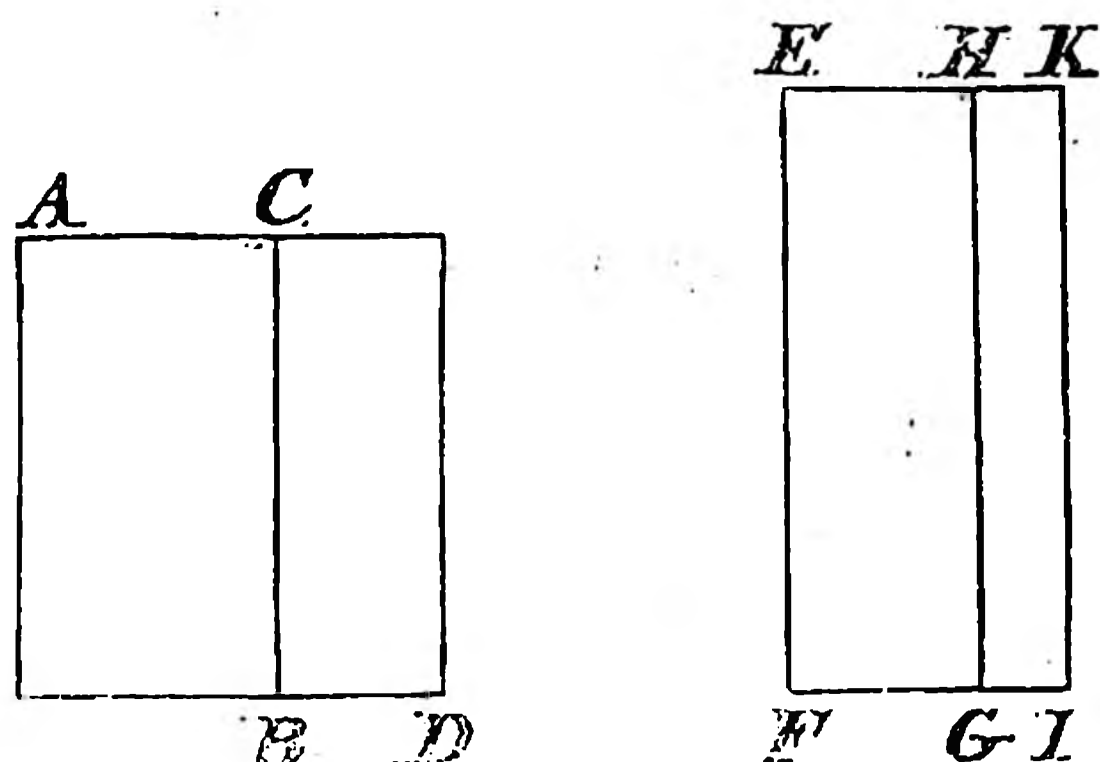
Изъ того же построенія, какъ и выше, мы докажемъ, что  $CF$  и  $FD$  соизмѣримы только въ степени, и что площади  $\square AE + \square EB$  и  $\square CF + \square FD$  соизмѣримы, а также соизмѣримы  $AE \cdot EB$  съ  $CF \cdot FD$ , что слѣдовательно  $\square CF + \square FD$  есть *средняя* площадь, а также и  $CF \cdot FD$  есть *средняя* съ  $\square CF + \square FD$  несоизмѣримая площадь. Откуда видимъ (кн. 10, пред. 42), что прямая  $CD$  есть *вторая средняя степенящая*.

*Предложеніе 72.* Если сложимъ раціональный прямоугольникъ  $AB$  съ среднимъ  $CD$ , то получимъ одну изъ слѣдующихъ четырехъ *ирраціональных* линій: или *биноміальную*, или *первую бимедіальную*, или *наибольшую ирраціональную*, или наконецъ *раціональную и среднюю степенящую*.

*Доказат.* Пусть  $AB$  будетъ или больше, или меньше  $CD$ , слѣдуетъ доказать, что прямая, степенящая площадь  $AD$ , будетъ одна изъ четырехъ сказанныхъ ирраціональностей.

Случай 1.  $AB > CD$  (фиг. 387).

Фиг. 387.



Пусть  $FE$  будет рациональная прямая,  $EG = FE$ .  $EH = AB$  и  $HI = FE$ .  $HK = CD$ . Такъ какъ площадь  $AB$  есть рациональная, то  $EG$  есть также рациональная, а также (кн. 10, пред. 21) и сторона  $EH$  рациональна и соизмѣрима по длинѣ съ  $FE$ . Далѣе, такъ какъ  $CD$  есть средняя площадь, то и  $HI$  есть также средняя и (кн. 10, пред. 23) сторона  $HK$  рациональна и по длинѣ несоизмѣрима съ  $FE$ . Площадь  $AB$  рациональна, и  $CD$  средняя, слѣдовательно  $AB$  и  $CD$  несоизмѣримы, поэтому и  $EG$  и  $HI$  также несоизмѣримы. Но мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$EG : HI = EH : HK$$

откуда прямая  $EH$  и  $HK$  по длинѣ несоизмѣримы. Слѣдовательно  $EH$  и  $HK$  суть рациональныя прямая, только въ степени соизмѣримыя, откуда (кн. 10, пред. 33) прямая  $EK$  есть биноміальная. Но по условію  $AB > CD$ , т. е.  $EG > HI$ , слѣдовательно и  $EH > HK$ . Теперь, прямая  $EH$  можетъ квадратитъ надъ  $HK$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима или несоизмѣрима съ  $EH$ .

Пусть будетъ первое: то, такъ какъ большая прямая  $EH$  соизмѣрима съ  $FE$ ,  $EK$  есть первая биноміальная. Слѣдовательно, какъ  $FE$  есть рациональная прямая (кн. 10, пред. 55), то прямая, которая квадратитъ площадь  $EI$ , т. е.  $AD$  есть биноміальная.

Пусть будетъ второе, то, такъ какъ  $EH$  и  $FE$  соизмѣримы по длинѣ,  $EK$  будетъ четвертая биноміальная; слѣдовательно, какъ  $FE$  (кн. 10, пред. 58) есть рациональная прямая, то прямая, квадратыщая площадь  $EI$ , т. е.  $AD$  будетъ наибольшая иррациональная.

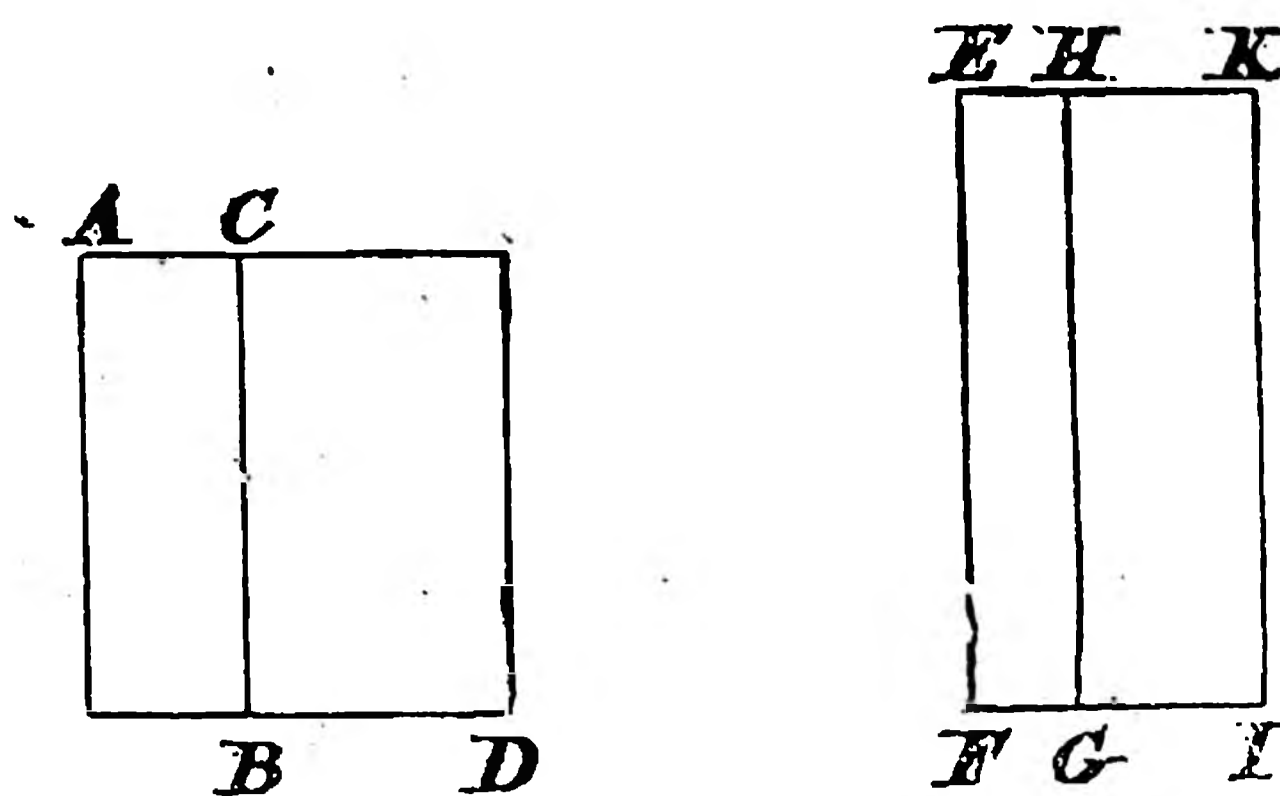
Случай 2. Пусть  $AB < CD$  (фиг. 388).

Если  $AB < CD$ , то въ силу предъидущаго построения  $EG < HI$  и  $EH < HK$ . Теперь можетъ случиться, что  $HK$  квадратитъ надъ  $EH$  на квадратъ, коего сторона соизмѣрима или несоизмѣрима съ  $HK$ .



Пусть будетъ первое: такъ какъ меньшая  $EH$  соизмѣрима съ  $EF$ , то  $EK$  есть *вторая биноміальная*, слѣдовательно, замѣтивъ, что  $EF$  есть раціональная прямая, (кн. 10, пред. 56) прямая квадратыщающая площадь  $EI$ , т. е.  $AD$  есть *первая бимедіальная*.

Фиг. 388.



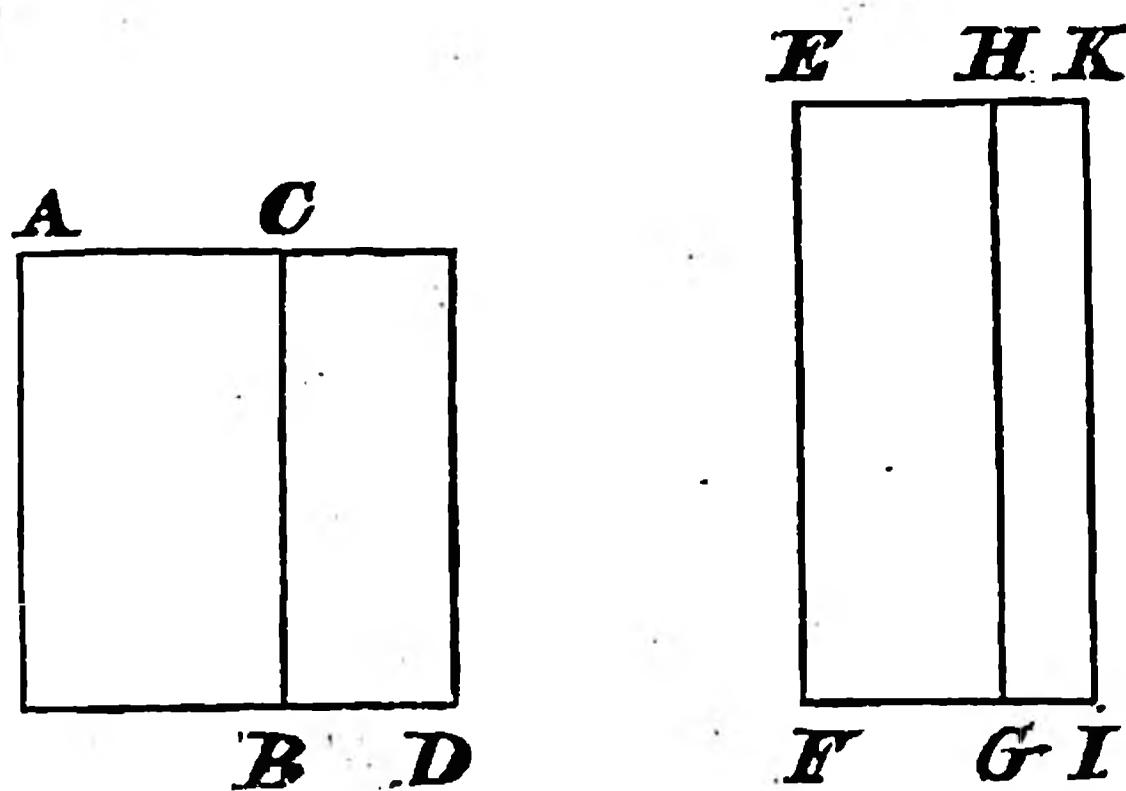
Пусть будетъ второе: такъ какъ меньшая  $EH$  соизмѣрима по длинѣ съ  $EF$ , то  $EK$  будетъ *пятая биноміальная*, слѣдовательно, какъ  $EF$  есть раціональная прямая, то (кн. 10, пред. 59) прямая, квадратыщающая площадь  $EI$ , т. е.  $AD$  будетъ *раціональная и средняя степенящая*.

*Предложеніе 73.* Если сложимъ двѣ несоизмѣримыя среднія площади  $AB$  и  $CD$ , то получимъ двѣ остальные ирраціональныя линіи: *вторую бимедіальную* или *вторую среднюю степенящую*.

*Доказат.* Прямоугольникъ  $AB$  можетъ быть или больше, или меньше прямоугольника  $CD$ . Слѣдуетъ доказать, что прямая, квадратыщающая цѣлую площадь  $AD$ , будетъ одна изъ сказанныхъ выше ирраціональностей.

*Случай 1.* Пусть  $AB > CD$  (фиг. 389).

Фиг. 389.



Изъ предыдущаго построенія видно, замѣчая что  $AB$  и  $CD$  суть среднія, что  $EG$  и  $HI$  суть также среднія площади. Такъ какъ  $EF$  есть раціональная прямая, то (кн. 10, пред. 23)  $EH$  и  $HK$  будутъ прямыя раціональныя и по длинѣ соизмѣримыя съ  $EF$ . Такъ какъ  $AB$  и  $CD$ , т. е.  $EG$  и  $HI$  несоизмѣримы, и мы имѣемъ:

$$EG:HI=EH:HK$$

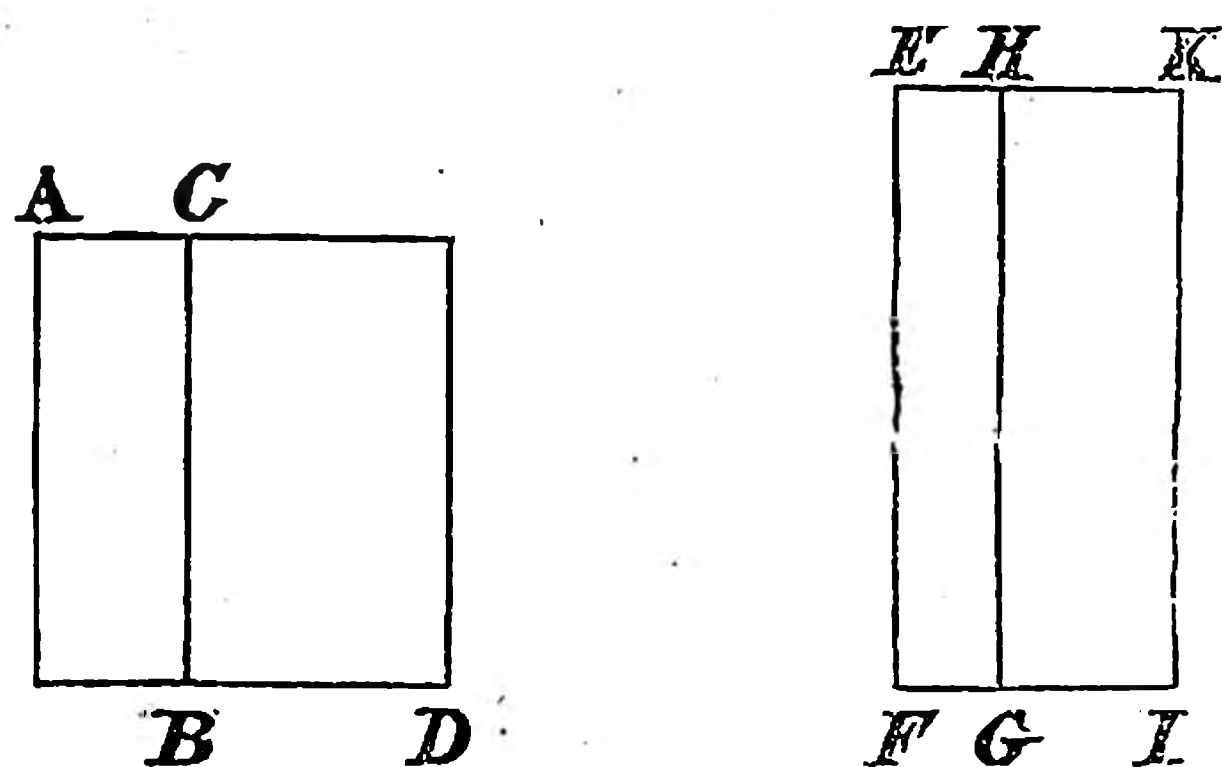
то  $ЕН$  и  $НК$  по длинѣ несоизмѣримы. Слѣдовательно  $ЕН$  и  $НК$  суть раціональныя прямыя, только въ степени соизмѣримыя, откуда  $ЕК$  есть биноміальная. Такъ какъ  $AB > CD$ , т. е.  $EG > HI$ , то  $ЕН > НК$ .

Теперь,  $ЕН$  можетъ квадратить надъ  $НК$  на квадратъ, коего сторона будетъ по длинѣ соизмѣрима или несоизмѣрима съ  $ЕН$ .

Пусть будетъ первое: такъ какъ ни  $ЕН$ , ни  $НК$  по длинѣ не соизмѣримы съ  $ЕК$ , то  $ЕК$  есть третья биноміальная, слѣдовательно, замѣчая, что  $ЕК$  есть раціональная прямая, то (кн. 10, пред. 57) прямая квадратыющая площадь  $ЕІ$ , т. е.  $AD$ , будетъ вторая средняя степенящая.

Случай 2. Пусть  $AB < CD$  (фиг. 390).

Фиг. 390.



Точно также можетъ быть доказано, что прямая, квадратыющая площадь  $ЕІ$ , т. е.  $AD$ , будетъ или вторая бимедіальная, или вторая средняя степенящая.

Слѣдствіе. Биноміальныя прямыя и слѣдующія за ними ирраціональныя не только отличны отъ среднихъ, но различаются и между собою.

Въ самомъ дѣлѣ, высота прямоугольника, построеннаго на раціональной прямой, коего площадь равна квадрату построенному на средней прямой, есть прямая раціональная несоизмѣримая съ основаніемъ (кн. 10, пред. 23). Если сторона квадрата есть биноміальная, то высота прямоугольника есть первая биноміальная (кн. 10, пред. 61). Если сторона квадрата есть первая бимедіальная, то высота прямоугольника есть вторая биноміальная (кн. 10, пред. 62). Если сторона квадрата есть вторая бимедіальная, то высота прямоугольника есть третья биноміальная (кн. 10, пред. 63). Если сторона квадрата есть наибольшая ирраціональная, то высота прямоугольника есть четвертая биноміальная (кн. 10, пред. 64). Если сторона квадрата есть раціональная и средняя степенящая, то высота прямоугольника есть пятая биноміальная (кн. 10, пред. 65). Если наконецъ сторона квадрата есть вторая средняя степенящая, то высота прямоугольника есть шестая биноміальная (кн. 10, пред. 66).

Изъ этого слѣдуетъ, что всѣ упомянутыя ирраціональныя прямыя отличаются отъ первой, такъ какъ эта послѣдняя даетъ для высоты прямо-

угольника *раціональную* прямую. Отличаются эти послѣднія между собою потому, что высоты для прямоугольниковъ суть *прямые биноміальныя различныхъ порядковъ*.

*Примѣчаніе 9.* Предъидущее изслѣдованіе относительно сложения шести ирраціональныхъ линій ведетъ къ слѣдующимъ семи отдѣламъ предложеній: первый отдѣлъ (пред. 37, 38, 39, 40, 41, 42) показываетъ происхожденіе или сложеніе этихъ линій; второй отдѣлъ (пред. 43, 44, 45, 46, 47, 48) показываетъ ихъ разложеніе въ единственной точкѣ; третій отдѣлъ (пред. 49, 50, 51, 52, 53, 54) показываетъ какъ шесть биноміальныхъ линій могутъ быть найдены; четвертый отдѣлъ (пред. 55, 56, 57, 58, 59, 60) показываетъ какія линіи квадраты прямоугольникъ, содержащійся между раціональною прямою и биноміальными различныхъ порядковъ; пятый отдѣлъ (пред. 61, 62, 63, 64, 65, 66) показываетъ какая будетъ высота прямоугольниковъ, построенныхъ на раціональной прямой, коихъ площадь равна площади квадратовъ, построенныхъ на биноміальныхъ различныхъ порядковъ; шестой отдѣлъ (пред. 67, 68, 69, 70, 71), показываетъ, что несоизмѣримыя линіи съ ними будутъ того-же рода и порядка; седьмой отдѣлъ (пред. 72 и 73) показываетъ, въ двухъ предложеніяхъ, ихъ происхожденіе и различіе.

Замѣтимъ еще, что половины каждаго изъ этихъ родовъ ирраціональностей, будучи соизмѣримы съ цѣлыми будутъ того же рода и порядка.

#### Шесть ирраціональностей происшедшихъ отъ вычитанія.

*Предложеніе 74.* Если вычтемъ одну изъ другой двѣ раціональныя, только въ степени соизмѣримыя прямая  $AB$  и  $BC$ , то остатокъ  $AC$  будетъ ирраціональная прямая и называется *вычетомъ* ( $\alpha\pi\omicron\tau\omicron\eta$ ) (фиг. 391).

*Доказат.* Такъ какъ  $AB$  и  $BC$  соизмѣримы только въ степени, и мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$AB : BC = \square AB : AB \cdot BC$$

Фиг. 391.



то площади  $\square AB$  и  $AB \cdot BC$  (кн. 10, пред. 10) будутъ несоизмѣримы. Но (кн. 10, пред. 16) площади  $\square AB$  и  $\square AB + \square BC$  соизмѣримы, а также соизмѣримы  $AB \cdot BC$  и  $2(AB \cdot BC)$ , слѣдовательно площадь  $\square AB + \square BC$  несоизмѣрима съ  $2(AB \cdot BC)$ . Но мы имѣемъ (кн. 2, пред. 7):

$$\square AB + \square BC = 2(AB \cdot BC) + \square AC$$



слѣдовательно (кн. 10, пред. 17) площади  $\square AB + \square BC$  и  $\square AC$  несоизмѣримы. Замѣчая теперь, что площадь  $\square AB + \square BC$  рациональна, мы видимъ что  $\square AC$  есть площадь ирраціональная, а слѣдовательно и  $AC$  есть прямая ирраціональная.

*Предложеніе 75.* Если вычтемъ одну изъ другой двѣ среднія прямыя  $AB$  и  $AC$ , только въ степени соизмѣримыя, содержащія рациональный прямоугольникъ, то остатокъ  $AC$  будетъ ирраціональный и называется *первымъ среднимъ вычетомъ* (фиг. 392).

Фиг. 392.



*Доказат.* Такъ какъ  $\square AB + \square BC$  есть площадь *средняя*, и  $2(AB \cdot BC)$  рациональная, то  $\square AB + \square BC$  и  $2(AB \cdot BC)$  несоизмѣримы. Но мы имѣемъ (кн. 2, пред. 7):

$$\square AB + \square BC = 2(AB \cdot BC) + \square AC$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 17) площади  $2(AB \cdot BC)$  и  $\square AC$  несоизмѣримы, но  $2(AB \cdot BC)$  есть рациональная площадь, слѣдовательно  $\square AC$  есть ирраціональная площадь, поэтому и прямая  $AC$  есть ирраціональная.

*Предложеніе 76.* Если вычтемъ одну изъ другой двѣ среднія прямыя  $AB$  и  $BC$  только въ степени соизмѣримыя, содержащія *средній* прямоугольникъ, то остатокъ  $AC$  будетъ ирраціональный и называется *вторымъ среднимъ вычетомъ* (фиг. 393).

*Доказат.* Пусть  $DI$  будетъ рациональная линія, на которой построимъ прямоугольникъ  $DE = DI \cdot DG = \square AB + \square BC$ , и прямоугольникъ  $DH = ID \cdot DF = 2(AB \cdot BC)$ . Откуда, замѣчая, что (кн. 2, пред. 7):

$$\square AB + \square BC = 2(AB \cdot BC) + \square AC$$

найдемъ, что:

$$FE = ID \cdot FG = \square AC.$$

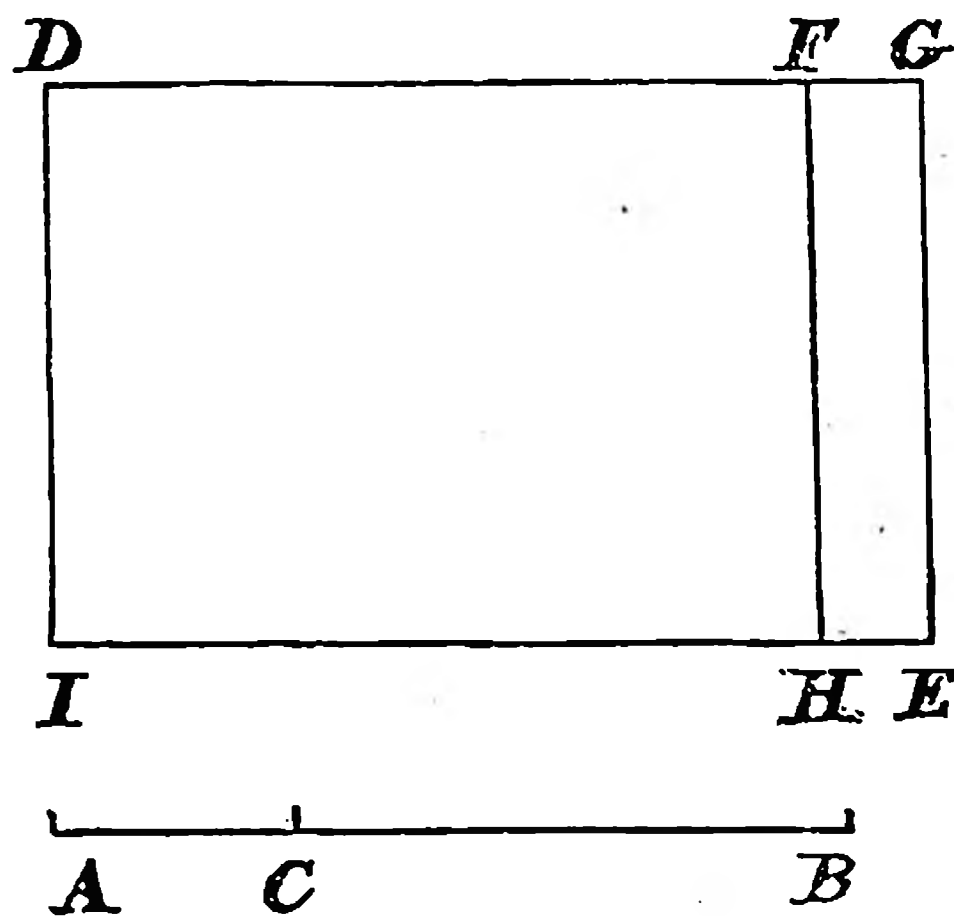
Такъ какъ  $\square AB + \square BC$ , т. е.  $DE$  есть *средняя* площадь, то (кн. 10, пред. 23) прямая  $DG$  рациональна и несоизмѣрима съ  $DI$ . Такъ какъ  $AB \cdot BC$  есть *средняя* площадь, то  $2(AB \cdot BC)$  будетъ также *средняя* площадь, слѣдовательно  $DH$  есть *средняя*, а потому (кн. 10, пред. 23) прямая  $DF$  рациональна и несоизмѣрима съ  $ID$ .

Такъ какъ прямыя  $AB$  и  $BC$  только въ степени соизмѣримы, слѣдовательно но длинѣ несоизмѣримы, то (кн. 6, пред. 1 и кн. 10, пред. 10)

площади  $\square AB$  и  $AB.BC$  несоизмѣримы. Но (кн. 10, пред. 16) площади  $\square AB$  и  $\square AB + \square BC$  соизмѣримы, а также (кн. 10, пред. 6) соизмѣримы и площади  $AB.BC$  и  $2(AB.BC)$ . Слѣдовательно  $\square AB + \square BC$  несоизмѣримы съ  $2(AB.BC)$ , т. е.  $DE$  несоизмѣрима съ  $DH$ . Но такъ какъ мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$DE:DH=DG:DF$$

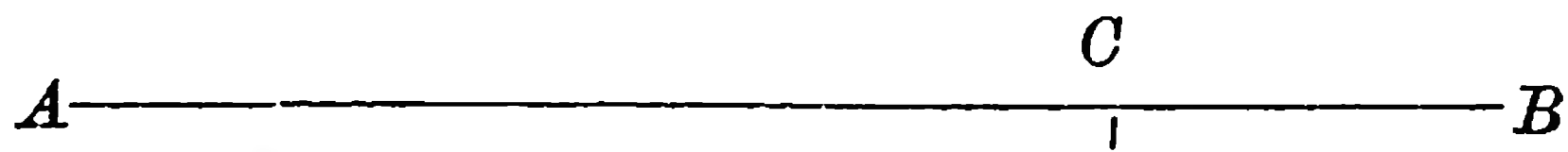
Фиг. 393.



то и прямая  $DG$  и  $DF$  также несоизмѣримы (кн. 10, пред. 10). Слѣдовательно  $DG$  и  $DF$  суть раціональныя прямая только въ степени соизмѣримыя, а потому (кн. 10, пред. 74)  $FG$  есть *вычетъ*. Замѣчая теперь, что прямая  $ID$  раціональна, мы видимъ (кн. 10, пред. 21), что площадь  $FE$ , т. е.  $\square AC$  ирраціональна, а слѣдовательно ирраціональна и прямая  $AC$ .

*Предложеніе 77.* Если двѣ прямая  $AB$  и  $BC$  въ степени несоизмѣримыя, содержація *среднюю* площадь и коихъ сумма квадратовъ есть раціональная площадь, вычтемъ одну изъ другой, то остатокъ  $AC$  будетъ ирраціональная прямая и называется *меньшею ирраціональною* (фиг. 394).

Фиг. 394.



*Доказат.* Такъ какъ площадь  $\square AB + \square BC$  раціональна, а  $AB.BC$  *средняя*, то площади  $\square AB + \square BC$  и  $AB.BC$  несоизмѣримы. Но (кн. 2, пред. 7) мы имѣемъ:

$$\square AB + \square BC = 2(AB.BC) + \square AC$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 17) площади  $\square AB + \square BC$  и  $\square AC$  несоизмѣримы. Но такъ какъ  $\square AB + \square BC$  есть площадь раціональная, то  $\square AC$  есть ирраціональная площадь, а слѣдовательно и прямая  $AC$  есть ирраціональная.

*Предложеніе 78.* Если двѣ прямая  $AB$  и  $BC$ , несоизмѣримыя въ сте-

пени, содержащая рациональный прямоугольник и коих сумма квадратов есть *средняя* площадь, вычтем одну из другой, то остаток  $AC$  будет иррациональная прямая и называется *составляющею* съ *рациональным* *прямоугольником* *цѣлую среднюю* площадь (фиг. 395).

Фиг. 395.



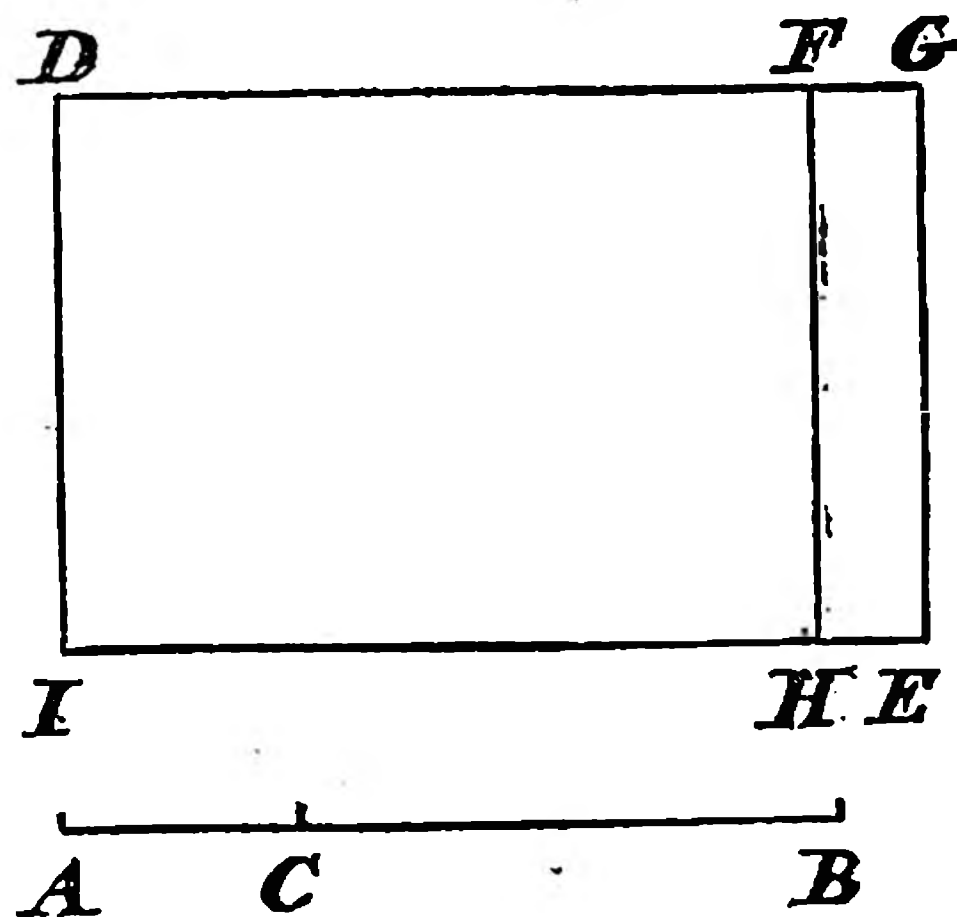
*Доказат.* Такъ какъ  $\square AB + \square BC$  есть площадь *средняя*, и  $2(AB \cdot BC)$  есть площадь *рациональная*, то площади  $\square AB + \square BC$  и  $2(AB \cdot BC)$  несоизмѣримы, слѣдовательно (кн. 10, пред. 17)  $\square AC$  и  $2(AB \cdot BC)$  также несоизмѣримы; но  $2(AB \cdot BC)$  есть площадь *рациональная*, слѣдовательно площадь  $\square AC$  будетъ иррациональная, а поэтому и прямая  $AC$  будетъ также иррациональная.

*Примѣчаніе 10.* Евклидъ остатокъ  $AC$  такъ называетъ потому, что прямоугольникъ равный  $\square AC$  съ *рациональным* *прямоугольником*  $2(AB \cdot BC)$  составляетъ *цѣлую среднюю* площадь  $\square AB + \square BC$ .

*Предложеніе 79.* Если двѣ прямыя  $AB$  и  $BC$ , несоизмѣримыя въ степени, коихъ сумма квадратовъ есть *средняя* площадь, содержащая *средній* *прямоугольникъ* несоизмѣримый съ суммою квадратовъ, вычтемъ одну изъ другой, то остатокъ  $AC$  будетъ иррациональная прямая и называется *составляющею* съ *среднимъ* *прямоугольником* *цѣлую среднюю* площадь (фиг. 396).

*Доказат.* Построимъ на *рациональной* *прямой*  $DI$  *прямоугольникъ*  $DE$  равный  $DI \cdot DG = \square AC + \square BC$ . Отнимемъ *прямоугольникъ*  $DH = DI \cdot DF = 2(AB \cdot BC)$ , то (кн. 2, пред. 7) остатокъ  $FE = DI \cdot FG$  будетъ равенъ  $\square AC$ . Слѣдовательно прямая  $AC$  квадратитъ площадь  $FE$ .

Фиг. 396.



Такъ какъ площадь  $\square AB + \square BC$ , т. е.  $DE$  есть *средняя*, то прямая  $DG$  (кн. 10, пред. 23) *рациональна* и несоизмѣрима по длинѣ съ  $DI$ .



Точно также, такъ какъ площадь  $DH$  средняя, то прямая  $DF$  раціональна и по длинѣ несоизмѣрима съ  $DI$ .

Такъ какъ площади  $\square AB + \square BC$  и  $2(AB \cdot BC)$  несоизмѣримы, то несоизмѣримы и площади  $DE$  и  $DH$ ; но мы имѣемъ:

$$DE : DH = DG : DF$$

откуда (кн. 10, пред. 10) прямые  $DG$  и  $DF$  по длинѣ несоизмѣримы. Слѣдовательно прямые  $DG$  и  $DF$  раціональны только въ степени соизмѣримы, откуда видимъ (кн. 10, пред. 74), что прямая  $FG$  есть *вычетъ*. Такъ какъ  $DI = FH$  есть раціональная прямая, то (кн. 10, пред. 21)  $FE$ , т. е.  $\square AC$  есть ирраціональная площадь, а потому и прямая  $AC$  есть ирраціональная.

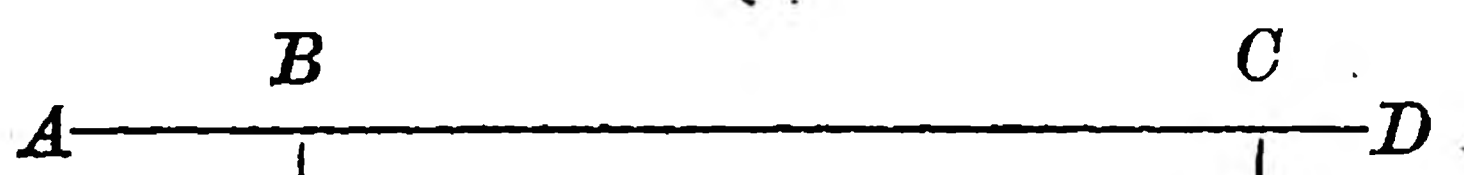
*Примѣчаніе 11.* Евклидъ потому такъ называетъ прямую  $AC$ , что:

$$\square AC + 2(AB \cdot BC) = \square AB + \square BC.$$

*Предложеніе 80.* Къ вычету  $AB$  можно прибавить одну только раціональную прямую  $BC$ , соизмѣримую только въ степени съ цѣлою прямою  $AC$  (фиг. 397).

*Доказат.* Положимъ, что къ  $AB$  прибавлена еще другая прямая  $BD$  и притомъ (кн. 10, пред. 74) такая, что прямые  $AD$  и  $BD$  раціональны только въ степени соизмѣримы. Такъ какъ мы имѣемъ (кн. 2, пред. 7):

Фиг. 397.



$$\square AD + \square BD = 2(AD \cdot BD) + \square AB$$

а также

$$\square AC + \square CB = 2(AC \cdot CB) + \square AB$$

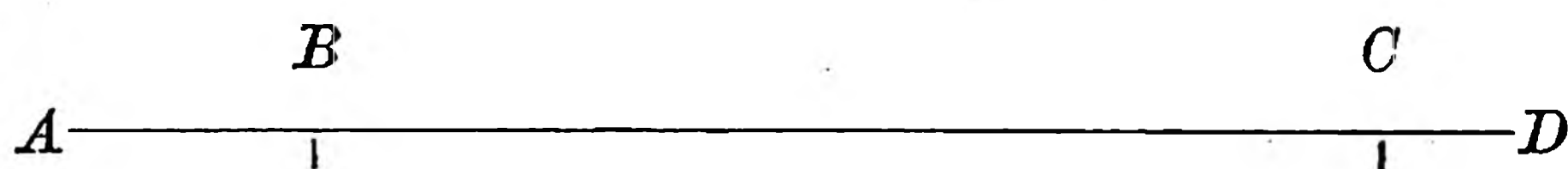
Откуда видимъ, что избытокъ суммы квадратовъ  $\square AD + \square BD$  надъ суммою квадратовъ  $\square AC + \square CB$ , равенъ избытку прямоугольника  $2(AD \cdot BD)$  надъ прямоугольникомъ  $2(AC \cdot CB)$  и какъ первый избытокъ раціональный, то и второй долженъ быть раціональный, что невозможно (кн. 10, пред. 27), такъ какъ (кн. 10, пред. 22) оба прямоугольника суть *среднія* площади. Слѣдовательно къ вычету  $AB$  можно прибавить только одну раціональную прямую  $BC$ , которая съ цѣлою  $AC$  только въ степени соизмѣрима.

*Предложеніе 81.* Къ первому среднему вычету  $AB$  можно прибавить

только одну *среднюю*  $BC$ , которая съ цѣлою  $AC$  только въ степени соизмѣрима и содержитъ съ нею раціональный прямоугольникъ (фиг. 398).

*Доказат.* Положимъ, что къ вычету  $AB$  прибавлена еще другая прямая  $BD$  такая, что  $AD$  и  $BD$  суть среднія (кн. 10, пред. 75), только въ степени соизмѣримыя прямыя, содержащія раціональный прямоугольникъ.

Фиг. 398.

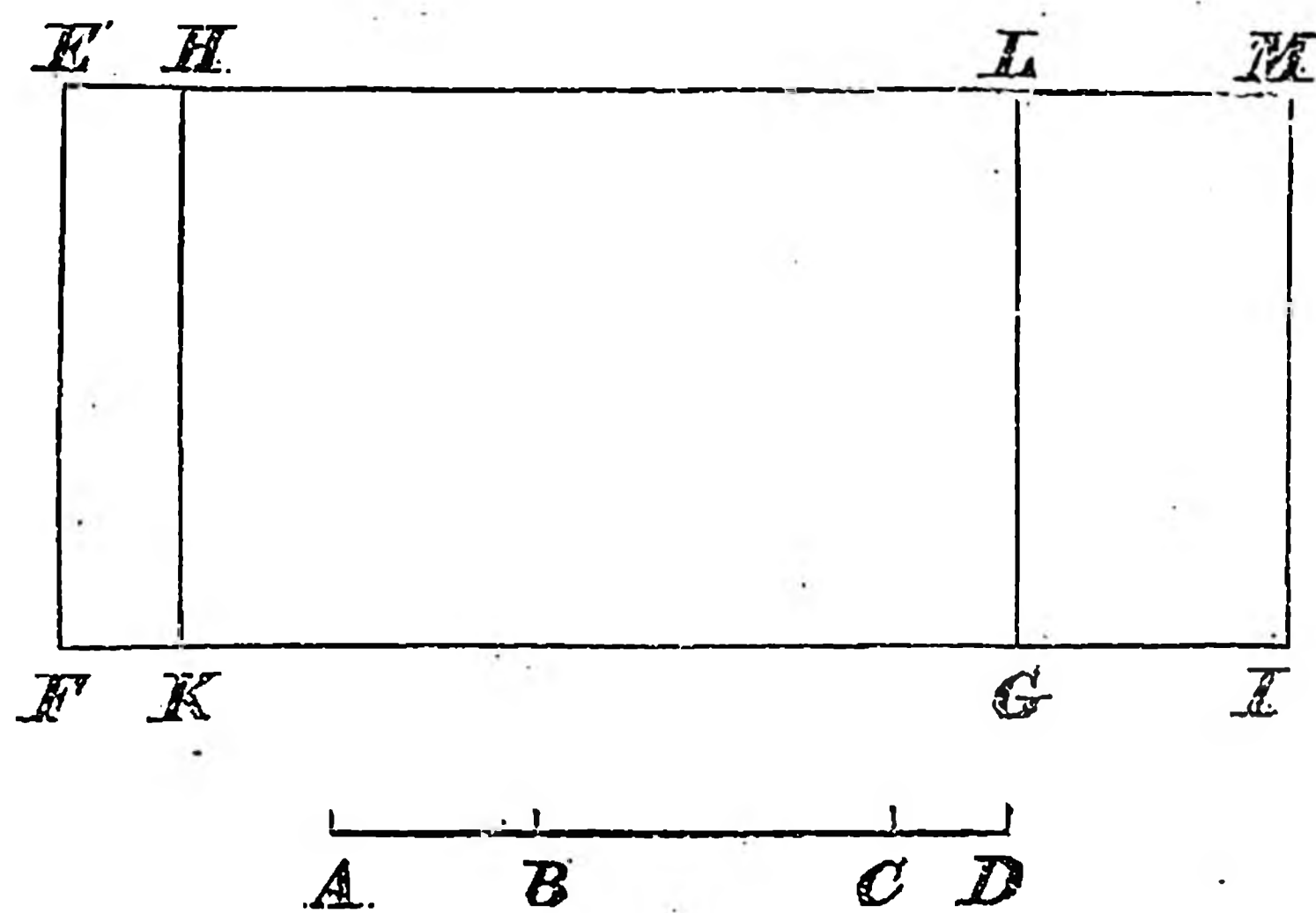


Здѣсь снова мы будемъ имѣть, что избытокъ суммы квадратовъ  $\square AD + \square DB$  надъ суммою квадратовъ  $\square AC + \square CB$  равенъ избытку прямоугольника  $2(AD \cdot DB)$  надъ  $2(AC \cdot CB)$ , но этотъ избытокъ раціональный, слѣдовательно и первый долженъ быть раціональный, что невозможно, такъ какъ сумма квадратовъ есть *средняя* площадь (кн. 10, пред. 27). Слѣдовательно къ *первому среднему вычету* можно прибавить только одну *среднюю* прямую, которая съ цѣлою только въ степени соизмѣрима и содержитъ съ нею раціональный прямоугольникъ.

*Предложеніе 82.* Ко *второму среднему вычету*  $AB$  можно придать только одну *среднюю* прямую  $BC$ , которая съ цѣлою  $AC$  соизмѣрима только въ степени и содержитъ съ нею *средній* прямоугольникъ (фиг. 399).

*Доказат.* Положимъ что къ вычету  $AB$  прибавлена еще другая прямая  $BD$  (кн. 10, пред. 76) соизмѣримая съ  $AD$  только въ степени и заключающая съ нею *средній* прямоугольникъ.

Фиг. 399.



На раціональной прямой  $EF$  построимъ прямоугольникъ  $EG = EF \cdot EL = \square AC + \square CB$ . Отнявъ отъ этого прямоугольника прямоугольникъ  $HG = EF \cdot HL = 2(AC \cdot CB)$ , то остатокъ  $EK = EF \cdot EH$  будетъ равенъ  $\square AB$ , слѣдовательно прямая  $AB$  квадратитъ площадь  $EK$ . Построимъ

еще на прямой  $EE$  прямоугольникъ  $EI=EF$ .  $EM=\square AD+\square DB$ , то, такъ какъ  $EK=\square AB$ , остатокъ  $HI$  будетъ равенъ  $2(AD \cdot DB)$ .

Такъ какъ прямыя  $AC$  и  $CB$  суть среднія, то  $\square AC+\square CB$ , т. е.  $EG$  есть площадь средняя, слѣдовательно (кн. 10, пред. 23) прямая  $EL$  рациональна и по длинѣ несоизмѣрима съ  $EF$ . Прямоугольникъ  $2(AC \cdot CB)$ , т. е.  $HG$  есть *средній*, слѣдовательно прямая  $HL$  рациональна и несоизмѣрима съ  $EF$ .

Такъ какъ  $AC$  и  $CB$ , только въ степени соизмѣримы, то онѣ по длинѣ несоизмѣримы. Но мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$AC:CB=\square AC:AC \cdot CB$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 10) площади  $\square AC$  и  $AC \cdot CB$  несоизмѣримы.

Но площади (кн. 10, пред. 16)  $\square AC$  съ  $\square AC+\square CB$  и  $AC \cdot CB$  съ  $2(AC \cdot CB)$  соизмѣримы, слѣдовательно площадь  $\square AC+\square CB$  несоизмѣрима съ площадью  $2(AC \cdot CB)$ , т. е.  $EG$  и  $HG$  несоизмѣримы. Но мы имѣемъ:

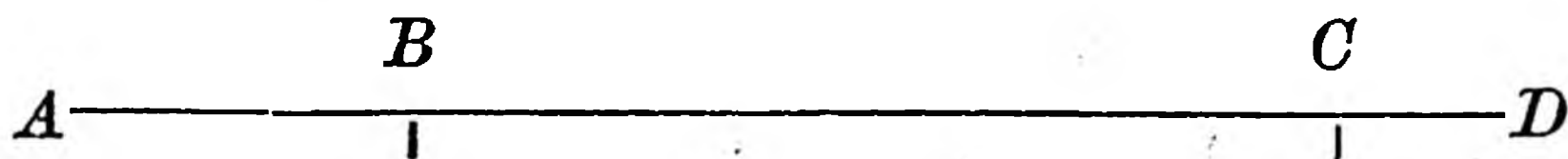
$$EG:HG=EL:HL$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 10) прямыя  $EL$  и  $HL$  несоизмѣримы по длинѣ. Изъ этого видимъ, что  $EL$  и  $HL$  суть рациональныя прямыя только въ степени соизмѣримыя, слѣдовательно (кн. 10, пред. 74)  $EH$  есть вычетъ прибавленный къ  $HL$ . Точно также можетъ быть доказано, что къ ней прибавлена прямая  $HM$ , что невозможно (кн. 10, пред. 80), такъ какъ  $HL$  и  $HM$  съ цѣлою только въ степени соизмѣримы. Слѣдовательно ко *второму среднему вычету* можно прибавить только одну *среднюю*, которая съ цѣлою только въ степени соизмѣрима и которая съ нею содержитъ *средній* прямоугольникъ.

*Предложеніе 83.* Къ меньшей ирраціональной  $AB$  можно прибавить только одну прямую  $BC$ , которая съ цѣлою  $AC$  несоизмѣрима въ степени, коей квадратъ съ квадратомъ цѣлой составляетъ рациональную площадь и которая съ цѣлой содержитъ *средній* прямоугольникъ (фиг. 400).

*Доказат.* Положимъ, что можно прибавить еще одну  $DB$  къ  $AB$ , такую что (кн. 10, пред. 77)  $AD$  и  $DB$  несоизмѣримы въ степени, что  $\square AB+\square DB$  есть рациональная площадь и что наконецъ  $2(AD \cdot DB)$  есть площадь *средняя*.

Фиг. 400.



Такъ какъ избытокъ  $\square AD+\square DB$  надъ  $\square AC+\square CB$  равенъ изъ-

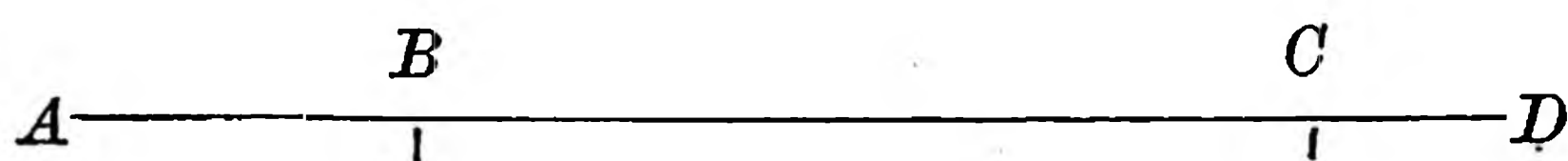


бытку  $2(AD \cdot DB)$  надъ  $2(AC \cdot CB)$ ; а избытокъ квадратовъ есть раціональная площадь, слѣдовательно и избытокъ прямоугольниковъ долженъ быть площадь раціональная, что невозможно, потому, что эти прямоугольники суть *средніе* (кн. 10, пред. 27). Слѣдовательно къ *меньшей ирраціональной* можно прибавить только одну прямую съ сказанными свойствами.

*Предложеніе 84.* Къ составляющей съ раціональнымъ прямоугольникомъ *цѣлую среднюю площадь*  $AB$  можно прибавить только одну прямую  $BC$ , которая съ цѣлою  $AC$  въ степени несоизмѣрима, коей квадратъ съ квадратомъ цѣлой составляетъ *среднюю площадь* и которая съ цѣлою содержитъ раціональный прямоугольникъ (фиг. 401).

*Доказат.* Положимъ, что можно прибавить къ  $AB$  еще одну  $DB$ , такую, что (кн. 10, пред. 78)  $AD$  и  $DB$  въ степени несоизмѣримы, что  $\square AD + \square DB$  есть *средняя площадь* и что наконецъ  $2(AD \cdot DB)$  есть раціональный прямоугольникъ.

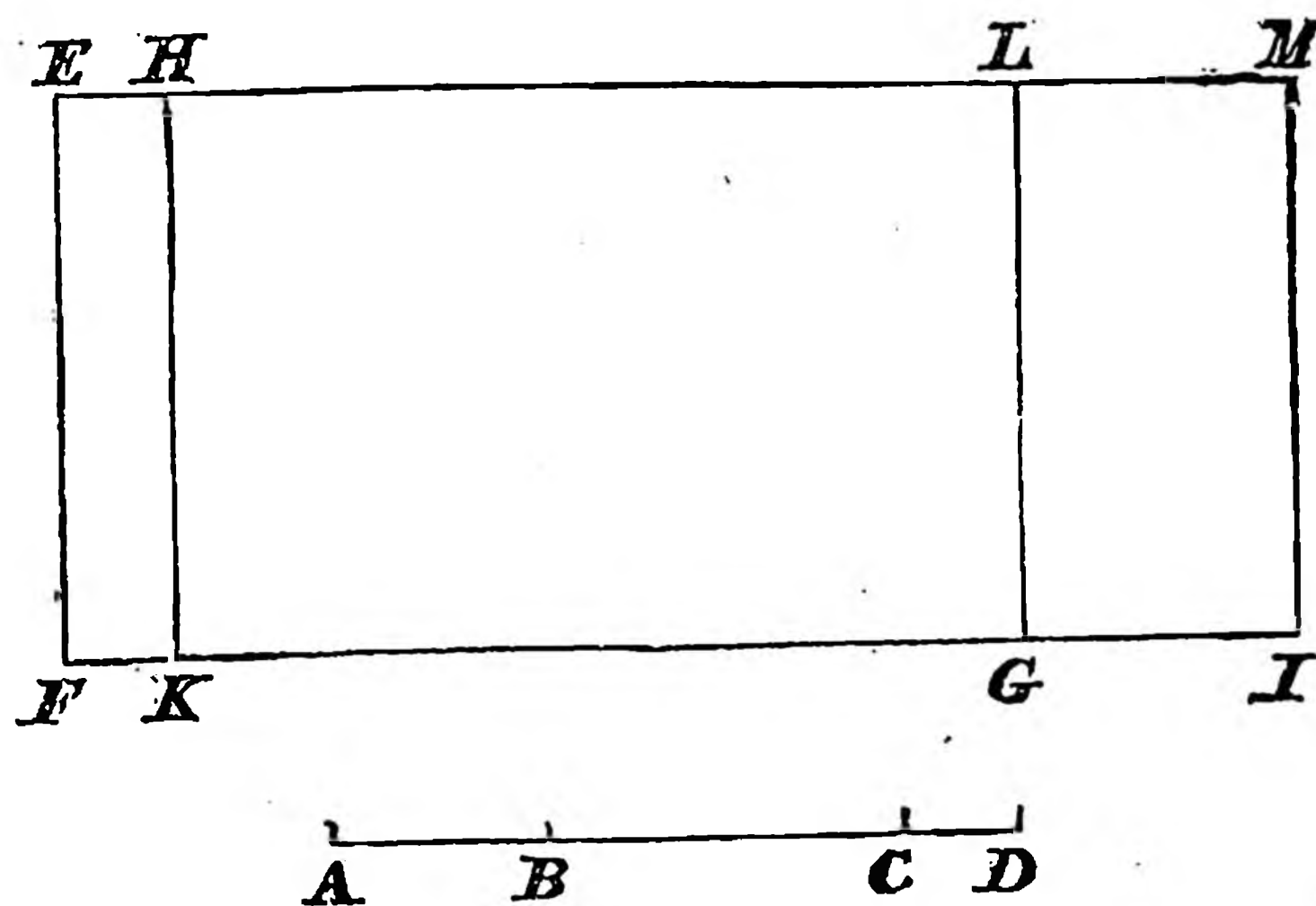
Фиг. 401.



Здѣсь опять избытокъ  $\square AD + \square DB$  надъ  $\square AC + \square CB$  равенъ избытку  $2(AD \cdot DB)$  надъ  $2(AC \cdot CB)$ ; и такъ какъ избытокъ прямоугольниковъ есть раціональная площадь, то и избытокъ квадратовъ долженъ быть площадь раціональная, что невозможно, потому что квадраты суть *средніе* (кн. 10, пред. 27). Слѣдовательно къ  $AB$  можно прибавить только одну  $BC$ , имѣющую выше сказанныя свойства.

*Предложеніе 85.* Къ составляющей съ *среднимъ* прямоугольникомъ *цѣлую среднюю площадь* (кн. 10, пред. 79)  $AB$  можно прибавить только одну прямую  $BC$ , которая съ цѣлою  $AC$  въ степени несоизмѣрима и коей квадратъ съ квадратомъ цѣлой составляетъ *среднюю площадь* и наконецъ которая съ цѣлой содержитъ *средній* прямоугольникъ, несоизмѣримый съ *среднею площадью* квадратовъ (фиг. 402).

Фиг. 402.



*Доказат.* Положимъ, что къ  $AB$  можетъ быть прибавлена еще дру-

гая прямая  $BD$ , такая (кн. 10, пред. 79), что  $AD$  и  $DB$  въ степени несоизмѣримы, что площадь  $\square AD + \square DB$  есть *средняя* и наконецъ что  $2(AD \cdot DB)$  есть также *средняя* площадь и несоизмѣримая съ площадью  $\square AD + \square DB$ .

Построимъ на раціональной прямой  $EF$  прямоугольникъ  $EG = EF \cdot EL = \square AC + \square CB$ . Отымемъ отъ этого прямоугольника прямоугольникъ  $HG = EF \cdot HL = 2(AC \cdot CB)$ , то остатокъ  $EK = \square AB$ , слѣдовательно  $AB$  квадратитъ площадь  $EK$ . Построимъ наконецъ прямоугольникъ  $EI = EF \cdot EM = \square AD + \square DB$ , то, такъ какъ  $EK = \square AB$ , мы будемъ имѣть  $HI = 2(AD \cdot DB)$ . Такъ какъ  $\square AC + \square CB$ , т. е.  $EG$  есть *средняя* площадь, а прямая  $EF$  раціональна, то прямая  $EL$  раціональна и по длинѣ несоизмѣрима съ  $EF$ . Такъ какъ  $2(AC \cdot CB) = HG$  есть площадь *средняя*, то  $HL$  раціональна и по длинѣ несоизмѣрима съ  $EF$ . Но площади  $\square AC + \square CB$  и  $2(AC \cdot CB)$  несоизмѣримы, т. е. несоизмѣримы  $EG$  съ  $HG$ , слѣдовательно несоизмѣримы по длинѣ и прямая  $EL$  и  $HL$ . Слѣдовательно прямая  $EL$  и  $HL$  раціональны только въ степени соизмѣримы, откуда видимъ, что (кн. 10, пред. 74)  $EH$  есть *вычетъ*, къ которому прибавлена  $HL$ . Точно также можетъ быть показано, что къ нему прибавлена и  $HM$ , что невозможно, такъ какъ прямая  $HL$  и  $HM$  съ цѣлою только въ степени соизмѣримы (кн. 10, пред. 80). Слѣдовательно къ  $AB$  можно прибавить только одну прямую  $BC$  съ сказанными выше свойствами.

#### Шесть порядковъ вычетовъ.

1. Вычетъ къ которому прибавлена такая прямая, что цѣлая квадратитъ надъ прибавленной, на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ цѣлою, называется *первымъ вычетомъ*, если цѣлая прямая по длинѣ соизмѣрима съ данною раціональною прямою.

2. Онъ называется *вторымъ вычетомъ*, если данная раціональная прямая по длинѣ соизмѣрима съ прибавленной.

3. Онъ называется *третьимъ вычетомъ*, если ни цѣлая, ни прибавленная по длинѣ не соизмѣримы съ данною раціональною прямою.

4. Вычетъ къ которому прибавлена такая прямая, что цѣлая прямая квадратитъ надъ прибавленною, на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ цѣлою, называется *четвертымъ вычетомъ*, если цѣлая прямая по длинѣ соизмѣрима съ данною раціональною прямою.

5. Онъ называется *пятымъ вычетомъ*, если прибавленная по длинѣ соизмѣрима съ данною раціональною прямою.

6. Онъ называется *шестымъ вычетомъ*, если ни первое, ни второе не имѣютъ мѣста.

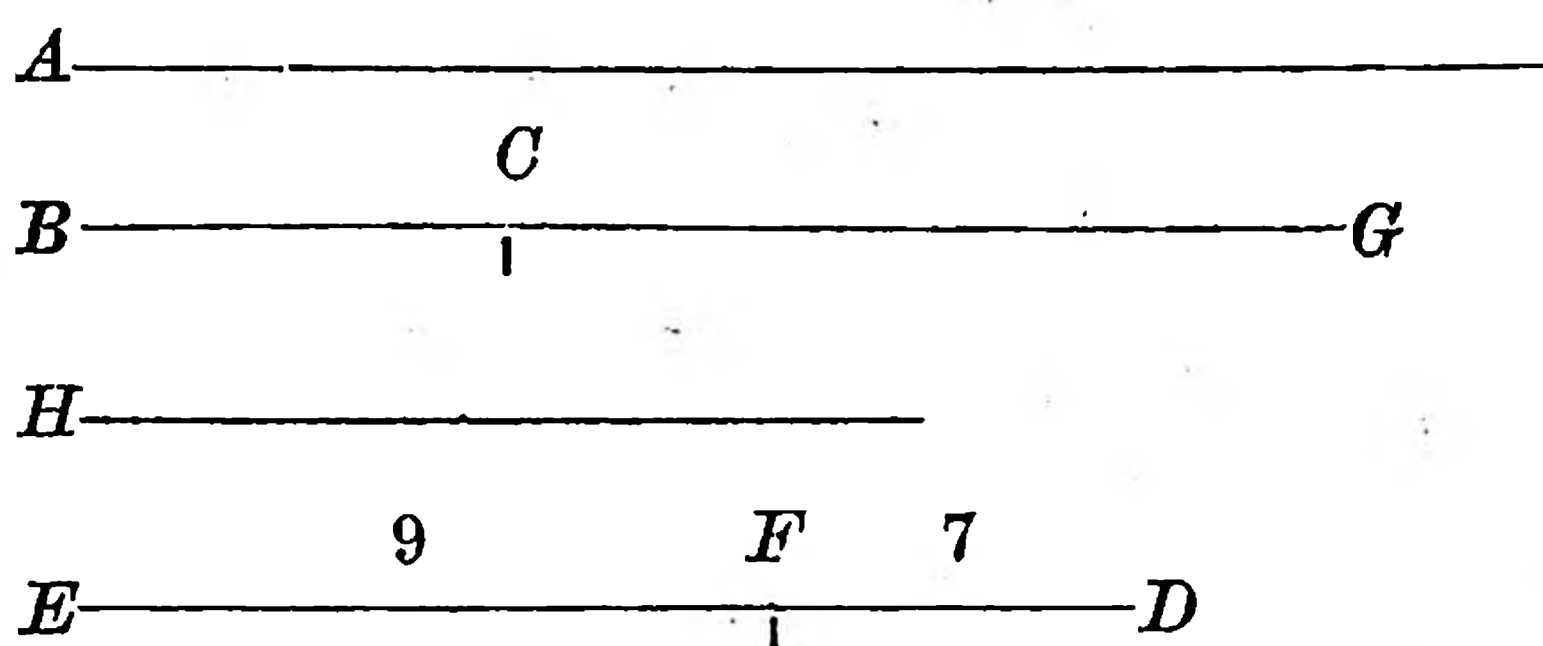
*Предложеніе 86.* Найти первый вычетъ (фиг. 403).

*Рѣшеніе.* Пусть  $A$  будетъ данная раціональная прямая и  $BG$  другая прямая по длинѣ соизмѣримая съ  $A$ . Возьмемъ (кн. 10, пред. 30, слѣд.) два квадратныя числа  $ED$  и  $EF$ , коихъ разность  $FD$  не есть число квадратное и сдѣлаемъ:

$$ED : DF = \square BG : \square GC \quad (1)$$

я говорю, что  $BG - GC = BC$  есть *первый вычетъ*.

Фиг. 403.



Прямая  $BG$  соизмѣрима съ  $A$ , слѣдовательно она раціональна. Изъ пропорціи (1) слѣдуетъ (кн. 10, пред. 6), что  $\square BG$  соизмѣримъ съ  $\square GC$ . Но  $\square BG$  есть раціональная площадь, слѣдовательно  $\square GC$ , а потому и  $GC$  раціональны; но (кн. 10, пред. 9) прямая  $BG$  и  $GC$  несоизмѣримы, слѣдовательно  $BG$  и  $GC$  суть раціональныя прямая, только въ степени соизмѣримыя, а потому (кн. 10, пред. 74)  $BC$  есть *вычетъ*.

Пусть теперь будетъ  $\square BG - \square GC = \square H$ , то въ силу пропорціи (1) (кн. 5, пред. 19), мы будемъ имѣть:

$$DE : EF = \square BG : \square H$$

слѣдовательно прямая  $BG$  и  $H$  по длинѣ соизмѣримы (кн. 10, пред. 9). Слѣдовательно  $BG$  квадратитъ надъ  $GC$ , на квадратъ, коего сторона  $H$  соизмѣрима съ  $BG$ , а какъ  $BG$  по длинѣ соизмѣрима съ  $A$ , то  $BC$  и есть *первый вычетъ*.

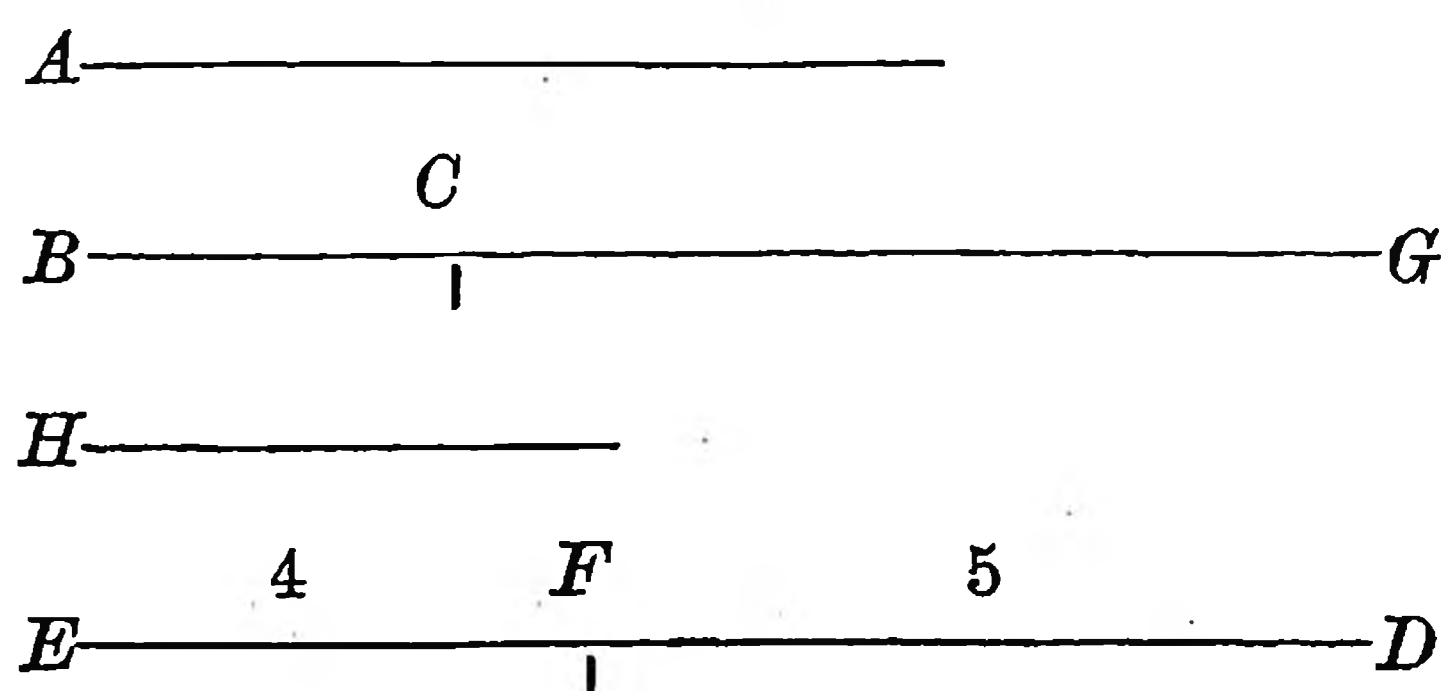
*Предложеніе 87.* Найти второй вычетъ (фиг. 404)?

*Рѣшеніе.* Пусть  $A$  будетъ данная раціональная прямая, а  $GC$  другая по длинѣ соизмѣримая съ  $A$ . Возьмемъ снова два квадратныхъ числа  $DE$  и  $EF$ , коихъ разность не есть число квадратное и сдѣлаемъ:

$$FD : DE = \square CG : \square GB \quad (1)$$

я говорю, что  $BG - GC = BC$  есть *второй вычет*.

Фиг. 404.



Такъ какъ прямая  $GC$  соизмѣрима съ  $A$ , то она рациональна. Но изъ пропорціи (1) (кн. 10, пред. 6) слѣдуетъ, что площади  $\square CG$  и  $\square GB$  соизмѣримы, а какъ площадь  $\square CG$  рациональна, то рациональна и площадь  $\square GB$ , а слѣдовательно рациональна и прямая  $GB$ , но (кн. 10, пред. 9) прямые  $CG$  и  $GB$  по длинѣ несоизмѣримы. Слѣдовательно прямые  $CG$  и  $GB$  рациональны, только въ степени соизмѣримы, а потому (кн. 10, пред. 74)  $BC$  есть *вычетъ*.

Положимъ теперь  $\square GB - \square GC = \square H$ , то изъ пропорціи (1) (кн. 5, пред. 4 и кн. 5, пред. 19) мы имѣемъ:

$$ED : EF = \square GB : \square H$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 9)  $GB$  и  $H$  соизмѣримы. Откуда видимъ, что  $GB$  квадратитъ надъ  $GC$ , на квадратъ, коего сторона  $H$  по длинѣ соизмѣрима съ  $GC$ , но  $GC$  есть прямая соизмѣримая съ  $A$ , слѣдовательно  $BC$  есть *второй вычетъ*.

*Предложеніе 88.* Найти третій вычетъ (фиг. 405)?

*Рѣшеніе.* Пусть  $A$  будетъ данная рациональная прямая. Возьмемъ три числа  $E$ ,  $BC$  и  $CD$ , которые между собою не относятся какъ квадратныя числа, но  $BC$  и  $BD$  относятся какъ числа квадратныя. Сдѣлаемъ:

$$E : BC = \square A : \square FG \quad (1)$$

и

$$BC : CD = \square FG : \square GH$$

я говорю, что  $FG - GH = FH$  есть *третій вычетъ*.

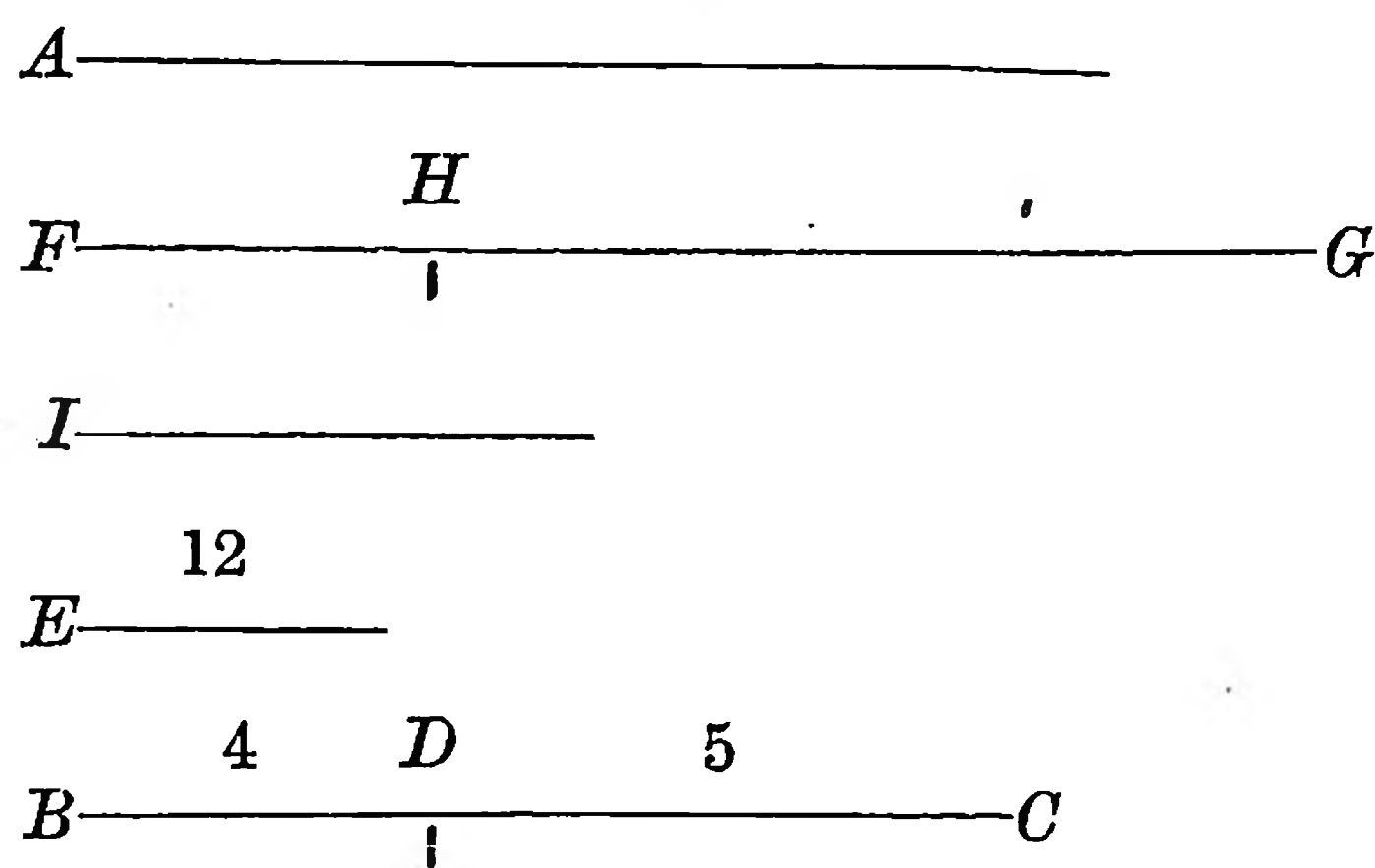
Изъ пропорціи (1) слѣдуетъ (кн. 10, пред. 6), что площади  $\square A$  и  $\square FG$  соизмѣримы, но (кн. 10, пред. 9) прямые  $A$  и  $FG$  по длинѣ несоизмѣримы, слѣдовательно  $FG$  есть рациональная прямая.

Изъ пропорціи (2) слѣдуетъ, что площади  $\square FG$  и  $\square GH$  соизмѣ-



римы, но прямая  $FG$  и  $GH$  по длинѣ несоизмѣримы. Слѣдовательно прямая  $FG$  и  $GH$  рациональны и только въ степени соизмѣримы. Откуда видимъ (кн. 10, пред. 74), что  $FH$  есть *вычетъ*.

Фиг. 405.



Изъ пропорцій (1) и (2) слѣдуетъ (кн. 5, пред. 22):

$$E:CD=\square A:\square GH$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 9) прямая  $A$  и  $GH$  по длинѣ несоизмѣримы. Но было показано, что  $A$  и  $FG$  по длинѣ несоизмѣримы, слѣдовательно ни  $GH$ , ни  $FG$  съ прямою  $A$  по длинѣ не соизмѣримы.

Положимъ теперь  $\square FG - \square GH = \square I$ , то изъ пропорціи (2) найдемъ (кн. 5, пред. 19):

$$CB:BD=\square FG:\square I$$

откуда (кн. 10, пред. 9)  $FG$  и  $I$  по длинѣ соизмѣримы. Слѣдовательно  $FG$  квадратитъ надъ  $GH$ , на квадратъ, коего сторона  $I$  по длинѣ соизмѣрима съ  $FG$ , но было показано, что прямая  $GH$  и  $FG$  по длинѣ несоизмѣримы съ  $A$ , слѣдовательно  $FH$  есть *третій вычетъ*.

*Предложеніе 89.* Найти четвертый вычетъ (фиг. 406)?

*Рѣшеніе.* Пусть данная рациональная прямая будетъ  $A$  и другая  $BG$  по длинѣ соизмѣрима съ  $A$ . Возьмемъ два числа  $DF$  и  $FE$ , коихъ сумма  $DE$  ни къ одному изъ нихъ не относится какъ квадратныя числа и сдѣлаемъ:

$$DE:EF=\square BG:\square CG \quad (1)$$

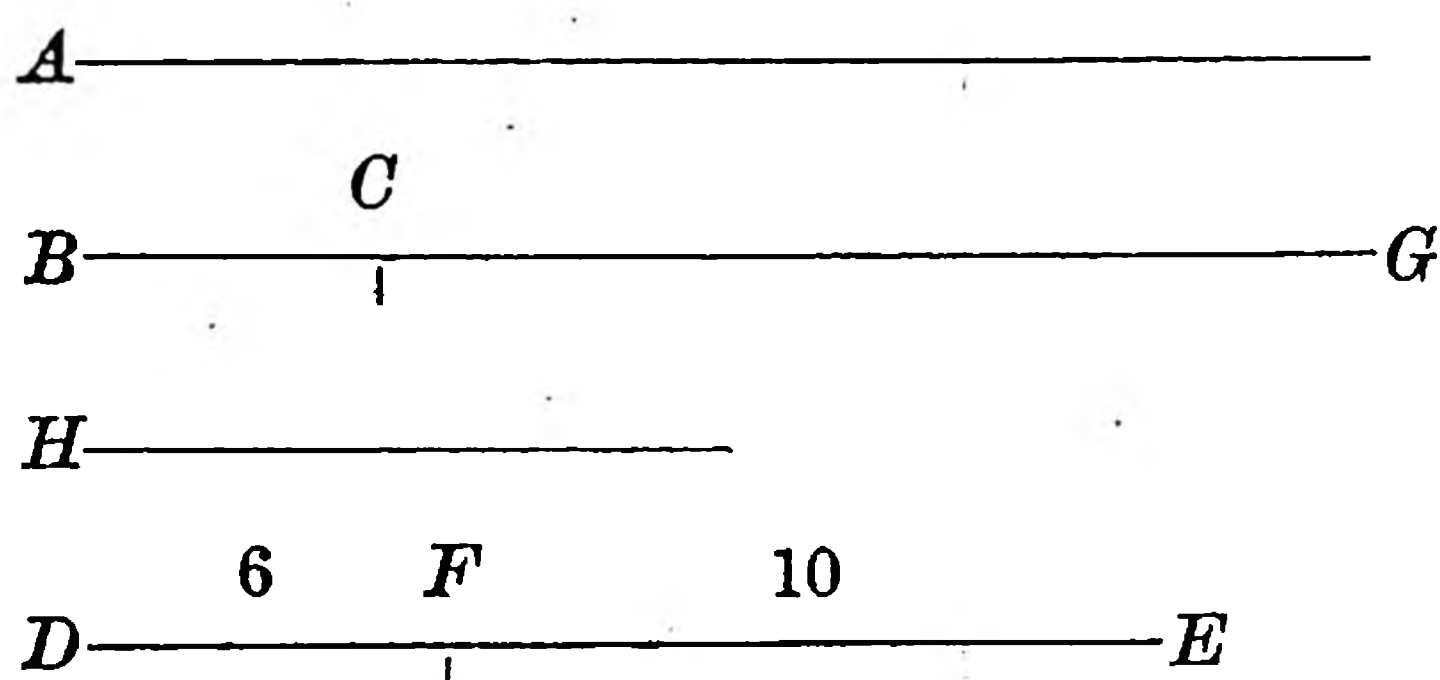
я говорю, что  $BG - GC = BC$  есть *четвертый вычетъ*.

Такъ какъ  $BG$  по длинѣ соизмѣрима съ  $A$ , то  $BG$  рациональна, а потому  $\square BG$  есть рациональная площадь.

Изъ пропорціи (1) (кн. 10, пред. 6) слѣдуетъ, что  $\square BG$  соизмѣримъ

съ  $\square CG$ , слѣдовательно  $\square CG$  есть раціональная площадь, а потому прямая  $CG$  раціональна, но (кн. 10, пред. 9)  $BG$  и  $GC$  по длинѣ несоизмѣримы. Откуда видимъ, что прямыя  $BG$  и  $GC$  раціональны только въ степени соизмѣримы, а потому (кн. 10, пред. 74) прямая  $BC$  есть *вычетъ* (кн. 10, пред. 74).

Фиг. 406.



Положимъ теперь  $\square BG - \square CG = \square H$ , то изъ пропорціи (1) мы будемъ имѣть (кн. 5, пред. 19):

$$DE : DF = \square BG : \square H$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 9) прямыя  $BG$  и  $H$  по длинѣ несоизмѣримы. Слѣдовательно прямая  $BG$  квадратитъ надъ  $CG$  на квадратъ, коего сторона  $H$  по длинѣ несоизмѣрима съ  $BG$ ; но  $BG$  и  $A$  соизмѣримы, слѣдовательно  $BC$  есть *четвертый вычетъ*.

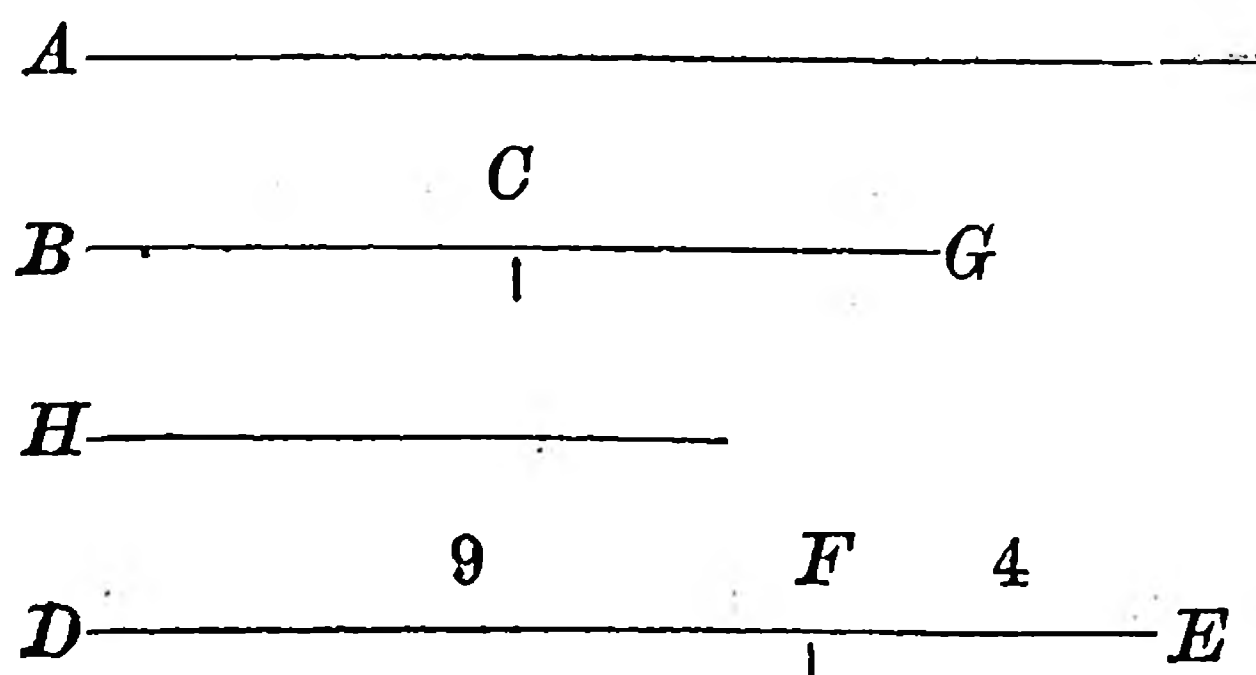
*Предложеніе 90.* Найти пятый вычетъ (фиг. 407)?

*Рѣшеніе.* Пусть данная раціональная прямая будетъ  $A$  и другая  $EG$  по длинѣ соизмѣрима съ  $A$ . Возьмемъ два числа  $DF$  и  $FE$ , коихъ сумма ни къ одному изъ нихъ не относится какъ квадратное число и сдѣлаемъ:

$$FE : ED = \square CG : \square GB \quad (1)$$

я говорю, что  $BG - GC = BC$  есть *пятый вычетъ*.

Фиг. 407.



Такъ какъ прямая  $CG$  соизмѣрима съ  $A$ , слѣдовательно  $CG$ , а потому

и  $\square CG$  суть раціональныя величины, то изъ пропорціи (1) слѣдуетъ (кн. 10, пред. 6), что  $\square CG$  соизмѣримъ съ  $\square GB$ , слѣдовательно  $\square GB$  а потому и прямая  $GB$  раціональна; но (кн. 10, пред. 9)  $CG$  и  $GB$  по длинѣ несоизмѣримы. Откуда видимъ, что  $GB$  и  $GC$  суть раціональныя прямая только въ степени соизмѣримы, слѣдовательно (кн. 10, пред. 74)  $BC$  есть *вычетъ*.

Положимъ теперь,  $\square BG - \square GC = \square H$ , то изъ пропорціи (1) (кн. 5, пред. 4, слѣд. и пред. 19) мы имѣемъ:

$$ED : DF = \square BG : \square H$$

откуда прямая  $GB$  и  $H$  по длинѣ несоизмѣримы. слѣдовательно  $GB$  квадратитъ надъ  $GC$  на квадратъ, коего сторона  $H$ , по длинѣ несоизмѣрима съ  $GB$ , но было показано, что  $CG$  соизмѣрима съ  $A$ , слѣдовательно  $BC$  есть *пятый вычетъ*.

*Предложеніе 91.* Найти *шестой вычетъ* (фиг. 408)?

*Рѣшеніе.* Пусть данная раціональная прямая будетъ  $A$ . Возьмемъ три числа  $E$ ,  $BC$  и  $CD$ , которыя не относятся между собою какъ квадратныя числа и сдѣлаемъ:

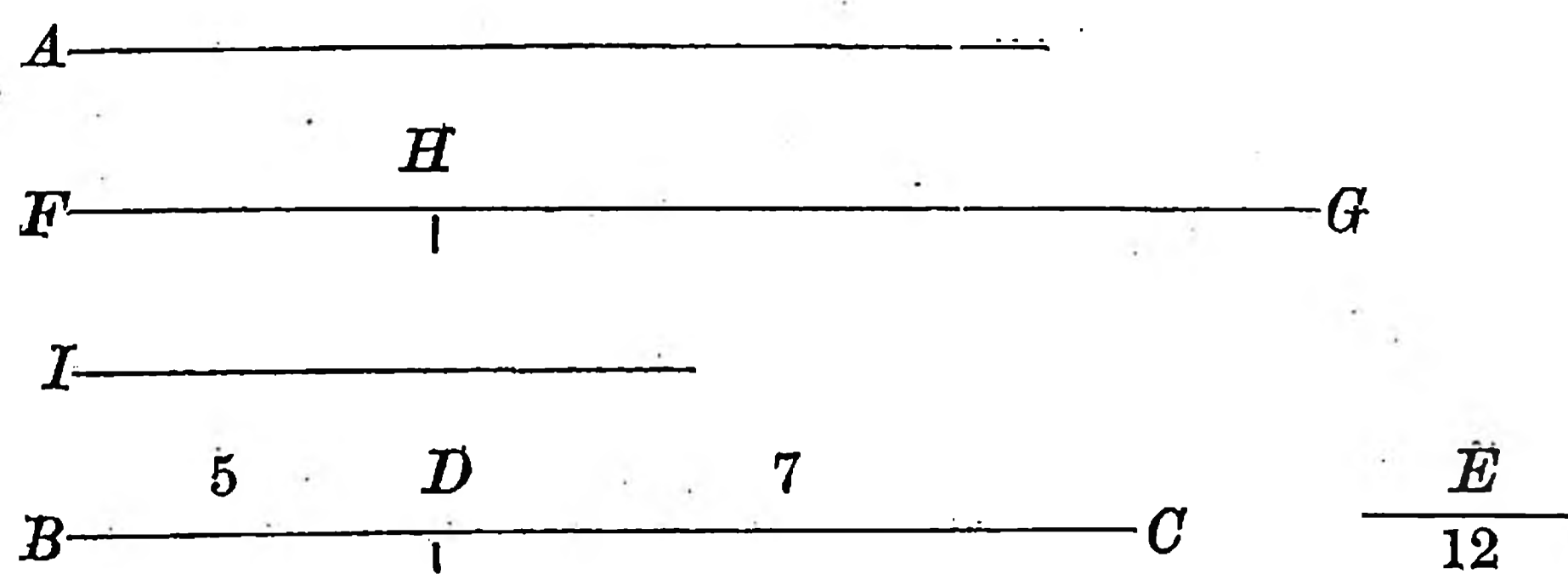
$$E : BC = \square A : \square FG \quad (1)$$

и

$$BC : CD = \square FG : \square GH \quad (2)$$

я говорю, что  $FG - GH = FH$  и будетъ *шестой вычетъ*.

Фиг. 408.



Изъ пропорціи (1) слѣдуетъ (кн. 10, пред. 6), что  $\square A$  и  $\square FG$  соизмѣримы, слѣдовательно  $\square FG$ , а также и  $FG$  раціональны, но  $A$  и  $FG$  (кн. 10, пред. 9) по длинѣ несоизмѣримы.

Изъ пропорціи (2) слѣдуетъ (кн. 10, пред. 6), что  $\square FG$  и  $\square GH$  соизмѣримы, слѣдовательно, какъ  $FG$  есть раціональная прямая, то  $\square GH$ , а также и  $GH$  раціональны, но (кн. 10, пред. 9)  $FG$  и  $GH$  по длинѣ несоизмѣримы. Откуда видимъ, что прямая  $FG$  и  $GH$  раціональны только въ степени соизмѣримы, слѣдовательно (кн. 10, пред. 74)  $FH$  есть *вычетъ*.

Изъ пропорцій (1) и (2) слѣдуетъ (кн. 5, пред. 22):

$$E:CD=\square A:\square GH$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 9)  $A$  и  $GH$  по длинѣ несоизмѣримы, но было показано, что  $A$  несоизмѣрима съ  $FG$ . Слѣдовательно какъ  $FG$  такъ и  $GH$  по длинѣ несоизмѣримы съ  $A$ .

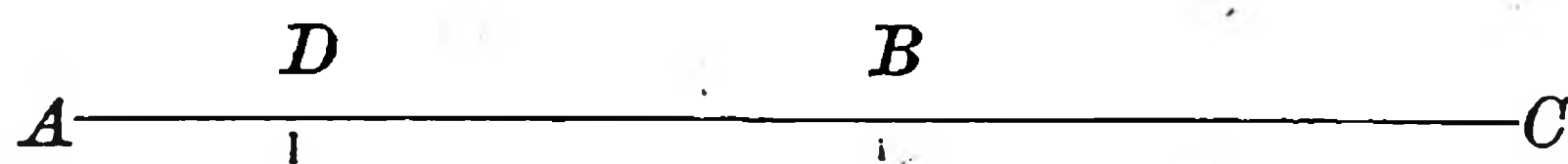
Положимъ теперь,  $\square FG - \square GH = \square I$ , то изъ пропорціи (2) найдемъ (кн. 5, пред. 19):

$$CB:BD=\square FG:\square I$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 9) прямая  $FG$  и  $I$  по длинѣ несоизмѣримы. Слѣдовательно  $FG$  квадратитъ надъ  $GH$  на квадратъ, коего сторона  $I$  по длинѣ несоизмѣрима съ  $FG$ , но было показано, что  $FG$  и  $GH$  по длинѣ несоизмѣримы съ  $A$ , слѣдовательно  $GH$  есть *шестой вычетъ*.

*Замѣчаніе.* Легко можно показать, что предъидущіе вычеты могутъ быть найдены гораздо проще (фиг. 409).

Фиг. 409.



Положимъ что требуется найти *первый вычетъ*, для этого возьмемъ (кн. 10, пред. 49) *первую биноміальную*  $AC$ , коей большій членъ есть  $AB$  и сдѣлаемъ  $BC=BD$ , то  $AD$  и будетъ *первый вычетъ*. Въ самомъ дѣлѣ,  $AB$  и  $BC$ , т. е.  $AB$  и  $BD$  суть раціональныя прямая только въ степени соизмѣримыя, и  $AC$  квадратитъ надъ  $BC$ , а слѣдовательно и надъ  $BD$ , на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ  $AC$ , но  $AB$  по длинѣ несоизмѣрима съ данною раціональною прямою, слѣдовательно  $AD$  есть *первый вычетъ*.

Точно также можно найти остальные пять вычетовъ, если каждый разъ взять биноміальную того же порядка, т. е. вторую, третью и т. д. какого порядка желаемъ найти вычетъ.

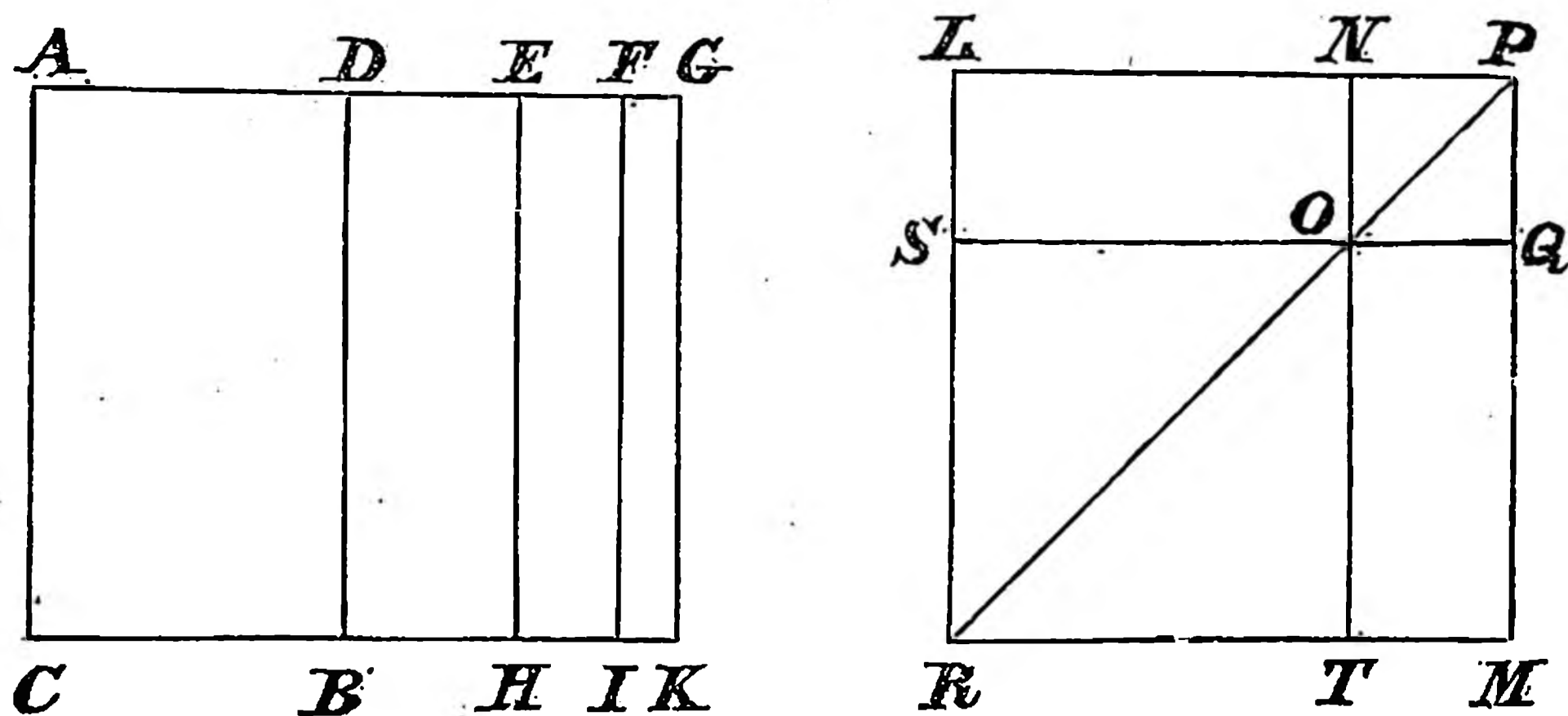
*Предложеніе 92.* Прямоугольникъ, заключающійся между раціональною прямою  $AC$  и первымъ вычетомъ  $AD$ , квадратитъ *первый вычетъ* (фиг. 410).

*Доказат.* Прибавимъ къ первому вычету  $AD$  прямую  $DG$ , то  $AG$  и  $GD$  будутъ (кн. 10, пред. 47) раціональны только въ степени соизмѣримыя прямая. Цѣлая прямая  $AG$  по длинѣ соизмѣрима съ  $AC$  и  $AG$  квадратитъ надъ  $DG$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ  $AG$ . Раздѣлимъ прямую  $DG$  въ точкѣ  $E$  пополамъ и на  $AG$  построимъ



прямоугольникъ  $AF.FG$  равный  $\square EG$  или равный  $\frac{1}{4} \square DG$  и кромѣ того, чтобы его дополненіе былъ квадратъ, то (кн. 10, пред. 18)  $AF$  и  $FG$  будутъ прямыя по длинѣ соизмѣримыя. Чрезъ точки  $E, F$  и  $G$  проведемъ прямыя  $EH, FI, GK$  параллельныя прямой  $AC$ . Сдѣлаемъ (кн. 2, пред. 14) квадратъ  $LM=AI$  и  $NQ=FK$ , оба будутъ на одной діагонали  $PR$  (кн. 6, пред. 26) и дополнимъ фигуру.

Фиг. 410.



Теперь надобно доказать, что въ фигурѣ  $LPMR$  прямая  $LN$  квадратитъ площадь  $AB$  и есть *вычетъ*.

1. Такъ какъ  $AF.FG=\square EG$ , то (кн. 6, пред. 17):

$$AF:EG=EG:FG$$

но (кн. 6, пред. 1):

$$AF:EG=AI:EK \text{ и } EG:FG=EK:FK$$

слѣдовательно:

$$AI:EK=EK:FK.$$

Откуда видимъ, что  $EK$  есть средне-пропорціональная площадь между  $AI$  и  $FK$ , т. е. между  $LM$  и  $NQ$ , которая (кн. 10, пред. 54, слѣд.) есть  $MN$ , слѣдовательно  $MN=EK$ . Но мы имѣемъ (кн. 1, пред. 37)  $EK=DH$  и (кн. 1, пред. 43)  $MN=LQ$ . Откуда видимъ, что  $DK$ —гномону  $SOTMPL+NQ$ . Но  $AK=LM+NQ$ , слѣдовательно  $AB=SF=\square LN$ . Слѣдовательно  $LN$  квадратитъ площадь  $AB$ .

2. По предыдущему прямыя  $AF$  и  $FG$  по длинѣ соизмѣримы, слѣдовательно (кн. 10, пред. 16)  $AG$ , а также (кн. 10, пред. 12) и соизмѣримая съ нею  $AC$  по длинѣ соизмѣрима съ  $AF$  и  $FG$ . Но  $AC$  есть раціональная прямая, слѣдовательно и прямыя  $AF$  и  $FG$ , а также (кн. 10, пред. 20)  $AI$  и  $FK$  раціональны. Но мы имѣемъ  $AI=LM$  и  $FK=NQ$ , слѣдовательно  $LM$  и  $NQ$ , а потому  $LP$  и  $PN$  раціональны.

Такъ какъ прямыя  $DE$  и  $EG$  по длинѣ соизмѣримы, то  $DG$  съ  $DE$

и  $GE$  по длинѣ соизмѣримы, но  $DG$  есть раціональная прямая несоизмѣримая по длинѣ съ  $AC$ , поэтому  $DE$  и  $EG$  раціональны по длинѣ несоизмѣримыя съ  $AC$ , слѣдовательно (кн. 10, пред. 22)  $DH$  и  $EK$  суть средніе прямоугольники. Но  $DH = EK = MN = LQ$ , слѣдовательно площадь  $LQ$  есть также средняя. Было показано, что  $NQ$  есть раціональная площадь, слѣдовательно  $LQ$  и  $NQ$  несоизмѣримы. Но мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1).

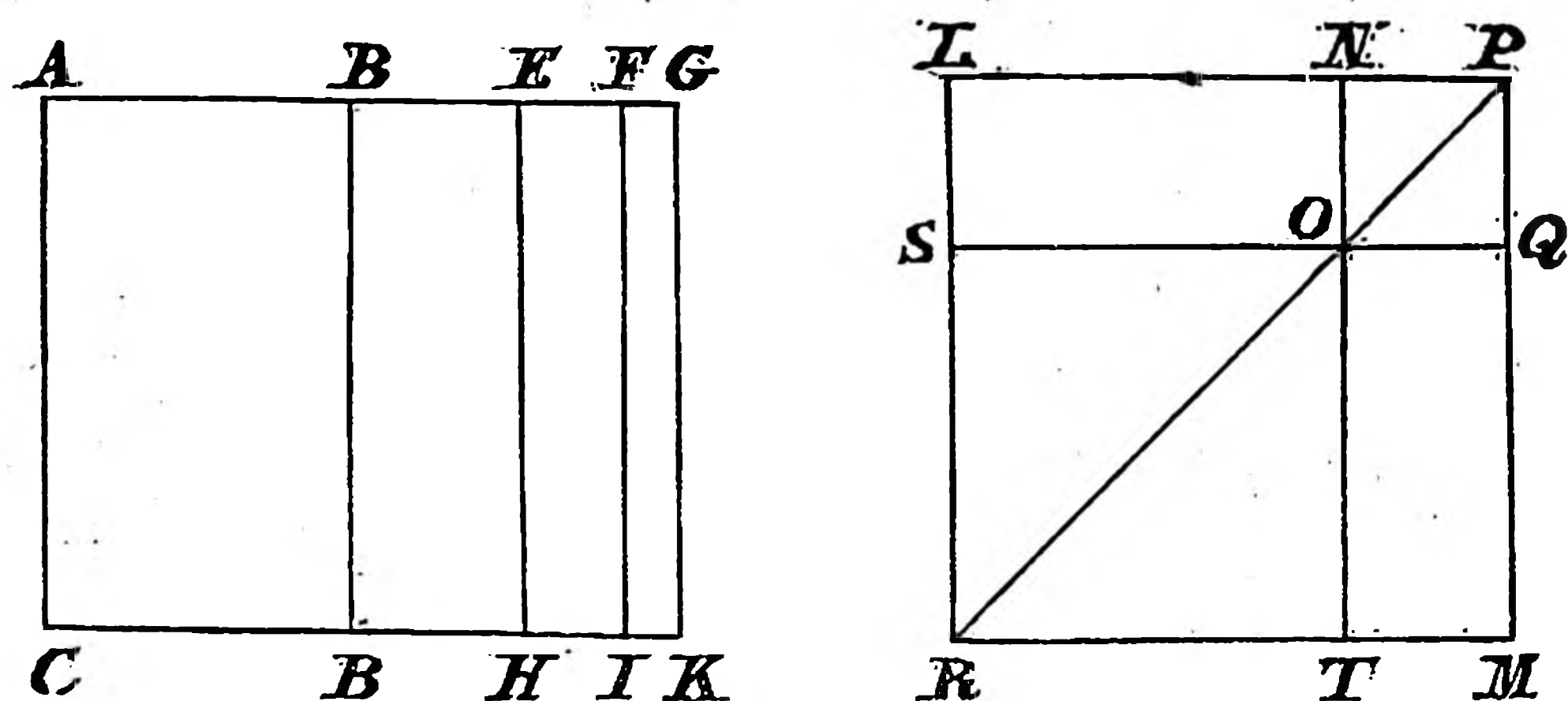
$$LQ : NQ = LP : PN$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 10)  $LP$  и  $PN$  по длинѣ несоизмѣримы. слѣдовательно  $LP$  и  $PN$  раціональны только въ степени соизмѣримыя прямая, откуда видимъ (кн. 10, пред. 74), что прямая  $LN$ , квадратищая площадь  $AB$ , есть *вычетъ*.

*Предложеніе 93.* Первый вычетъ квадратище прямоугольникъ  $AB$ , заключенный между раціональною прямою  $AC$  и вторымъ вычетомъ  $AD$  (фиг. 411).

*Доказат.* Прибавимъ ко второму вычету  $AD$  прямую  $DG$ , то прямая  $AG$  и  $GD$  будутъ раціональны только въ степени соизмѣримы, прибавленная  $DG$  соизмѣрима по длинѣ съ  $AC$  и  $AG$  квадратище надъ  $DG$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ  $AG$ . Раздѣлимъ прямую  $DG$  въ точкѣ  $E$  пополамъ и сдѣлаемъ тоже построение, что и въ предыдущемъ предложеніи, то найдемъ, какъ и тамъ, что прямая  $LN$  въ фигурѣ  $LRMP$  квадратище площадь  $AB$ . Остается только показать, что  $LN$  есть *первый средний вычетъ*.

Фиг. 411.



Такъ какъ (кн. 10, пред. 18) прямая  $AF$  и  $FG$  по длинѣ соизмѣримы, то  $AG$  соизмѣрима по длинѣ съ  $AF$  и  $FG$ , но  $AG$  есть раціональная прямая и соизмѣрима по длинѣ съ  $AC$ , слѣдовательно  $AF$  и  $FG$  раціональны и по длинѣ соизмѣримы съ  $AC$ , откуда (кн. 10, пред. 22)  $AI$  и  $FK$  суть *среднія* площади. Но мы имѣемъ  $AI = LM$  и  $FK = NQ$ , слѣдовательно  $LM$  и  $NQ$  суть также *среднія* площади и соизмѣримыя, слѣдо-

вательно прямая  $LP$  и  $PN$  суть *среднія* только въ степени соизмѣримыя.

Такъ какъ  $DE$  по длинѣ соизмѣрима съ  $EG$ , то  $DG$  по длинѣ соизмѣрима съ  $DE$  и  $EG$ , но  $DG$  по длинѣ соизмѣрима съ  $AC$ , слѣдовательно  $DE$  и  $EG$  раціональны и по длинѣ соизмѣримы съ  $AC$ , откуда также  $DH$  и  $EK$  раціональны, но  $EK=MN=LQ$ , слѣдовательно и площадь  $LQ$  раціональна. Но мы показали, что  $\square PN=NQ$  есть площадь *средняя*, слѣдовательно  $LQ$  несоизмѣрима съ  $NQ$ . Но:

$$LQ : NQ = LP : PN$$

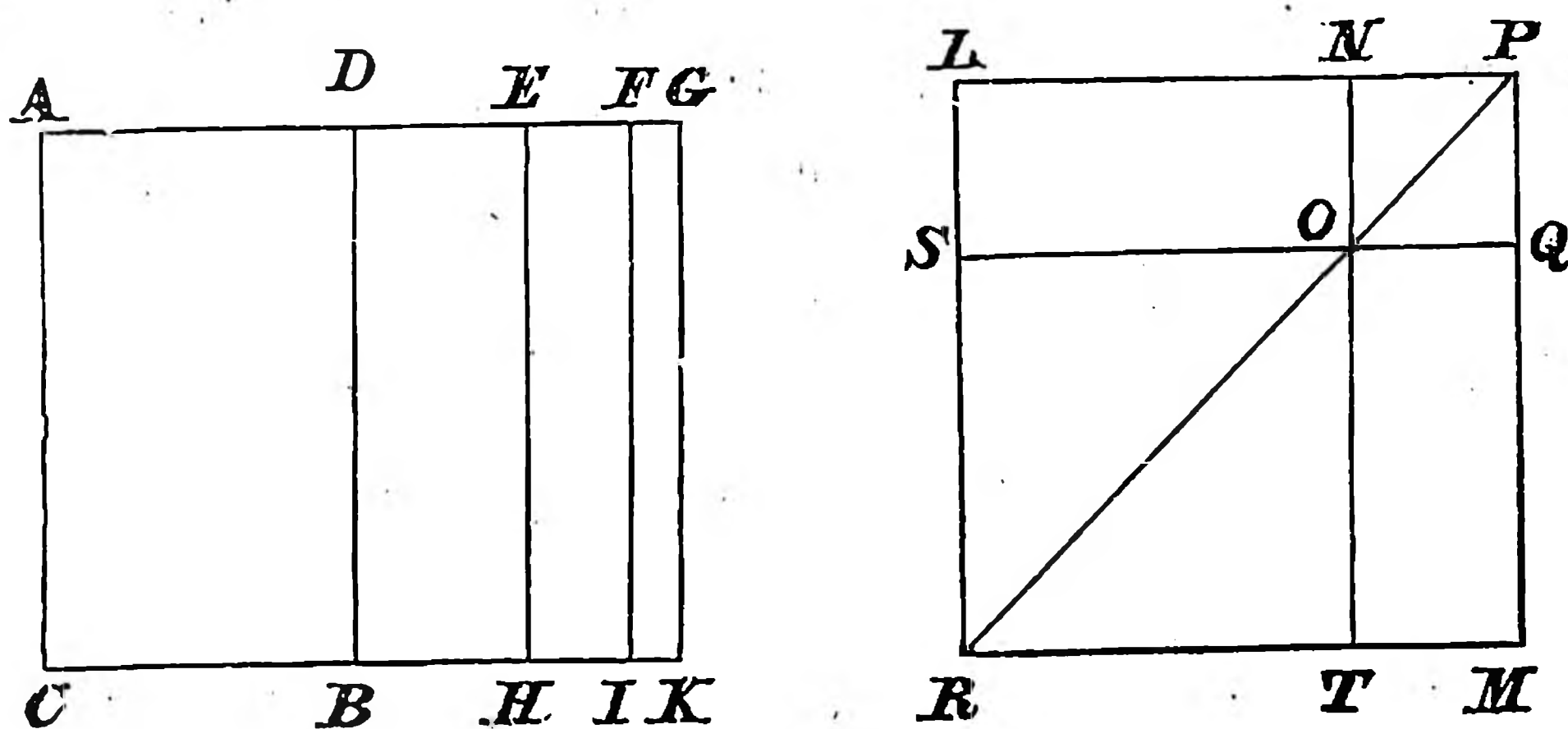
слѣдовательно  $LP$  и  $PN$  суть *среднія* прямая только въ степени соизмѣримыя, но такъ какъ площадь  $LQ$  раціональна, то раціональна и площадь  $LP.PN$ .

Откуда видимъ, что прямая  $LN$ , квадратищая площадь  $AB$  (кн. 10, пред. 75) есть *первый средній вычетъ*.

*Предложеніе 94.* Второй средній вычетъ, квадратище площадь  $AB$  прямоугольника, заключеннаго между раціональною прямою  $AC$  и третьимъ вычетомъ  $AD$  (фиг. 412).

*Доказат.* Прибавимъ къ  $AD$  прямую  $DG$ , то  $AG$  и  $GD$  будутъ раціональны, только въ степени соизмѣримыя прямая и какъ  $AG$ , такъ и  $GD$  будутъ по длинѣ несоизмѣримы съ данною раціональною прямою и кромѣ этого  $AG$  квадратище надъ  $GD$ , на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ  $AG$ . Раздѣлимъ прямую  $DG$  въ точкѣ  $E$  пополамъ и сдѣлаемъ тоже построеніе какъ и выше, то точно также какъ и тамъ можетъ быть доказано, что  $LN$  въ фигурѣ  $LRMP$  квадратище площадь  $AB$ . Останется только показать, что  $LN$  есть *второй средній вычетъ*.

Фиг. 412.



Такъ какъ (кн. 10, пред. 18) прямая  $AF$  и  $FG$  по длинѣ соизмѣримы, а также и прямая  $AI$  и  $FK$ . Но, какъ  $AI=\square LP$  и  $FK=\square NP$ , то площади  $\square LP$  и  $\square NP$  соизмѣримы. Такъ какъ  $AF$  по длинѣ соизмѣрима съ  $FG$ , то  $AG$  по длинѣ соизмѣрима съ  $AF$  и  $FG$ ; но прямая  $AG$

раціональна и несоизмѣрима по длинѣ съ  $AC$ , слѣдовательно  $AF$  и  $FG$  раціональны и по длинѣ несоизмѣримы съ  $AC$ . Откуда видимъ (кн. 10, пред. 22), что  $AI$  и  $FK$  суть *среднія* площади. Но мы имѣемъ  $AI = \square LP$ ,  $FK = \square NP$ , слѣдовательно  $\square LP$  и  $\square NP$  суть площади *среднія*, а потому  $LP$  и  $NP$  суть *среднія* прямыя.

Такъ какъ  $DE$  по длинѣ соизмѣрима съ  $EG$ , а также  $DG$  по длинѣ соизмѣрима съ  $DE$  и  $EG$ , а  $DG$  раціональна и по длинѣ несоизмѣрима съ  $AC$ , слѣдовательно  $DE$  и  $EG$  раціональны и по длинѣ несоизмѣримы съ  $AC$ , откуда видимъ, что площади  $DH$  и  $EK$  суть *среднія*.

Прямая  $AG$  по длинѣ несоизмѣрима съ  $GD$ , а  $AG$  по длинѣ соизмѣрима съ  $AF$  и  $GD$  съ  $GE$ , то (кн. 10, пред. 13)  $AF$  по длинѣ несоизмѣрима съ  $GE$ . Но мы имѣемъ:

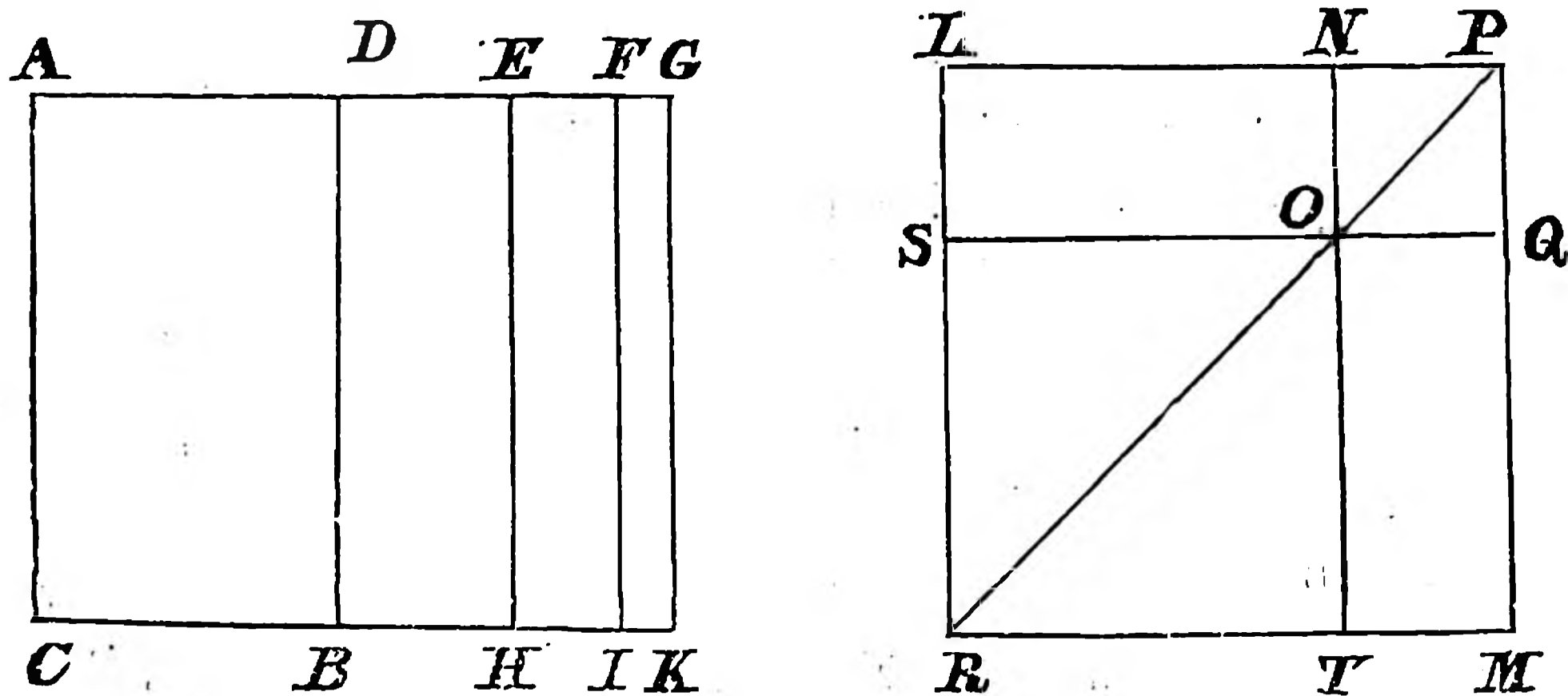
$$AF:GE=AI:EK$$

слѣдовательно  $AI$  и  $EK$  несоизмѣримы. Мы имѣемъ также:  $EK=MN==LP.PN$ , слѣдовательно  $\square LP$  несоизмѣримъ съ  $LP.PN$ , и слѣдовательно  $LP$  и  $PN$  по длинѣ несоизмѣримы. Откуда видимъ что  $LP$  и  $PN$  суть *среднія* только въ степени соизмѣримыя прямыя, и какъ  $EK$  есть *средняя* площадь, т. е.  $LP.PN$  есть также *средняя*, слѣдовательно  $LN$ , квадратирующая площадь  $AB$  (кн. 10, пред. 76) есть *второй средній вычетъ*.

*Предложеніе 95.* Меньшая ирраціональная квадратитъ площадь прямоугольника  $AB$ , заключеннаго между раціональною прямою  $AC$  и четвертымъ вычетомъ (фиг. 413).

*Доказат.* Прибавимъ въ  $AD$  прямую  $DG$ , то  $AG$  и  $GD$  будутъ раціональныя только въ степени соизмѣримыя прямыя, а также  $AG$  по длинѣ соизмѣрима съ  $AC$  и  $AG$  квадратитъ надъ  $DG$ , на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ  $AG$ . По раздѣленіи прямой  $DG$  въ точкѣ  $E$  пополамъ и послѣ выше сдѣланнаго построенія, легко доказать, какъ и выше, что  $LN$ , въ фигурѣ  $LRMP$ , квадратитъ площадь  $AB$ , а остается только показать, что  $LN$  есть *меньшая ирраціональная*.

Фиг. 413.



Такъ какъ здѣсь (кн. 10, пред. 19)  $AF$  и  $FG$  по длинѣ несоизмѣримы, а мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):



$$AF:FG=AI:FK$$

то (кн. 10, пред. 10) площади  $AI$  и  $FK$  также несоизмѣримы. Такъ какъ  $AI=LM=\square LP$  и  $FK=NQ=\square NP$ , то  $\square LP$  и  $\square NP$  также несоизмѣримы. Откуда видимъ, что прямая  $LP$  и  $NP$  несоизмѣримы въ степени.

Такъ какъ прямая  $AG$  раціональна и соизмѣрима по длинѣ съ  $AC$ , то (кн. 10, пред. 20)  $AK$  есть раціональная площадь; но:

$$AK=\square LP+\square NP$$

слѣдовательно и площадь  $\square LP+\square NP$  раціональна.

Такъ какъ  $DG$  и  $AC$  по длинѣ несоизмѣримы и обѣ раціональны, то (кн. 10, пред. 22)  $DK$  есть средняя площадь, но  $DK=2(LP.PN)$ , слѣдовательно и площадь  $LP.PN$  есть также средняя.

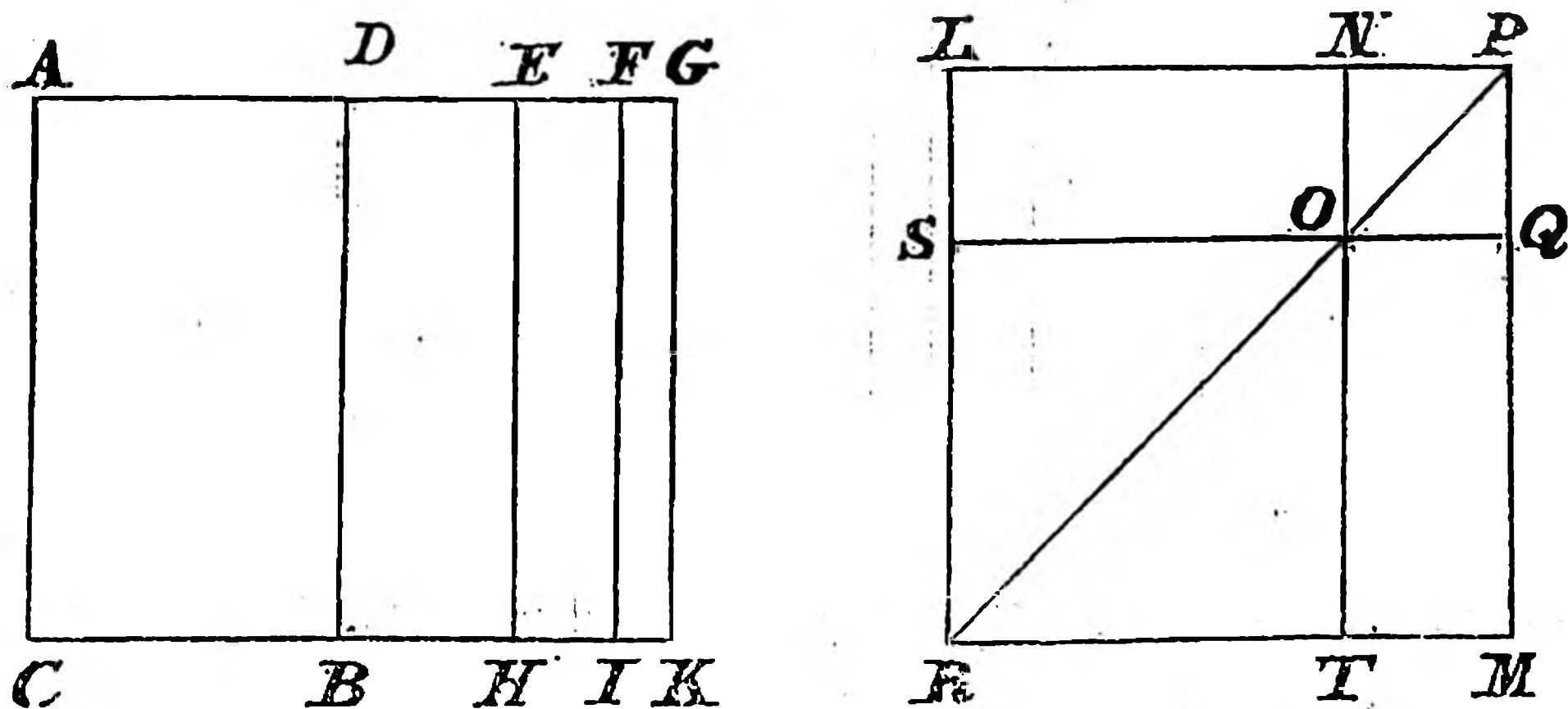
Изъ этого видимъ, что прямая  $LN$ , квадратящая площадь  $AB$  (кн. 10, пред. 77) есть меньшая ирраціональная.

*Предложеніе 96.* Прямая, которая съ раціональною площадью даетъ ирраціональную среднюю площадь, квадратитъ площадь прямоугольника  $AB$ , заключеннаго между раціональною прямою  $AC$  и пятымъ вычетомъ  $AD$  (фиг. 414).

*Доказат.* Прибавимъ къ  $AD$  прямую  $DG$ , то  $AG$  и  $GD$  будутъ раціональныя прямая только въ степени соизмѣрима, а также  $GD$  по длинѣ соизмѣрима съ  $AC$  и  $AG$  квадратитъ надъ  $GD$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ  $AG$ .

Послѣ построенія сдѣланнаго выше, можно показать, какъ и тамъ, что  $LN$  въ фигурѣ  $LRMP$  квадратитъ площадь  $AB$ , а остается только показать, что прямая  $LN$  есть та, которая съ раціональною площадью даетъ ирраціональную среднюю площадь.

Фиг. 414.



Такъ какъ здѣсь (кн. 10, пред. 19)  $AF$  и  $FG$  по длинѣ несоизмѣримы, а мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$AF:FG=AI:FK$$

то (кн. 10, пред. 10) площади  $AI$  и  $EK$  несоизмѣримы. Откуда, такъ какъ  $AI = \square LP$  и  $EK = \square NP$ , то площади  $\square LP$  и  $\square NP$  также несоизмѣримы. Слѣдовательно прямыя  $LP$  и  $NP$  въ степени несоизмѣримы.

Такъ какъ  $AG$  по длинѣ несоизмѣрима съ  $GD$ , а  $GD$  соизмѣрима съ  $AC$ , то (кн. 10, пред. 13)  $AG$  по длинѣ несоизмѣрима съ  $AC$ . Но прямыя  $AG$  и  $AC$  раціональныя, слѣдовательно (кн. 10, пред. 22)  $AK$  есть *средняя* площадь, но  $AK = \square LP + \square NP$ , слѣдовательно эта послѣдняя площадь есть *средняя*.

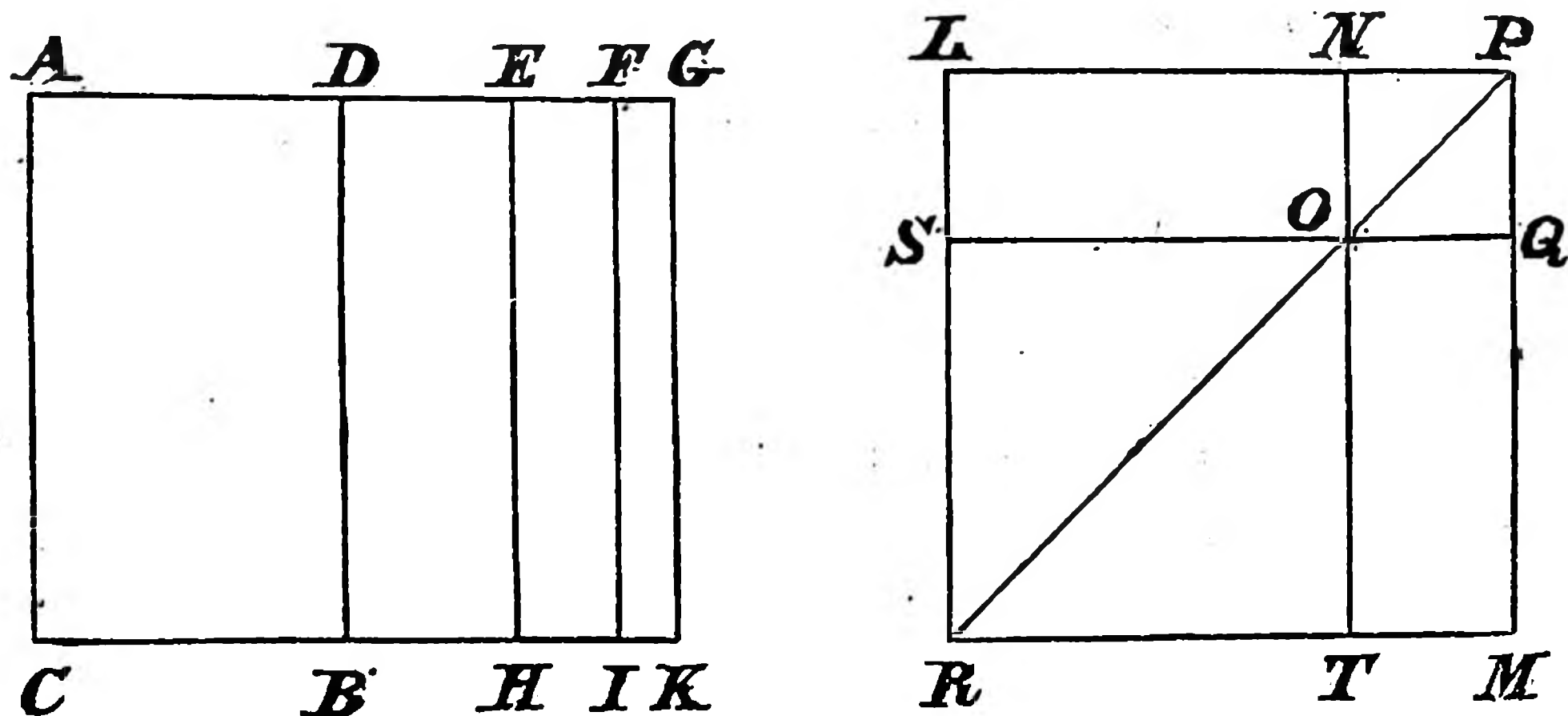
Такъ какъ прямая  $GD$  раціональна и по длинѣ соизмѣрима съ  $AC$ , то (кн. 10, пред. 20)  $DK$  есть раціональная площадь, но  $DK = 2(LP.PN)$ , слѣдовательно площадь  $2(LP.PN)$  есть раціональная.

Изъ этого видимъ, что  $LN$ , квадратищая площадь  $AB$  (кн. 10, пред. 78) есть та, которая съ раціональною площадью даетъ цѣлую среднюю площадь.

*Предложеніе 97.* Прямая, которая съ среднею площадью даетъ цѣлую среднюю площадь квадратище площадь прямоугольника  $AB$ , заключеннаго между раціональною прямою  $AC$  и шестымъ вычетомъ  $AD$  (фиг. 415).

*Доказат.* Прибавимъ къ  $AD$  прямую  $DG$ , то  $AG$  и  $GD$  будутъ раціональныя прямыя соизмѣримыя только въ степени и какъ  $AG$ , такъ и  $GD$  по длинѣ несоизмѣримы съ  $AC$ ;  $AG$  квадратище надъ  $GD$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ  $AG$ . Сдѣлавъ тоже построеніе, что и выше легко показать, что  $LN$  въ фигурѣ  $LRMP$  квадратище площадь  $AB$ , остается показать, что  $LN$  есть прямая, которая съ среднею площадью даетъ цѣлую среднюю площадь.

Фиг. 415.



Такъ какъ здѣсь (кн. 10, пред. 19)  $AF$  и  $FG$  по длинѣ несоизмѣримы, а мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$AF:FG=AI:FK$$

то (кн. 10, пред. 10) и площади  $AI$  и  $FK$  также несоизмѣримы. Но мы имѣемъ:

$$LM = \square LD = AI \text{ и } QN = \square NP = FK$$

слѣдовательно и  $\square LP$  и  $\square NP$  также несоизмѣримы, откуда слѣдуетъ, что прямыя  $LP$  и  $NP$  несоизмѣримы въ степени.

Такъ какъ  $AG$  и  $AC$  суть раціональныя прямыя только въ степени соизмѣримыя, то (кн. 10, пред. 22)  $AK = \square LP + \square NP$  есть *средняя* площадь.

Такъ какъ  $AC$  и  $DG$  раціональны, а  $AC$  по длинѣ несоизмѣрима съ  $DG$ , то площадь  $DK = 2(LP.PN)$  есть *средняя*.

Далѣе  $AG$  и  $DG$  по длинѣ несоизмѣримы, а мы имѣемъ:

$$AG : DG = AK : DK$$

то и площади  $AK$  и  $DK$ , т. е.  $\square LP + \square NP$  и  $2(LP.PN)$  также несоизмѣримы.

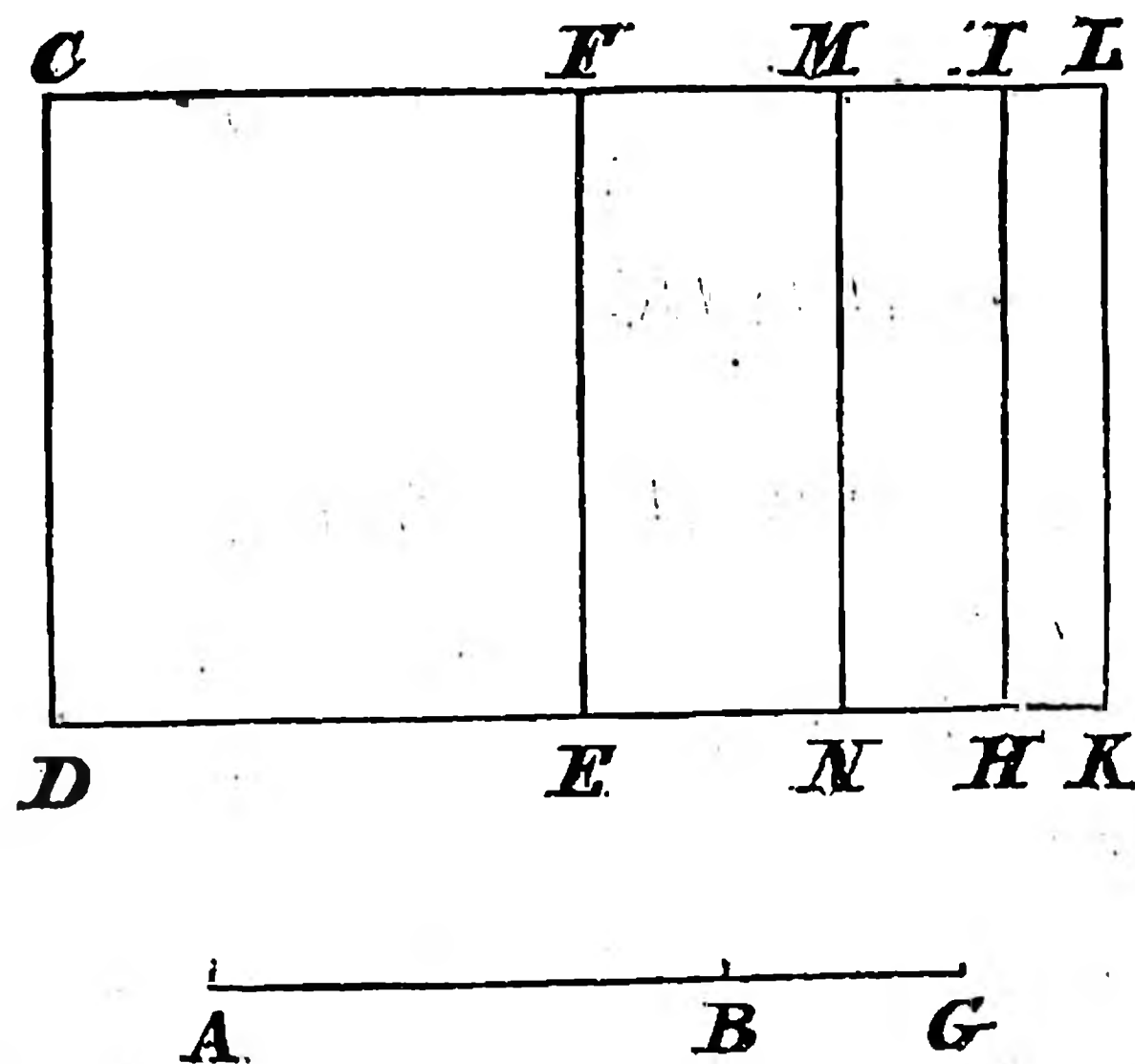
Изъ этого видимъ, что  $LN$ , квадратищая площадь  $AB$  (кн. 10, пред. 79) есть прямая, которая съ *среднею* площадью даетъ *цѣлую среднюю* площадь.

*Предложеніе 98.* Прямоугольникъ  $CE$ , построенный на раціональной прямой  $CD$ , коего площадь равна площади квадрата построеннаго на *вычетѣ*  $AB$ , имѣетъ высоту *первый вычетъ*  $CF$  (фиг. 416).

*Доказат.* Прибавимъ къ *вычету*  $AB$  прямую  $BG$ , то (кн. 10, пред. 74) прямыя  $AG$  и  $GB$  будутъ раціональны и соизмѣримы только въ степени. На  $CD$  построимъ прямоугольники  $CH = \square AG$  и  $IK = \square GB$ , то  $CK = \square AG + \square GB$  и какъ  $CE = \square AB$ , то (кн. 2, пред. 7)  $FK = 2(AG.GB)$ .

Раздѣлимъ прямую  $FL$  въ точкѣ  $M$  пополамъ и чрезъ точку  $M$  проведемъ прямую  $MN \parallel CD$ , то (кн. 1, пред. 36)  $FN = MK = AG.GB$ . Теперь надобно доказать:

Фиг. 416.



1. Что  $CF$  есть *вычетъ*.

Такъ какъ площадь  $\square AG + \square GB$  раціональна и равна  $CK$ , то  $CK$ , т. е.  $DC.CL$  есть также площадь раціональная, слѣдовательно, какъ прямая  $CD$  раціональна, то (кн. 10, пред. 21)  $CL$  также раціональна и по длинѣ соизмѣрима съ  $CD$ .

Такъ какъ (кн. 10, пред. 22)  $2(AG.GB)$  есть средняя площадь и равна  $FK$ ; то  $FK$ , т. е.  $DC.FL$  есть также площадь средняя. слѣдовательно, какъ  $CD$  есть раціональная прямая, то (кн. 10, пред. 23)  $FL$  есть раціональная прямая по длинѣ несоизмѣримая съ  $CD$ .

Такъ какъ площадь  $CK$  раціональна, и  $FK$  средняя, то  $CK$  несоизмѣрима съ  $FK$ , но мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$CK:FK=CL:LF$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 10)  $CL$  и  $LF$  по длинѣ несоизмѣримы. Откуда видимъ, что  $CL$  и  $LF$  суть раціональныя прямыя только въ степени соизмѣримыя, слѣдовательно (кн. 10, пред. 74)  $CF$  есть *вычетъ*.

2. Что  $CF$  есть *первый вычетъ*.

Такъ какъ (кн. 10, пред. 54, слѣд. 3) площадь  $AG.GB$  есть средне-пропорціональная между  $\square AG$  и  $\square GB$ , то  $MK$  есть средне-пропорціональная площадь между  $CH$  и  $IK$ , т. е.:

$$CH:MK=MK:IK.$$

Но мы имѣемъ:

$$CH:MK=CI:ML \quad \text{и} \quad MK:IK=ML:IL$$

слѣдовательно:

$$CI:ML=ML:IL$$

откуда (кн. 6, пред. 17)  $CI.IL=\square ML=\frac{1}{4}\square FL$ . Но площади  $\square AG$  и  $\square GB$  соизмѣримы, т. е. соизмѣримы  $CH$  и  $IK$ ; но:

$$CH:IK=CI:IL$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 10)  $CI$  и  $IL$  соизмѣримы. Откуда (кн. 10, пред. 18) видимъ, что  $CL$  квадратитъ надъ  $LF$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ  $CL$ , а было показано, что  $CL$  и  $CD$  соизмѣримы, слѣдовательно  $CF$  есть *первый вычетъ*.

*Предложеніе 99.* Прямоугольникъ  $CE$ , построенный на раціональной прямой  $CD$ , коего площадь равна площади квадрата, построеннаго на *среднемъ вычетеъ*  $AB$ , имѣетъ высоту *второй вычетъ*  $CF$  (фиг. 417).

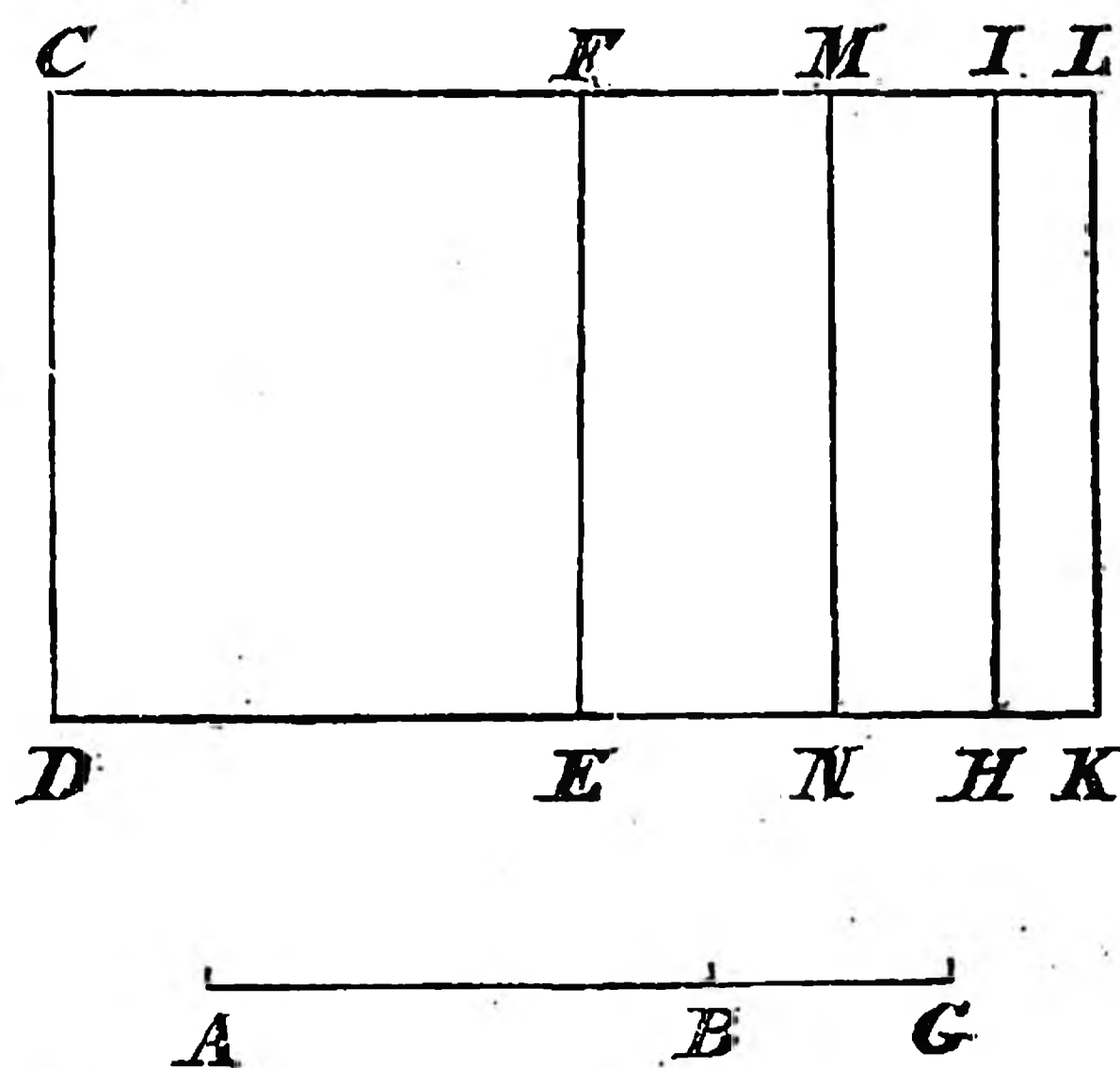


*Доказат.* Прибавимъ къ первому среднему вычету  $AB$  прямую  $BG$ , то прямая (кн. 10, пред. 75)  $AG$  и  $GB$  будутъ среднія только въ степени соизмѣримыя; но  $AG.GB$  будетъ раціональная площадь.

Сдѣлавъ построение подобное предыдущему остается доказать:

1. Что  $CF$  есть вычетъ.

Фиг. 417.



Такъ какъ  $\square AG + \square GB = CK = DC.CL$  есть площадь средняя, но  $CD$  раціональна, то (кн. 10, пред. 23)  $CL$  есть прямая также раціональная и по длинѣ несоизмѣримая съ  $CD$ . Такъ какъ  $2(AG.GB) = FK = DC.FL$  есть раціональная площадь, то (кн. 10, пред. 21) прямая  $FL$  раціональна и по длинѣ соизмѣрима съ  $DC$ . Такъ какъ  $CK$  есть средняя площадь, а  $FK$  раціональная, то  $CK$  и  $FK$  несоизмѣримы, но мы имѣемъ (кн. 6, пред. 1):

$$CK : FK = CL : LF$$

слѣдовательно  $CL$  и  $LF$  по длинѣ несоизмѣримы (кн. 10, пред. 10). Откуда видимъ, что прямая  $CL$  и  $LF$  раціональны только въ степени соизмѣримы, слѣдовательно (кн. 10, пред. 74)  $CF$  есть вычетъ.

2. Что  $CF$  есть второй вычетъ.

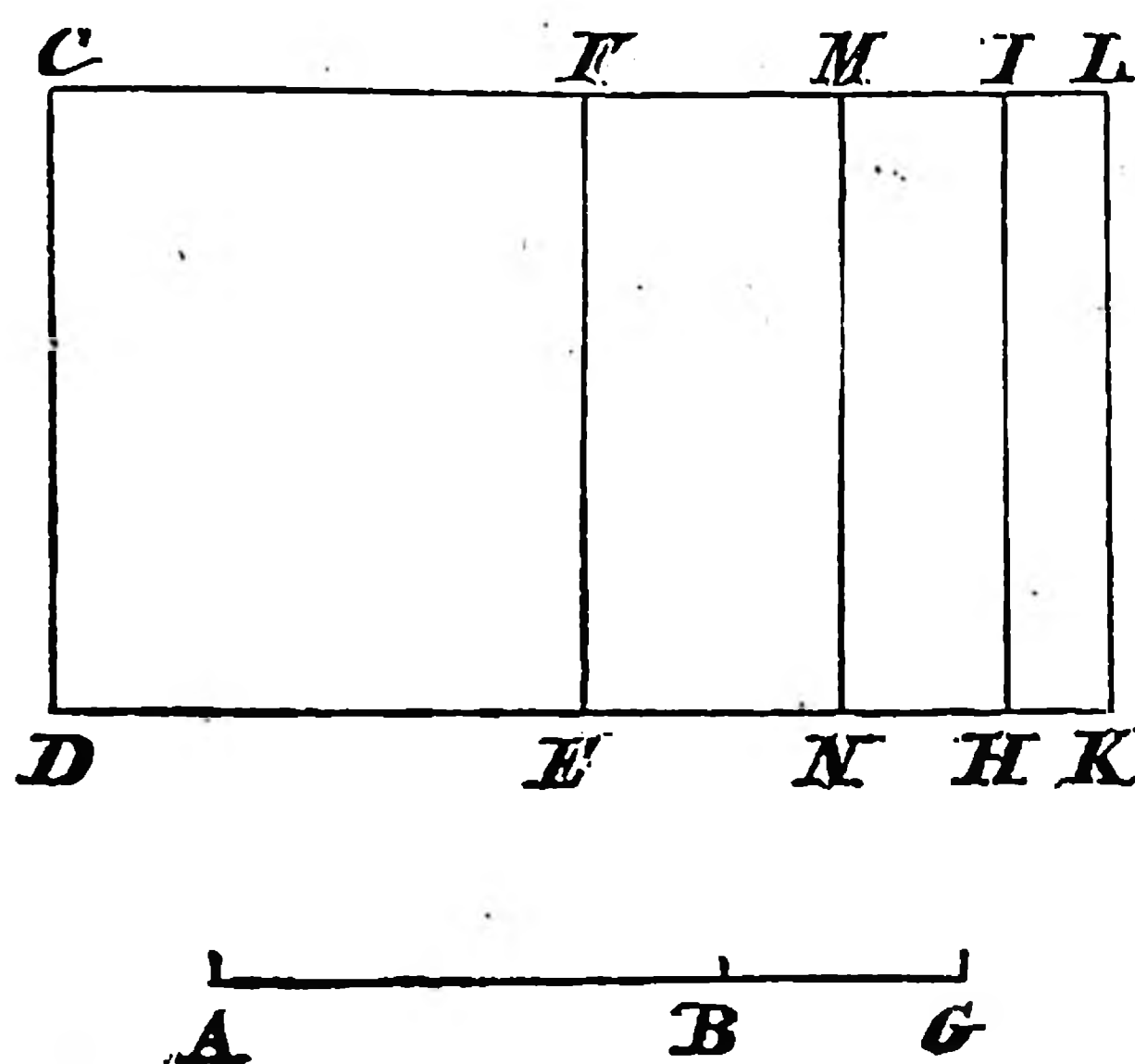
Здѣсь опять мы имѣемъ  $CI.IL = \square ML = \frac{1}{4} \square FL$  и  $\square AG$  съ  $\square GB$  соизмѣримы, т. е.  $CH$  и  $IK$ , а также  $CI$  и  $IL$  соизмѣримы, слѣдовательно (кн. 10, пред. 18) прямая  $LC$  квадратитъ надъ  $FL$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ  $LC$ , а было показано, что  $FL$  и  $CD$  по длинѣ соизмѣримы, слѣдовательно  $CF$  есть второй вычетъ.

*Предложеніе 100.* Прямоугольникъ  $CE$ , построенный на раціональной прямой  $CD$ , коего площадь равна площади квадрата построеннаго на второмъ среднемъ вычетѣ  $AB$ , имѣетъ высоту третій вычетъ  $CF$  (фиг. 418).

*Доказат.* Прибавимъ къ  $AB$  прямую  $BG$ , то (кн. 10, пред. 76)  $AG$  и  $GB$  будутъ среднія прямая только въ степени соизмѣримыя, и  $AG.GB$

будетъ *средняя* площадь. Послѣ извѣстнаго выше построения остается до-  
казать:

Фиг. 418.



1. Что  $CF$  есть *вычетъ*.

Такъ какъ  $\square AG + \square GB = CK = DC \cdot CL$  есть *средняя* площадь, то (кн. 10, пред. 23)  $CL$  есть рациональная прямая по длинѣ несоизмѣримая съ  $DC$ . Такъ какъ  $2(AG \cdot GB) = FK = DC \cdot FL$  есть *средняя* площадь, то (кн. 10, пред. 23) прямая  $FL$  рациональна и несоизмѣрима по длинѣ съ  $DC$ . Но  $AG$  и  $GB$  соизмѣримы только въ степени, слѣдовательно онѣ по длинѣ несоизмѣримы. Такъ какъ мы имѣемъ:

$$AG : GB = \square AG : AG \cdot GB$$

то  $\square AG$  и  $AG \cdot GB$  несоизмѣримы. Площадь  $AG$  соизмѣрима съ  $\square AG + \square GB$  (кн. 10, пред. 16) а также соизмѣримы площади  $AG \cdot GB$  и  $2(AG \cdot GB)$ , слѣдовательно (кн. 10, пред. 14 и 13)  $\square AG + \square GB$  несоизмѣрима съ  $(AG \cdot GB)$ , т. е.  $CK$  и  $FK$  несоизмѣримы, а какъ:

$$CK : FK = CL : FL$$

то и прямая  $CL$  и  $FL$  по длинѣ несоизмѣримы. Откуда видимъ, что прямая  $CL$  и  $FL$  рациональны и соизмѣримы только въ степени, слѣдовательно (кн. 10, пред. 74)  $CF$  есть *вычетъ*.

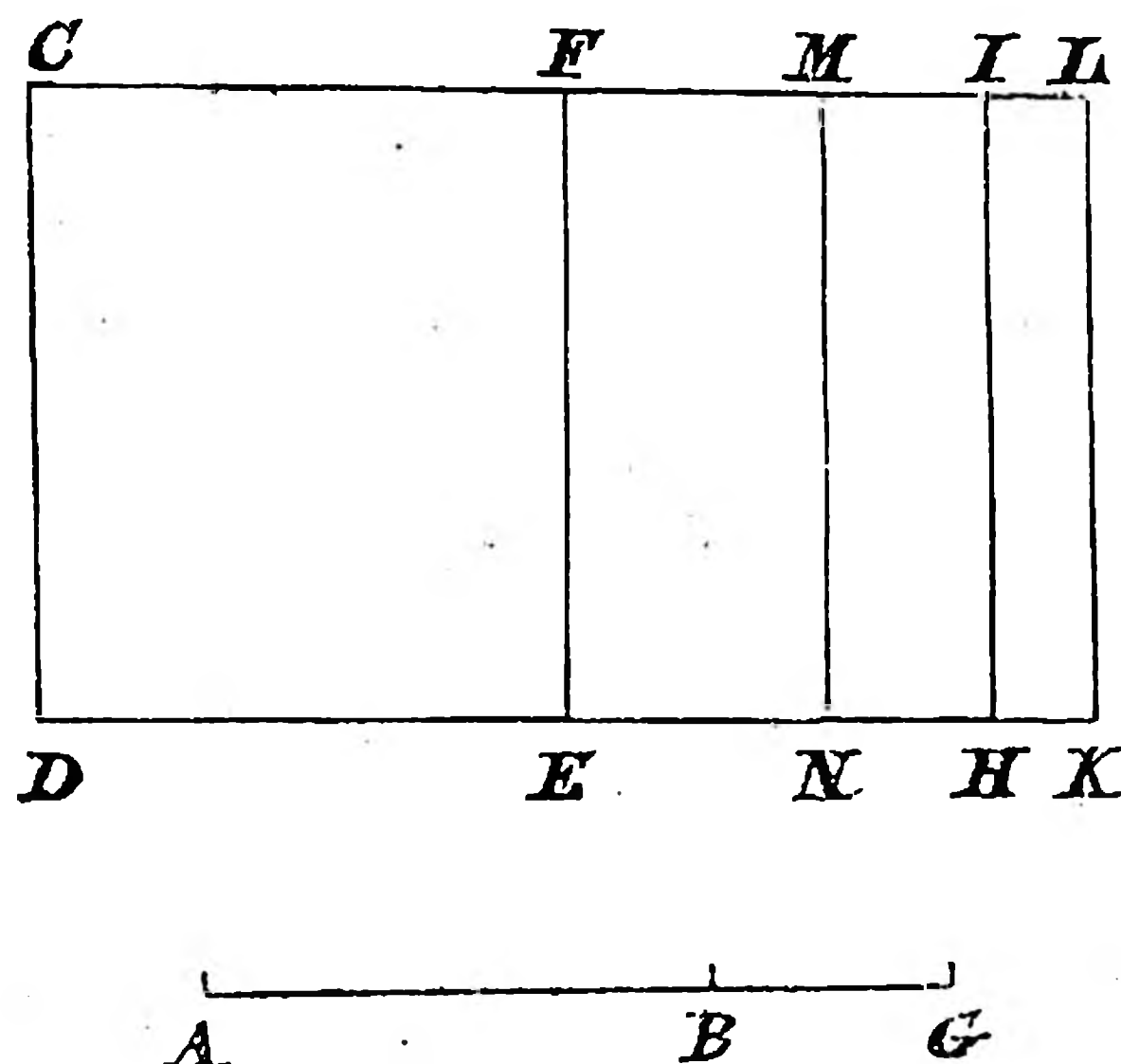
2. Что  $CF$  есть *третій вычетъ*.

Такъ какъ здѣсь  $CI \cdot IL = \frac{1}{4} FL$ , а  $\square AG$  и  $\square GB$  соизмѣримы, т. е.  $CH$  съ  $IK$ , а также  $CI$  съ  $IL$ , то прямая  $CL$  (кн. 10, пред. 18) квадратишь надъ  $FL$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ  $CL$ , а было показано, что  $CL$  и  $LF$  несоизмѣримы по длинѣ съ  $CD$ , слѣдовательно  $CF$  есть *третій вычетъ*.

*Предложение 101.* Прямоугольник  $CE$ , построенный на рациональной прямой  $CD$ , коего площадь равна площади квадрата, построенного на меньшей иррациональной  $AB$ , имѣетъ высоту *четвертый вычетъ*  $CF$  (фиг. 419).

*Доказат.* Прибавимъ къ  $AB$  прямую  $BG$ , то (кн. 10, пред. 77)  $AG$  и  $GB$  будутъ прямыя несоизмѣримыя въ степени, и площадь  $\square AG + \square GB$  будетъ рациональная, а  $2(AG \cdot GB)$  будетъ *средняя*. Сдѣлавъ построение тоже что и выше, надобно доказать:

Фиг. 419.



1. Что  $CF$  есть *вычетъ*.

Такъ какъ  $\square AG + \square GB = CK = DC \cdot CL$  есть площадь рациональная, то (кн. 10, пред. 21)  $CL$  рациональна и съ  $CD$  по длинѣ соизмѣрима. Такъ какъ площадь  $2(AG \cdot GB) = FK = DC \cdot FL$  есть *средняя*, то (кн. 10, пред. 23)  $FL$  есть рациональная прямая по длинѣ несоизмѣрима съ  $CD$ . Такъ какъ  $\square AG + \square GB$  есть рациональная площадь, а  $2(AG \cdot GB)$  *средняя*, то  $\square AG + \square GB$  и  $2(AG \cdot GB)$  несоизмѣримы, т. е. площадь  $CK$  несоизмѣрима съ  $FK$ ; но:

$$CK : FK = CL : FL$$

слѣдовательно (кн. 10, пред. 10) прямыя  $CL$  и  $FL$  по длинѣ несоизмѣримы. Слѣдовательно прямыя  $CL$  и  $FL$  суть рациональныя только въ степени соизмѣримыя, а поэтому (кн. 10, пред. 74)  $CF$  есть *вычетъ*.

2. Что  $CF$  есть *четвертый вычетъ*.

Такъ какъ здѣсь мы снова имѣемъ:

$$CI \cdot IL = \frac{1}{4} \square FL$$

а  $\square AG$  и  $\square GB$  несоизмѣримы, т. е. несоизмѣримы площади  $CH$  и  $IK$ ; но:

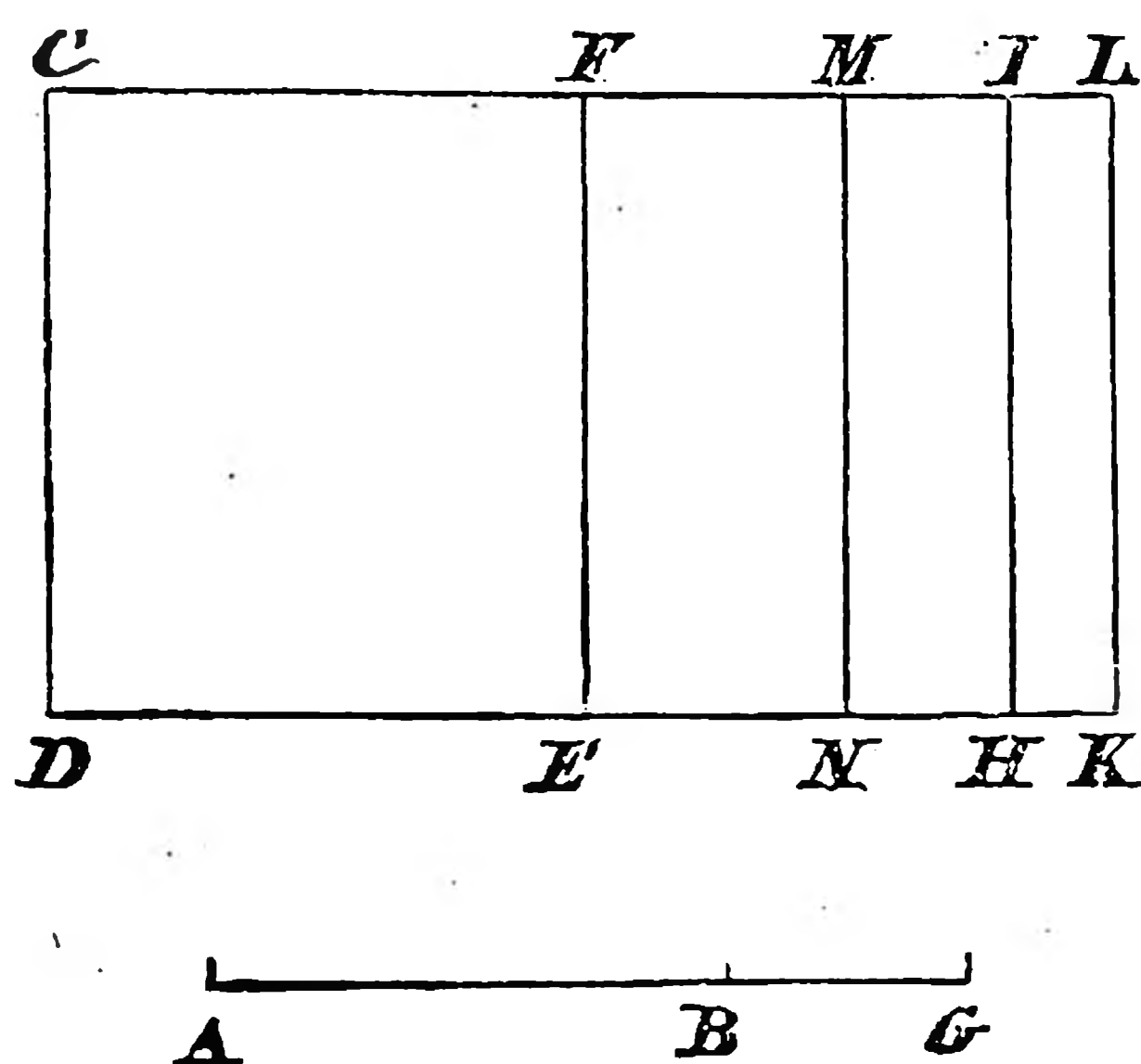
$$CH : IK = CI : IL$$

слѣдовательно несоизмѣримы и прямыя  $CI$  и  $IL$ . Откуда видимъ (кн. 10, пред. 19), что  $CL$  квадратитъ надъ  $FL$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ  $CL$ , но было показано, что  $CL$  и  $CD$  по длинѣ соизмѣримы, слѣдовательно  $CF$  есть *четвертый вычетъ*.

*Предложеніе 102.* Прямоугольникъ  $CE$ , построенный на раціональной прямой  $CD$ , коего площадь равна квадрату построенному на составляющей съ раціональнымъ прямоугольникомъ цѣлую среднюю площадь  $AB$ , имѣетъ высоту  $CF$  *пятый вычетъ* (фиг. 420).

*Доказат.* Прибавимъ въ  $AB$  прямую  $BG$ , то (кн. 10, пред. 78)  $AG$  и  $GB$  будутъ прямыя несоизмѣримыя въ степени, площадь  $\square AG + \square GB$  будетъ *средняя*, а  $2(AG \cdot GB)$  раціональная. Сдѣлавъ тоже построение что и выше, надобно доказать:

Фиг. 420.



1. Что  $CF$  есть *вычетъ*.

Такъ какъ  $\square AG + \square GB = \square CK = DC \cdot CL$  есть средняя площадь, то (кн. 10, пред. 23)  $CL$  есть прямая раціональная, несоизмѣримая съ  $DC$ . Такъ какъ  $2(AG \cdot GB) = \square FK = DC \cdot FL$  есть раціональная площадь, то (кн. 10, пред. 21)  $FL$  есть раціональная прямая соизмѣримая съ  $CD$ . Но площадь  $\square CK$  *средняя*, а  $\square FK$  раціональная, слѣдовательно  $CK$  и  $FK$  несоизмѣримы, а слѣдовательно несоизмѣримы и прямыя  $CL$  и  $FL$ . Изъ этого видимъ, что прямыя  $CL$  и  $FL$  раціональны только въ степени соизмѣримы, слѣдовательно (кн. 10, пред. 74)  $CF$  есть *вычетъ*.

2. Что  $CF$  есть *пятый вычетъ*.

Здѣсь мы имѣемъ снова:

$$CI \cdot IL = \frac{1}{4} \square FL$$

и  $\square AG$  съ  $\square GB$ , т. е.  $CH$  съ  $IK$  несоизмѣримы, слѣдовательно несоизмѣримы и прямыя  $CI$  и  $IL$ , откуда видимъ (кн. 10, пред. 19), что  $CL$  квадратитъ надъ  $FL$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима

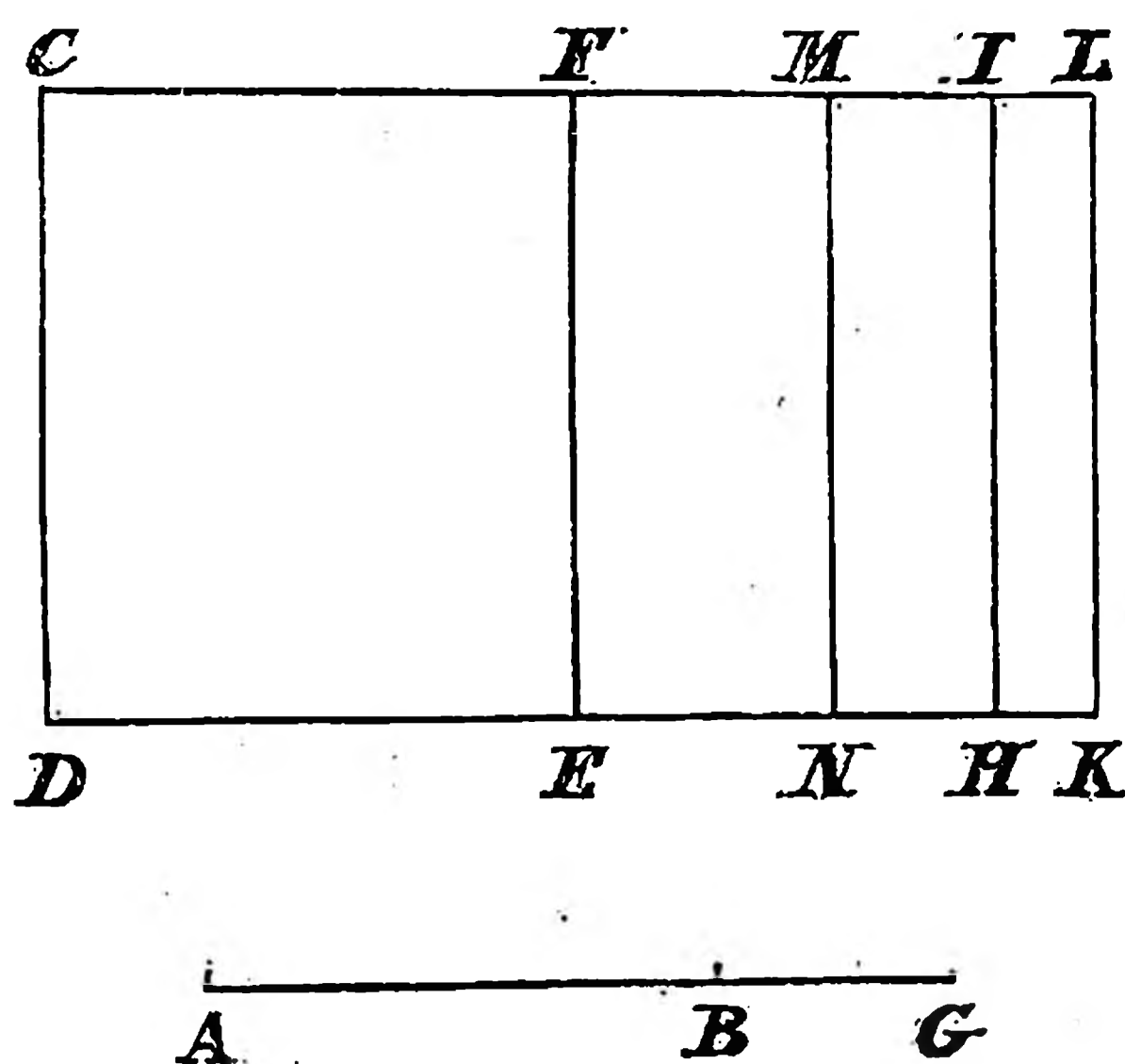


съ  $CL$ , а было показано, что прямая  $FL$  и  $CD$  соизмѣримы, слѣдовательно  $CF$  есть *пятый вычетъ*.

*Предложеніе 103.* Прямоугольникъ  $CE$ , построенный на раціональной прямой  $CD$ , равный квадрату построенному на  $AB$ , коей квадратъ съ среднимъ прямоугольникомъ даетъ илную среднюю площадь, имѣетъ высоту *шестой вычетъ*  $CF$  (фиг. 421).

*Доказат.* Прибавимъ къ  $AB$  прямую  $GB$ , то (кн. 10, пред. 79)  $AG$  и  $GB$  будутъ несоизмѣримы въ степени; и какъ  $\square AG + \square GB$  такъ и  $2(AG \cdot GB)$  суть среднія несоизмѣримыя площади. Сдѣлавъ тоже построение что и выше, надобно доказать:

Фиг. 421.



1. Что  $CF$  есть *вычетъ*.

Такъ какъ  $\square AG + \square GB = CK = DC \cdot CL$  есть площадь средняя, то (кн. 10, пред. 23) прямая  $CL$  раціональна и по длинѣ несоизмѣрима съ  $CD$ . Такъ какъ  $2(AG \cdot GB) = FK = DC \cdot CL$  есть средняя площадь, то (кн. 10, пред. 23)  $FL$  есть раціональная прямая по длинѣ несоизмѣримая съ  $DC$ . Далѣе, такъ какъ площади  $\square AG + \square GB$  и  $2(AG \cdot GB)$  несоизмѣримы, т. е. несоизмѣримы площади  $CK$  и  $FK$ , то несоизмѣримы прямая  $CL$  и  $FL$ . Слѣдовательно прямая  $CL$  и  $FL$  суть раціональныя только въ степени соизмѣримыя, а поэтому (кн. 10, пред. 74)  $CF$  есть *вычетъ*.

2. Что  $CF$  есть *шестой вычетъ*.

Здѣсь мы имѣемъ снова:

$$CI \cdot IL = \frac{1}{4} \square FL$$

а  $\square AG$  и  $\square GB$ , т. е.  $CH$  и  $CK$  несоизмѣримы, а потому и прямая  $CI$  и  $IL$  также несоизмѣримы, слѣдовательно (кн. 10, пред. 19)  $CL$  квадратишь надъ  $FL$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ  $CL$ , а было показано, что ни  $CL$ , ни  $FL$  съ  $CD$  по длинѣ не соизмѣримы, слѣдовательно  $CF$  есть *шестой вычетъ*.

*Предложеніе 104.* Каждая прямая  $CD$  по длинѣ соизмѣримая съ вычетомъ  $AB$  будетъ сама вычетомъ того же порядка (фиг. 422).

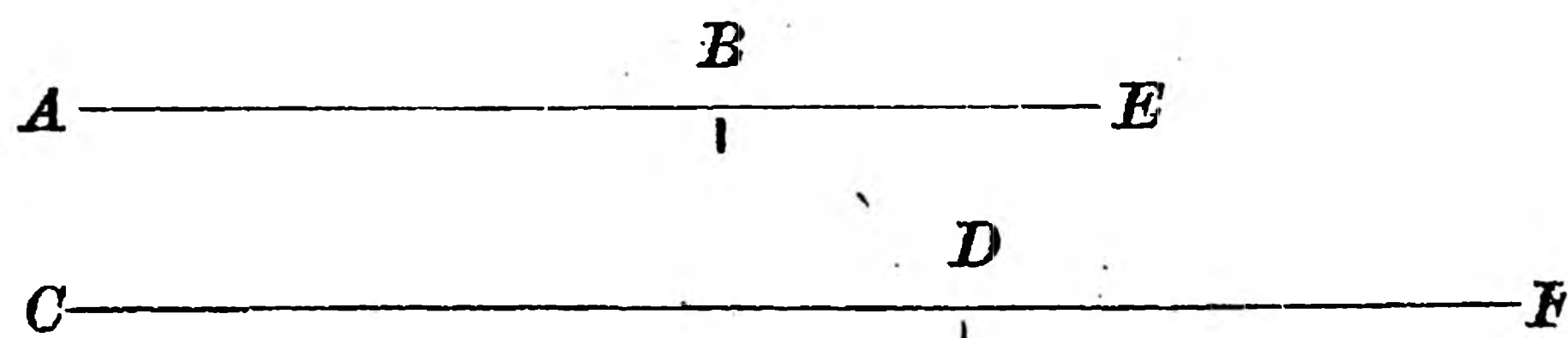
*Доказат.* 1. Прибавимъ къ  $AB$  прямую  $BE$ , то (кн. 10, пред. 74)  $AE$  и  $EB$  будутъ рациональны только въ степени соизмѣримы. Сдѣлаемъ:

$$AB:CD=BE:DF$$

то (кн. 5, пред. 12):

$$AE:CF=AB:CD.$$

Фиг. 422.



Такъ какъ (кн. 5, пред. 19):

$$AE:CF=BE:DF$$

и

$$AE:BE=CF:DF$$

то прямая  $CF$  и  $DF$  будутъ рациональны только въ степени соизмѣримыя, слѣдовательно (кн. 10, пред. 74)  $CD$  есть *вычетъ*.

2. Прямая  $AB$  можетъ быть или *первымъ*, или *вторымъ*, или *третьимъ* *вычетомъ*, т. е. въ пропорціи:

$$AE:EB=CF:FD$$

$AE$  квадратитъ надъ  $EB$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ  $AE$ , и  $AE$  или  $EB$ , или ни одна изъ нихъ по длинѣ не соизмѣримы съ данною рациональною прямою; слѣдовательно (кн. 10, пред. 15)  $CF$  квадратитъ надъ  $FD$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ  $DF$ , и  $CF$ , или  $FD$ , или ни одна изъ нихъ по длинѣ не соизмѣрима съ данною рациональною прямою; слѣдовательно  $CD$  и  $AB$  суть вмѣстѣ или *первый*, или *второй*, или *третій* *вычетъ*. Точно также можетъ быть показано, что  $CD$  вмѣстѣ съ  $AB$  будетъ или, *четвертый*, или *пятый*, или *шестой* *вычетъ*. Слѣдовательно *вычеты*  $AB$  и  $CD$  всегда одного порядка.

*Предложеніе 105.* Каждая прямая  $CD$  по длинѣ соизмѣримая съ *среднимъ* вычетомъ  $AB$  будетъ сама *средній* *вычетъ* и при томъ того-же порядка (фиг. 423).

*Доказат.* 1. Прибавимъ къ  $AB$  прямую  $EB$ , то (кн. 10, пред. 75 и 76)

$AE$  и  $EB$  будутъ среднія прямая только въ степени соизмѣримыя. Сдѣлаемъ снова:

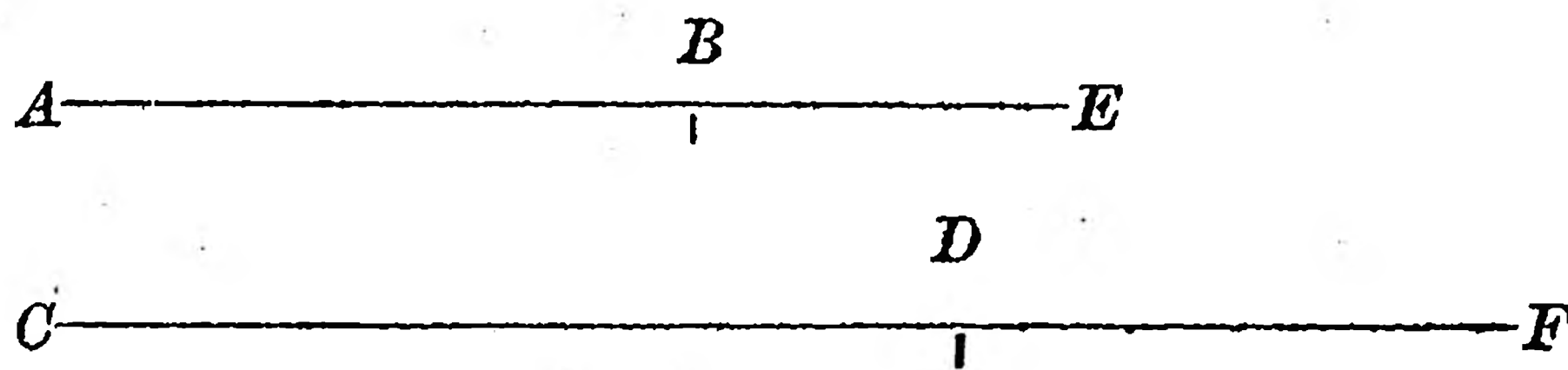
$$AB:CD=BE:DF$$

то:

$$AE:EB=CF:FD$$

слѣдовательно  $CF$  и  $FD$  будутъ среднія прямая только въ степени соизмѣримыя, а потому прямая  $CD$  будетъ *средній вычетъ*.

Фиг. 423.



Изъ второй пропорціи слѣдуетъ (кн. 6, пред. 1 и кн. 5, пред. 11):

$$\square AE:AE.EB=\square CF:CF.FD$$

откуда:

$$\square AE:\square CF=AE.EB:CF.FD$$

Но по условію  $AB$  и  $CD$  соизмѣримы и:

$$AB:CD=AE:CF$$

слѣдовательно  $AE$  и  $CF$  также соизмѣримы, а слѣдовательно соизмѣримы квадраты  $\square AE$  и  $\square CF$ . Откуда слѣдуетъ, что соизмѣримы и площади  $AE.EB$  и  $CF.FD$ . Если теперь  $AB$  есть *первый*, или *второй средній вычетъ*, то (кн. 10, пред. 75 и 76)  $AE.EB$  будетъ раціональная, или средняя площадь, слѣдовательно и площадь  $CF.FD$  будетъ или раціональная, или средняя, а поэтому прямая  $CD$  вмѣстѣ съ  $AB$  будетъ или *первый*, или *второй вычетъ*.

*Предложеніе 106.* Каждая прямая  $CD$  по длинѣ соизмѣримая съ малою ирраціональною прямою  $AB$  будетъ сама малая ирраціональная (фиг. 424).

*Доказат.* Пусть все будетъ какъ выше, то  $AE$  и  $EB$ , а также и  $CF$  и  $FD$  будутъ въ степени несоизмѣримы.

Такъ какъ мы имѣемъ:

$$AE:EB=CF:FD$$

то (кн. 6, пред. 22):

$$\square AE : \square EB = \square CF : \square FD$$

откуда (кн. 5, пред. 18):

$$\square AE + \square EB : \square EB = \square CF + \square FD : \square FD$$

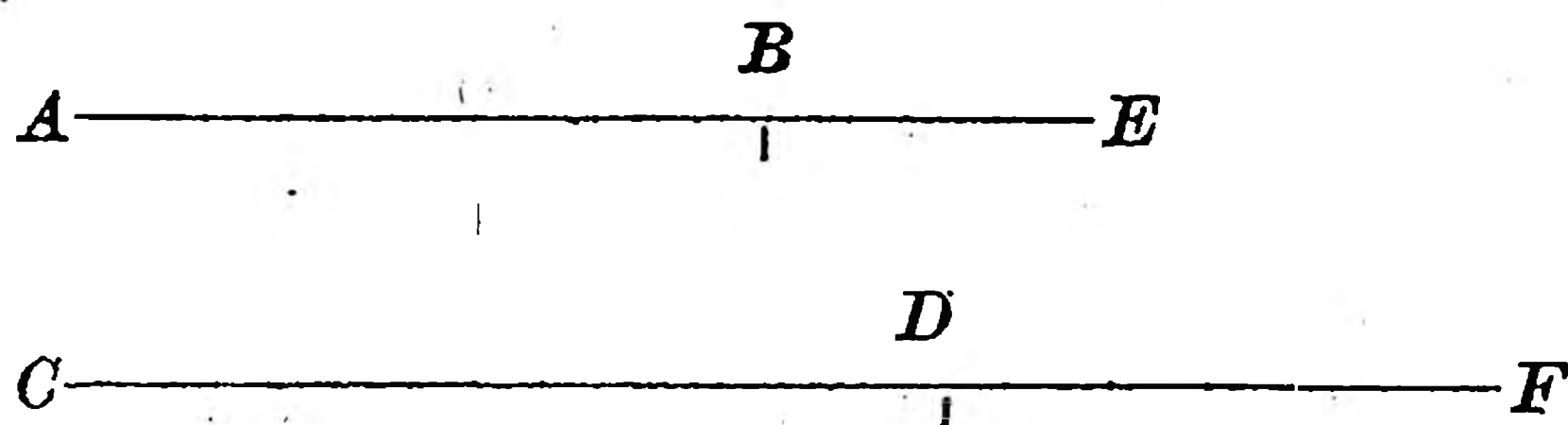
или

$$\square AE + \square EB : \square CF + \square FD = \square EB : \square FD$$

Но мы имѣемъ:

$$AB : CD = EB : FD$$

Фиг. 424.



и какъ  $AB$  и  $CD$  соизмѣримы, то  $EB$  и  $FD$  также соизмѣримы, а слѣдовательно соизмѣримы и площади  $\square EB$  съ  $\square FD$ . А потому соизмѣримы и площади  $\square AE + \square EB$  и  $\square CF + \square FD$ , слѣдовательно, такъ какъ (кн. 10, пред. 77)  $\square AE + \square EB$  есть раціональная площадь, то и площадь  $\square CF + \square FD$  также раціональна.

Такъ какъ:

$$\square AE : AE.EB = \square CF : CF.FD$$

то:

$$\square AE : \square CF = AE.EB : CF.FD$$

Но:

$$AE : CF = AB : CD$$

$AB$  и  $CD$  соизмѣримы, слѣдовательно соизмѣримы и  $AE$  и  $CF$ , а также соизмѣримы и площади  $\square AE$  и  $\square CF$ . слѣдовательно соизмѣримы площади  $AE.EB$  и  $CF.FD$ , но такъ какъ площадь  $AE.EB$  (кн. 10, пред. 77) есть средняя, то (кн. 10, пред. 24) и площадь  $CF.FD$  есть также средняя. слѣдовательно (кн. 10, пред. 77)  $CD$  есть малая ирраціональная.

*Другое доказат.* Каждая прямая  $B$ , по длинѣ соизмѣримая съ малою ирраціональною  $A$ , есть сама малая ирраціональная (фиг. 425).

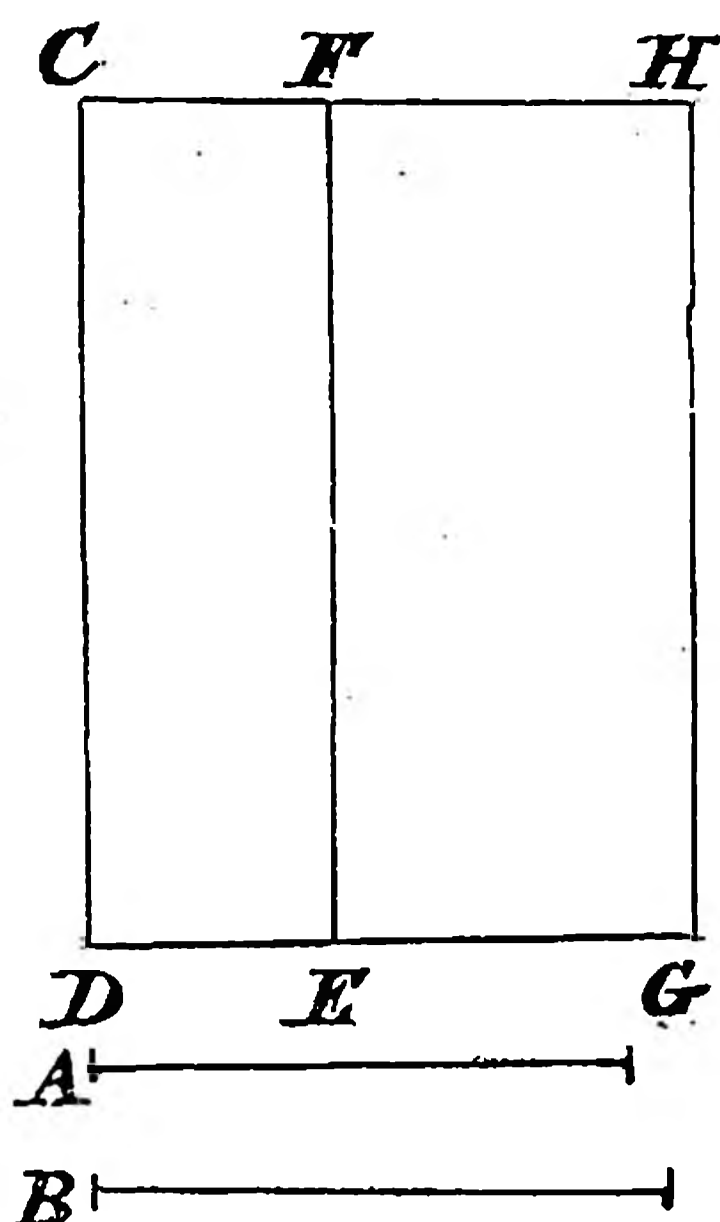
Пусть  $CD$  будетъ раціональная прямая, на которой построимъ прямоугольникъ  $CE = DC.CF = \square A$ , то (кн. 10, пред. 101)  $CF$  есть чет-  
вертый вычетъ. Пусть еще будетъ  $FG = DC.FH = \square B$ .



Такъ какъ прямыя  $A$  и  $B$  соизмѣримы, то соизмѣримы площади  $\square A$  и  $\square B$ , т. е. соизмѣримы  $CE$  и  $FG$ , но мы имѣемъ:

$$CE:FG=CF:FH$$

Фиг. 425.

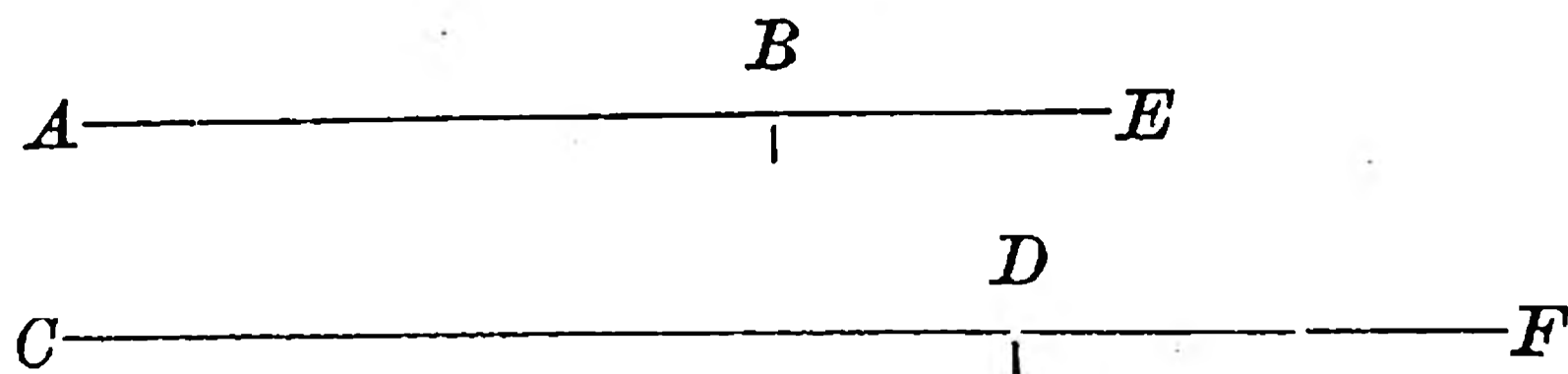


слѣдовательно  $CF$  и  $FH$  соизмѣримы, но  $CF$  есть *четвертый вычетъ*, слѣдовательно (кн. 10, пред. 104)  $FH$  есть также *четвертый вычетъ*. Но  $CD$  есть рациональная прямая, а  $DC.FH=\square B$ , слѣдовательно (кн. 10, пред. 95)  $B$  есть *малая иррациональная*.

*Предложеніе 107.* Прямоугольникъ, построенный на рациональной прямой  $CD$  равный квадрату, построенному на прямой  $AB$ , которая съ рациональнымъ прямоугольникомъ даетъ *цѣлую среднюю площадь*, имѣетъ высоту прямую того-же свойства и порядка (фиг. 426).

*Доказат.* Сдѣлаемъ тоже построеніе, что и выше, то (кн. 10, пред. 78) прямыя  $AE$  и  $EB$  будутъ въ степени несоизмѣримы, площадь  $\square AE+\square EB$  будетъ средняя, и прямоугольникъ  $AE.EB$  будетъ рациональный.

Фиг. 426.



Теперь можно, такимъ же образомъ доказать, что:

$$CF:FD=AE:EB$$

и что площади  $\square AE+\square EB$  и  $\square CF+\square FD$  соизмѣримы, точно также площади  $AE.EB$  и  $CF.FD$  соизмѣримы, и что  $CF$  и  $FD$  несоизмѣримы въ степени, далѣе, что  $\square CF+\square FD$  есть средняя площадь, а  $CF.FD$

раціональная. Откуда заключаемъ (кн. 10, пред. 78), что  $CD$  есть прямая, которая съ раціональнымъ прямоугольникомъ даетъ цѣлую среднюю площадь.

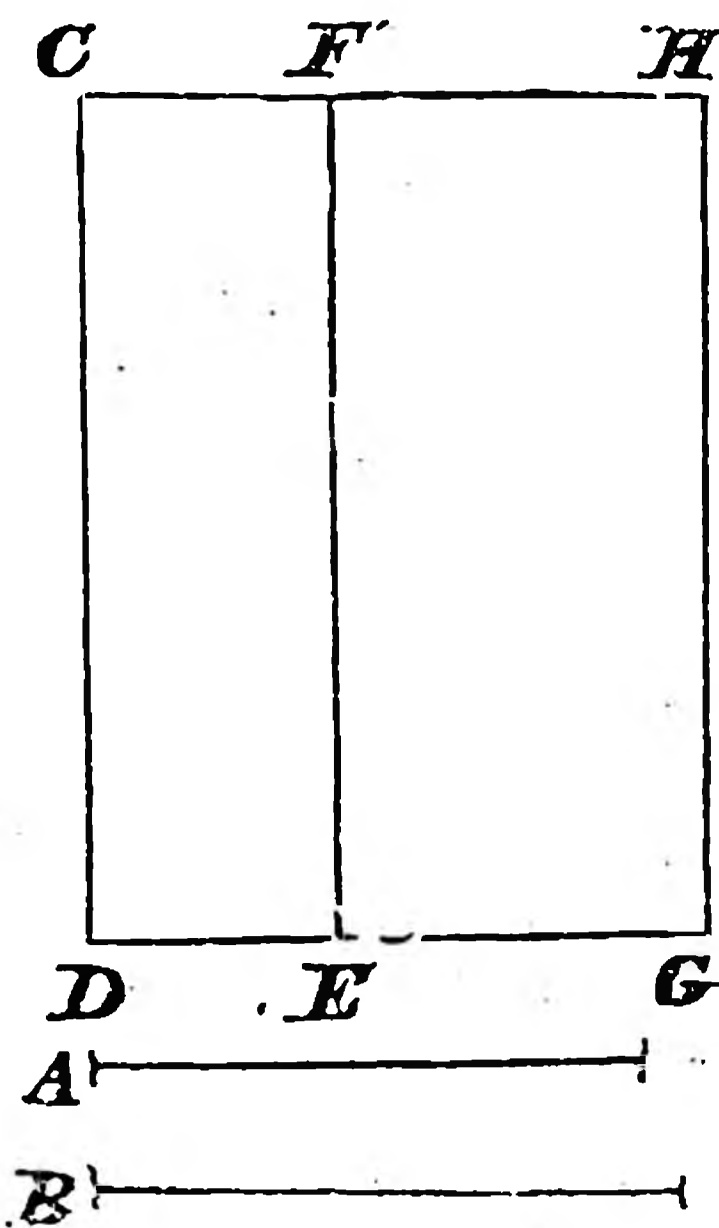
Другое доказат. Пусть  $A$  будетъ то, что была  $AB$ , и  $B$  то что была  $CD$  (фиг. 427). Пусть  $CD$  будетъ раціональная прямая и:

$$\square A = CE = DC \cdot CF$$

то (кн. 10, пред. 102)  $CF$  будетъ пятый вычетъ. Пусть еще:

$$\square B = FG = DC \cdot FH.$$

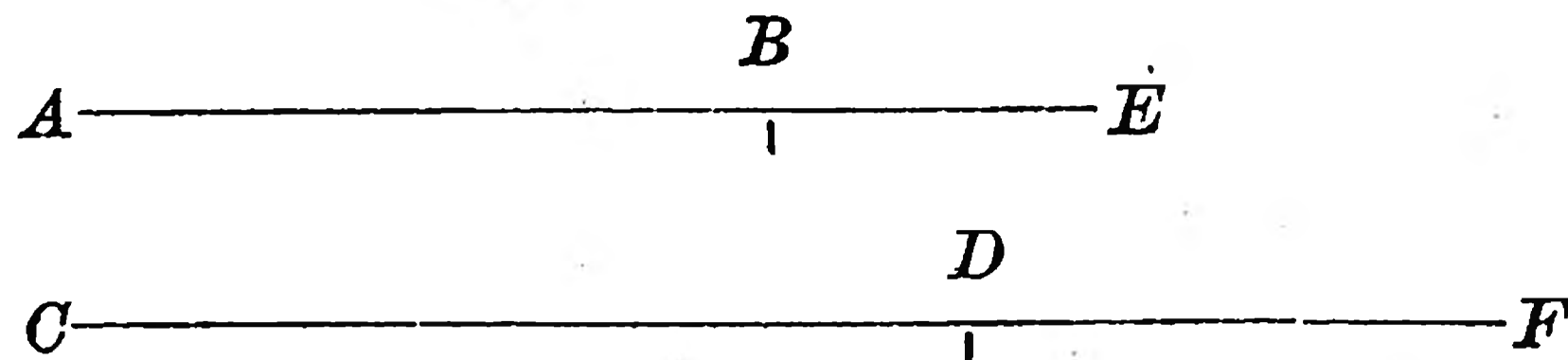
Фиг. 427.



Такъ какъ  $\square A$  и  $\square B$  соизмѣримы, т. е. соизмѣримы  $CE$  и  $FG$ , то соизмѣримы площади  $CF$  и  $FH$ , слѣдовательно (кн. 10, пред. 104)  $FH$  есть пятый вычетъ. Но  $CD$  есть раціональная прямая, а  $CD \cdot FH = \square B$ , слѣдовательно (кн. 10, пред. 96),  $B$  есть прямая, которая съ раціональнымъ прямоугольникомъ даетъ цѣлую среднюю площадь.

Предложеніе 108. Каждая прямая  $CD$  соизмѣримая съ прямою  $AB$ , которая съ среднимъ прямоугольникомъ даетъ цѣлую среднюю площадь, есть сама того-же свойства (фиг. 428).

Фиг. 428.



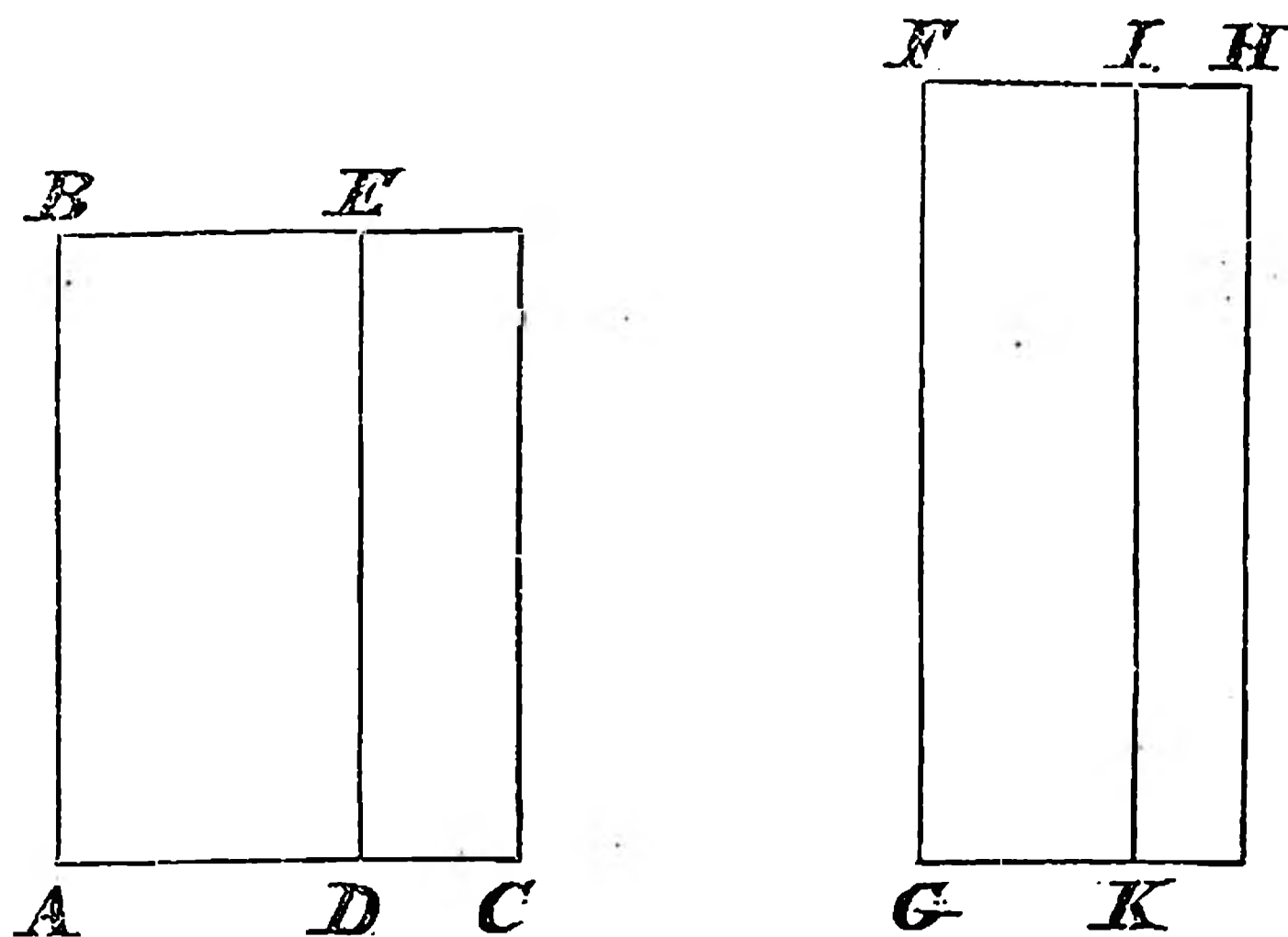
Доказат. Пусть все будетъ какъ выше, то (кн. 10, пред. 79)  $AE$  и  $EB$  будутъ несоизмѣримы въ степени, площади  $\square AE + \square EB$  и  $AE \cdot EB$  будутъ обѣ среднія и несоизмѣримы. Послѣ этого, точно также, можно доказать, что  $CF$  и  $FD$ , а также  $\square CF + \square FD$  и  $CF \cdot FD$  соизмѣримы съ предыдущими, слѣдовательно какъ первыя въ степени несоизмѣримы, то

объ послѣдніа суть средніа и несоизмѣримыа. Слѣдовательно (кн. 10, пред. 79)  $CD$  есть прямая, которая съ среднимъ прямоугольникомъ даетъ третью среднюю площадь.

*Предложеніе 109.* Если отъ раціональнаго прямоугольника  $BC$  вычтемъ средній  $BD$ , то прямая, квадратыщая остатокъ  $CE$ , будетъ одна изъ двухъ ирраціональныхъ прямыхъ, или *вычетъ*, или *малая ирраціональная* (фиг. 429).

*Доказат.* Пусть  $FG$  будетъ раціональная прямая, на которой построимъ прямоугольники  $GH=GE.FH=BC$  и  $FK=GF.FI=BD$ , слѣдовательно  $EC=KH$ .

Фиг. 429.



Такъ какъ  $BC$ , а также и  $GH$  суть раціональныя площади, но  $BD$  а также  $FK$  суть площади средніа, то (кн. 10, пред. 21) прямая  $FH$  будетъ раціональна и соизмѣрима по длинѣ съ  $GF$ , но (кн. 10, пред. 23)  $FI$  раціональна и несоизмѣрима по длинѣ съ  $FG$ , слѣдовательно (кн. 10, пред. 13)  $FH$  и  $FI$  по длинѣ несоизмѣримы. Откуда видимъ, что  $FH$  и  $FI$  суть раціональныя прямыя только въ степени соизмѣримыа, слѣдовательно (кн. 10, пред. 74)  $IH$  есть *вычетъ*, къ которому прибавлена прямая  $IF$ . Итакъ прямая  $FH$  можетъ квадратить надъ  $IF$  на квадратъ, коего сторона или по длинѣ соизмѣрима, или несоизмѣрима съ нею.

Положимъ *первое*: то, такъ какъ  $FH$  и  $FG$  соизмѣримы,  $IH$  есть *первый вычетъ*. Слѣдовательно, какъ  $FG$  есть раціональная прямая, то (кн. 10, пред. 92) прямая, квадратыщая площадь  $KH$ , т. е.  $EC$ , есть *вычетъ*.

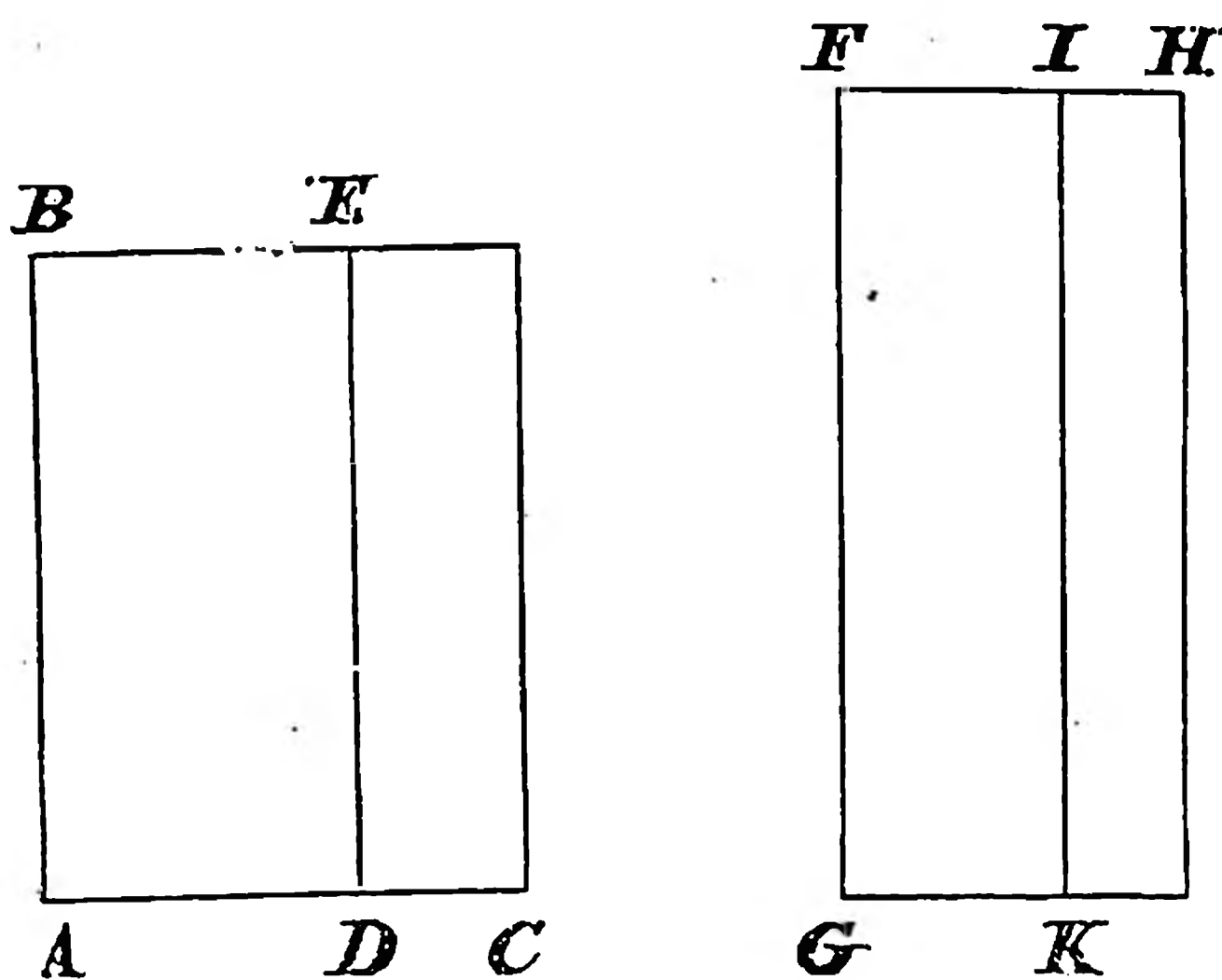
Положимъ *второе*: то, такъ какъ  $FH$  и  $FG$  несоизмѣримы по длинѣ,  $IH$  есть *четвертый вычетъ*. Слѣдовательно, какъ  $FG$  есть раціональная прямая, то (кн. 10, пред. 95) прямая, квадратыщая площадь  $KH$ , т. е.  $EC$  есть *малая ирраціональная*.

*Предложеніе 110.* Если отъ средняго прямоугольника  $BC$  вычтемъ

раціональний  $BD$ , то прямая, квадратыщая остатокъ  $CE$  будетъ или *первый средний вычетъ*, или та, которая съ раціональнымъ прямоугольникомъ даетъ цѣлую среднюю площадь (фиг. 430).

*Доказат.* Пусть  $FG$  будетъ раціональная прямая и сдѣлаемъ тоже построение какъ и выше, то слѣдуетъ (кн. 10, пред. 23), что  $FH$  будетъ раціональная прямая съ  $FG$  несоизмѣримая по длинѣ, а  $FI$  (кн. 10, пред. 21) будетъ также раціональна и соизмѣрима съ  $FG$ , слѣдовательно (кн. 10, пред. 13)  $FH$  и  $FI$  по длинѣ несоизмѣримы.

Фиг. 430.



Слѣдовательно прямые  $FH$  и  $FI$  раціональны только въ степени соизмѣримы. Откуда видимъ (кн. 10, пред. 74), что  $HI$  есть *вычетъ*, къ которому прибавлена прямая  $IF$ .

Теперь, прямая  $FH$  можетъ квадратить надъ прямою  $FI$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима или несоизмѣрима съ нею.

Положимъ *первое*: то, такъ какъ  $FI$  и  $FG$  по длинѣ соизмѣримы, то  $HI$  будетъ *второй вычетъ*. Слѣдовательно, какъ  $FG$  есть раціональная прямая, то (кн. 10, пред. 93) прямая квадратыщая площадь  $KH$ , т. е.  $EC$  есть *первый средний вычетъ*.

Положимъ *второе*: то, такъ какъ  $FI$  и  $FG$  по длинѣ соизмѣримы, то  $HI$  будетъ *пятый вычетъ*. Слѣдовательно, какъ  $FG$  есть раціональная прямая, то (кн. 10, пред. 96) прямая, квадратыщая площадь  $KH$ , т. е.  $EC$  есть та, которая съ раціональнымъ прямоугольникомъ даетъ цѣлую среднюю площадь.

*Предложеніе 111.* Если отъ средняго прямоугольника  $BC$  отнимемъ несоизмѣримый съ нимъ *средній* прямоугольникъ  $BD$ , то прямая, квадратыщая остатокъ  $CE$  будетъ или *первый средний вычетъ*, или прямая, которая съ *среднимъ* прямоугольникомъ даетъ цѣлую среднюю площадь (фиг. 431).

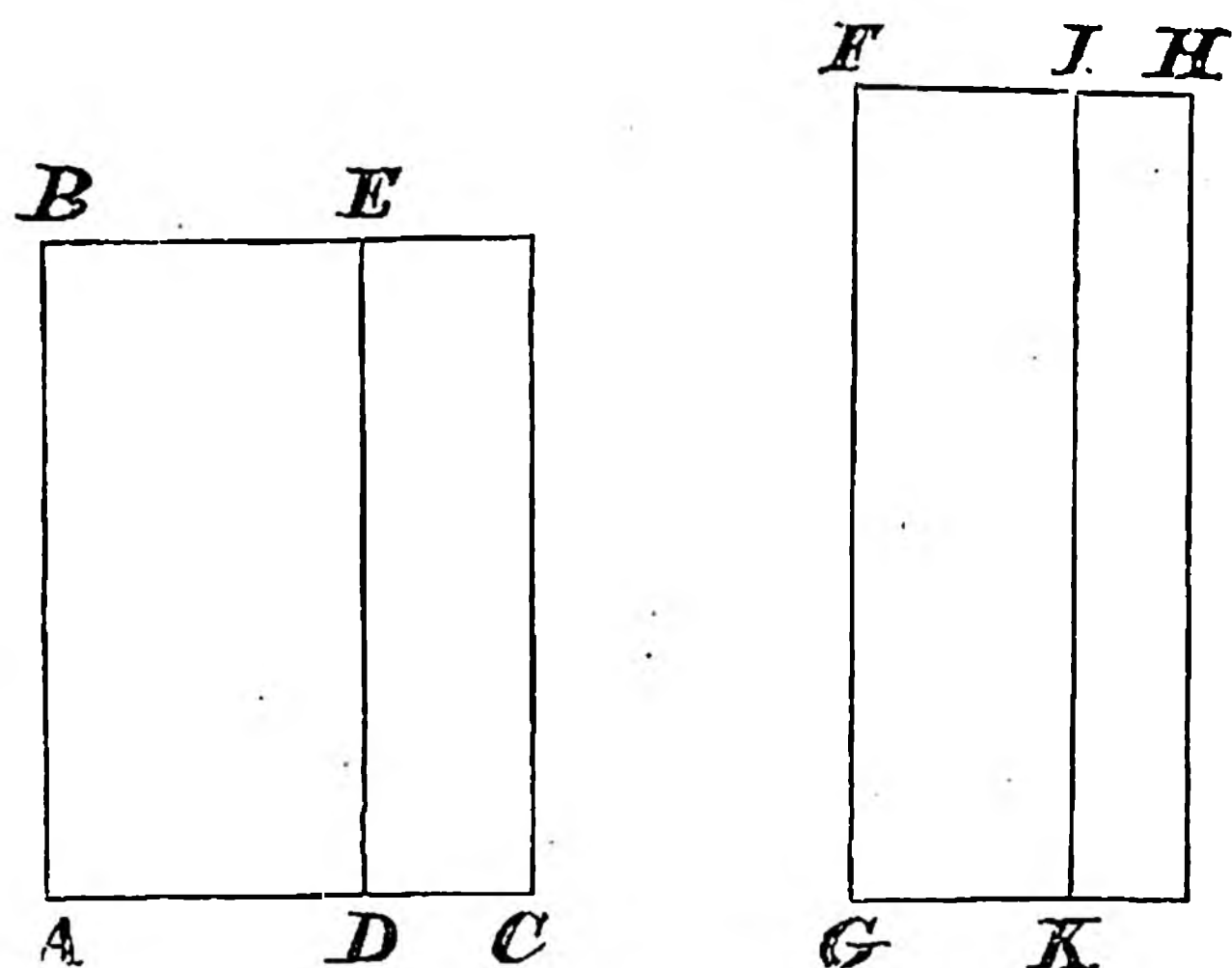
*Доказат.* Сдѣлаемъ тоже построение что и выше.

Такъ какъ  $BC$  и  $BD$ , а также  $GH$  и  $FK$  суть *среднія* несоизмѣримыя площади, то (кн. 6, пред. 1 и кн. 10, пред. 10)  $FH$  и  $FI$  по длинѣ



несоизмѣримы. Откуда видимъ, что прямыя  $FH$  и  $FI$  суть раціональныя только въ степени соизмѣримыя, слѣдовательно (кн. 10, пред. 74)  $HI$  есть *вычетъ*, къ которому прибавлена прямая  $FI$ . Теперь  $FH$  квадратитъ надъ  $FI$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима или несоизмѣрима съ нею.

Фиг. 431.



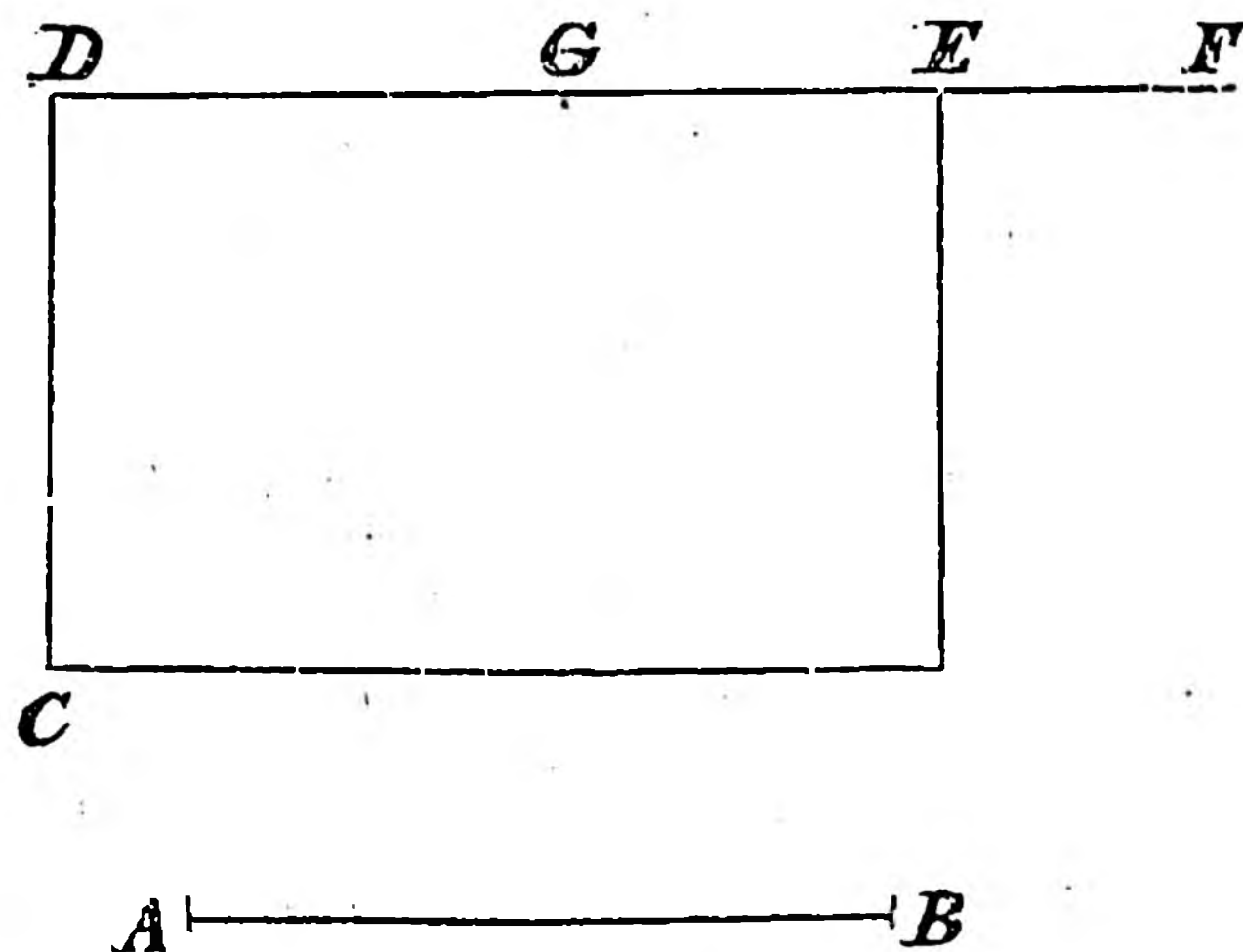
Положимъ *первое*: то, такъ какъ  $FH$  и  $FI$  съ  $FG$  по длинѣ соизмѣримы, то  $HI$  есть *третій вычетъ*. Слѣдовательно, какъ  $FG$  есть раціональная прямая, то (кн. 10, пред. 94) прямая, квадратыщая площадь  $HK$ , т. е.  $CE$  есть *второй средній вычетъ*.

Положимъ *второе*: то, такъ какъ  $FH$  и  $FI$  съ  $FG$  по длинѣ несоизмѣримы, то  $HI$  есть *шестой вычетъ*. Слѣдовательно, какъ  $FG$  есть раціональная прямая, то (кн. 10, пред. 97) прямая, квадратыщая площадь  $HK$ , т. е.  $CE$  есть прямая, которая съ *среднимъ прямоугольникомъ* даетъ *цѣлую среднюю площадь*.

*Предложеніе 112.* Вычеты отличны отъ биноміальныхъ (фиг. 432).

*Доказат.* Пусть, если возможно, прямая  $AB$  будетъ и *вычетъ* и *биноміальная*; пусть  $DC$  будетъ раціональная прямая, на которой построенъ прямоугольникъ  $CE=DC.DE=\square AB$ .

Фиг. 432.



Такъ какъ  $AB$  есть *вычетъ*, то (кн. 10, пред. 98)  $DE$  будетъ *первый вычетъ*. Прибавимъ къ  $DE$  прямую  $EF$ , то  $DF$  и  $FE$  будутъ пря-

мыя раціональныя только въ степени соизмѣримыя;  $DF$  квадратитъ надъ  $EF$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ нею и  $DF$  есть прямая соизмѣримая съ  $CD$ .

Но  $AB$  есть вмѣстѣ и биноміальная, по допущенію, слѣдовательно (кн. 10, пред. 61)  $DE$  есть первая биноміальная. Пусть  $DE$  въ точкѣ  $G$  раздѣлена на свои члены, изъ коихъ  $DG$  есть большій, то  $DG$  и  $GE$  будутъ раціональныя прямыя только въ степени соизмѣримыя;  $DG$  квадратитъ надъ  $GE$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ нею и  $DG$  соизмѣрима съ  $CD$ .

Слѣдовательно, какъ  $DG$  соизмѣрима съ  $DC$ , а  $DC$  съ  $DF$ , то (кн. 10, пред. 12)  $DF$  и  $DG$  по длинѣ соизмѣримы, а также соизмѣримы по длинѣ  $DF$  и  $FG$ , но такъ какъ  $DF$  есть раціональная прямая, слѣдовательно  $FG$  есть также раціональна. Далѣе, какъ  $DF$  и  $FG$  соизмѣримы, а  $DF$  и  $FE$  несоизмѣримы по длинѣ, то (кн. 10, пред. 13)  $FG$  и  $FE$  по длинѣ несоизмѣримы. Откуда слѣдуетъ, такъ какъ  $FE$  есть раціональная прямая, что  $FG$  и  $FE$  суть раціональныя прямыя только въ степени соизмѣримыя. Слѣдовательно (кн. 10, пред. 74)  $EG$  есть *вычетъ*, но было показано, что  $EG$  есть раціональная прямая, что невозможно. Слѣдовательно *вычетъ* не можетъ быть вмѣстѣ и биноміальною.

*Слѣдствіе.* *Вычеты* и слѣдующія за ними ирраціональности отличны не только отъ *среднихъ* линій, но различны между собою.

Въ самомъ дѣлѣ, прямоугольникъ построенный на раціональной прямой равный квадрату построенному на *средней* прямой имѣетъ высоту (кн. 10, пред. 23) раціональную съ основаніемъ несоизмѣримою прямую, а если онъ равенъ квадрату построенному на *вычетѣ*, то высота будетъ *первый вычетъ* (кн. 10, пред. 98). Если сторона квадрата будетъ *первый средний вычетъ*, то высота прямоугольника будетъ *второй вычетъ* (кн. 10, пред. 99). Если сторона квадрата будетъ *второй средний вычетъ*, то высота прямоугольника будетъ *третій вычетъ*. Если сторона квадрата будетъ *малая ирраціональная*, то высота прямоугольника будетъ *четвертый вычетъ* (кн. 10, пред. 101). Если сторона квадрата будетъ прямая, которая съ раціональнымъ прямоугольникомъ даетъ *цѣлую среднюю площадь*, то высота прямоугольника будетъ *пятый вычетъ* (кн. 10, пред. 102). Если сторона квадрата будетъ прямая, которая съ *среднимъ* прямоугольникомъ даетъ *цѣлую среднюю площадь*, то высота прямоугольника есть *шестой вычетъ* (кн. 10, пред. 103). Слѣдовательно упомянутыя ирраціональныя прямыя отличаются отъ первыхъ, такъ какъ высота будетъ раціональная прямая, а между собою потому, что даютъ для высоты *вычеты* различныхъ порядковъ. Но было доказано (кн. 10, пред. 112), что *вычеты* отличны отъ

биноміальнихъ, точно также (кн. 10, пред. 73, слѣд.) биноміальныя и за ними слѣдующія ирраціональности отличаются отъ среднихъ и между собою. Слѣдовательно всѣхъ различныхъ ирраціональностей числомъ тринадцать. Онѣ суть слѣдующія:

1. Среднія (пред. 22).
2. Биноміальная (пред. 37).
3. Первая биноміальная (пред. 38).
4. Вторая биноміальная (пред. 39).
5. Большая ирраціональная (пред. 40).
6. Квадратящая раціональный и средній прямоугольники (пред. 41).
7. Квадратящая двѣ среднія (пред. 42).
8. Вычеты (пред. 74).
9. Первый средній вычетъ (пред. 75).
10. Второй средній вычетъ (пред. 76).
11. Малая ирраціональная (пред. 77).
12. Которая съ раціональнымъ прямоугольникомъ даетъ цѣлую среднюю площадь (пред. 78).
13. Которая съ среднимъ прямоугольникомъ даетъ цѣлую среднюю площадь (пред. 79).

*Предложеніе 113.* Прямоугольникъ, построенный на биноміальной  $BC$ , равный квадрату, построенному на раціональной прямой  $A$ , имѣетъ высотой вычетъ  $EF$ , одного порядка съ биноміальною и коего члены соизмѣримы съ членами биноміальной и имѣютъ между собою отношеніе равное отношенію членовъ биноміальной (фиг. 433).

*Доказат.* 1. Пусть биноміальная  $BC$  въ точкѣ  $D$  раздѣлена на свои члены  $CD$  и  $DB$ , изъ коихъ  $CD > DB$ . И пусть:

$$\square A = BD.G$$

то, такъ какъ  $\square A = BC.EF$ ,  $BD.G = BC.EF$ , откуда (кн. 6, пред. 16):

$$CB:BD = G:EF$$

Такъ какъ  $CB > BD$ , то  $G > EF$ . Пусть  $G = EH$ . Слѣдовательно:

$$CB:BD = EH:EF$$

откуда (кн. 5, пред. 17):

$$CD:BD = FH:EF$$

Пусть теперь будетъ:

$$FH:FE = FI:EI$$

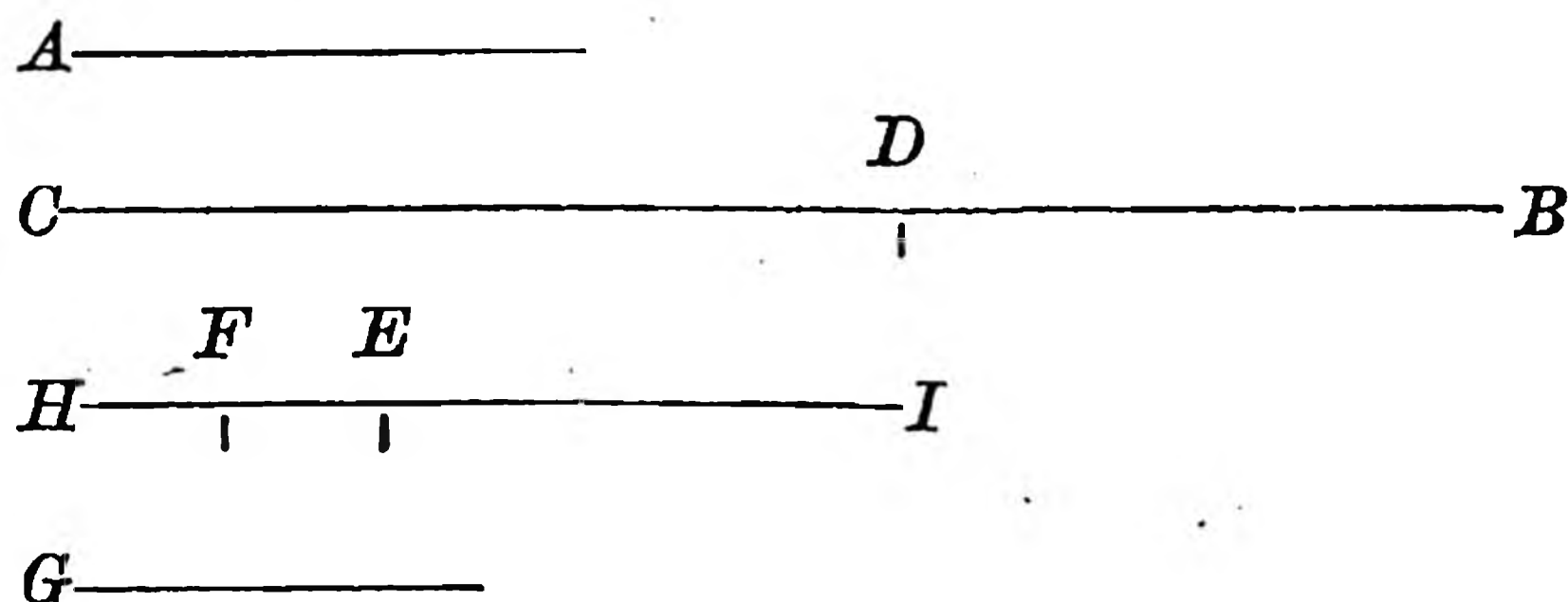
то (кн. 5, пред. 12):

$$HI:FI=FI:IE.$$

Слѣдовательно:

$$HI:FI=CD:DB.$$

Фиг. 433.



Но (кн. 10, пред. 37)  $\square CD$  и  $\square DB$  соизмѣримы, слѣдовательно (кн. 10, пред. 10) и  $\square HI$  съ  $\square FI$  также соизмѣримы. Но:

$$HI:FI=FI:IE$$

слѣдовательно (кн. 6, пред. 20, слѣд.):

$$\square HI:\square FI=HI:IE.$$

Откуда видимъ (кн. 10, пред. 10), что  $HI$  и  $IE$  соизмѣримы, слѣдовательно (кн. 10, пред. 16) также соизмѣримы  $HE$  и  $EI$ .

Такъ какъ  $\square A=BD.G$ , а  $G=HE$ , то:

$$\square A=BD.HE$$

но  $\square A$  есть раціональная площадь, слѣдовательно  $BD.HE$  есть площадь также раціональная. Но (кн. 10, пред. 37)  $BD$  есть раціональная прямая, слѣдовательно (кн. 10, пред. 21)  $HE$  есть также раціональная прямая съ  $BD$  соизмѣримая; откуда, такъ какъ  $HE$  и  $EI$  соизмѣримы, прямая  $EI$  раціональна и соизмѣрима съ  $BD$ .

Такъ какъ мы имѣли:

$$CD:BD=FI:IE$$

то, какъ  $EI$  раціональна и по длинѣ соизмѣрима съ  $BD$ , то  $FI$  будетъ также раціональная прямая съ  $CD$  соизмѣримая. Далѣе, такъ какъ (кн. 10, пред. 37)  $CD$  и  $BD$  только въ степени соизмѣримы, то также только въ степени соизмѣримы  $FI$  и  $IE$ . Слѣдовательно прямыя  $FI$  и  $IE$  раціональны только въ степени соизмѣримы, слѣдовательно (кн. 10, пред. 74)  $EF$  есть



вычетъ, коего члены  $FI$  и  $IE$ , съ членами  $CD$  и  $BD$  биноміальной  $BC$  соизмѣримы и имѣ пропорціональны.

2. Биноміальная  $BC$  можетъ быть *первою, второю или третьею*, т. е. въ пропорціи:

$$CD : BD = FI : IE$$

$CD$  квадратитъ надъ  $BD$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ  $CD$ , и  $CD$  или  $BD$  соизмѣримы съ данною раціональною прямою или ни  $CD$ , ни  $BD$  несоизмѣримы съ нею, то  $FI$  будетъ квадратитъ надъ  $IE$  на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ  $FI$  а также  $FI$  или  $IE$  будутъ или одна, или другая соизмѣримы съ данною раціональною прямою или обѣ съ нею несоизмѣримы. Слѣдовательно вычетъ  $EF$  съ биноміальною  $BC$  будетъ одного порядка или перваго, или втораго, или третьаго. Точно также можетъ быть доказано, что  $EF$  и  $BC$  будутъ въ одно время четвертаго, пятаго или шестаго порядка. Слѣдовательно биноміальная  $BC$  и вычетъ  $EF$  будутъ всегда одного порядка.

*Предложеніе 114.* Прямоугольникъ, построенный на вычетѣ  $BD$ , равный квадрату построенному на раціональной прямой  $A$ , имѣетъ высоту  $IH$  биноміальную, которая съ вычетомъ  $BD$  одного порядка и коей члены соизмѣримы съ членами вычета и имѣ пропорціональны (фиг. 434).

*Доказат.* 1. Къ вычету  $BD$  прибавимъ прямую  $DC$ , то (кн. 10, пред. 74)  $BC$  и  $CD$  суть раціональныя прямая только въ степени соизмѣримыя. Пусть  $\square A = BC.G$ , слѣдовательно площадь  $BC.G$  раціональна, но  $BC$  есть раціональная прямая, слѣдовательно (кн. 10, пред. 21)  $G$  раціональна и по длинѣ соизмѣрима съ  $BC$ .

Такъ какъ;

$$\square A = BC.G = BD.IH$$

то (кн. 6, пред. 16):

$$BC : BD = IH : G$$

Но  $BC > BD$ , слѣдовательно  $IH > G$ . Положимъ  $G = IE$ , то  $IE$  и  $BC$  соизмѣримы по длинѣ. Изъ пропорціи:

$$CB : BD = IH : IE$$

слѣдуетъ:

$$BC : CD = IH : HE$$

Положимъ теперь:

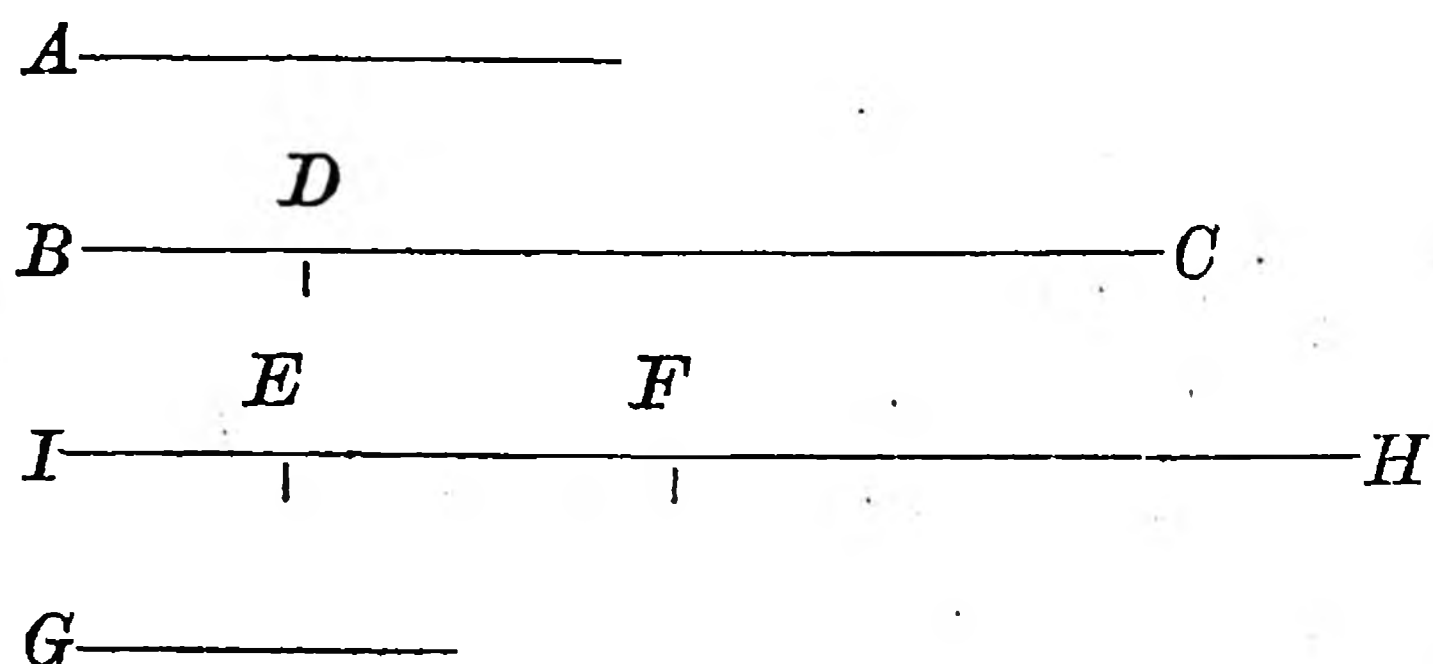
$$IH : HE = HF : FE$$

то (кн. 5, пред. 19):

$$IF : FH = IH : HE = BC : CD$$

слѣдовательно, такъ какъ  $BC$  и  $CD$  только въ степени соизмѣримы, то  $IF$  и  $FH$  также соизмѣримы только въ степени.

Фиг. 434.



Изъ пропорцій:

$$IF : FH = IH : HE = HF : FE$$

слѣдуетъ (кн. 6, пред. 20, слѣд.):

$$IF : FE = \square IF : \square FH$$

откуда, такъ какъ  $\square IF$  и  $\square FH$  соизмѣримы, то  $IF$  и  $FE$  также соизмѣримы, слѣдовательно (кн. 6, пред. 16)  $FI$  и  $IE$  по длинѣ соизмѣримы, но  $IE$  есть раціональная прямая соизмѣримая по длинѣ съ  $BC$ , слѣдовательно  $FI$  также раціональна и соизмѣрима по длинѣ съ  $BC$ .

Далѣе, мы имѣемъ:

$$BC : CD = IF : FH$$

откуда:

$$BC : IF = CD : FH$$

но  $BC$  и  $IF$  по длинѣ соизмѣримы, слѣдовательно  $CD$  и  $FH$  также по длинѣ соизмѣримы. Такъ какъ  $BC$  и  $CD$  суть раціональныя прямая только въ степени соизмѣримыя, то  $IF$  и  $FH$  суть также раціональныя прямая только въ степени соизмѣримыя. Слѣдовательно (кн. 10, пред. 37)  $IH$  есть биноміальная, коей члены  $IF$  и  $FH$  соизмѣримы съ членами  $BC$  и  $CD$  вычета  $BD$  и имъ пропорціональны.

2. Точно также, какъ выше, можно показать, что биноміальная  $IH$  съ вычетомъ  $BD$  будутъ всегда одного порядка.

*Предложеніе 115.* Прямоугольникъ, заключенный между вычетомъ  $AB$  и биноміальною  $CD$ , коей члены соизмѣримы съ членами вычета и имъ пропорціональны, квадратится раціональною прямою  $G$  (фиг. 435).

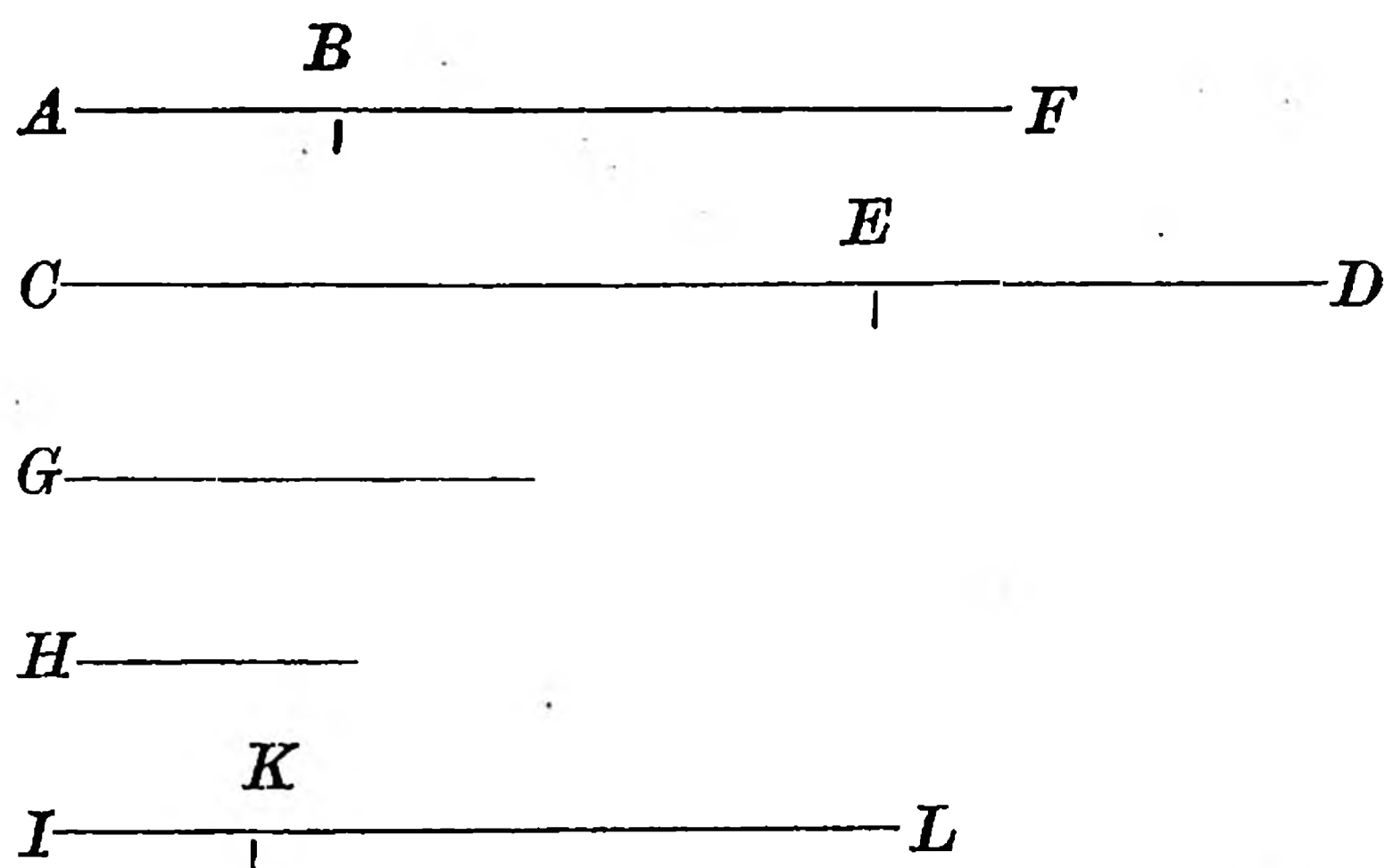
*Доказат.* Прибавимъ къ  $AB$  прямую  $BF$  и пусть  $CD$  въ точки  $E$  раздѣлена на свои члены  $CE$  и  $ED$ , изъ коихъ  $CE > ED$ . По условію члены  $CE$  и  $ED$  соизмѣримы съ членами  $AF$  и  $FB$  и:

$$CE:ED=AF:FB$$

а также  $AB \cdot CD = \square G$ . Слѣдовательно надобно доказать, что  $G$  есть раціональная прямая. Пусть  $H$  будетъ раціональная прямая и пусть прямоугольникъ построенный на  $CD$ , т. е.  $CD \cdot IK = \square H$ , то (кн. 10, пред. 113)  $IK$  есть *вычетъ*, коего члены  $IL$  и  $LK$  соизмѣримы съ биноміальными членами  $CE$  и  $ED$ , но:

$$CE:ED=IL:LK$$

Фиг. 435.



Слѣдовательно, такъ какъ по условію:

$$CE:ED=AF:FB$$

и

$$AF:FB=IL:LK$$

то:

$$AF:IL=FB:LK$$

откуда (кн. 5, пред. 19)

$$AB:IK=AF:IL$$

Слѣдовательно, какъ  $AF$  и  $IL$  по длинѣ соизмѣримы, то  $AB$  и  $IK$  также по длинѣ соизмѣримы. Но (кн. 6, пред. 1):

$$AB:IK=CD \cdot AB:CD \cdot IK$$

слѣдовательно  $CD \cdot AB$  и  $CD \cdot IK$  соизмѣримы, т. е. соизмѣримы и квадраты  $\square H$  и  $\square G$ . Но  $\square H$  есть раціональная площадь, слѣдовательно площадь  $\square G$  и прямая  $G$  также раціональны.

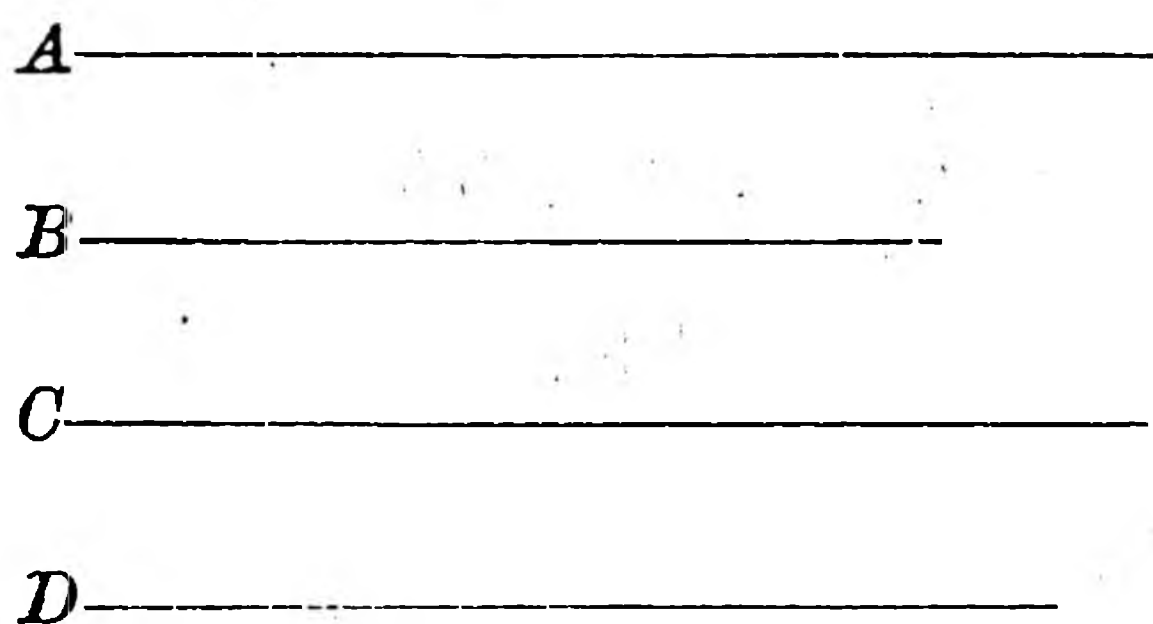
*Слѣдствіе.* Изъ этого слѣдуетъ, что возможенъ раціональный прямоугольникъ заключенный между ирраціональными прямыми.

*Предложеніе 116.* Изъ какой нибудь средней прямой  $A$ , можно полу-

чить безчисленное множество ирраціональныхъ линій отличныхъ отъ всѣхъ предыдущихъ (фиг. 436).

*Доказат.* Пусть  $B$  будетъ раціональная прямая, слѣдовательно прямоугольникъ  $A.B$  (кн. 10, пред. 39) будетъ ирраціональный.

Фиг. 436.



Положимъ  $A.B = \square C$ , то прямая  $C$  будетъ ирраціональная, но отличная отъ всѣхъ предыдущихъ. Въ самомъ дѣлѣ, ни на одной изъ нихъ построенный квадратъ не равенъ прямоугольнику у котораго бы основаніе было *средняя* прямая, что видно изъ предложеній 61, 62, 63, 64, 65 и 66 и изъ предложеній 98, 99, 100, 101, 102 и 103.

Далѣе, пусть  $B.C = \square D$ , то  $D$  будетъ опять ирраціональная прямая отличная отъ всѣхъ предыдущихъ, такъ какъ ни на одной изъ нихъ построенный квадратъ не даетъ въ равномъ ему прямоугольникѣ основанія  $C$ .

Это заключеніе можетъ быть продолжено до бесконечности, слѣдовательно можно получить безчисленное множество ирраціональностей отличныхъ отъ всѣхъ предыдущихъ.

*Предложеніе 117.* Въ каждомъ квадратѣ  $ABCD$  діагональ  $AC$  съ стороною  $AB$  суть прямая по длинѣ несоизмѣримыя (фиг. 437).

*Доказат.* Положимъ, что  $AC$  и  $AB$  соизмѣримы. Если  $AC$  и  $AB$  соизмѣримы, то онѣ относятся между собою какъ несократимыя числа, на примѣръ  $EF$  и  $G$ , т. е.:

$$AC : AB = EF : G$$

Такъ какъ  $AC > AB$ , то число  $EF > G$ , слѣдовательно оно не можетъ быть единицей. Изъ предыдущей пропорціи мы имѣемъ:

$$\square AC : \square AB = EF^2 : G^2$$

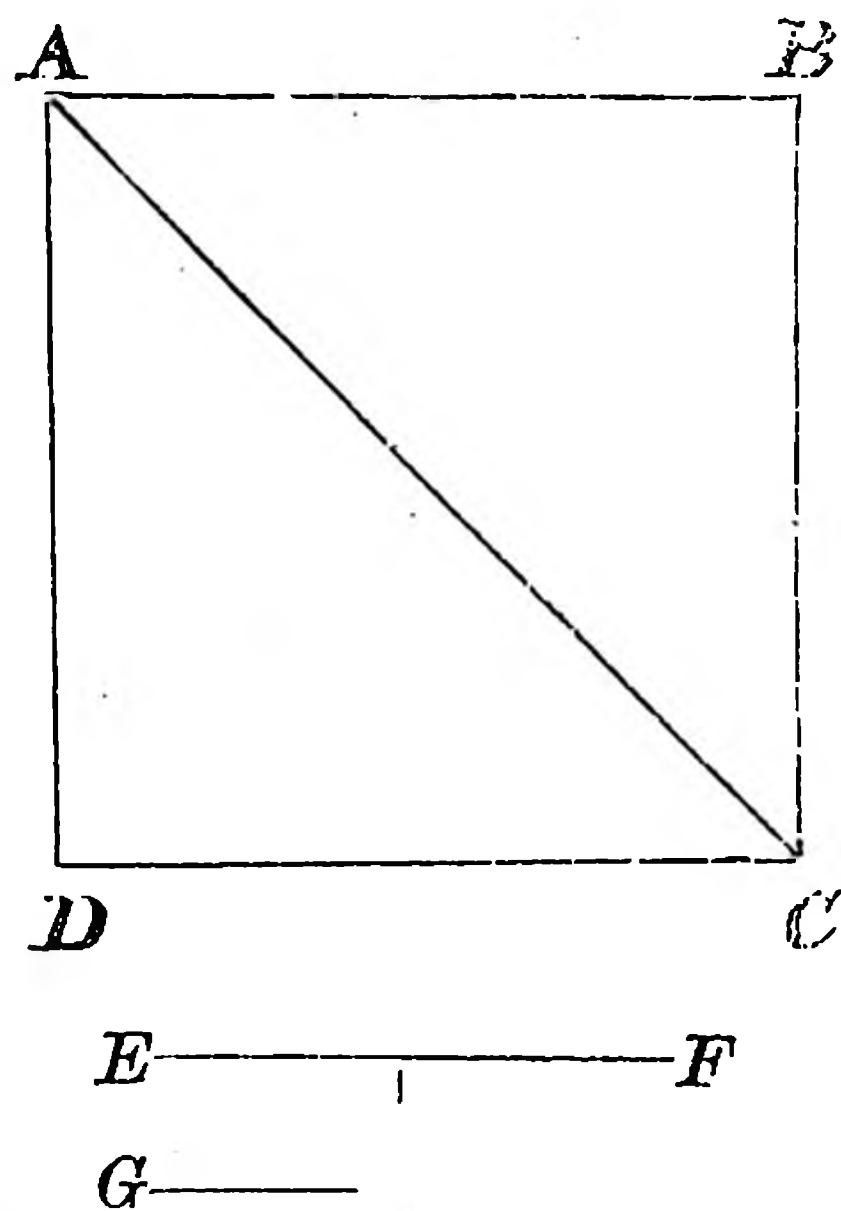
но (кн. 1, пред. 47)  $\square AC = 2\square AB$ , слѣдовательно и  $EF^2 = 2G^2$ . Изъ этого равенства видимъ, что число  $EF^2$  есть четное, а слѣдовательно и  $EF$  есть также четное число. Пусть оно въ точкѣ  $H$  раздѣлено пополамъ.

Такъ какъ числа  $EF$  и  $G$  несократимы, то онѣ суть взаимно про-



стѣя, но  $EF$  есть четное число, слѣдовательно  $G$  четнымъ числомъ быть не можетъ. Итакъ число  $G$  есть нечетное.

Фиг. 437.



Такъ какъ  $EF$  въ точкѣ  $H$  раздѣлена пополамъ, то  $EF=2EH$  и  $EF^2=4EH^2$  (кн. 8, пред. 11), но  $EF^2=2G^2$ , слѣдовательно  $2G^2=4EH^2$ , откуда  $G^2=2EH^2$ , а слѣдовательно  $G^2$ , а также и  $G$  суть числа четныя (кн. 9, пред. 23), что противорѣчитъ выше показанному. слѣдовательно не можетъ быть чтобы прямыя  $AC$  и  $AB$  были соизмѣримы.

*Другое доказат.* Такъ какъ (кн. 1, пред. 47)  $\square AC=2\square AB$ , то:

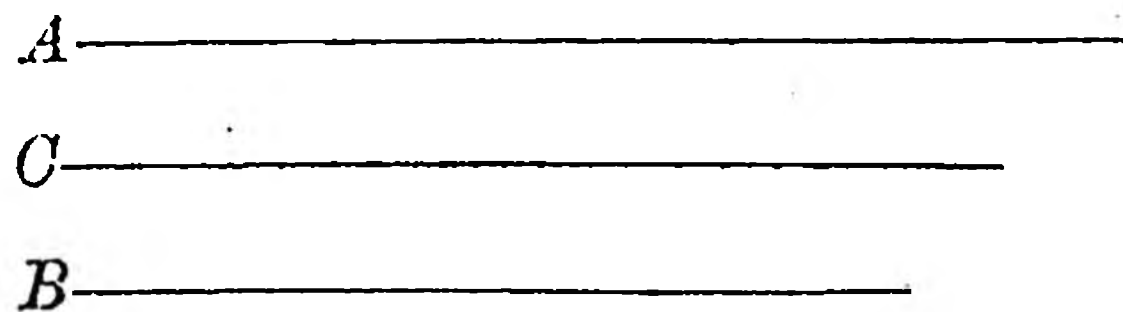
$$\square AC : \square AB = 2 : 1$$

слѣдовательно площади  $\square AC$  и  $\square AB$  не относятся между собою какъ квадратныя числа, а потому (кн. 10, пред. 9) прямыя  $AC$  и  $AB$  несоизмѣримы.

*Примѣчаніе 12.* Полагають, что только второе изъ этихъ доказательствъ принадлежитъ Евклиду.

*Замѣчаніе.* Если найдемъ двѣ несоизмѣримыя прямыя  $A$  и  $B$ , то легко найти и несоизмѣримыя фигуры (фиг. 438).

Фиг. 438.



Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ между  $A$  и  $B$  средне-пропорціональную прямую  $C$ , то (кн. 6, пред. 20):

$$A : B = \text{фиг. } A : \text{фиг. } C$$

Эти фигуры могутъ быть квадратныя или другія, какія нибудь, подобныя прямолинейныя фигуры, или круги съ діаметрами  $A$  и  $C$ , такъ какъ

будетъ показано (кн. 12, пред. 2), что площади круговъ относятся между собою какъ квадраты ихъ діаметровъ. Слѣдовательно могутъ быть найдены несоизмѣримыя фигуры, т. е. площади. Легко также видѣть, что можно найти и несоизмѣримыя тѣла. Въ самомъ дѣлѣ, построимъ на предъидущихъ площадяхъ тѣла равной высоты, онѣ могутъ быть призмы или пирамиды, конусы или цилиндры; эти тѣла будутъ относиться между собою какъ ихъ основанія (кн. 11, пред. 32 и кн. 12, пред. 5, 6 и 11), что будетъ доказано ниже; слѣдовательно и тѣла будутъ соизмѣримы или несоизмѣримы, смотря потому будутъ ли ихъ основанія соизмѣримы или несоизмѣримы.

Изъ этого ясно видно, что соизмѣримость и несоизмѣримость имѣетъ мѣсто не только между линіями и площадями, но и между тѣлами.

*Примѣчаніе 13.* Полагаютъ, что вторая часть этого послѣдняго замѣчанія, въ которой говорится о тѣлахъ, не принадлежитъ Евклиду, а вставлена послѣ.

*Примѣч. 14.* Мы видѣли, что вторая книга Началъ Евклида содержитъ теоремы, которыя суть ничто иное какъ алгебраическія преобразованія, вытекающія изъ трехъ основныхъ законовъ алгебраическихъ количествъ:

*Законъ перестановительный.*

$$a+b=b+a, \text{ и } ab=ba.$$

*Законъ распределительный:*

$$a(b \pm c) = ab \pm ac$$

*Законъ повторительный:*

$$a^n \cdot a^m = a^{m+n}$$

Изъ этихъ трехъ законовъ вытекаютъ слѣдующія преобразованія алгебраическихъ фразъ:

1.  $ab+ac+ad+\dots=a(b+c+d+\dots)$
2.  $(a+b)^2=a(a+b)+b(a+b)$
3.  $(a+b)a=ab+a^2$
4.  $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$
5.  $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$
6.  $(2a+b)b+a^2=(a+b)^2$
7.  $(a+b)^2+a^2=2(a+b)a+b^2$
8.  $4(a+b)a+b^2=(2a+b)^2$
9.  $(a+b)^2+(a-b)^2=2a^2+2b^2$
10.  $b^2+(a+b)^2=2(\frac{1}{2}a)^2+2(\frac{1}{2}a+b)^2$ .

Предложенія второй книги и суть геометрическія представленія этихъ преобразованій, т. е. это алгебра древнихъ, представленная геометрически.

Десятая книга, самая обширная, содержитъ алгебру ирраціональныхъ количествъ,

представленную геометрически. Это самая трудная изъ всѣхъ книгъ элементовъ Евклида и самая замѣчательная по геометрическому анализу.

Она начинается опредѣленіемъ *соизмѣримыхъ* (*Σύμμετροι*) и *несоизмѣримыхъ* (*ἄσύμμετροι*) величинъ. Величины соизмѣримы суть тѣ, которыя измѣряются одною и тою же мѣрою или которыя относятся между собою какъ числа. Въ противномъ случаѣ онѣ несоизмѣримы, напримѣръ  $a$  и  $\sqrt{b}$ , если  $b$  не есть число квадратное, суть величины несоизмѣримы.

*Соизмѣримыми въ степени* (*δυνάμει σύμμετροι*) онѣ называетъ такія величины, коихъ квадраты соизмѣримы, въ противномъ случаѣ онѣ суть въ *степени несоизмѣримы*, напримѣръ  $a$  и  $\sqrt{b}$  суть величины всегда въ степени соизмѣримы, напротивъ  $a$  и  $\sqrt[3]{b}$ , или  $a$  и  $b + \sqrt{c}$  суть величины *несоизмѣримы въ степени*.

Такимъ образомъ, съ произвольно взятой прямой линіей есть безчисленное множество прямыхъ линій, изъ коихъ однѣ соизмѣримы съ нею, а другія несоизмѣримы и при томъ частью по длинѣ, а частью и въ степени. Произвольно взятая прямая называется *раціональною* (*ῥητή*).

*Раціональными* Евклидъ называетъ всѣ линіи, которыя съ взятою соизмѣримы по длинѣ или только въ степени.

*Ирраціональными* (*ἄλογοι*) Евклидъ называетъ тѣ, которыя съ взятою прямою несоизмѣримы.

Евклидъ подъ *ирраціональными* величинами разумѣетъ нѣчто другое, что разумѣлъ Діофантъ и, что разумѣемъ мы. Мы называемъ ирраціональными величинами тѣ, которыя Евклидъ называетъ несоизмѣримыми. Разница состоитъ въ томъ, что Евклидъ раціональными величинами называетъ и тѣ, которыя соизмѣримы только въ степени. Слѣдовательно по Евклиду раціональныя величины суть не только  $a$  и  $b$ , но и  $\sqrt{b}$ , такъ какъ въ послѣднемъ случаѣ квадратъ отношенія  $a : \sqrt{b}$  есть соизмѣримая величина.

Квадратъ взятой раціональной прямой называется *раціональнымъ* и всѣ площади съ нимъ соизмѣримы называются *раціональными*.

Площади же несоизмѣримыя съ этимъ квадратомъ называются *ирраціональными*. *Ирраціональными* называются и прямая квадратающія *ирраціональныя* площади (кн. 10, опр. 11) (*αἱ ἵσα αὐτοῖς τετραγώνῳ ἀναγράφοισι*).

Десятую книгу по содержанію можно раздѣлить на четыре отдѣла:

1. Предложенія относящіяся къ общимъ свойствамъ соизмѣримости и несоизмѣримости (отъ 1 до 21).
2. О среднихъ прямыхъ (отъ 22 до 35).
3. Ирраціональныя прямая, получаемыя сложениемъ (отъ 36 до 72) и вычитаніемъ (отъ 73—111).
4. Предложенія отъ 112 до конца.

Переведемъ нѣкоторыя условія и предложенія на нашъ алгебраическій языкъ.

*Отдѣлъ 1.* Предложенія отъ 1 до 18 не представляетъ ничего особеннаго.

Предложеніе 11 приписываютъ математику Теететусу.

18-е предложеніе можетъ быть выражено слѣдующимъ образомъ:

*Предложеніе 18.* Если на большей изъ двухъ прямыхъ  $AB$  и  $CD$ ,  $CD > AB$ , построимъ (фиг. 439) прямоугольникъ  $CF$  равный  $\frac{1}{4} AB^2$  и при томъ такъ, чтобы дополненіе его было квадратъ, т. е. чтобы  $DE = EF$  и если при этомъ прямая  $CE$  и  $ED$  соизмѣримы, то прямая  $\sqrt{CD^2 - AB^2}$  будетъ соизмѣрима съ  $CD$ , напротивъ если  $CE$  и  $ED$  будутъ несоизмѣримы, то и прямая  $\sqrt{CD^2 - AB^2}$  и  $CD$  будутъ также несоизмѣримы.

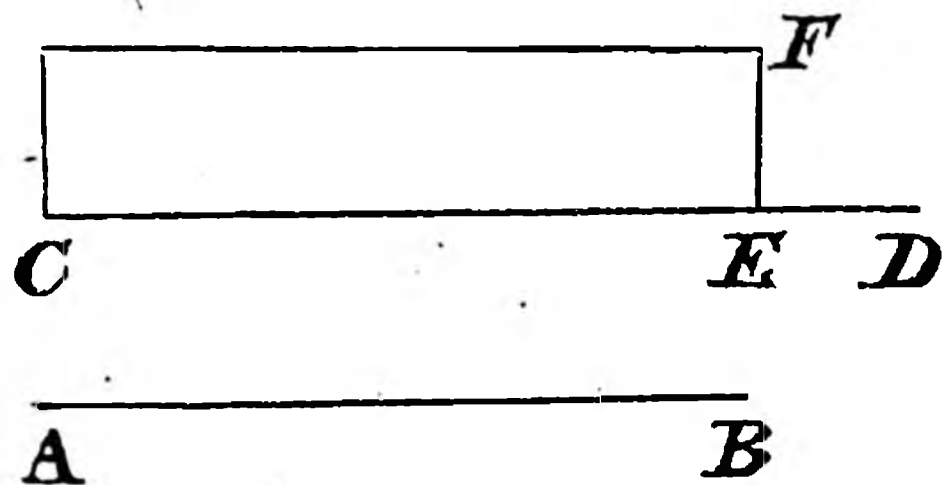
*Доказат.* Если  $CE$  и  $ED$  соизмѣримы то онѣ относятся какъ числа, положимъ:

$$CE:ED=m:n$$

но по условію мы имѣемъ:

$$CE \cdot EF = CE \cdot ED = \frac{1}{4} AB^2$$

Фиг. 439.



слѣдовательно:

$$ED = \frac{1}{2} AB \sqrt{\frac{n}{m}}, \quad CE = \frac{1}{2} AB \sqrt{\frac{m}{n}}$$

откуда:

$$CD = \frac{1}{2} AB \left( \sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{m}{n}} \right) = \frac{1}{2} AB \frac{m+n}{\sqrt{mn}}$$

Слѣдовательно:

$$\sqrt{CD^2 - AB^2} = \frac{1}{2} AB \frac{m-n}{\sqrt{mn}}$$

изъ двухъ послѣднихъ выраженій мы имѣемъ:

$$\sqrt{CD^2 - AB^2} : CD = m-n : m+n$$

т. е. прямая  $\sqrt{CD^2 - AB^2}$  и  $CD$  относятся какъ числа, слѣдовательно по длинѣ соизмѣримы.

*Отдѣлъ 2.* Первая ирраціональная прямая, которая Евклидъ разсматриваетъ и называетъ *средними* ( $\mu\epsilon\sigma\eta$ ) онъ опредѣляетъ такъ: прямая, квадратищая площадь прямоугольника, коего стороны суть раціональныя прямая только въ степени соизмѣримыя, называется *среднею* ( $\mu\epsilon\sigma\eta$ ).

Формы раціональныхъ величинъ соизмѣримыхъ только въ степени суть:  $a$  и  $\sqrt{b}$  или  $\sqrt{a}$  и  $\sqrt{b}$ . Площадь прямоугольника между ними будетъ  $a\sqrt{b}$  или  $\sqrt{ab}$ , слѣдовательно, *средняя прямая* будетъ  $\sqrt{a\sqrt{b}}$  или  $\sqrt[4]{ab}$ . Эти формы неотличаются одна отъ другой, такъ какъ первую изъ нихъ можно написать въ формѣ второй  $\sqrt[4]{a^2b}$ . При этомъ ни  $a$ , ни  $b$  не должны быть полными квадратами.

*Предложеніе 23.* Прямоугольникъ, построенный на раціональной прямой  $c$ , коего площадь равна площади квадрата построеннаго на средней прямой  $\sqrt{a\sqrt{b}}$  или  $\sqrt[4]{ab}$  имѣетъ высоту  $x = \frac{a\sqrt{b}}{c}$  или  $x = \frac{\sqrt{ab}}{c}$ .

*Предложеніе 25.* Прямоугольникъ, коего стороны суть *среднія* по длинѣ соизмѣримыя прямая, будетъ самъ *средній*. Среднія соизмѣримыя прямая имѣютъ форму  $m\sqrt[4]{ab}$  и  $n\sqrt[4]{ab}$ , а площадь прямоугольника между ними будетъ  $mn\sqrt{ab}$ .

*Предложеніе 26.* Прямоугольникъ, коего стороны суть *среднія* только въ степени соизмѣримыя прямая будетъ или *раціональный* или *средній*. Стороны такого прямоугольника будутъ, очевидно  $\sqrt{a\sqrt{b}}$  и  $\sqrt{c\sqrt{b}}$ , а площадь его  $\sqrt{abc}$ , слѣдовательно, если  $abc$  будетъ полный квадратъ, то прямоугольникъ будетъ *раціональный*, въ противномъ случаѣ онъ *средній*.



*Предложение 27.* Разность  $\sqrt{ab} - \sqrt{cd}$  или  $a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$  не может быть рациональной.

*Предложение 28.* Найти двѣ среднія прямыя соизмѣримыя только въ степени, коихъ прямоугольникъ былъ бы рациональнымъ?

Стороны такого прямоугольника могутъ быть  $\sqrt{a\sqrt{b}}$  и  $\sqrt{\frac{b\sqrt{b}}{a}}$  или  $\sqrt[4]{ab}$  и  $\sqrt{b\sqrt{\frac{b}{a}}}$ . Какъ первыя двѣ такъ и послѣднія двѣ среднія прямыя, очевидно соизмѣримы въ степени, такъ какъ ихъ квадраты суть:

$$a\sqrt{b} \text{ и } \frac{b\sqrt{b}}{a} \text{ или } \sqrt{ab} \text{ и } b\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{b}{a}\sqrt{ab}$$

Площадь прямоугольника между этими парами прямыхъ есть  $b$  величина рациональная.

*Предложение 29.* Найти двѣ среднія прямыя только въ степени соизмѣримыя, коихъ прямоугольникъ былъ бы средній?

Стороны такого прямоугольника могутъ быть:

$$\sqrt{a\sqrt{b}} \text{ и } \sqrt{\frac{ac}{b}\sqrt{b}} \text{ или } \sqrt[4]{ab} \text{ и } \sqrt{c\frac{\sqrt{ab}}{b}}$$

Очевидно, что ихъ квадраты:

$$a\sqrt{b} \text{ и } \frac{ac}{b}\sqrt{b} \text{ или } \sqrt{ab} \text{ и } c\frac{\sqrt{ab}}{b}$$

соизмѣримы и площади прямоугольниковъ будутъ  $a\sqrt{c}$  и  $\sqrt{ac}$ .

*Слѣдствіе 1.* Найти два квадратныхъ числа коихъ сумма была бы число квадратное? Возьмемъ два какія нибудь, числа  $m$  и  $n$ , то мы всегда имѣемъ:

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$$

*Слѣдствіе 2.* Найти два квадратныхъ числа, коихъ сумма не есть число квадратное?

$$(m^2 - n^2 - 1)^2 + (2mn)^2.$$

*Предложение 30.* Найти двѣ рациональныя только въ степени соизмѣримыя прямыя, изъ коихъ большая квадратитъ надъ меньшею на квадратъ, коего сторона по длинѣ соизмѣрима съ большею?

$$a \text{ и } \sqrt{\frac{a^2(b^2 - c^2)}{b^2}} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2c^2}{b^2}}$$

гдѣ  $b^2 - c^2$  не есть число квадратное. Или еще проще:

$$a \text{ и } \sqrt{a^2 - b^2}$$

*Предложение 31.* Найти двѣ рациональныя только въ степени соизмѣримыя прямыя, изъ коихъ большая квадратитъ надъ меньшею на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ большею?

$$a \text{ и } \sqrt{a^2 - b}.$$

*Предложение 32.* Найти двѣ среднія только въ степени соизмѣримыя прямыя, коихъ

прямоугольникъ былъ бы раціональный и изъ коихъ большая евадратитъ надъ меньшею на квадратъ коего сторона по длинѣ соизмѣрима или несоизмѣрима съ большею?

$$\sqrt{a\sqrt{a^2-b^2}} \quad \text{и} \quad \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a\sqrt{a^2-b^2}}} \quad (1)$$

$$\sqrt[4]{a(a-b^2)} \quad \text{и} \quad \frac{a-b^2}{\sqrt[4]{a(a-b^2)}} \quad (2)$$

*Слѣдствіе.* Если большая изъ прямыхъ по длинѣ несоизмѣрима съ квадратащею, то:

$$\sqrt{a\sqrt{a^2-b}} \quad \text{и} \quad \frac{a^2-b}{\sqrt{a\sqrt{a^2-b}}} \quad (1)$$

$$\sqrt[4]{a(a-b)} \quad \text{и} \quad \frac{a-b}{\sqrt[4]{a(a-b)}} \quad (2)$$

*Предложеніе 33.* Найти двѣ среднія только въ степени соизмѣримыя прямая, коихъ прямоугольникъ средній и изъ коихъ большая евадратитъ надъ меньшею на квадратъ, коего сторона соизмѣрима или несоизмѣрима съ большею?

Большая соизмѣрима съ квадратащею:

$$\sqrt{a\sqrt{b}} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{b(a^2-c^2)}}{\sqrt{a\sqrt{b}}} \quad (1)$$

$$\sqrt[4]{ab} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{b(a^2-c^2)}}{\sqrt[4]{ab}} \quad (2)$$

$$\sqrt{b\sqrt{a}} \quad \text{и} \quad \frac{b\sqrt{a-c^2}}{\sqrt{b\sqrt{a}}} \quad (3)$$

Большая несоизмѣрима съ квадратащею:

$$\sqrt{a\sqrt{b}} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{b(a^2-c)}}{\sqrt{a\sqrt{b}}} \quad (1)$$

$$\sqrt[4]{ab} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{b(a-c)}}{\sqrt[4]{ab}} \quad (2)$$

$$\sqrt{b\sqrt{a}} \quad \text{и} \quad \frac{b\sqrt{a-c}}{\sqrt{b\sqrt{a}}} \quad (3)$$

*Предложеніе 34.* Найти двѣ въ степени несоизмѣримыя прямая, коихъ сумма квадратовъ раціональна, а прямоугольникъ средній?

$$\sqrt{\frac{a^2+a\sqrt{b}}{2}} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{a^2-a\sqrt{b}}{2}} \quad (1)$$

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{ab}}{2}} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{a-\sqrt{ab}}{2}} \quad (2)$$

Сумма квадратовъ есть  $a^2$  или  $a$ , а прямоугольники  $a \sqrt{\frac{a^2-b}{4}}$  или  $\sqrt{\frac{a^2-ab}{4}}$ .

*Предложеніе 35.* Найти двѣ въ степени несоизмѣримыя прямыя, коихъ сумма квадратовъ есть средняя, а прямоугольникъ рациональный?

$$\sqrt{\frac{(a+\sqrt{b})\sqrt{a^2-b}}{2}} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{(a-\sqrt{b})\sqrt{a^2-b}}{2}} \quad (1)$$

$$\sqrt{\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{a-b}}{2}} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\sqrt{a-b}}{2}} \quad (2)$$

Сумма квадратовъ есть  $a\sqrt{a^2-b}$  или  $(a-b)\sqrt{a-b}$ , а прямоугольникъ  $\frac{a^2-b}{2}$  или  $\frac{a-b}{2}$ .

*Предложеніе 36.* Найти двѣ въ степени несоизмѣримыя прямыя, коихъ сумма квадратовъ и прямоугольники суть средняя несоизмѣримыя между собою?

$$\sqrt{\frac{(a+\sqrt{c})\sqrt{b}}{2}} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{(a-\sqrt{c})\sqrt{b}}{2}} \quad (1)$$

$$\sqrt{\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{c})\sqrt{b}}{2}} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{c})\sqrt{b}}{2}} \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{b(\sqrt{a}+\sqrt{c})}{2}} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{b(\sqrt{a}-\sqrt{c})}{2}} \quad (3)$$

Сумма квадратовъ есть:

$$a\sqrt{b}, \quad \sqrt{ab}, \quad b\sqrt{a}$$

а прямоугольники:

$$\frac{\sqrt{b(a^2-c)}}{2}, \quad \frac{\sqrt{(a-c)b}}{2}, \quad \frac{b\sqrt{a-c}}{2}$$

*Отдѣлъ 3.* Съ 37 предложенія Евклида излагаетъ предложенія относительно ирраціональностей, полученныхъ чрезъ сложеніе несоизмѣримыхъ только по длинѣ величинъ (*Ἀρχὴ τῶν κατὰ σύνθεσιν ἑξάδων*), а съ 74 предложенія онъ излагаетъ ирраціональности, полученные чрезъ вычитаніе несоизмѣримыхъ только по длинѣ величинъ (*Δευτέρα τάξις ἑτέρων λόγων, τῶν κατὰ ἀφαίρεσιν*). Первая онъ называетъ *биноміальными* (*ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων*), а вторая называетъ *вычетами* (*ἀποτομή*).

Биноміальныя имѣютъ форму:

$$a+\sqrt{b} \quad \text{или} \quad \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

а вычеты имѣютъ форму:

$$a-\sqrt{b} \quad \text{или} \quad \sqrt{a}-\sqrt{b} \quad \text{или} \quad \sqrt{a}-b$$

Очевидно, что какъ первая такъ и вторая по длинѣ и въ степени несоизмѣримы, а слѣдовательно *ирраціональны*.

*Предложенія 37. 74.* Если сложимъ двѣ рациональныя прямыя только въ степени соизмѣримыя, то получимъ ирраціональную прямую, которая называется *биноміальною*, если вычтемъ, то получимъ *вычетъ*.

*Предложенія 38. 75.* Если двѣ, только въ степени соизмѣримыя, среднія прямыя, коихъ прямоугольникъ рациональный, сложимъ или вычтемъ, то получимъ ирраціональную прямую *первую бимедіальную* (ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη) въ первомъ случаѣ и *первый средній вычетъ* (ἡ μέση ἀποτομή πρώτη) во второмъ случаѣ.

*Первая бимедіальная и первый средній вычетъ.*

$$\sqrt{a\sqrt{b}} \pm \sqrt{\frac{b\sqrt{b}}{a}} \text{ или } \sqrt[4]{ab} \pm \sqrt{b\sqrt{\frac{b}{a}}}$$

или еще:

$$\sqrt{a\sqrt{a^2-b^2}} \pm \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a\sqrt{a^2-b^2}}}, \quad \sqrt[4]{a(a-b^2)} \pm \frac{a-b^2}{\sqrt[4]{a(a-b^2)}}$$

*Предложенія 39. 76.* Если двѣ, только въ степени соизмѣримыя среднія прямыя, коихъ прямоугольникъ *средній*, сложимъ или вычтемъ, то получимъ ирраціональную прямую въ первомъ случаѣ *вторую бимедіальную* (ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα), и *второй средній вычетъ* (ἡ μέση ἀποτομή δευτέρα) во второмъ случаѣ.

*Вторая бимедіальная и второй средній вычетъ.*

$$\sqrt{a\sqrt{b}} \pm \sqrt{\frac{ac}{b}\sqrt{b}} \text{ или } \sqrt[4]{ab} \pm \sqrt{\frac{c\sqrt{ab}}{b}}$$

или еще:

$$\sqrt{a\sqrt{b}} \pm \frac{\sqrt{b(a^2-c^2)}}{\sqrt{a\sqrt{b}}}, \quad \sqrt[4]{ab} \pm \frac{\sqrt{b(a^2-c^2)}}{\sqrt[4]{ab}}, \quad \sqrt{b\sqrt{a}} \pm \frac{\sqrt{b(a-c^2)}}{\sqrt{b\sqrt{a}}}$$

и т. д.

*Предложенія 40. 77.* Если двѣ въ степени несоизмѣримыя прямыя, коихъ сумма квадратовъ *раціональна*, а прямоугольникъ *средній*, сложимъ или вычтемъ, то получимъ ирраціональную прямую въ первомъ случаѣ *большую ирраціональную* (ἡ μέζων), и *малую ирраціональную* (ἡ ἐλάσσων) во второмъ случаѣ.

*Большая ирраціональная и малая ирраціональная.*

$$\sqrt{\frac{a^2+a\sqrt{b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a^2-a\sqrt{b}}{2}} \text{ или } \sqrt{\frac{a+\sqrt{ab}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{ab}}{2}}$$

*Предложенія 41. 78.* Если двѣ въ степени несоизмѣримыя прямыя, коихъ сумма квадратовъ *средняя*, и прямоугольникъ *раціональный*, сложимъ или вычтемъ, то получимъ ирраціональную прямую, которая называется въ первомъ случаѣ *раціональною и среднею степенящею* (ἡ ῥητὸν μέσον δυναμένη), и которая съ *раціональною* даетъ *цѣлую среднюю площадь* (ἡ μετὰ ῥητὸν μέσον τὸ ὅλον ποῖονσα) во второмъ случаѣ.



Рациональная и средняя степенная и которая съ рациональною даетъ цѣлую среднюю площадь.

$$\sqrt{\frac{(a+\sqrt{b})\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{(a-\sqrt{b})\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

или

$$\sqrt{\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{a-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\sqrt{a-b}}{2}}$$

Если возвысимъ оба эти выраженія въ квадратъ, то получимъ:

$$a\sqrt{a^2-b} \pm (a^2-b) \quad \text{и} \quad a\sqrt{a-b} \pm (a-b)$$

Составъ этихъ выраженій и послужилъ еъ ихъ названію. Если возьмемъ знакъ +, то это будетъ сумма двухъ площадей: одна рациональная, а другая средняя. Если возьмемъ знакъ —, то квадратъ, предыдущихъ выраженій сложенный съ рациональною площадью  $a^2-b$  или  $a-b$  даетъ среднюю площадь  $a\sqrt{a^2-b}$  или  $a\sqrt{a-b}$ .

*Предложенія 42. 79.* Если двѣ въ степени несоизмѣримыя прямыя, коихъ сумма квадратовъ и прямоугольникъ суть *среднія*, сложимъ или вычтемъ, то получимъ въ первомъ случаѣ прямую которую называютъ *степенную двѣ среднія площади* (ἡ δὲ τοῦ μέσας δυαμένη), а во второмъ случаѣ прямую, которой квадратъ съ среднею площадью даетъ цѣлую среднюю площадь (ἡ μετὰ μέσων μέσων τὸ ὅλον ποῖσα).

Таковы:

$$\sqrt{\frac{(a+\sqrt{c})\sqrt{b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{(a-\sqrt{c})\sqrt{b}}{2}} \quad (1)$$

$$\sqrt{\frac{(a+\sqrt{c})\sqrt{b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{(a-\sqrt{c})\sqrt{b}}{2}} \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{b(\sqrt{a}+\sqrt{c})}{2}} \pm \sqrt{\frac{b(\sqrt{a}-\sqrt{c})}{2}} \quad (3)$$

Если эти прямыя возвысимъ въ квадратъ, то получимъ:

$$a\sqrt{b} \pm \sqrt{(a^2-c)b} \quad (1)$$

$$\sqrt{ab} \pm \sqrt{(a-c)b} \quad (2)$$

$$b\sqrt{a} \pm b\sqrt{a-c} \quad (3)$$

Изъ формы этихъ выраженій и произошли ихъ названія.

Если возьмемъ знакъ  $+$ , то квадратъ состоитъ изъ двухъ *среднихъ* площадей, а если возьмемъ знакъ  $-$ , то квадратъ сложенный съ среднимъ прямоугольникомъ  $\sqrt{(a^2-c)b}$ , или  $\sqrt{(a-c)b}$ , или  $b\sqrt{a-c}$  даетъ средній прямоугольникъ:  $a\sqrt{b}$ , или  $\sqrt{ab}$ , или  $b\sqrt{a}$ .

*Предложенія 43—48 и 80—85.* Въ этихъ предложеніяхъ доказывается, что всѣ ирраціональности, полученныя чрезъ сложение или вычитаніе могутъ разложиться на ихъ составныя части—члены (*δνόματα*) только въ одной точкѣ. Эти предложенія, выраженные алгебраически даютъ уравненіе  $a + \sqrt{b} = x + \sqrt{y}$  или  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ , которыя какъ извѣстно изъ алгебры могутъ существовать, только тогда когда  $x = a$ ,  $y = b$ .

*Предложенія 49—54 и 86—91.* Даютъ построеніе шести родовъ биноміальныхъ и вычетовъ.

Общее выраженіе *биноміальной* или *вычета* есть  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ . Смотря потому будутъ ли  $a$  или  $b$  полными квадратами или ни одно изъ нихъ, и въ каждомъ изъ этихъ трехъ случаевъ большій членъ квадратитъ надъ меньшимъ на квадратъ, коего сторона соизмѣрима или несоизмѣрима съ большимъ членомъ. Евклидъ дѣлитъ *биноміальныя* и *вычеты* на шесть порядковъ.

I. Большій членъ квадратитъ надъ меньшимъ на квадратъ коего сторона соизмѣрима по длинѣ съ большимъ членомъ.

1) Большій членъ соизмѣримъ съ данною раціональною прямою, т. е. есть раціональная прямая. Это будетъ *первая биноміальная* или *первый вычетъ*, смотря по знаку:

$$a \pm \sqrt{a^2 - d^2} \quad \text{или} \quad a \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - c^2}$$

2) Меньшій членъ есть раціональная прямая. Это будетъ *вторая биноміальная* или *второй вычетъ*.

$$\sqrt{a^2 + b^2} \pm a \quad \text{или} \quad \frac{ab}{\sqrt{b^2 - c^2}} \pm a$$

3) Оба члена несоизмѣримы. Это *третья биноміальная* или *третій вычетъ*.

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{\frac{a(b^2 - c^2)}{b^2}} \quad \text{или} \quad \sqrt{a} \pm \sqrt{a - ad^2}$$

II. Большій членъ квадратитъ надъ меньшимъ на квадратъ, коего сторона по длинѣ несоизмѣрима съ большимъ членомъ.

1) Большій членъ есть раціональная прямая. Это *четвертая биноміальная* или *четвертый вычетъ*.

$$a \pm \sqrt{a^2 - d}$$

2) Меньшій членъ раціональный. Это будетъ *пятая биноміальная* или *пятый вычетъ*.

$$\sqrt{a^2 + d} \pm a$$

3) Оба члена несоизмѣримы. Это будетъ *шестая биноміальная* или *шестой вычетъ*.

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{a-d}.$$

*Предложенія 55—60 и 92—97.* Въ этихъ предложеніяхъ Евклидъ геометрически извлекаетъ квадратные корни изъ *биноміальныхъ* и *вычетовъ* различныхъ порядковъ и показываетъ, что результатомъ всегда будетъ одна изъ ирраціональностей; отъ пред. 37 до 41 и отъ 74 до 80.

Эту операцію онъ дѣлаетъ такъ: беретъ раціональную прямую и строитъ прямоугольникъ, коего другая сторона есть одна изъ *биноміальныхъ* или одинъ изъ *вычетовъ* и показываетъ, что сторона квадрата коего площадь равна, построенному прямоугольнику есть одна изъ выше упомянутыхъ ирраціональностей.

*Примѣръ 1.* Если примемъ раціональную прямую за 1, то площадь прямоугольника построеннаго на *первой биноміальной* или *первомъ вычете* и на единицѣ будетъ  $a \pm \sqrt{a^2 - b^2}$ , а квадратный корень изъ нея будетъ сторона квадрата:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{a^2 - b^2}} = \sqrt{\frac{a+b}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-b}{2}}$$

т. е. просто *биноміальная* или *вычетъ*.

*Примѣръ 2.* Квадратный корень изъ *четвертой биноміальной* или *четвертаго вычета* будетъ *большая ирраціональная*:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{a^2 - d}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{d}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{d}}{2}}$$

*Предложенія 61—66 и 98—103* суть обратныя предыдущимъ, а именно: что квадраты шести ирраціональностей сложенныхъ даютъ *биноміальныя* различныхъ порядковъ, а квадраты шести ирраціональностей вычитаемыхъ даютъ шесть *вычетовъ* различныхъ порядковъ.

*Отдѣлъ 4. Предложеніе 113.* Прямоугольникъ построенный на одной изъ *биноміальныхъ*, равный квадрату, построенному на раціональной прямой имѣетъ высоту одинъ изъ *вычетовъ*.

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ  $d^2 = x(a + \sqrt{b})$  или  $d^2 = x(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ , откуда:

$$x = \frac{d^2(a - \sqrt{b})}{a^2 - b} \text{ или } x = \frac{d^2(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$$

оба суть *вычеты*.

Такъ какъ  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$ , то прямоугольникъ между *биноміальной* и *вычетомъ* есть *раціональный*.

*Предложеніе 115.* Прямоугольникъ, построенный на *биноміальной* и *вычете*, коихъ члены по членно соизмѣримы и пропорціональны, будетъ *раціональный*.

Пусть  $a + \sqrt{b}$  будетъ одна сторона прямоугольника, то по условію другая будетъ  $ma - m\sqrt{b}$ . Слѣдовательно прямоугольникъ будетъ:

$$m(a^2 - b).$$

*Предложение 117.* Последнее предложение десятой книги, содержит доказательство, что диагональ квадрата съ его стороною суть величины несоизмѣримыя.

Дается два доказательства изъ коихъ думаютъ, что первое не принадлежитъ Евклиду, а было вставлено однимъ изъ комментаторовъ или же Теономъ, который перерабатывалъ элементы Евклида; другое гораздо проще. Первое основано на томъ, что число въ одно время не можетъ быть четнымъ и нечетнымъ, а второе, что квадратъ диагонали относится къ квадрату стороны какъ 2:1. Впрочемъ, съ этимъ мнѣніемъ высказаннымъ Нессельманомъ, Бретшнейдеръ несогласенъ.

Десятая книга Евклида есть единственная, которая даетъ намъ понятіе о ирраціональной ариметикѣ у древнихъ. Діогенъ Лаертскій упоминаетъ еще, что Демокритъ прежде Евклида писалъ объ ирраціональныхъ величинахъ въ сочиненіи, которое носило названіе *περί ἀλόγων ὑραμῶν καὶ νοσῶν*.

За этимъ въ теченіи цѣлыхъ восемнадцати столѣтій теорія ирраціональныхъ величинъ оставалась въ забвеніи, и только въ концѣ XV столѣтія ими началъ заниматься Лука Пачіоли (Lucas Pacioli di Borgo).



## КНИГА XI.

### Книга первая „О тѣлахъ“:

#### О п р е д ѣ л е н і я.

1. *Тѣломъ* ( $\Sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\acute{o}\nu$ ) называется то, что имѣетъ длину, ширину и глубину.

*Примѣч.* 1. Отъ словъ  $\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\acute{o}\nu$  (тѣло) и  $\mu\acute{\epsilon}\rho\omicron\varsigma$  (мѣра) произошло названіе *Стереометрія*, той части геометріи, которая занимается изслѣдованіемъ свойствъ тѣлъ.

2. *Предѣлы* тѣла суть *поверхности*.

3. *Прямая линія* перпендикулярна къ *плоскости*, если она образуетъ прямые углы со всѣми прямыми линіями, лежащими въ этой плоскости и проходящими чрезъ нее.

4. *Плоскость* перпендикулярна къ *плоскости*, если прямая линія перпендикулярна въ пересѣченію этихъ плоскостей и лежащая въ одной изъ нихъ перпендикулярна и къ другой.

5. *Наклоненіемъ прямой линіи* къ *плоскости* называется острый уголъ, который она составляетъ съ прямой линіей проведенной чрезъ двѣ точки изъ коихъ одна есть пересѣченіе ея съ плоскостью, а другая точка пересѣченіе перпендикуляра, опущеннаго изъ какой нибудь ея точки на плоскость.

6. *Наклоненіемъ плоскости къ плоскости* называется острый уголъ, составленный двумя перпендикулярами, возставленными изъ какой нибудь точки линіи пересѣченія трехъ плоскостей, къ самимъ плоскостямъ.

7. Двѣ пары плоскостей имѣютъ *одинаковые углы наклоненія*, если вышеупомянутые углы наклоненія равны.

8. *Параллельными плоскостями* называются такія, которыя никогда не встрѣчаются.

9. *Подобными тѣлами* называются такія, которыя ограничены, однимъ и тѣмъ же числомъ подобныхъ плоскостей.

10. *Равными и подобными тѣлами*, называются такія, которыя ограничены одинаковымъ числомъ равныхъ и подобныхъ плоскостей.

*Примеч. 2.* Опреѣленіе это, собственно говоря, не есть определѣніе, а предложеніе, требующее доказательства. Пейраръ (Peurgard) доказалъ это определѣніе для случая, когда тѣлесные углы, составлены не болѣе какъ изъ трехъ плоскихъ угловъ; а мы докажемъ ниже это предложеніе для выпуклыхъ тѣлъ съ какими бы то нибыло тѣлесными углами.

Робертъ Симсонъ утверждаетъ, что 10 определѣніе несправедливо для всѣхъ случаевъ, а потому многія изъ доказательствъ XI книги и нѣкоторыя доказательства XII книги имѣютъ въ своемъ основаніи ложное начало; на основаніи этого онъ опускаетъ это определѣніе и замѣняетъ его тремя теоремами, помѣщенными имъ вслѣдъ за предложеніемъ 22. Для доказательства того, что 10 определѣніе несправедливо въ нѣкоторыхъ случаяхъ, Симсонъ предполагаетъ два тѣла, имѣющихъ одинаковое число подобныхъ и равныхъ сторонъ, въ одномъ изъ этихъ тѣлъ одинъ уголъ *вогнутый*, въ другомъ же всѣ углы *выпуклые*. Но не очевидно-ли, что Евклидъ имѣлъ въ виду только тѣла не имѣющія вогнутыхъ угловъ? Неужели нужно было это оговорить? Это определѣніе вполне вѣрно для всѣхъ случаевъ, когда углы тѣла суть выпуклые.

Предложеніе, поставленное Симсономъ на мѣсто этого определѣнія, выражено слѣдующимъ образомъ:

„Тѣла, составленныя подобными плоскостями, равными по числу и по величинѣ и подобно расположенными, коихъ тѣлесные углы, составлены не болѣе, какъ изъ трехъ плоскихъ угловъ, равны и подобны между собою“.

Предложеніе это заключаетъ лишнее условіе; изъ того что два тѣла ограничены одинаковымъ числомъ равныхъ и подобныхъ сторонъ, прямо слѣдуетъ, что стороны этихъ тѣлъ одинаково расположены въ каждомъ изъ нихъ. Это подобно тому, если бы мы сказали, что треугольники, составленные равными и подобно расположенными сторонами равны и подобны между собою.

Предложеніе Симсона состоитъ изъ двухъ случаевъ; если приложить одну изъ сторонъ перваго тѣла къ соответствующей стороны втораго, то можетъ случиться, что остальные стороны перваго тѣла совмѣстятся съ остальными сторонами втораго тѣла, или-же можетъ случиться, что первое тѣло будетъ находиться внѣ втораго. Симсонъ доказываетъ только первый случай, и совершенно ничего не говоритъ о второмъ, который лежитъ въ основаніи доказательствъ предложеній 28 и 40 книги XI, и доказательствъ предложеній 3 и 4 книги XII: а потому всѣ эти доказательства имѣютъ дѣйствительно ложное начало въ силу поправочъ сдѣланныхъ Симсономъ.

Удивленный, что геометры въ теченіи XIII столѣтіи вѣрили въ справедливость 10 определѣнія, Симсонъ говоритъ: „Но, что же должны мы сказать если это определѣніе не вѣрно? Не должны-ли мы сознаться, что геометры въ теченіи XIII вѣковъ были въ заблужденіи, относительно этого элементарнаго предложенія? Пусть это намъ послужитъ урокомъ быть скромными и сознать какъ трудно быть всегда осмотрительными, какъ нашъ умъ слабъ, въ виду того, что мы не можемъ оградить себя отъ ошибокъ, въ началахъ наукъ, которыя по справедливости называютъ самыми точными“.

Эти послѣднія слова Симсона могутъ служить примѣромъ, какъ нужно быть осторожнымъ при поправкѣ тѣхъ истинъ, которыя были приняты геометрами, въ теченіи цѣлыхъ тринадцати вѣковъ!

11. *Тѣлесный уголъ* есть взаимное наклоненіе, по крайней мѣрѣ, трехъ прямыхъ линій, не лежащихъ въ одной плоскости, но встрѣчаю-

щихся въ одной точкѣ. Или: тѣлесный уголъ есть тотъ, который ограниченъ по крайней мѣрѣ тремя плоскими углами, не лежащими въ одной плоскости, но имѣющими вершину въ одной точкѣ.

12. *Пирамида* (Πυραμῖς) есть тѣло, ограниченное плоскостями, проведенными отъ какой нибудь плоскости къ точкѣ, лежащей внѣ этой плоскѣ.

13. *Призма* (Πρίσμα) есть тѣло, ограниченное плоскостями, изъ коихъ двѣ противолежащія равны, подобны и параллельны, остальные же суть параллелограммы.

14. *Шаръ* (Σφαῖρα), описанъ полукругомъ, вращающимся на неподвижномъ діаметрѣ.

15. *Ось шара* есть неподвижная прямая линія, около которой вращается полукругъ.

16. *Центръ шара* есть центръ вращающагося полукруга.

17. *Діаметръ шара*, есть прямая линія проходящая чрезъ его центръ, предѣломъ которой служитъ поверхность шара.

18. *Конусъ* (Κώνος) описанъ прямоугольнымъ треугольникомъ, вращающимся около неподвижной перпендикулярной стороны. Смотря потому, будетъ ли неподвижная перпендикулярная сторона равна, больше или меньше другой вращающейся, мы получаемъ *прямоугольный, тупоугольный* или *остроугольный конусъ*.

19. *Ось конуса*, есть неподвижный перпендикуляръ, около котораго вращается треугольникъ.

20. *Основаніе конуса*, есть кругъ описанный движеніемъ перпендикулярной стороны.

21. *Цилиндръ* (Κόλυδρος) происходитъ отъ вращенія прямоугольнаго параллелограмма, около неподвижной стороны.

22. *Ось цилиндра*, есть неподвижная сторона, около которой вращается параллелограммъ.

23. *Основанія цилиндра* суть круги, ограниченные противолежащими вращающимися сторонами.

24. *Подобные конусы и цилиндры* суть тѣ, въ которыхъ оси и діаметры основаній пропорціональны.

25. *Кубъ* (Κύβος) есть тѣло ограниченное шестью равными квадратами.

26. *Тетраедръ* (Τέτραεδρον) есть тѣло, ограниченное четырьмя равными и равносторонними треугольниками.

27. *Октаедръ* (Οκτάεδρον) есть тѣло, ограниченное осью равными и равносторонними треугольниками.



28. *Додекаедръ* (*Δωδεκάεδρον*) есть тѣло, ограниченное двѣнадцатью равными и равносторонними пятиугольниками.

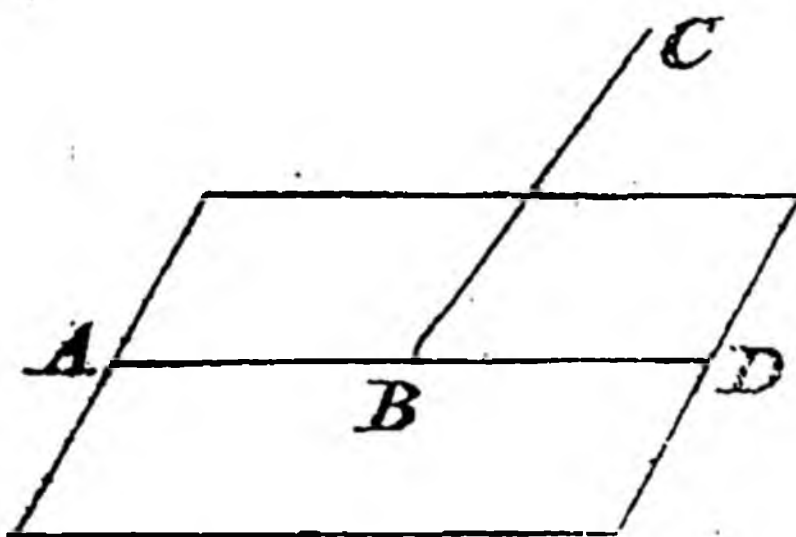
29. *Икосаедръ* (*Εἰκοσάεδρον*) есть тѣло, ограниченное двадцатью равными и равносторонними треугольниками.

*Примѣч. 3.* *Параллелепипедомъ* называется тѣло ограниченное по парно параллельными плоскостями.

### Предложенія.

*Предложеніе 1.* Части прямой линіи не могутъ лежать, одна надъ плоскостью, а другая въ самой плоскости (фиг. 440).

Фиг. 440.



*Доказат.* Если это возможно, то пусть  $ABC$  будетъ прямая линія, которой части:  $AB$  и  $BC$  лежатъ, первая въ плоскости, а вторая надъ плоскостью. Продолжимъ часть  $AB$ , лежащую въ плоскости, до точки  $D$ ; тогда отрѣзокъ  $AB$  есть общій двумъ прямымъ линіямъ  $ABC$  и  $ABD$ , что невозможно, такъ какъ двѣ прямыя линіи могутъ или пересѣкаться только въ одной точкѣ, или совпадать всѣми своими частями. А потому невозможно, чтобы часть прямой лежала въ плоскости, а другая внѣ ея.

*Примѣч. 4.* Это предложеніе дѣлается лишнимъ, если принять опредѣленіе плоскости, которое мы даемъ въ примѣчаніи 5. Кромѣ этого само доказательство Евклида неосновательно. Въ самомъ дѣлѣ, онъ полагаетъ, что продолженіе  $BC$  части  $AB$ , находящейся въ плоскости, находится внѣ плоскости, а потомъ говоритъ: продолжимъ часть  $AB$  въ плоскости до точки  $D$ . Если  $BC$  есть продолженіе части  $AB$ , то уже нельзя сказать: продолжимъ  $AB$  въ плоскости до точки  $D$ . Это предложеніе Евклидъ могъ доказать, основываясь на своемъ опредѣленіи плоскости (кн. 1, опр. 7), сказавъ что плоскость не была бы расположена одинаково относительно прямой  $ABC$ .

*Предложеніе 2.* Двѣ пересѣкающіяся прямыя линіи  $AB$  и  $CD$  лежатъ въ одной плоскости; точно также всякій треугольникъ лежитъ въ одной плоскости (фиг. 441).

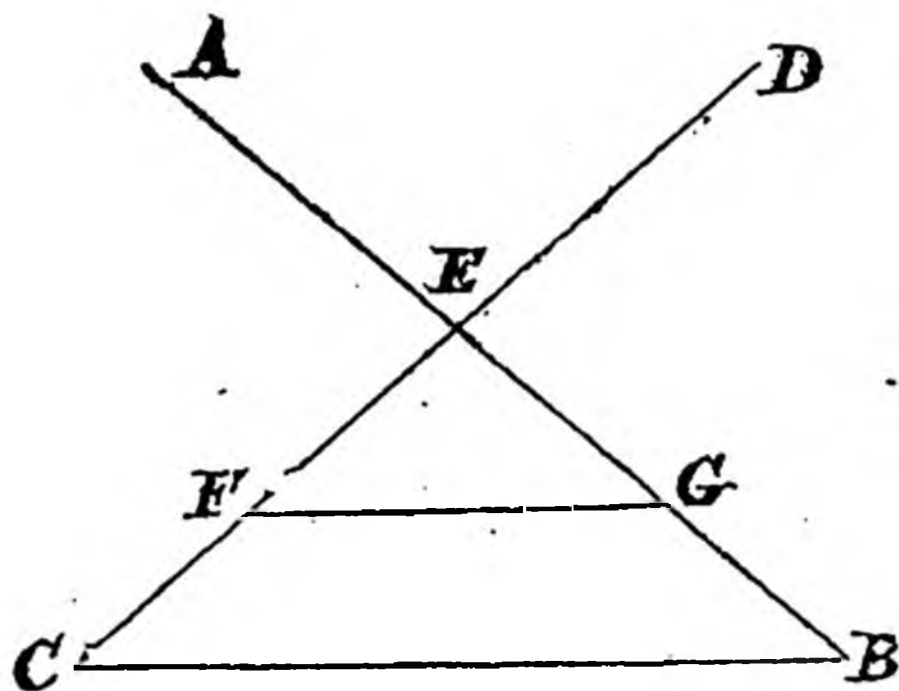
*Доказат.* На прямыхъ линіяхъ  $EC$  и  $EB$  возьмемъ произвольныя точки  $F$  и  $G$ , и проведемъ прямыя  $FG$  и  $GB$ .

Если предположимъ, что часть  $EFG$  треугольника  $ECB$  лежитъ въ какой



нибудь плоскости, а остальная часть  $FCBG$  надъ этой послѣдней, то части  $EF$  или  $EG$  прямыхъ  $EC$  или  $EB$  лежатъ въ этой плоскости, другія же части  $FC$  или  $GB$  надъ ней, что (кн. 11, пред. 1) невозможно. А потому

Фиг. 441.



цѣлый треугольникъ  $ECB$  лежитъ въ одной плоскости, въ которой лежатъ  $EB$  и  $EC$ , а слѣдовательно (кн. 11, пред. 1)  $AB$  и  $CD$ .

*Примѣч. 5.* Опредѣленіе плоскости Евклида также темно какъ и опредѣленіе прямой. Новѣйшіе геометры дали нѣсколько опредѣленій плоскости.

*Лежандръ* опредѣляетъ *плоскость*, говоря что это есть поверхность, на которой прямая, имѣя двѣ общія точки съ ней, совмѣщается всѣми своими точками.

Казалось бы съ перваго взгляда, что опредѣленіе плоскости Евклида (кн. 1, опред. 7) совпадаетъ съ этимъ послѣднимъ, но пред. 1, кн. 10 противорѣчитъ этому заключенію.

*Гуель* (Hügel) прибавляетъ къ этому: и что, какая нибудь, часть этой поверхности можетъ совмѣститься на той же поверхности или прямо, или обратно, т. е. послѣ поворота около двухъ ея точекъ.

*Бальтцеръ* говоритъ, что плоскость есть поверхность, которая образуется движеніемъ прямой, проходящей чрезъ данную точку и скользящей по данной прямой.

Такъ какъ на основаніи этого опредѣленія нельзя доказать, что прямая, имѣющая съ поверхностью двѣ общія точки, вся въ ней помѣщается, то онъ принимаетъ это послѣднее свойство какъ *аксіому плоскости*.

Такъ какъ на основаніи первой части опредѣленія Гуеля или аксіомы плоскости Бальтцера, легко доказать вторую часть опредѣленія Гуеля и показать, что поверхность, образуемая движеніемъ прямой, проходящей чрезъ данную точку и скользящей по данной прямой есть плоскость, то мы и примемъ это опредѣленіе. Итакъ *плоскость есть такая поверхность, на которой прямая, имѣющая двѣ общія точки съ ней, вся на ней помѣщается*.

*Предложеніе.* Чрезъ три данныя точки, не лежащія на одной прямой можно провести только одну плоскость, т. е. тремя точками плоскость вполне опредѣляется.

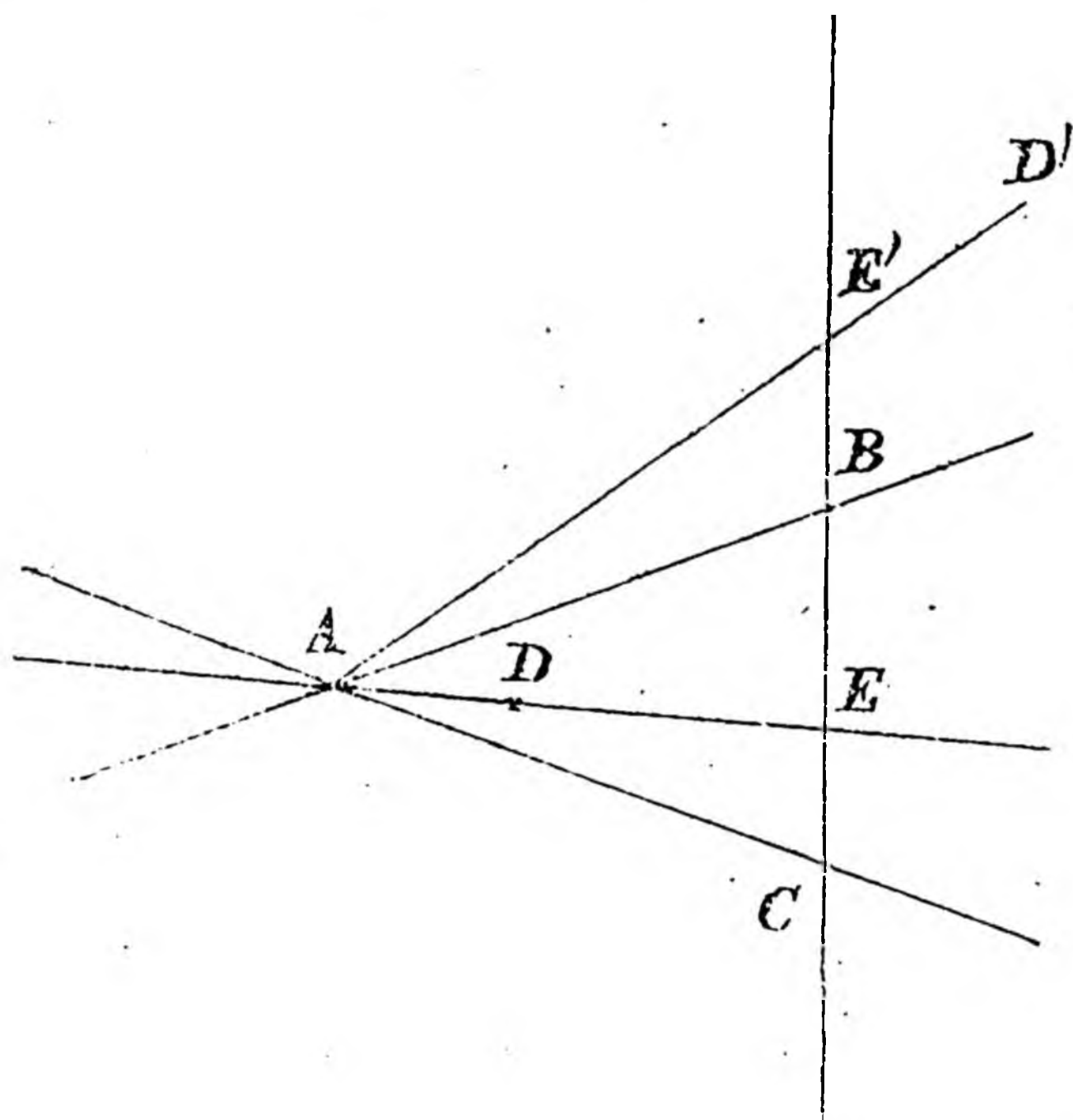
*Доказат.* Пусть точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  будутъ общія двумъ различнымъ плоскостямъ  $\alpha$  и  $\beta$ .

Прямая  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$ , соединяющія точки  $A$  и  $B$ ,  $A$  и  $C$ ,  $C$  и  $B$ , имѣя по двѣ общія точки съ плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ , будутъ совмѣщаться съ обѣими плоскостями. Эти три прямая дѣлятъ каждую плоскость  $\alpha$  и  $\beta$  на семь частей, изъ коихъ одна замкнутая  $ABC$ , а остальные открытыя.

Возьмемъ, какую нибудь, точку  $D$  на плоскости  $\alpha$  внутри замкнутой ея части и покажемъ, что эта точка лежитъ и въ плоскости  $\beta$ . Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ чрезъ точки  $A$  и  $D$  прямую  $AD$ , эта прямая, находясь вся въ плоскости  $\alpha$ , пересѣчетъ прямую

$BC$ , лежащую въ плоскостяхъ  $\alpha$  и  $\beta$ , на примѣръ въ точкѣ  $E$ . Такъ какъ точки  $A$  и  $E$  лежатъ въ обѣихъ плоскостяхъ  $\alpha$  и  $\beta$ , то и вся прямая  $AE$  лежитъ въ плоскостяхъ  $\alpha$  и  $\beta$ , а слѣдовательно и точка  $D$ , на ней лежащая, находится какъ въ плоскости  $\alpha$ , такъ и въ плоскости  $\beta$ . И такъ всѣ точки замкнутой части  $ABC$  находятся въ обѣихъ плоскостяхъ  $\alpha$  и  $\beta$ .

Фиг. 440.



Возьмемъ еще точку  $D'$  на плоскости  $\alpha$  въ незамкнутой ея части. Соединимъ эту точку съ одною изъ точекъ  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , такъ выбранною, чтобы эта прямая пересѣкала остальную прямую. Пусть эта точка будетъ  $A$ , то  $AD'$  должна пересѣчь прямую  $BC$  и положимъ, что она ее пересѣкаетъ въ точкѣ  $E'$ .

Такъ какъ точки  $A$  и  $E'$  находятся обѣ въ плоскостяхъ  $\alpha$  и  $\beta$ , то и вся прямая  $AD'$  будетъ лежать въ обѣихъ плоскостяхъ, а слѣдовательно и точка  $D'$ , на ней лежащая, находится какъ въ плоскости  $\alpha$ , такъ и въ плоскости  $\beta$ . Откуда видимъ, что всѣ точки плоскости  $\alpha$  совмѣщаются со всѣми точками плоскости  $\beta$ .

*Слѣдствіе 1.* Прямая и точка внѣ прямой опредѣляютъ плоскость. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ на прямой двѣ, какія нибудь точки, чрезъ эти точки и чрезъ данную проведемъ плоскость, эта плоскость вполне опредѣляется и содержитъ данную прямую. Легко также видѣть, что каждая прямая, проходящая чрезъ данную точку и упирающаяся на данную прямую вся лежитъ въ плоскости опредѣляемой прямою и точкою. Откуда образованіе плоскости движеніемъ прямой.

*Слѣдствіе 2.* Двѣ пересѣкающіяся прямыя опредѣляютъ плоскость. Въ самомъ дѣлѣ, точка пересѣченія прямыхъ и двѣ точки произвольно взятые, одна на одной, а другая на другой прямой, вполне опредѣляютъ плоскость, въ которой лежатъ обѣ данныя пересѣкающіяся прямыя.

*Слѣдствіе 3.* Всякую фигуру на плоскости можно передвинуть по плоскости, въ какое нибудь другое мѣсто плоскости безъ всякаго измѣненія.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ три точки на взятой плоской фигурѣ и перенесемъ эту фигуру въ другое мѣсто плоскости, совмѣстимъ три точки фигуры съ плоскостью, то очевидно всѣ точки фигуры совмѣстятся съ точками плоскости, такъ какъ въ противномъ случаѣ чрезъ три точки прошло бы двѣ плоскости, что невозможно. Легко, точно также видѣть, что взятая фигура, повороченная и другой стороной совмѣстится съ плоскостью, въ какомъ нибудь другомъ ея мѣстѣ.

*Слѣдствіе 4.* Пересѣченіе двухъ плоскостей есть прямая линія. Въ самомъ дѣлѣ, если возьмемъ на пересѣченіи двухъ плоскостей двѣ, какія нибудъ точки и проведемъ чрезъ эти точки прямую, то эта прямая будетъ находится въ обѣихъ плоскостяхъ, слѣдовательно она есть ихъ пересѣченіе.

*Дюгамель* опредѣляетъ плоскость такъ: *плоскость есть поверхность образованная движеніемъ прямой перпендикулярной къ другой прямой около которой она вращается.*

Принявъ это опредѣленіе плоскости, легко показать, что прямая, имѣющая двѣ общія точки съ плоскостью вся съ ней совмѣщается.

Въ самомъ дѣлѣ, легко видѣть, что произвольно взятая точка  $M$  на перпендикулярѣ  $AK$ , образующемъ въ своемъ движеніи плоскость, находится въ равномъ разстояніи отъ двухъ точекъ  $B$  и  $C$ , прямой  $BC$ , для которыхъ  $AB=AC$ ,  $A$  есть точка въ которой прямая  $BC$  встрѣчается плоскость. Возьмемъ еще другую точку  $N$  на перпендикулярѣ  $AK$  въ другомъ его положеніи и проведемъ прямую  $MN$ , то легко видѣть, что треугольники  $BMN$  и  $CMN$  равны.

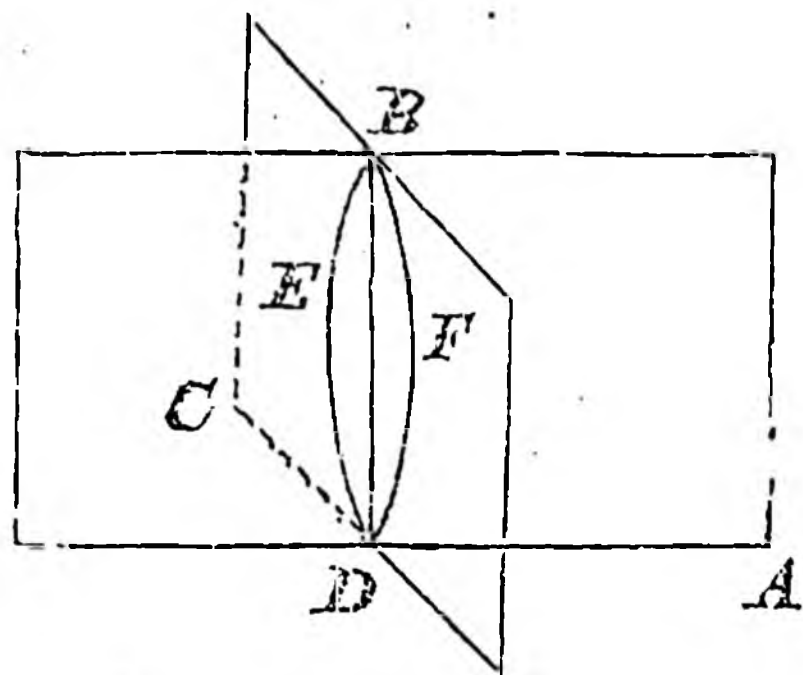
На прямой  $MN$  возьмемъ произвольно точку  $X$ , то очевидно, треугольники  $XBN=XNC$ , откуда  $XB=XC$ , т. е. прямая  $XA$  перпендикулярна къ  $BC$ , слѣдовательно точка  $X$ , прямой  $MN$ , находится въ плоскости  $MNA$ . Читателя просятъ составить чертежъ.

Такое опредѣленіе плоскости, какъ видимъ, требуетъ предварительныхъ понятій объ углахъ, о равенствѣ треугольниковъ. *Дюгамель* въ своемъ сочиненіи „Des méthodes dans les sciences de raisonnement“, и даетъ эти предварительныя свѣдѣнія прежде опредѣленія плоскости. *Дюгамель* замѣчаетъ, что опредѣленіе плоскости *Лежандра* и другихъ геометровъ заключаетъ безчисленное множество условій, которыя прямая должна выполнить на плоскости, и существуетъ-ли такого рода поверхность? Но противъ этого послѣдняго можно сказать, что тотъ же вопросъ можно предложить и относительно опредѣленія прямой.

Мнѣ кажется, что несравненно логичнѣе опредѣлить плоскость, какъ это дѣлаетъ *Бальтцеръ*, и потомъ принять за аксіому свойство плоскости, что прямая имѣющая двѣ общія точки съ плоскостью вся на ней совмѣщается, а не доказывать это свойство, какъ дѣлаетъ это *Дюгамель*, вводя предварительныя понятія, которыя не имѣютъ надлежащей ясности для начинающихъ изученіе геометріи.

*Предложеніе 3.* Двѣ плоскости  $AB$  и  $BC$  пересѣкаются по прямой линіи  $BD$  (фиг. 442).

Фиг. 442.



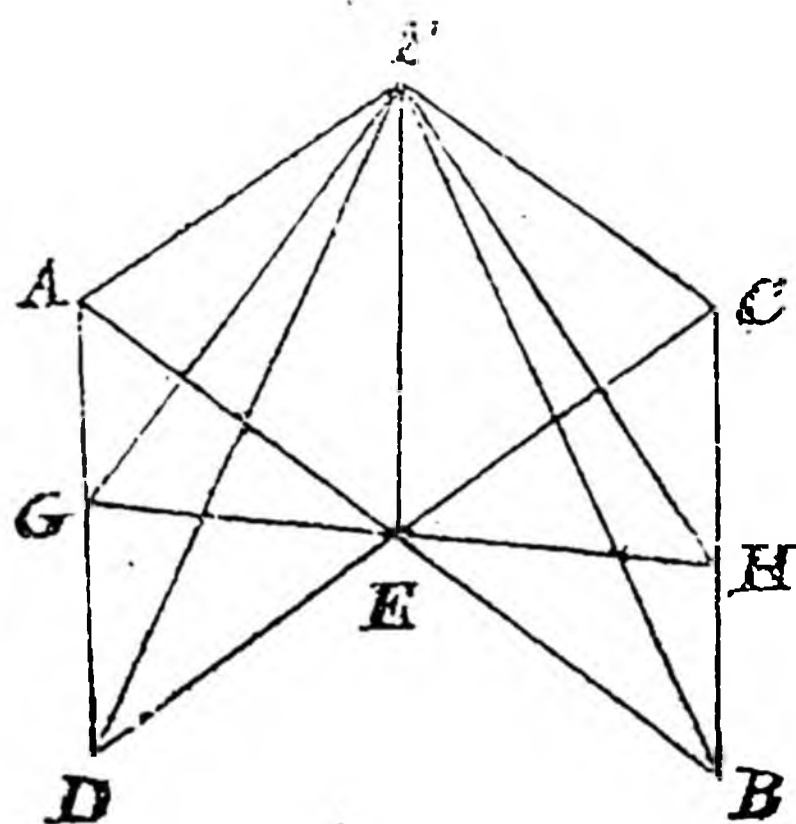
*Доказат.* Пусть пересѣченіе  $BD$ , общее плоскостямъ, не будетъ прямая линія; отъ точки  $D$  къ точкѣ  $B$  въ плоскости  $AB$  проведемъ прямую линію  $DFB$ , а въ плоскости  $BC$  прямую линію  $DEB$ , прямые эти имѣютъ двѣ общія точки, а слѣдовательно заключаютъ пространство  $BEDF$ , что



(кн. 1, пред. 12) невозможно. А потому  $DFB$  и  $DEB$  не суть прямая линия, по этой же причинѣ ни одна изъ прямыхъ проведенныхъ изъ точки  $D$  къ точкѣ  $B$ , кромѣ прямой  $DB$  взаимнаго пересѣченія этихъ плоскостей, не будетъ прямая линия. Слѣдовательно пересѣченіе это есть прямая линия.

*Предложеніе 4.* Прямая линия  $EF$  перпендикулярная, въ точкѣ пересѣченія  $E$ , двумъ прямымъ линиямъ  $AB$  и  $CD$ , перпендикулярна къ плоскости проходящей чрезъ эти двѣ прямая линия (фиг. 443).

Фиг. 443.



*Доказат.* Отложимъ  $EB=EA$  и  $ED=EC$ ; проведемъ въ плоскости прямыхъ  $AB$  и  $CD$  чрезъ точку  $E$  въ произвольномъ направленіи прямую  $GEN$ ; точно также проведемъ  $AD$  и  $CB$  и изъ произвольно взятой точки  $F$  на прямой  $EF$  проведемъ прямая  $FA, FG, FD; FB, FH, FC$ . Въ  $\triangle AED$  и  $\triangle BEC$ ,  $AE=EB$ ,  $ED=EC$ ,  $\angle AED=\angle BEC$  (кн. 1, пред. 15). Слѣдовательно (кн. 1, пред. 4)  $AD=CB$  и  $\angle DAE=\angle EBC$ .

А потому въ  $\triangle AGE$  и  $\triangle BHE$ ,  $\angle DAE=\angle EBC$ , и (кн. 1, пред. 15)  $\angle AEG=\angle BEN$ , кромѣ того  $AE=EB$ . Слѣдовательно (кн. 1, пред. 26)  $GE=EH$  и  $AG=BH$ .

Въ  $\triangle FEA$  и  $\triangle FEB$ , углы при точкѣ  $E$  суть прямые, кромѣ того  $AE=EB$ ,  $EB=EF$ . Слѣдовательно (кн. 1, пред. 4)  $FA=FB$ .

По той же причинѣ въ  $\triangle FED$  и  $\triangle FEC$ , прямая  $FD=FC$ .

Изъ этого слѣдуетъ, что въ  $\triangle FAD$  и  $\triangle FBC$  прямая  $FA=FB$  и  $FD=FC$ . Но мы имѣли, что  $AD=BC$ , слѣдовательно (кн. 1, пред. 8)  $\angle FAD=\angle FBC$ .

Изъ этого слѣдуетъ, что въ  $\triangle FAG$  и  $\triangle FBH$ ,  $\angle FAD=\angle FBC$ . Но мы имѣли, что  $AG=BH$  и  $FA=FB$ . Слѣдовательно (кн. 1, пред. 4)  $FG=FH$ .

Изъ этого слѣдуетъ наконецъ, что въ  $\triangle FEG$  и  $\triangle FEH$ ,  $FG=FH$ ; сторона  $FE$  общая обоимъ треугольникамъ. Но мы имѣли выше  $GE=EH$ ; слѣдовательно (кн. 1, пред. 8)  $\angle GEF=\angle HEF$ , а потому  $EF$  перпендикулярна къ  $GEN$ , въ точкѣ  $E$ .

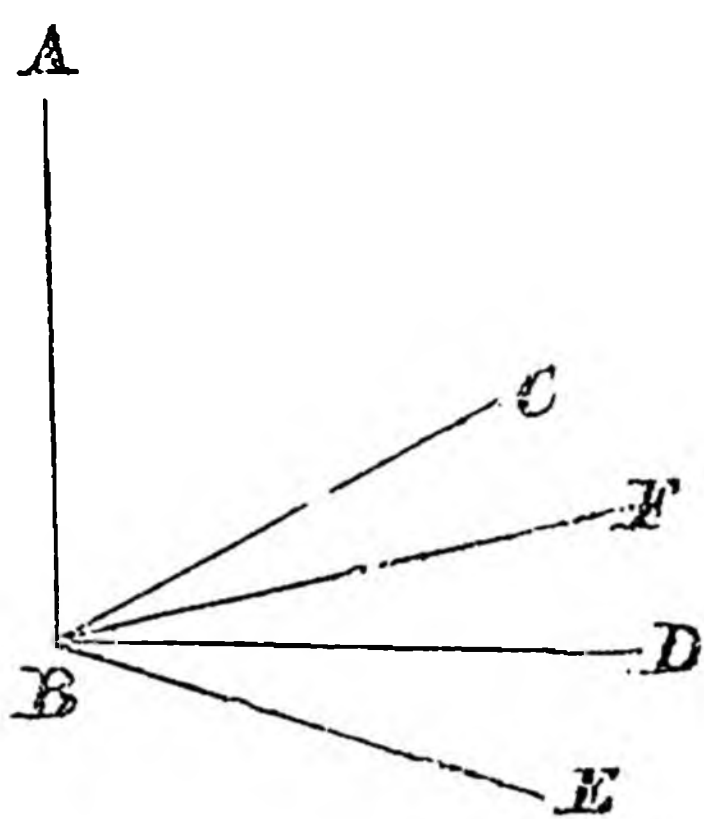
Подобнымъ же образомъ можно показать что прямая  $EF$  перпендикулярна ко всякой прямой  $GEN$ , проходящей чрезъ точку  $E$ , лежащей



въ плоскости, проведенной чрезъ прямыя  $AB$  и  $DC$ . Слѣдовательно (кн. 11, опред. 3) прямая  $EF$  перпендикулярна къ этой плоскости.

*Предложеніе 5.* Три прямыя линіи  $BC$ ,  $BD$ ,  $BE$ , исходящія изъ одной точки  $B$  лежатъ въ одной плоскости, если прямая перпендикулярна въ этой точкѣ этимъ тремъ прямымъ (фиг. 444).

Фиг. 444.

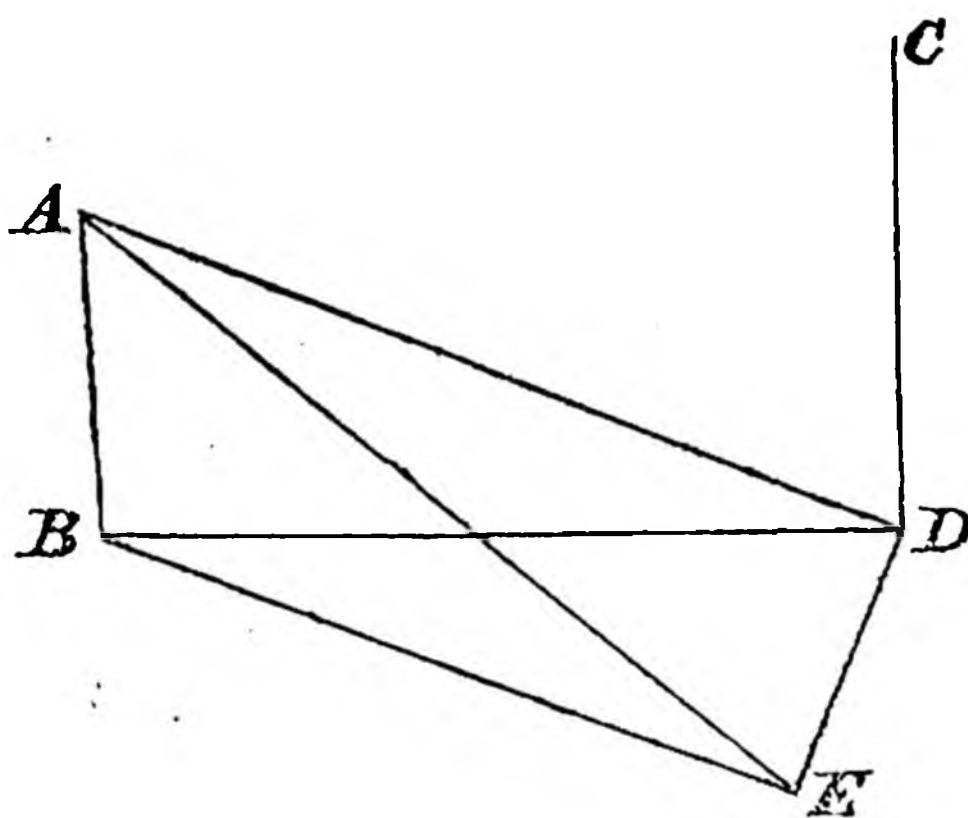


*Доказат.* Если бы этого не было, то пусть  $BD$  и  $BE$  лежатъ въ плоскости, а  $BC$  надъ плоскостью. Продолживъ плоскость проходящую по прямымъ  $AB$  и  $BC$  до встрѣчи съ плоскостью, проходящую по прямымъ  $BD$  и  $BE$ , пусть она встрѣтитъ эту послѣднюю по прямой линіи  $BF$  (кн. 11, пред. 3), прямыя  $AB$ ,  $BC$ ,  $BF$  лежатъ въ одной плоскости.

Но  $AB$  перпендикулярна къ  $BD$  и  $BE$  слѣдовательно (кн. 11, пред. 4) она перпендикулярна и къ  $BF$ , слѣдовательно  $\angle ABF = d$ , а по условію  $\angle ABC = d$ . А слѣдовательно  $\angle ABF = \angle ABC$ , что невозможно (кн. 1, пред. 9). А потому прямая  $BC$  находится не въ другой, а въ одной и той же плоскости, какъ и прямыя  $BD$  и  $BE$ .

*Предложеніе 6.* Двѣ прямыя  $AB$  и  $CD$ , перпендикулярныя къ одной и той же плоскости, параллельны (фиг. 445).

Фиг. 445.



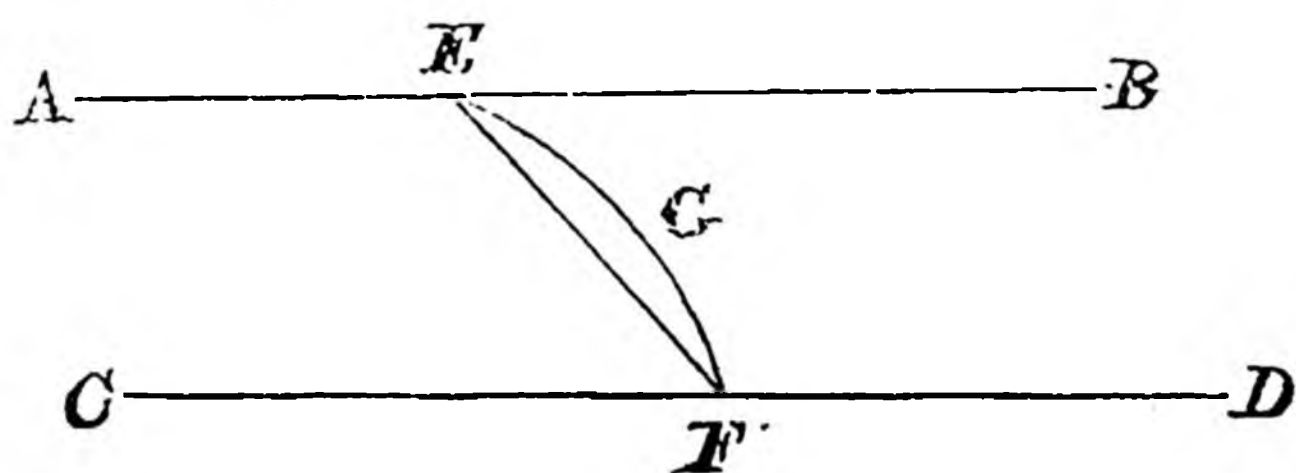
*Доказат.* Пусть  $B$  и  $D$  суть точки пересѣченія перпендикуляра съ плоскостью. Проведемъ прямую  $BD$ , и возставимъ къ  $BD$ , въ точкѣ  $D$ , перпендикуляръ  $DE$  въ этой же плоскости; сдѣлаемъ  $DE = AB$ ; проведемъ еще прямыя  $BE$ ,  $AE$ ,  $AD$ .

Такъ какъ прямая  $AB$  перпендикулярна къ плоскости, то (кн. 11,

пред. 3) угол  $\angle ABD$  и  $\angle ABC$  суть прямые. По этой же причине  $\angle CDB$  и  $\angle CDE$  также прямые. Но  $AB=DE$  и  $BD=BD$ , следовательно (кн. 1, пред. 4)  $AD=BE$ . Из этого слѣдуетъ, что  $DE=AB$ ,  $AD=BE$ ,  $AE=AE$ ; а потому (кн. 1, пред. 8)  $\angle EDA=\angle ABE=d$ ; слѣдовательно  $ED$  перпендикулярна къ  $DA$ , а также къ  $DB$  и  $DC$ . слѣдовательно (кн. 11, пред. 5)  $BD$ ,  $DA$ ,  $DC$  лежатъ въ одной и той же плоскости, что и  $AB$  (кн. 11, пред. 2). Но  $\angle ABD$  и  $\angle BDC$  суть прямые, слѣдовательно (кн. 1, пред. 28)  $AB$  и  $CD$  параллельны.

*Предложеніе 7.* Прямая линия, соединяющая двѣ точки  $E$  и  $F$  двухъ параллельныхъ линій  $AB$  и  $CD$ , лежитъ въ одной съ ними плоскости (фиг. 446).

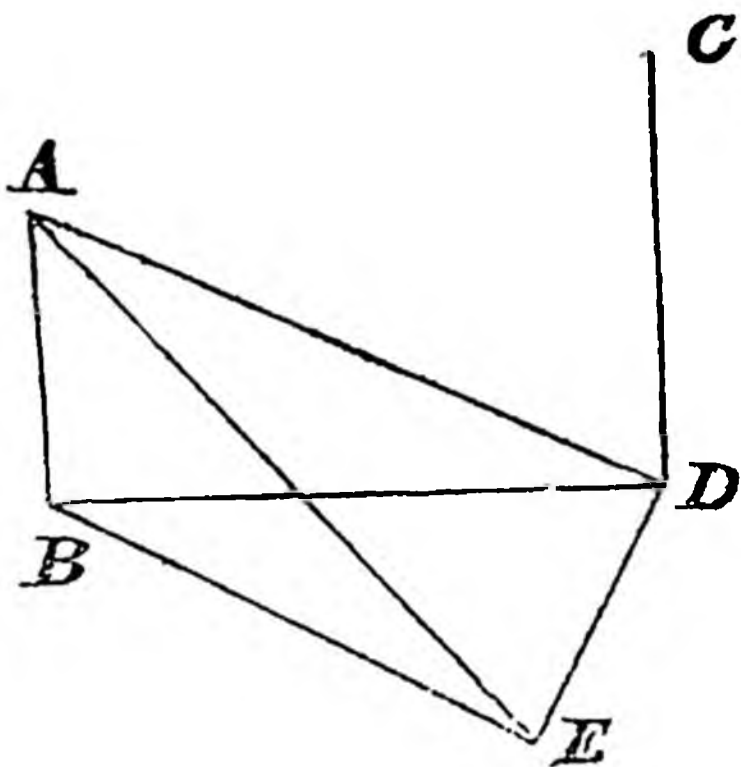
Фиг. 446.



*Доказат.* Если это не имѣетъ мѣста, то пусть она находится надъ плоскостью, какъ на примѣръ  $EGF$ . Чрезъ эту послѣднюю проведемъ плоскость, которая (кн. 11, пред. 3) пересѣчетъ нижнюю плоскость по линіи  $EF$ , которая съ прямой  $EGF$  заключаетъ пространство, что невозможно (кн. 1, пред. 12). А потому прямая линия, проведенная между точками  $E$  и  $F$ , лежитъ не надъ, а въ той же самой плоскости, въ которой лежатъ параллельныя прямая  $AB$  и  $CD$ .

*Предложеніе 8.* Если изъ двухъ параллельныхъ линій  $AB$  и  $CD$ , одна перпендикулярна къ плоскости, то и другая  $CD$  перпендикулярна къ той же самой плоскости (фиг. 447).

Фиг. 447.



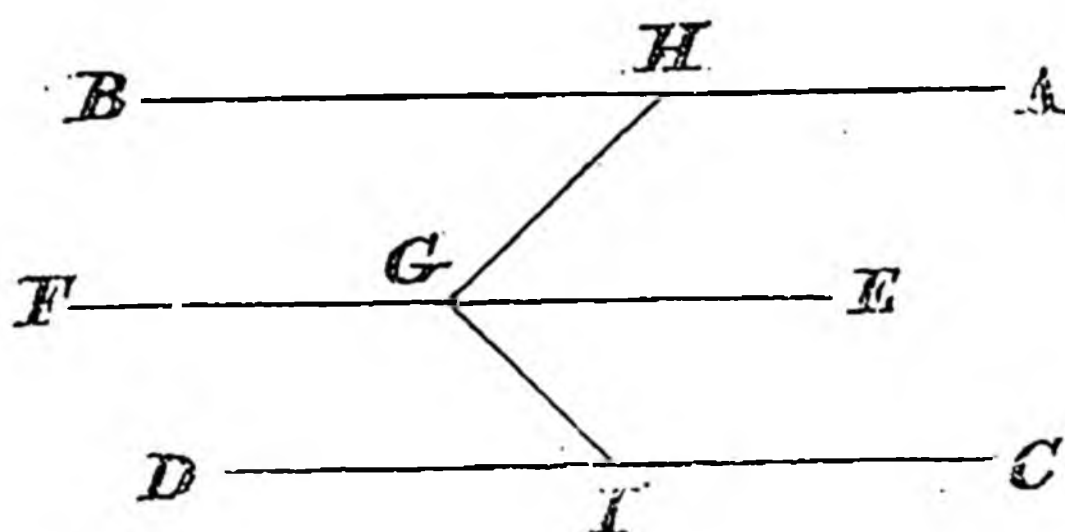
*Доказат.* Пусть  $B$  и  $D$  будутъ точки встрѣчи параллельныхъ линій съ плоскостью. Проведемъ  $BD$ ; прямая  $AB$ ,  $BD$ ,  $DC$  лежатъ въ одной плоскости (кн. 11, пред. 7). Возставимъ перпендикуляръ  $DE$ , въ точкѣ  $D$ , къ прямой  $DB$ , лежащей въ первой плоскости, отложимъ  $DE=AB$  и проведемъ прямая  $BE$ ,  $AE$ ,  $AD$ .

Такъ какъ  $AB$  перпендикулярна къ основной плоскости, а прямая  $AB$  и  $CD$  параллельны, то  $\angle ABD = \angle ABE = d$  (кн. 11, опред. 3) и  $\angle ABD + \angle CDB = 2d$  (кн. 1, пред. 29). Но  $\angle ABD = d$ , слѣдовательно  $\angle CDB = d$ , а потому прямая  $CD$  перпендикулярна къ прямой  $DB$ .

Такъ какъ  $\angle ABD = \angle EDB = d$ , прямая  $AB = DE$ ,  $BD = BD$ , то (кн. 1, пред. 4)  $AD = BE$ . А потому  $DE = AB$ ,  $AD = BE$ ,  $AE = AE$ , слѣдовательно (кн. 1, пред. 8)  $\angle ABE = \angle EDA$ . Но  $\angle ABE = d$ , а потому  $\angle EDA = d$ , и прямая  $ED$  перпендикулярна къ прямой  $DA$ ; но такъ какъ  $\angle BDE = d$ , то прямая  $ED$  перпендикулярна также къ прямой  $DB$ , слѣдовательно (кн. 11, пред. 4) она перпендикулярна къ плоскости, проведенной чрезъ прямые  $DB$  и  $DA$ , а потому она перпендикулярна (кн. 1, пред. 3) и къ прямой  $DC$ , которая лежитъ въ одной плоскости съ треугольникомъ  $ADB$ . Изъ этого слѣдуетъ, что  $CD$  перпендикулярна къ  $DE$ , но мы видѣли, что  $CD$  перпендикулярна къ  $DB$ , слѣдовательно (кн. 11, пре. 4) она перпендикулярна къ плоскости, въ которой лежатъ  $DE$  и  $DB$ , т. е. къ плоскости прямой  $AB$ .

**Предложеніе 9.** Прямые  $AB$  и  $CD$  параллельныя прямой  $EF$ , не лежащей съ ними въ одной плоскости параллельны между собою (фиг. 448).

Фиг. 448.

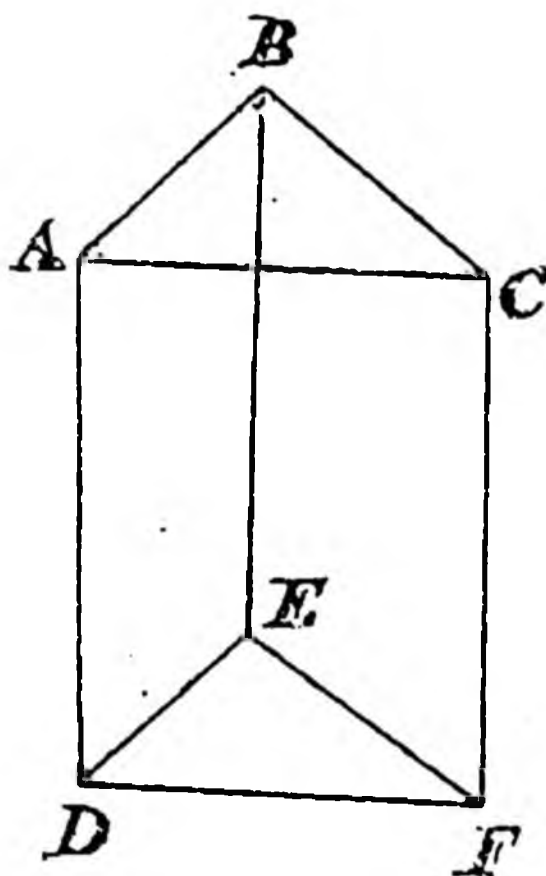


**Доказат.** Возьмемъ на прямой  $EF$  произвольную точку  $G$ , въ этой точки возставимъ перпендикуляры къ прямой  $EF$ , одинъ  $GH$ , лежащій въ плоскости, проведенной чрезъ прямые  $EF$  и  $AB$ ; другой  $GI$  въ плоскости, проведенной чрезъ прямые  $EF$  и  $CD$ . Изъ этого слѣдуетъ, что прямая  $EF$  перпендикулярна къ прямымъ  $GH$  и  $GI$ , а потому (кн. 11, пред. 4) она перпендикулярна къ плоскости проведенной чрезъ прямые  $GH$  и  $GI$ ; кромѣ того она параллельна прямой  $AB$ , изъ этого слѣдуетъ (кн. 11, пред. 8) что  $AB$  также перпендикулярна къ этой плоскости. По той же причинѣ и прямая  $CD$  перпендикулярна къ этой же плоскости. слѣдовательно (кн. 11, пред. 6)  $AB$  и  $CD$  параллельны.

**Предложеніе 10.** Два угла  $ABC$  и  $DEE$ , лежащіе въ различныхъ плоскостяхъ, коихъ стороны  $AB$  и  $DE$ ,  $BC$  и  $EF$  параллельны, равны между собою (фиг. 449).

*Доказат.* Отложимъ  $AB=DE$ ,  $BC=EF$  и проведемъ прямыя  $AD$ ,  $CF$ ,  $BE$ ,  $AC$ ,  $DF$ .

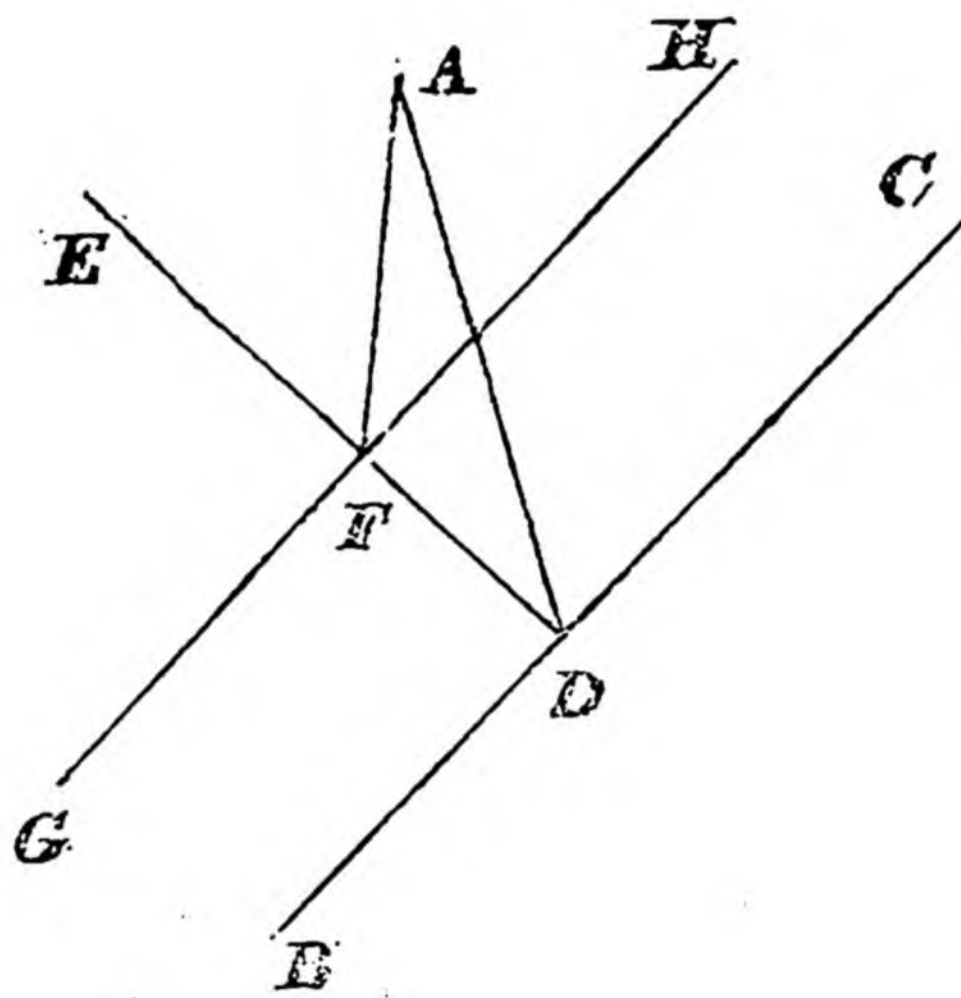
Фиг. 449.



Такъ какъ  $AB$  и  $DE$  равны и параллельны, то (кн. 1, пред. 33) прямая  $AD$  и  $BE$  также равны и параллельны. По той же причинѣ  $CF$  и  $BE$  также равны и параллельны. Слѣдовательно (кн. 11, пред. 9 и кн. 1, пред. 1)  $AD$  и  $CF$  равны и параллельны, а потому (кн. 1, пред. 33)  $AC$  и  $DF$  равны и параллельны. Итакъ  $AC=DF$ ,  $AB=DE$ ,  $BC=EF$ , слѣдовательно (кн. 1, пред. 8)  $\angle ABC=\angle DEF$ .

*Предложеніе 11.* Изъ данной точки  $A$ , надъ данной плоскостью, опустить на нее перпендикуляръ (фиг. 450)?

Фиг. 450.



*Рѣшеніе.* Въ данной плоскости проведемъ произвольную прямую  $BC$  и опустимъ на нее перпендикуляръ  $AD$  (кн. 1, пред. 12). Если  $AD$  перпендикулярна къ данной плоскости, то задача рѣшена. Если же прямая  $AD$  не перпендикулярна къ данной плоскости, то возставимъ въ данной плоскости къ прямой  $BC$  въ точкѣ  $D$  перпендикуляръ  $DE$ , а изъ точки  $A$  опустимъ перпендикуляръ  $AF$  на прямую  $DE$ , этотъ перпендикуляръ  $AF$  будетъ искомымъ.

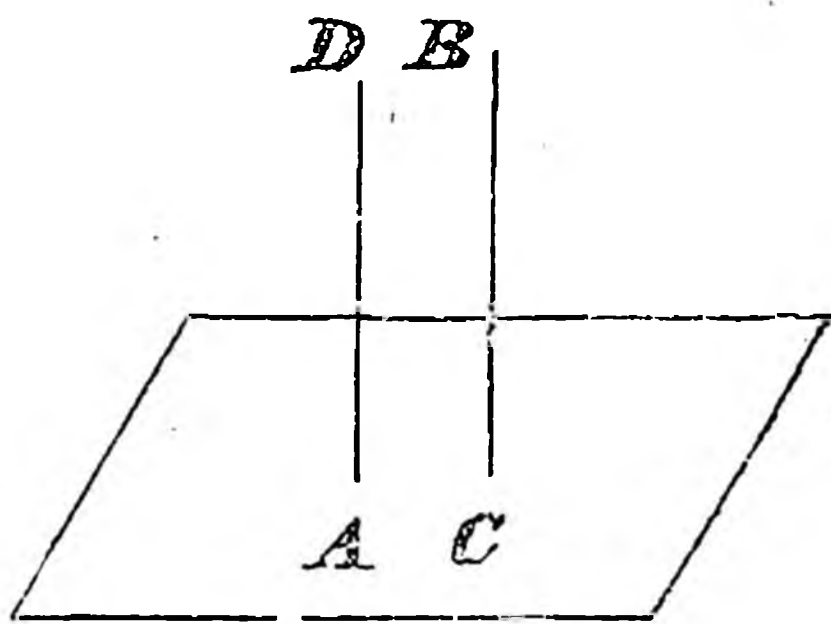
Черезъ точку  $F$  проведемъ прямую  $GH$  параллельную прямой  $BC$ . Такъ какъ прямая  $BC$  перпендикулярна къ прямымъ  $DE$  и  $DA$ , то она перпендикулярна къ плоскости, проведенной черезъ  $DE$  и  $DA$  (кн. 11,



пред. 4), но  $GH$  параллельна прямой  $BC$ , а потому прямая  $GH$  также перпендикулярна къ этой плоскости (кн. 11, пред. 8), слѣдовательно она перпендикулярна къ прямой  $FA$ , которая пересѣкаетъ прямую  $GH$  въ точкѣ  $F$ , лежащей въ плоскости проведенной чрезъ прямыя  $DE$  и  $DA$  (кн. 11, опред. 3). Слѣдовательно  $AF$  перпендикулярна къ  $GH$ ; но по предыдущему она также перпендикулярна къ  $DE$ , а потому она перпендикулярна къ плоскости проведенной чрезъ прямыя  $GH$  и  $DE$  (кн. 11, пред. 4), т. е. къ данной плоскости.

*Предложеніе 12.* Изъ данной точки  $A$ , лежащей въ данной плоскости, возставить къ ней перпендикуляръ (фиг. 451)?

Фиг. 451.

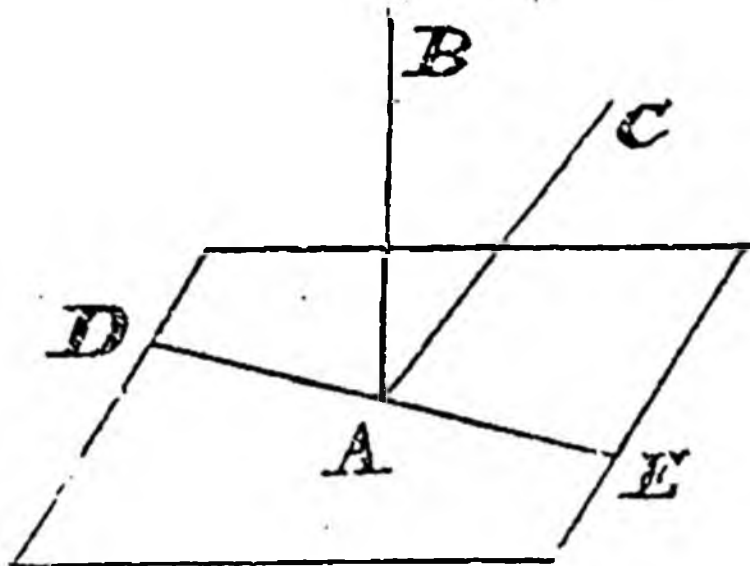


*Рѣшеніе.* Надъ плоскостью возьмемъ произвольную точку  $B$ , и изъ нея (кн. 11, пред. 11) опустимъ перпендикуляръ  $BC$  на данную плоскость, чрезъ точку  $A$  проведемъ прямую  $AD$  параллельную  $BC$ , это и будетъ искомый перпендикуляръ.

Въ самомъ дѣлѣ,  $AD$  и  $BC$  параллельны, а прямая  $CB$  перпендикулярна къ данной плоскости, слѣдовательно и прямая  $AD$  будетъ перпендикулярна къ данной плоскости (кн. 11, пред. 8).

*Предложеніе 13.* Изъ точки  $A$ , лежащей въ плоскости, нельзя возставить къ ней два перпендикулара, лежащіе по одну и ту же сторону плоскости (фиг. 452).

Фиг. 452.

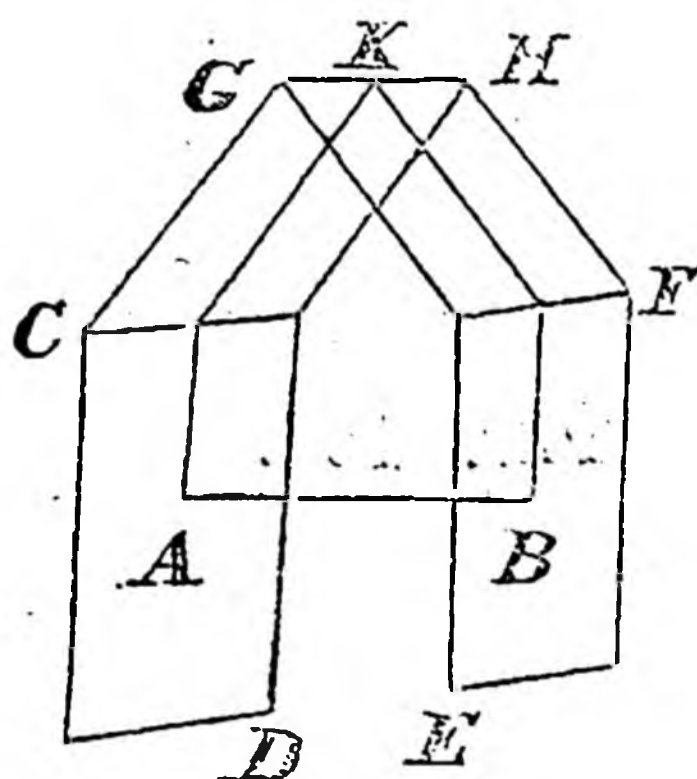


*Доказат.* Пусть, если возможно, въ точкѣ  $A$  возставлены два перпендикулара  $AB$  и  $AC$ , лежащіе по одну сторону плоскости. Проведемъ чрезъ эти перпендикулары плоскость, то она пересѣчетъ данную плоскость по прямой линіи  $DAE$  (кн. 11, пред. 3), слѣдовательно прямыя  $AB$ ,  $AC$  и  $AE$  лежатъ въ одной плоскости. Но  $\angle BAE$  и  $\angle CAE$  суть прямые, такъ какъ прямыя  $AB$  и  $AC$  перпендикулярны къ данной плоскости, въ которой ле-

жить прямая  $AE$ ; а потому  $\angle BAE = \angle CAE$ , что невозможно (кн. 1, пред. 9), такъ какъ они лежатъ въ одной плоскости. Слѣдовательно невозможно, чтобы одновременно прямые  $AB$  и  $AC$  были перпендикулярны, къ одной и той же плоскости, въ точкѣ  $A$ .

*Предложеніе 14.* Двѣ плоскости  $CD$  и  $EF$ , къ которымъ перпендикулярна одна и таже прямая  $AB$ , параллельны между собою (фиг. 453).

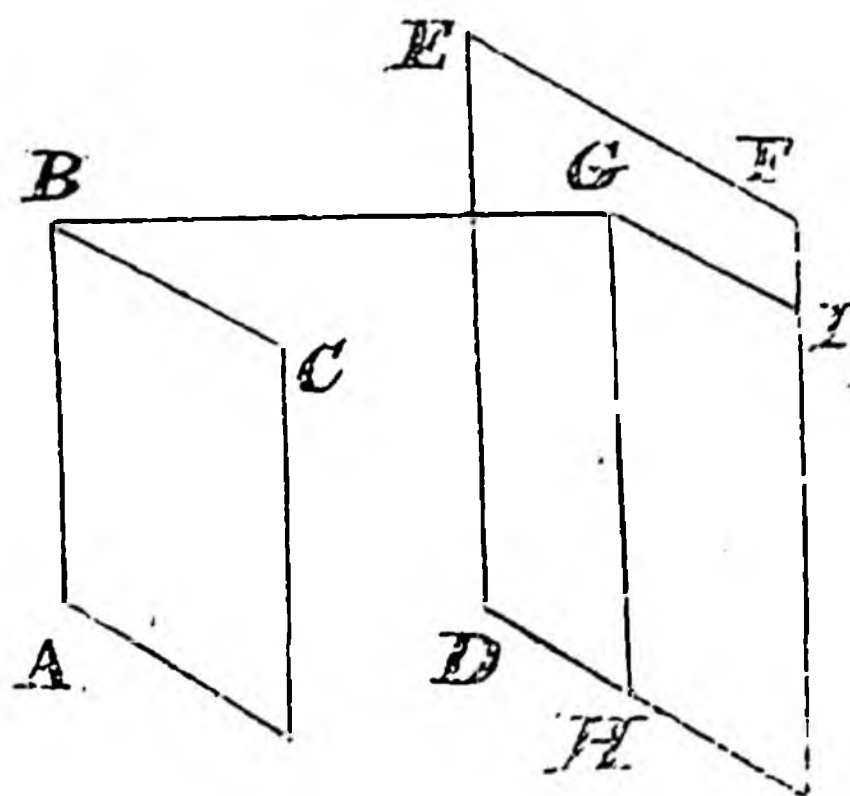
Фиг. 453.



*Доказат.* Если бы онѣ были не параллельны, то продолживъ ихъ на достаточное разстояніе, онѣ встрѣтятся и пересѣкутся по прямой линіи  $GH$  (кн. 11, пред. 3). На прямой  $GH$  возьмемъ произвольную точку  $K$ , и проведемъ прямыя линіи  $KA$  и  $KB$ , лежащія въ продолженныхъ плоскостяхъ  $CD$  и  $EF$ . Такъ какъ  $AB$  перпендикулярна къ  $EF$ , то она также перпендикулярна къ  $BK$ , а потому  $\angle ABK = d$ . По той же причинѣ  $\angle BAK = d$ . Слѣдовательно въ  $\triangle KAB$  сумма двухъ угловъ равна двумъ прямымъ угламъ, что невозможно (кн. 1, пред. 17). Изъ этого слѣдуетъ, что плоскости  $CD$  и  $EF$  по продолженіи не встрѣчаются, а потому онѣ параллельны (кн. 11, опред. 8).

*Предложеніе 15.* Если прямыя линіи, составляющія стороны двухъ угловъ  $ABC$  и  $DEF$ , лежащихъ въ различныхъ плоскостяхъ, параллельны, то плоскости  $AC$  и  $DE$ , въ которыхъ лежатъ эти углы, также параллельны (фиг. 454).

Фиг. 454.

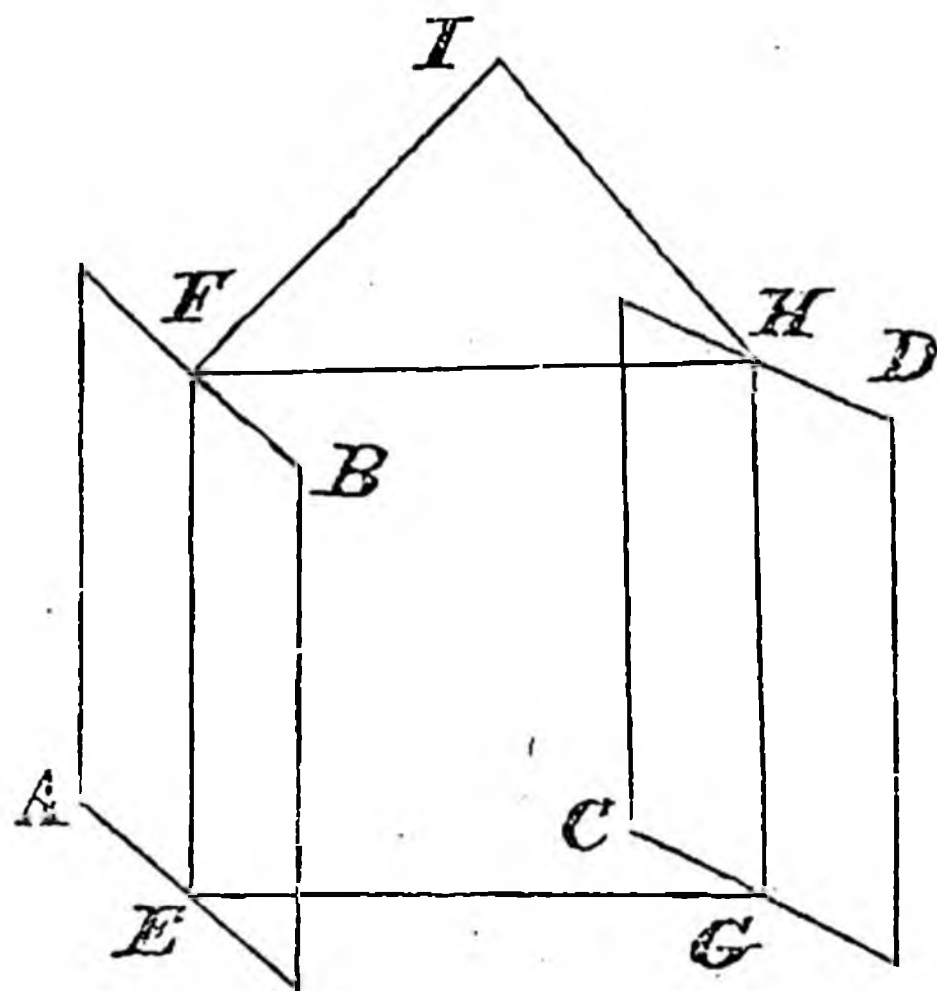


*Доказат.* Изъ точки  $B$  опустимъ (кн. 11, пред. 11) перпендикуляръ  $BG$  на плоскость  $DF$ ; чрезъ точку  $G$  проведемъ въ этой плоскости прямыя  $ED$  и  $EF$  параллельныя  $GH$  и  $GI$ .

Такъ какъ  $BG$  перпендикулярна къ плоскости  $DF$ , то  $\angle BGN = d = \angle BGI$  (кн. 11, опред. 3). Но прямая  $AB$  параллельна  $ED$ , а  $ED$  параллельна  $GH$ , слѣдовательно  $AB$  параллельна  $GH$  (кн. 11, пред. 9), а потому  $\angle BGN + \angle ABG = 2d$  (кн. 1, пред. 29). Слѣдовательно  $\angle ABG = d$ , а потому  $GB$  перпендикулярна къ  $BA$ , по той же причинѣ она перпендикулярна къ  $BC$ ; слѣдовательно она перпендикулярна къ плоскости  $AC$  (кн. 11, пред. 4). Но по предъидущему  $GB$  перпендикулярна къ плоскости  $DF$ . Слѣдовательно плоскости  $AC$  и  $DF$  параллельны (кн. 11, пред. 14).

*Предложеніе 16.* Пересѣченія  $EF$  и  $GH$  двухъ параллельныхъ плоскостей  $AB$  и  $CD$  третьєю  $EFGH$ , параллельнымъ между собою (фиг. 455).

Фиг. 455.



*Доказат.* Пусть  $EF$  и  $GH$  не будутъ параллельны, то онѣ встрѣтятся (такъ какъ онѣ лежатъ въ одной плоскости) по достаточномъ продолженіи, на примѣръ въ точкѣ  $I$ . Такъ какъ прямая линія  $EFI$  вся лежитъ въ плоскости  $AB$ , то точка  $I$ , которая принадлежитъ прямой  $EFI$ , также лежитъ въ плоскости  $AB$  (кн. 11, пред. 1). По той же причинѣ точка  $I$  лежитъ и въ плоскости  $CD$ , а потому плоскости  $AB$  и  $CD$  по достаточномъ продолженіи встрѣчаются, что противорѣчитъ нашему положенію. По той же причинѣ  $EF$  и  $GH$  не могутъ встрѣтиться и по другую сторону, а потому онѣ параллельны.

*Предложеніе 17.* Двѣ прямыя линіи  $AB$  и  $CD$  параллельными плоскостями  $GH$ ,  $IK$  и  $LM$ , разсѣкаются на части пропорціональныя (фиг. 456).

*Доказат.* Пусть прямыя  $AB$  и  $CD$  разсѣкаются прямыми  $GH$ ,  $IK$  и  $LM$  въ точкахъ  $A, E, B; C, F$  и  $D$ . Проведемъ прямыя  $AC, BD$  и  $DA$ , изъ коихъ послѣдняя въ точкѣ  $N$  пересѣкаетъ плоскость  $IK$ ; затѣмъ проведемъ прямыя  $EN$  и  $NF$ .

Но такъ какъ линіи пересѣченія  $EN$  и  $BD$  параллельныхъ плоскостей  $IK$  и  $LM$ , плоскостью  $ENBD$ , параллельны (кн. 11, пред. 16), то слѣдуетъ (кн. 6, пред. 2), что:

$$AE:EB=AN:ND$$

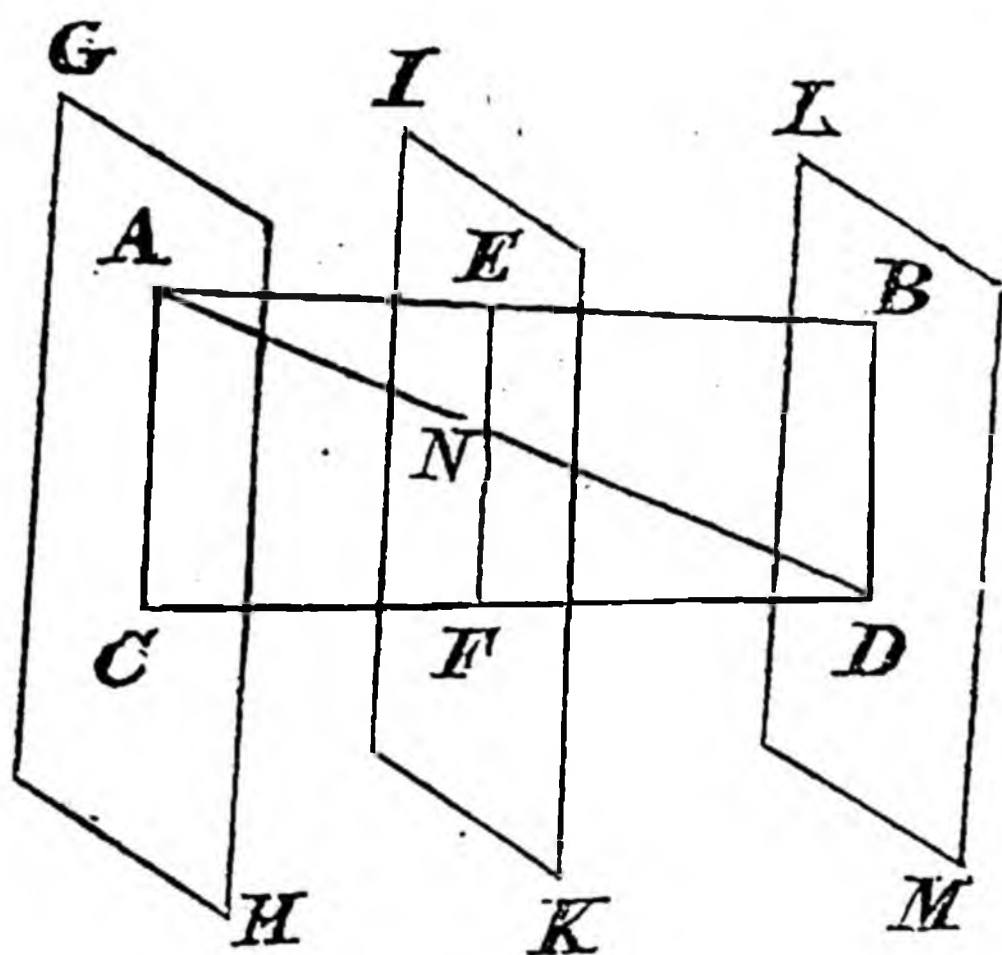
По той же причинѣ:

$$AN:ND=CF:FD$$

Слѣдовательно (кн. 5, пред. 11):

$$AE:EB=CF:FD.$$

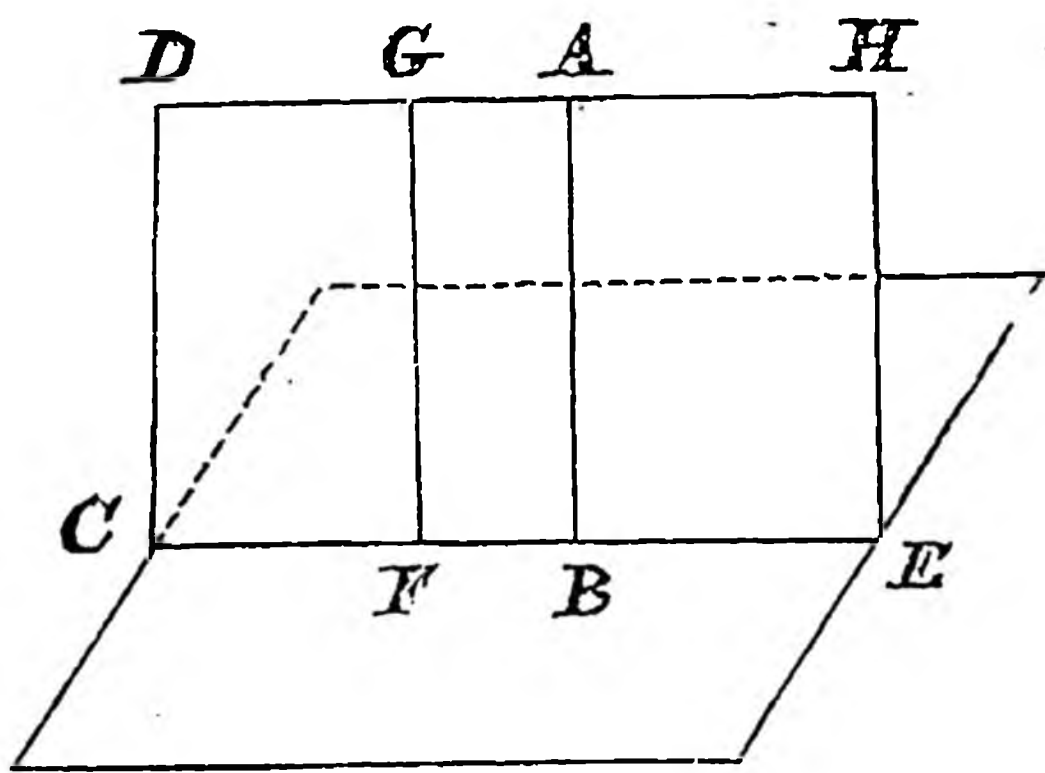
Фиг. 456.



*Предложеніе 18.* Если прямая линия  $AB$ , перпендикулярна къ какой нибудь плоскости, то всѣ плоскости проходящія чрезъ эту линію перпендикулярны данной плоскости (фиг. 457).

*Доказат.* Чрезъ прямую  $AB$  проведемъ произвольную плоскость  $DE$ , которая пересѣкаетъ данную плоскость по прямой линіи  $EC$  (кн. 11, пред. 3). Къ прямой  $EC$ , лежащей въ плоскости  $DE$ , возставимъ перпендикуляръ  $FG$ , слѣдовательно  $\angle GFE=d$ . Но прямая  $AB$  перпендикулярна къ дан-

Фиг. 457.



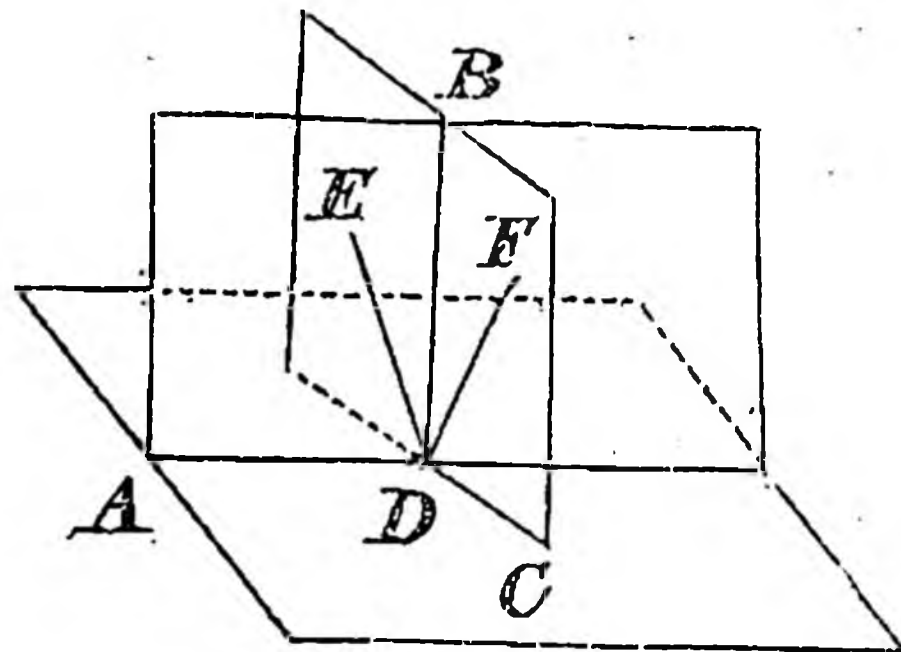
ной плоскости, а потому  $\angle ABE=d$  (кн. 11, опред. 3). Слѣдовательно прямая  $AB$  и  $FG$  параллельны (кн. 1, пред. 28). Изъ этого слѣдуетъ, что прямая  $FG$  (равно какъ и всякій другой перпендикуляръ, возставленный къ прямой  $CE$  въ плоскости  $DE$ ) перпендикулярна къ данной плоскости (кн. 11, пред. 8), а потому (кн. 11, опред. 4) и плоскость  $DE$  (проходящая чрезъ прямую  $AB$ ) перпендикулярна къ данной плоскости.

*Предложеніе 19.* Если двѣ пересѣкающіяся плоскости  $AB$  и  $BC$



перпендикулярны къ третьей, то и линия ихъ взаимнаго пересѣченія  $BD$ , перпендикулярна этой плоскости (фиг. 458).

Фиг. 458.



*Доказат.* Пусть  $DB$  не перпендикулярна къ данной плоскости, слѣдовательно она не перпендикулярна къ прямымъ  $DA$  и  $DC$ : пусть  $DE$  въ плоскости  $AB$  перпендикулярна къ  $DA$  и  $DF$ , лежащая въ плоскости  $BC$  перпендикулярна къ  $DC$ . Слѣдовательно (кн. 11, опред. 4) прямая  $DE$  и  $DF$  были бы перпендикулярны къ данной плоскости, что невозможно (кн. 11, пред. 13). Слѣдовательно никакая другая прямая, кромѣ прямой  $DB$ , не можетъ быть перпендикулярна къ данной плоскости.

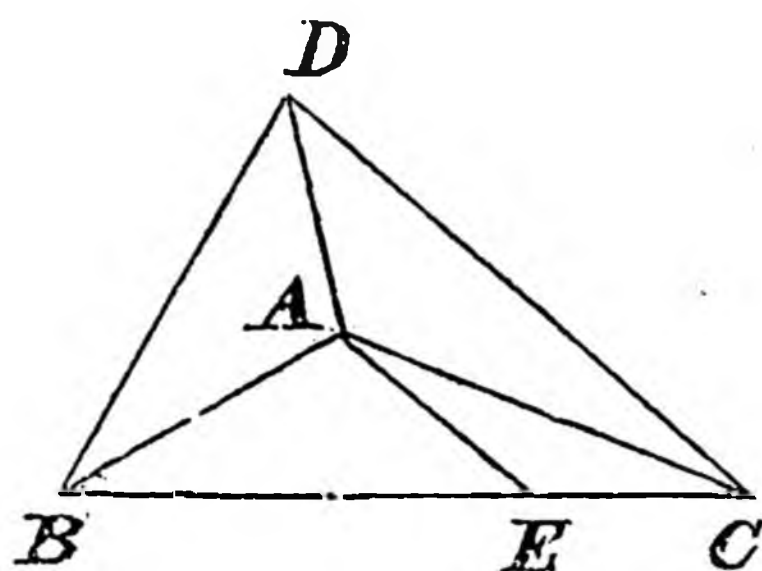
*Примѣч. 6.* Если изъ точки взятой внутри двуграннаго угла опустимъ на его стороны перпендикуляры, то уголь между этими перпендикулярами будетъ дополнять уголь между плоскостями до двухъ прямыхъ угловъ, т. е. если чрезъ  $A$  назовемъ уголь между плоскостями, а чрезъ  $B$  уголь между перпендикулярами, то мы будемъ имѣть:

$$A + B = 2d.$$

Въ самомъ дѣлѣ, если проведемъ плоскость по двумъ перпендикулярамъ, то эта плоскость будетъ перпендикулярна къ пересѣченію плоскостей, составляющихъ двугранный уголь, пересѣченія ея съ гранями угла будетъ уголь двухъ плоскостей, стороны его будутъ перпендикулярны къ перпендикулярамъ, опущеннымъ изъ взятой точки на стороны угла, слѣдовательно здѣсь образуется четырехугольникъ въ которомъ два угла будутъ прямые, а слѣдовательно сумма остальныхъ равна  $2d$ .

*Предложеніе 20.* Сумма двухъ изъ плоскихъ угловъ  $BAC$ ,  $CAD$  и  $DAB$ , образующихъ тѣлесный уголь  $A$ , всегда больше третьяго (фиг. 459).

Фиг. 459.



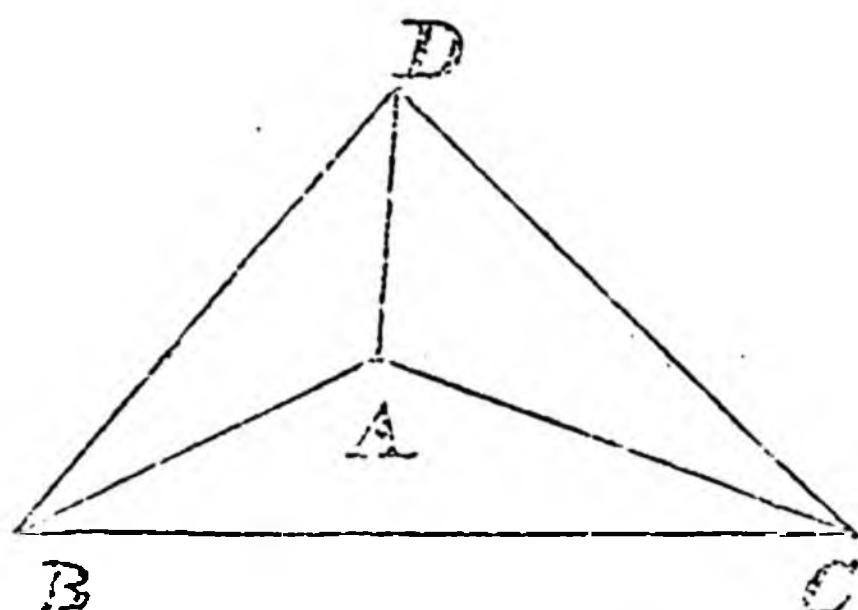
*Доказат.* Если эти три угла равны, то очевидно, что сумма двухъ

изъ нихъ больше третьяго. Если же они неравны: пусть  $\angle BAC$  больше каждаго изъ двухъ другихъ. Сдѣлаемъ  $\angle BAE = \angle BAD$  и  $AE = AD$ . Проведемъ чрезъ точку  $E$  прямую  $BEC$ , которая пересѣчетъ прямыя  $AB$  и  $AC$  въ точкахъ  $B$  и  $C$ , проведемъ еще прямыя  $DB$  и  $DC$ .

Такъ какъ  $\angle BAE = \angle BAD$ ,  $AE = AD$ ,  $AB = AB$ , то  $BE = BD$  (кн. 1, пред. 4). Но  $BD + DC > BE + EC$  (кн. 1, пред. 20), а потому  $DC > EC$ ; такъ какъ  $AD = AE$ ,  $AC$  общая и  $DC > EC$ , то  $\angle DAC > \angle EAC$  (кн. 1, пред. 25); но  $\angle DAB = \angle BAE$ , слѣдовательно  $\angle DAC + \angle DAB > \angle BAC$  (кн. 1, пред. 4).

*Предложеніе 21.* Во всякомъ тѣлесномъ углѣ  $A$ , составленномъ изъ плоскихъ угловъ  $\angle BAC$ ,  $\angle CAD$ ,  $\angle DAB$ , сумма этихъ послѣднихъ меньше четырехъ прямыхъ (фиг. 460).

Фиг. 460.



*Доказат.* На прямыхъ  $AB$ ,  $AC$  и  $AD$  возьмемъ произвольныя точки  $B$ ,  $C$  и  $D$ , и проведемъ прямыя  $BC$ ,  $CD$  и  $DB$ .

Такъ какъ тѣлесный уголъ  $B$  составленъ изъ трехъ плоскихъ угловъ  $CBA$ ,  $ABD$  и  $DBC$ , то (кн. 11, пред. 20)  $\angle CBA + \angle ABD > \angle DBC$ . По той же причинѣ въ тѣлесномъ углѣ  $C$ ,  $\angle BCA + \angle ACD > \angle DCB$ , а въ тѣлесномъ углѣ  $D$ ,  $\angle CDA + \angle ADB > \angle BDC$ . Слѣдовательно  $\angle CBA + \angle ABD + \angle BCA + \angle ACD + \angle CDA + \angle ADB > \angle DBC + \angle DCB + \angle BDC$ . Но сумма послѣднихъ трехъ угловъ равна  $2d$  (кн. 1, пред. 32). А потому сумма первыхъ шести изъ вышенаписанныхъ угловъ  $> 2d$ . Но сумма трехъ угловъ, въ каждомъ изъ треугольниковъ  $ABC$ ,  $ACD$  и  $ADB$  равна двумъ прямымъ, а потому сумма всѣхъ девяти угловъ этихъ трехъ треугольниковъ равна  $6d$ . Но сумма шести угловъ:  $\angle CBA + \angle ABD + \angle BCA + \angle ACD + \angle CDA + \angle ADB > 2d$ , слѣдовательно сумма остальныхъ трехъ угловъ  $\angle BAC + \angle CAD + \angle DAB < 4d$ . Подобнымъ же образомъ доказы-  
вается это предложеніе для тѣлеснаго угла  $A$ , составленнаго не изъ трехъ, а изъ большаго числа плоскихъ угловъ.

*Примѣч. 7.* Если внутри триграннаго угла возьмемъ точку и изъ нея опустимъ на стороны двуграннаго угла перпендикуляры, то они образуютъ тригранный уголъ, который называется *дополнительнымъ* даннаго угла.

Если чрезъ  $A$ ,  $B$ ,  $C$  означимъ плоскіе углы, составляющіе данный тригранный уголъ,

через  $A', B', C'$  означимъ плоскіе углы, составляющіе дополнительный тригранный уголъ, через  $a, b, c$  двугранные углы даннаго триграннаго, и наконецъ через  $a', b', c'$  означимъ двугранные углы дополнительнаго триграннаго угла, то мы будемъ имѣть очевидно:

$$A + a' = 2d, \quad A' + a = 2d$$

$$B + b' = 2d, \quad B' + b = 2d$$

$$C + c' = 2d, \quad C' + c = 2d.$$

Если сложимъ первыя три уравненія то найдемъ:

$$a' + b' + c' + A + B + C = 6d$$

откуда:

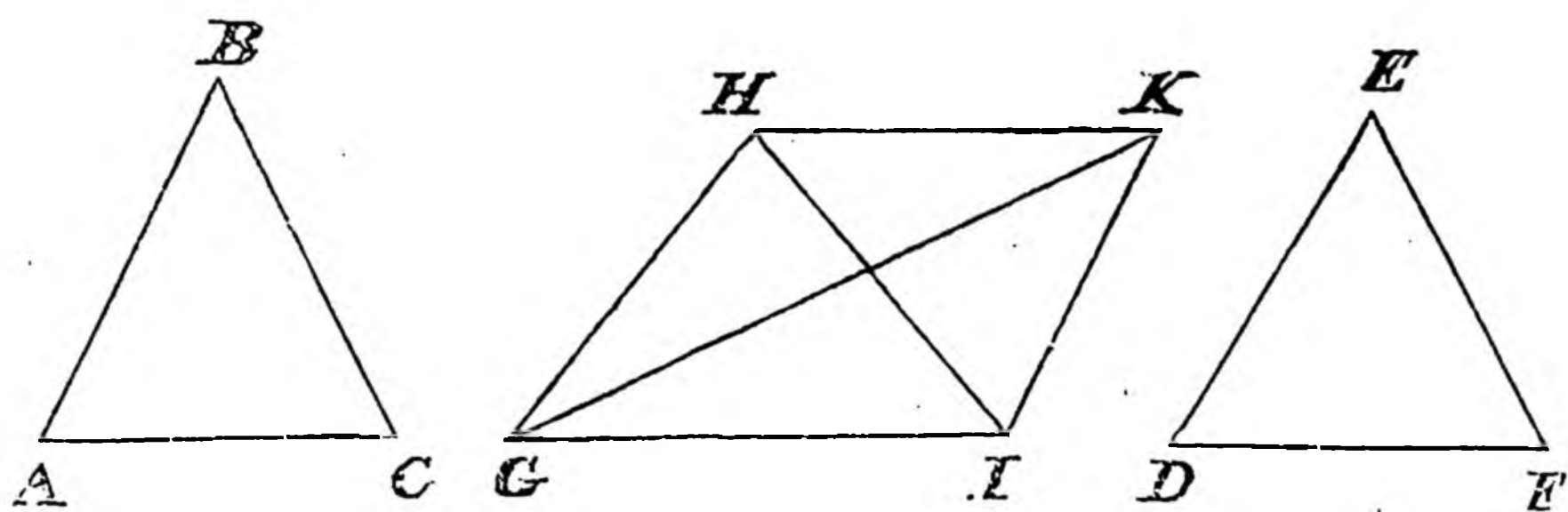
$$a' + b' + c' = 6d - (A + B + C)$$

Такъ какъ  $A + B + C < 4d$ , то очевидно что  $a' + b' + c' > 2d$  и  $< 6d$ , т. е. во всякомъ тригранномъ углѣ сумма двугранныхъ угловъ больше двухъ прямыхъ и меньше шести прямыхъ.

Легко видѣть, что сумма двугранныхъ угловъ во всякомъ многогранномъ углѣ заключается между  $2dn$  и  $2d(n-2)$ , гдѣ  $n$  есть число сторонъ многограннаго угла.

*Предложеніе 22.* Если сумма двухъ изъ трехъ плоскихъ угловъ  $\angle ABC$ ,  $\angle DEF$  и  $\angle GHI$  больше третьяго, и если прямыя линіи составляющія эти углы сдѣлаемъ равными; то изъ прямыхъ линій  $AC$ ,  $DF$  и  $GI$ , соединяющихъ конечности равныхъ прямыхъ, можно построить треугольникъ (фиг. 461).

Фиг. 461.



*Доказат.* Здѣсь нужно (кн. 1, пред. 22) только доказать, что сумма двухъ изъ этихъ прямыхъ  $AC$ ,  $DF$  и  $GI$  больше третьей.

Положимъ, что всѣ три плоскіе углы  $\angle ABC$ ,  $\angle DEF$  и  $\angle GHI$  равны между собою, то равны также между собою и прямыя  $AC$ ,  $DF$  и  $GI$  (кн. 1, пред. 4); а потому сумма двухъ изъ нихъ, очевидно, меньше третьей.

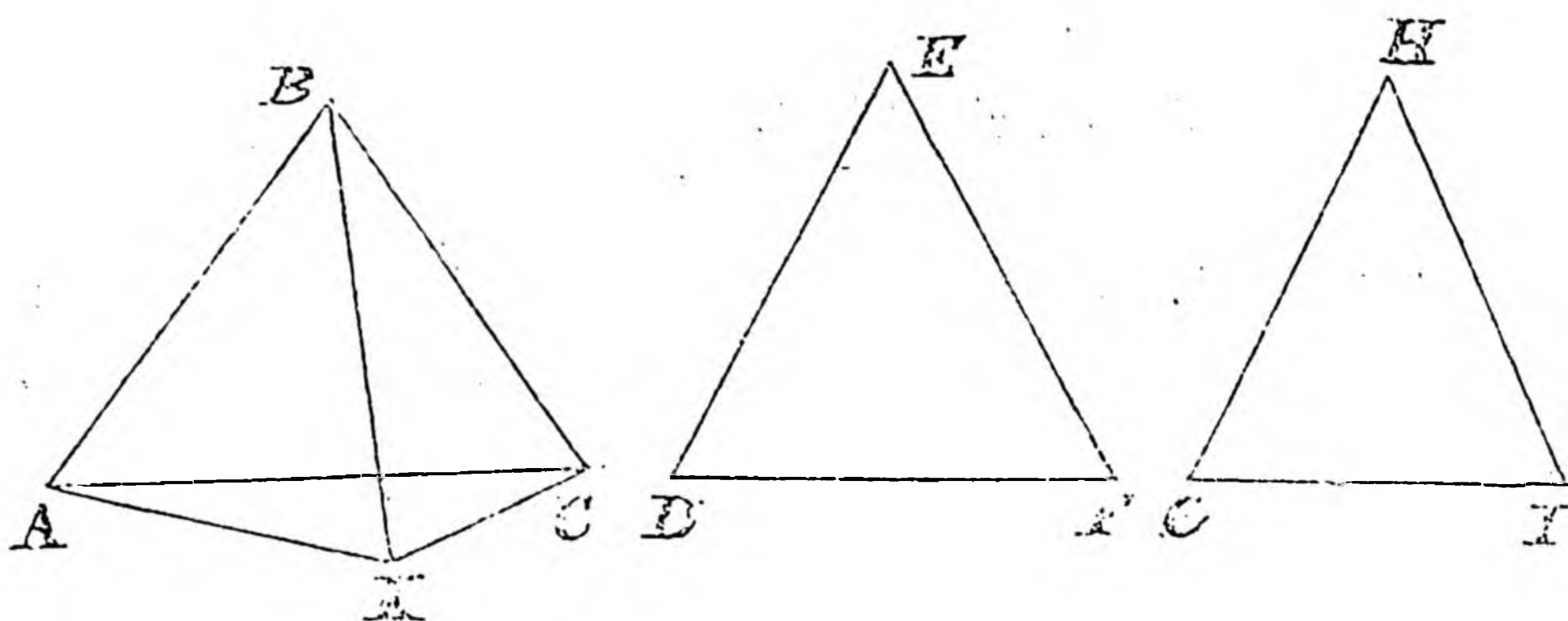
Положимъ, что плоскіе углы неравны: отъ точки  $H$ , на прямой  $HI$  отложимъ  $\angle INK = \angle ABC$ , отложимъ  $NK = HI$  и проведемъ прямыя  $GK$  и  $KI$ .

Такъ какъ  $\angle ABC = \angle INK$ , и  $AB = HI = BC = HK$ , то (кн. 1, пред. 4)  $AC = IK$ .

Но  $\angle ABC + \angle GHI$ , т. е.  $\angle GHK > \angle DEF$ , и  $GH = DE = HK = EF$ , то  $GK > DF$  (кн. 1, пред. 24). Но мы имѣемъ также (кн. 1, пред. 20)  $GI + IK$ , т. е.  $GI + AC > GK$ . Слѣдовательно, тѣмъ болѣе  $GI + AC > DF$ .

*Другое доказат.* Пусть  $\angle ABC$ , одинъ изъ трехъ неравныхъ угловъ, больше каждаго изъ остальныхъ  $\angle DEF$  и  $\angle GHI$ , то сторона  $AC$  больше (кн. 1, пред. 24) каждой изъ остальныхъ  $DF$  и  $GI$ , а потому очевидно, что  $AC + DF > GI$ , и  $AC + GI > DF$ ; остается еще доказать, что  $DF + GI > AC$  (фиг. 462).

Фиг. 462.

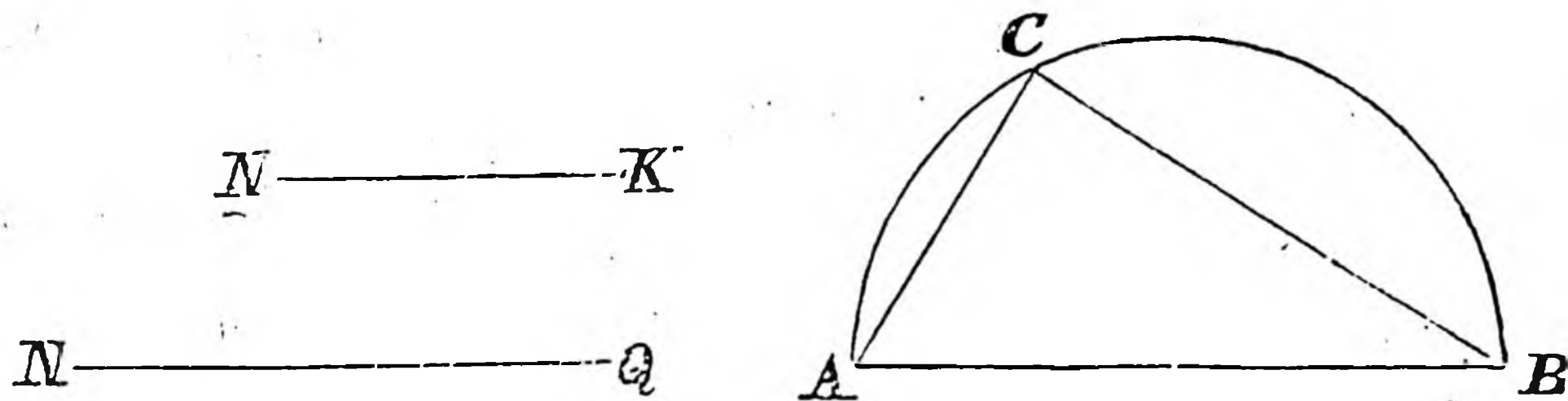


На прямой  $AB$ , въ точкѣ  $B$ , отложимъ  $\angle ABK = \angle GHI$  (кн. 1, пред. 23), сдѣлаемъ  $BK = HI$ , и проведемъ  $AK$  и  $KC$ . Поэтому  $\angle ABK = \angle GHI$ , и  $AB = GH = BK = HI$ , а потому  $AK = GI$  (кн. 1, пред. 4).

Но такъ какъ  $\angle E + \angle GHI > \angle ABC$ , и  $\angle GHI = \angle ABK$ , то  $\angle E > \angle CBK$ ; кромѣ того  $CB = EF = BK = ED$ , слѣдовательно  $DF > CK$  (кн. 1, пред. 24). А потому изъ выше сказаннаго слѣдуетъ, что  $GI = AK$ . слѣдовательно,  $DF + GI > CK + AK$ , но  $CK + AK > AC$  (кн. 1, пред. 20), поэтому тѣмъ болѣе,  $DF + GI > AC$ .

*Слѣствие.* По даннымъ двумъ прямымъ линіямъ  $AB$  и  $NK$ , изъ коихъ  $AB > NK$ , найти такую прямую  $NQ$ , чтобы квадратъ построенный на прямой  $AB$  былъ бы больше квадрата построеннаго на прямой  $NK$ , на  $\square NQ$  (фиг. 463).

Фиг. 463.



На прямой  $AB$  опишемъ полукругъ, впишемъ въ него прямую  $AC = NK$  и проведемъ  $CB$ , то  $CB$  и будетъ искомая  $NQ$ .

Такъ какъ  $\angle ACB = d$  (кн. 3, пред. 31), то  $\square AB = \square AC + \square CB$

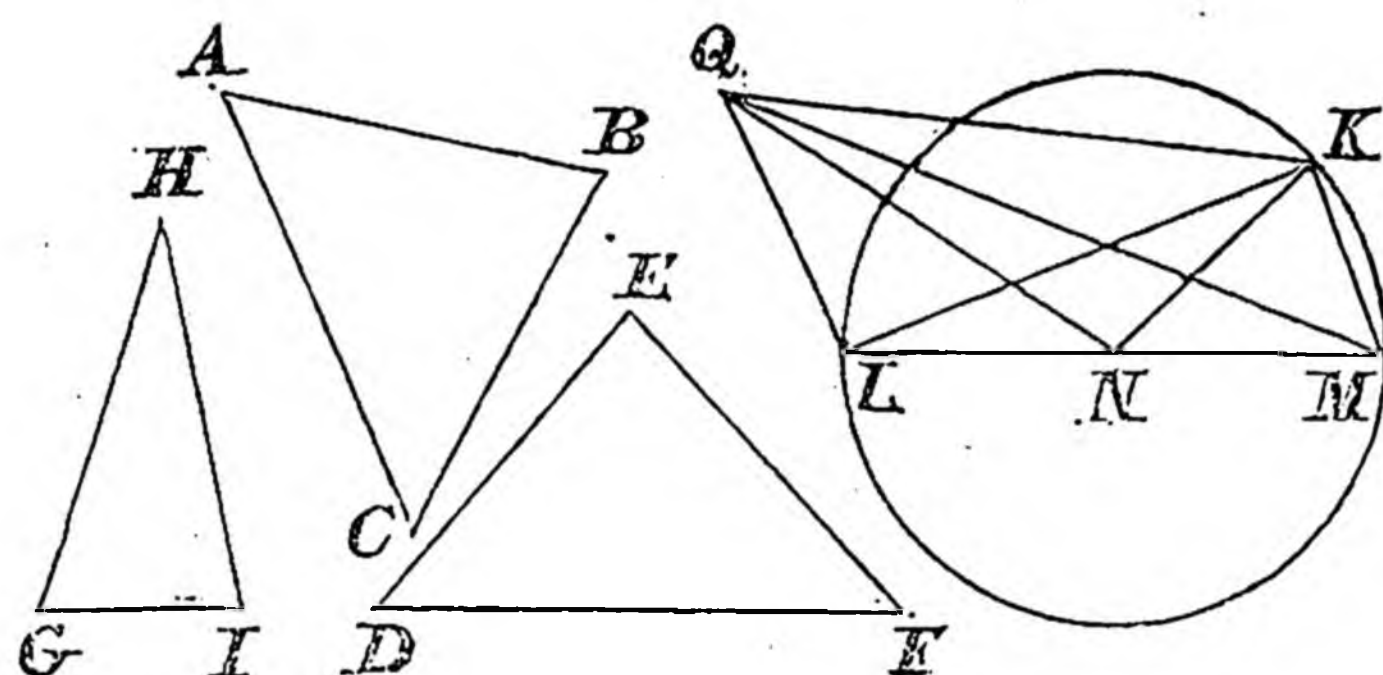


(кн. 1, пред. 47), но  $AC=NK$ , следовательно  $\square AB=\square NK+\square BC$ , откуда слѣдуетъ, что  $\square AB>\square BC$ , следовательно  $BC=NQ$ .

*Предложеніе 23.* Изъ трехъ данныхъ плоскихъ угловъ  $\angle ABC$ ,  $\angle DEF$  и  $\angle GHI$ , сумма которыхъ меньше четырехъ прямыхъ, и изъ коихъ сумма двухъ какихъ нибудь изъ нихъ больше третьяго, составить тѣлесный уголъ (фиг. 464)?

*Рѣшеніе.* На сторонахъ этихъ угловъ отложимъ равныя части  $AB$ ,  $BC$ ,  $ED$ ,  $EF$ ,  $HG$ ,  $HI$  и проведемъ прямыя  $AC$ ,  $DF$  и  $GI$ ; изъ трехъ послѣднихъ прямыхъ можно построить треугольникъ (кн. 11, пред. 22).

Фиг. 464.



Пусть  $\triangle KLM$ , будетъ этотъ треугольникъ, въ немъ  $KL=AC$ ,  $LM=DF$ ,  $MK=GI$ . Около  $\triangle KLM$  опишу кругъ (кн. 4, пред. 5); центръ  $N$  этого круга упадетъ или внутри, или внѣ, или наконецъ на одну изъ сторонъ  $\triangle KLM$ . Проведемъ прямыя  $NK$ ,  $NL$  и  $NM$ , то во первыхъ нужно доказать, что  $AB>NK$ , а во вторыхъ построить искомый тѣлесный уголъ надъ  $\triangle KLM$ .

*Первая часть.* Докажемъ, что  $AB>NK$ , такъ какъ  $AB$  не можетъ быть ни равна, ни меньше  $NK$ .

1. Если центръ  $N$  круга упадетъ на одну изъ сторонъ  $LM$  треугольника  $KLM$ .

Если бы  $AB=NK$ , то  $DE+EF=LN+NM=LM$ , потому что  $AB=DE=EF$  и  $NK=LN=NM$ . Следовательно  $LM=DF$ . А потому  $DE+EF=DF$ , что невозможно (кн. 1, пред. 20). Изъ этого слѣдуетъ, что  $AB$  не равна  $NK$ . Если бы было  $AB<NK$ , то изъ предъидущаго слѣдовало бы, что  $DE+EF<DF$ , что еще менѣе возможно. А потому не можетъ быть  $AB<NK$ .

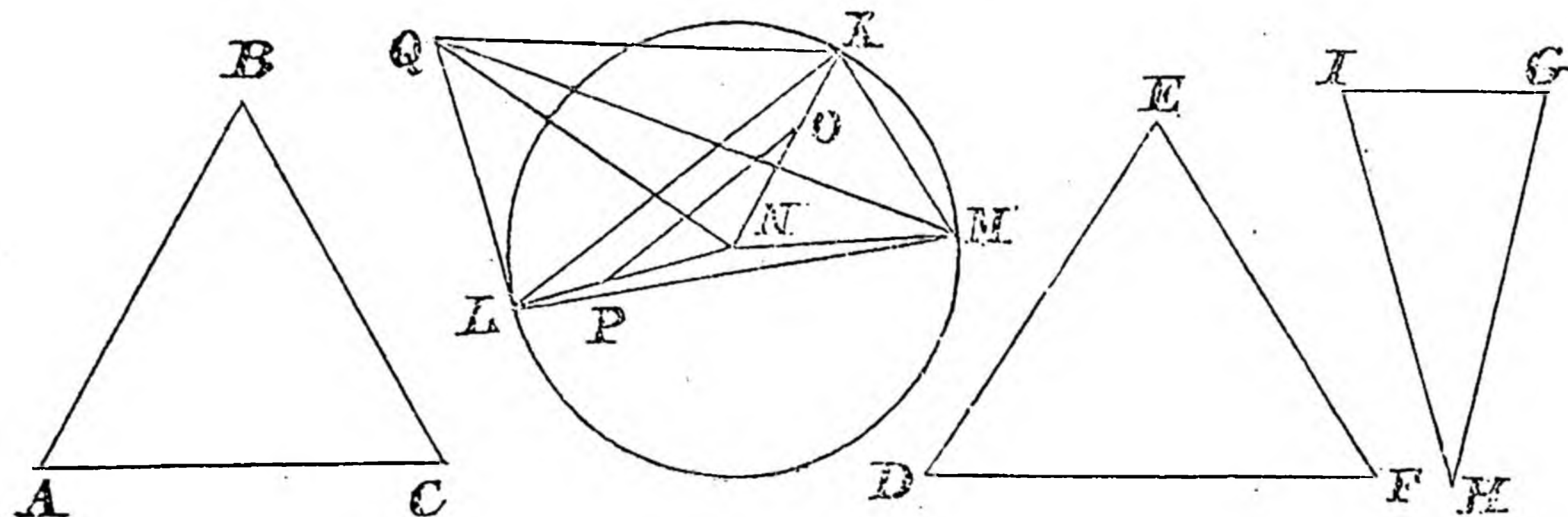
2. Если центръ  $N$  падаетъ внутри  $\triangle KLM$  (фиг. 465).

Если бы  $AB=NK$ , то  $BC=NL$ , а какъ  $AC=KL$ , то  $\angle ABC=\angle KNL$  (кн. 1, пред. 8). По той же причинѣ  $\angle DEF=\angle LNM$  и  $\angle GHI=\angle MNK$ . Следовательно  $\angle ABC+\angle DEF+\angle GHI=\angle KNL+\angle LNM+\angle MNK$ ; но сумма послѣднихъ трехъ угловъ равна четыремъ прямымъ (кн. 1, пред. 15, слѣд.), следовательно и сумма трехъ первыхъ

угловъ также равна четыремъ прямымъ, что противорѣчитъ положенію, что сумма ихъ  $< 4d$ . А потому не можетъ быть, что  $AB = NK$ .

Если бы было  $AB < NK$ , то сдѣлавъ  $NO = AB$ ,  $NP = BC$  проведемъ прямую  $OP$ . Такъ какъ  $AB = BC$ , то  $NO = NP$  и  $OK = PL$ , слѣдовательно  $OP$  параллельна  $KL$  (кн. 6, пред. 2), а потому  $\triangle NOP$  и  $\triangle NKL$  равноугольны

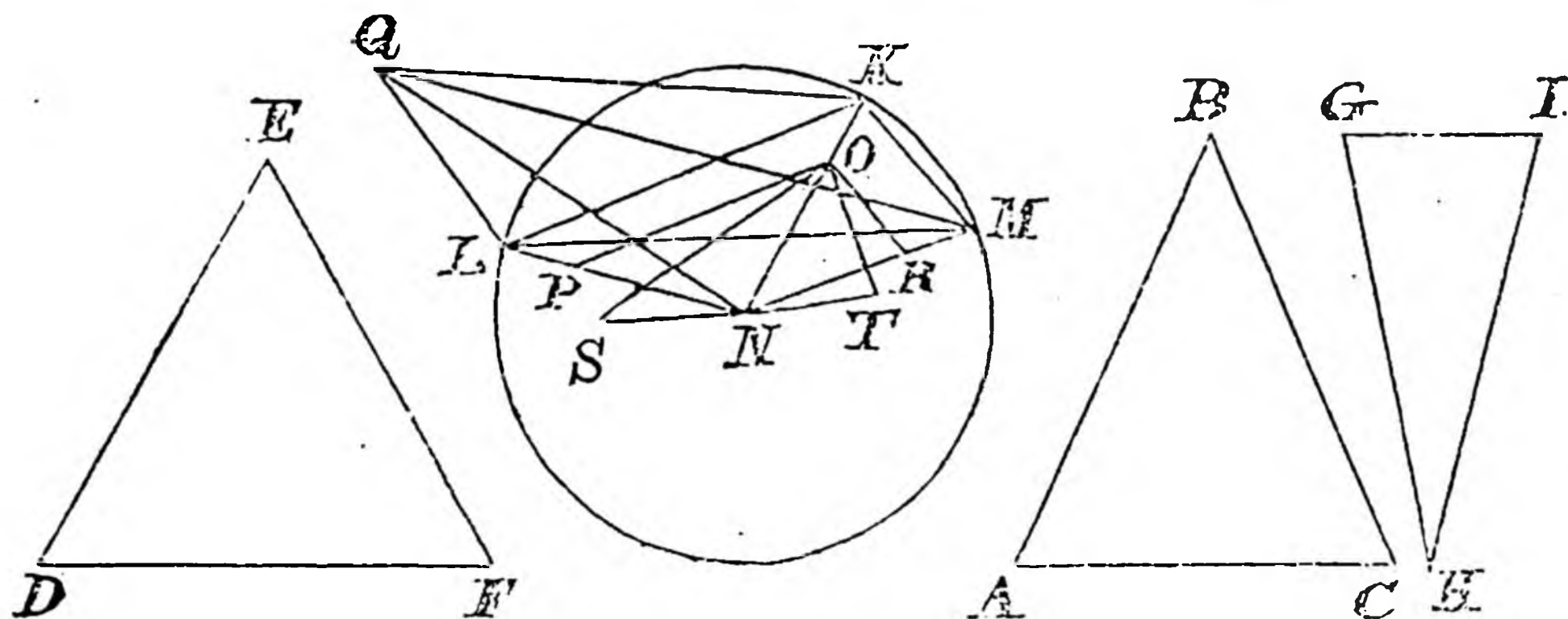
Фиг. 465.



(кн. 1, пред. 29), слѣдовательно  $NK : NO = KL : OP$  (кн. 6, пред. 4 и кн. 5, пред. 16), но  $NK > NO$ , а потому  $KL > OP$ ; но  $KL = AC$ , слѣдовательно  $AC > OP$ . Но мы имѣли, что  $AB = ON$  и  $BC = NP$ , слѣдовательно  $\angle ABC > \angle ONP$  (кн. 1, пред. 25). Точно также можно показать, что  $\angle DEF > \angle LNM$  и  $\angle GHI > \angle MNK$ . Слѣдовательно сумма трехъ угловъ  $\angle ABC$ ,  $\angle DEF$ ,  $\angle GHI$  больше суммы трехъ угловъ около точки  $N$ , а потому эта сумма больше четырехъ прямыхъ, что противорѣчитъ нашему положенію. А потому не можетъ быть  $AB < NK$ .

3. Если точка  $N$  лежитъ внѣ  $\triangle KLM$  (фиг. 466).

Фиг. 466.



Если бы  $AB = NK$ , то, такъ какъ  $AB = NK = NL = BC$  и  $AC = LK$ ,  $\angle ABC = \angle LNK$  (кн. 1, пред. 8); по той же причинѣ  $\angle GHI = \angle KNM$ , слѣдовательно  $\angle LNM = \angle ABC + \angle GHI$ . Итакъ  $\angle ABC + \angle GHI > \angle DEF$ . Слѣдовательно  $\angle LNM > \angle DEF$ . Но,  $DE = LN = EF = NM$ , и  $DF = LM$ , то  $\angle LNM = \angle DEF$  (кн. 1, пред. 8), что противорѣчитъ предъидущему  $\angle LNM > \angle DEF$ . Слѣдовательно не можетъ быть  $AB = NK$ .

Если бы было  $AB < NK$ , то сдѣлавъ  $NO = AB$ ,  $NP = BC$  проведемъ прямую  $OP$ . Такъ какъ  $AB = BC$ , то  $NO = NP$  и  $OK = PL$ , а потому  $OP$  параллельна  $KL$ , слѣдовательно  $\triangle NOP$  и  $\triangle NKL$  равноугольны, а потому:

$$NK : NO = KL : OP$$

слѣдовательно, какъ  $NK > NO$ , то  $KL > OP$ . Но  $KL = AC$ , слѣдовательно  $AC > OP$ . Но мы имѣли, что  $AB = ON$  и  $BC = NP$ , слѣдовательно  $\angle ABC > \angle ONP$ . Пусть  $NR = NO = NP$ , проведемъ прямую  $OR$ , то по той же причинѣ  $\angle GHI > \angle ONR$ . На прямой  $NK$  построимъ углы  $\angle KNS = \angle ABC$  и  $\angle KNT = \angle GHI$ , отложимъ прямыя  $NS$  и  $NT$  равныя каждой прямой  $NO$ , проведемъ  $OS$ ,  $OT$  и  $ST$ . Такъ какъ  $AB = ON = BC = NS$ , и  $\angle ABC = \angle ONS$ : то  $AC$ , т. е.  $KL = OS$ . По той же причинѣ  $KM = OT = GI$ . Изъ этого слѣдуетъ, что  $LK = OS$ ,  $KM = OT$ , но ( $\angle POR$ , т. е.)  $\angle LKM > \angle SOT$ , поэтому  $LM > ST$  (кн. 1, пред. 24), слѣдовательно  $DF > ST$ . Но какъ  $NS = DE$ ,  $NT = EF$  и  $DF > ST$ , то  $\angle DEF > \angle SNT$  (кн. 1, пред. 25). Но мы имѣли, что  $\angle SNT = \angle ABC + \angle GHI$ . слѣдовательно  $\angle DEF > \angle ABC + \angle GHI$ , что очевидно противорѣчитъ нашему положенію. А потому не можетъ быть  $AB > NK$ .

*Вторая часть.* Построеніе искомаго тѣлеснаго угла (фиг. 464, 465 и 466). Изъ выше приведеннаго доказательства видно, что во всѣхъ случаяхъ  $AB > KN$ ; возставимъ (кн. 11, пред. 12) къ плоскости круга  $KLM$ , въ точкѣ  $N$ , перпендикуляръ  $NQ$ , отложимъ на немъ длину такую, чтобы  $\square AB = \square KN + \square NQ$  (кн. 11, пред. 22, слѣд.), и проведемъ прямыя  $QK$ ,  $QL$  и  $QM$ , то при точкѣ  $Q$  будетъ искомый тѣлесный уголъ.

Прямая  $NQ$  перпендикулярна къ плоскости  $KLM$ , слѣдовательно она перпендикулярна къ тремъ прямымъ линіямъ  $NL$ ,  $NK$  и  $NM$ . Поэтому при точкѣ  $N$  прямые углы, и  $KN = NL$ ,  $QN = QN$ , слѣдовательно  $KQ = QL$  (кн. 1, пред. 4), по той же причинѣ  $QM = QK$ , а потому  $QK = QL = QM$ . Но  $\square AB = \square KN + \square NQ$  и такъ какъ  $\angle QNK = d$ , то  $\square QK = \square KN + \square NQ$ , а потому  $\square AB = \square QK$ , слѣдовательно  $AB = QK = QL = QM$ . Такъ какъ  $QK = AB$ ,  $QL = BC$ ,  $KL = AC$ , то  $\angle KQL = \angle ABC$  (кн. 1, пред. 8). По той же причинѣ  $\angle LQM = \angle DEF$  и  $\angle MQK = \angle GHI$ . слѣдовательно при точкѣ  $Q$  построенъ искомый тѣлесный уголъ, ограниченный плоскими углами  $\angle KQL$ ,  $\angle LQM$ ,  $\angle MQK$ , равными даннымъ плоскимъ угламъ  $\angle ABC$ ,  $\angle DEF$  и  $\angle GHI$ .

*Предложеніе 24.* Если тѣло  $CDGH$ , ограничено (попарно шестью) параллельными плоскостями, то эти послѣднія суть параллелограммы; всякія двѣ противолежащія площади  $AC$ ,  $GF$ ;  $BG$ ,  $CE$ ;  $FB$ ,  $AE$  равны другъ другу (и подобны). (фиг. 467).

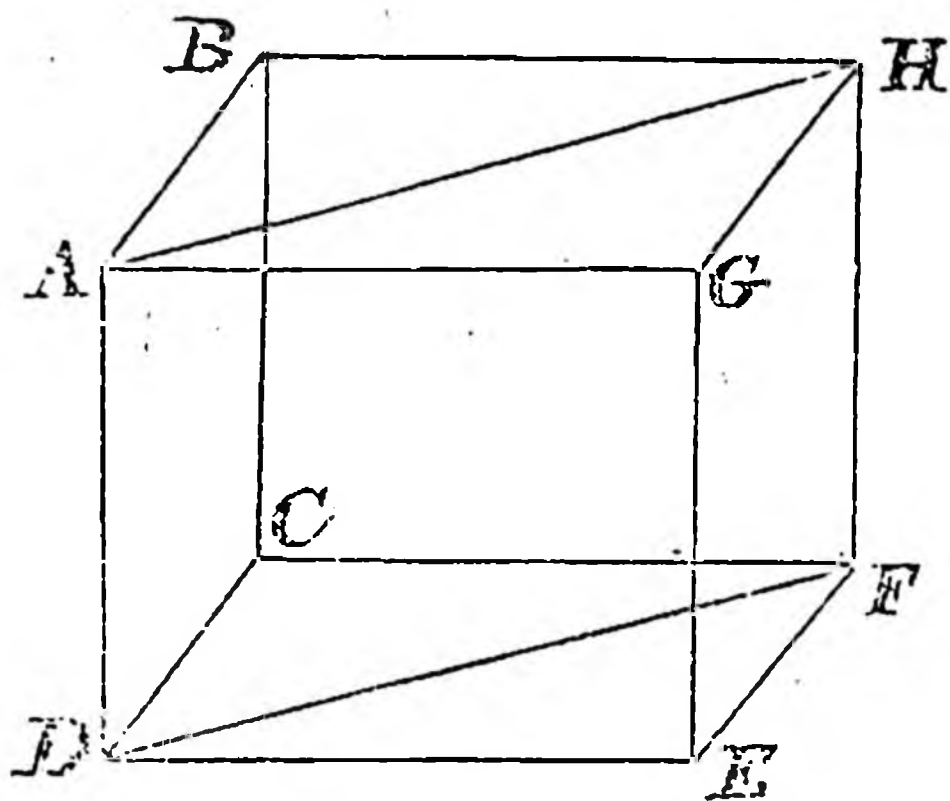
*Первая часть.* Такъ какъ  $BG$  и  $CE$  параллельны и пересѣчены  $AC$ , то  $AB$  и  $CD$  параллельны (кн. 11, пред. 16). Но  $BF$  и  $AE$  также параллельны и пересѣчены  $AC$ , а потому  $AD$  и  $BC$  параллельны. слѣдовательно  $AC$  есть параллелограмъ. Точно такимъ же образомъ доказывается, что  $GF$ , а также  $BG$ ,  $CE$  и  $FB$ ,  $AE$  суть параллелограммы.

*Вторая часть.* Въ плоскостяхъ  $BG$  и  $CE$  проведемъ діагонали  $AH$



и  $DF$ . Такъ какъ  $AB$  параллельна  $DC$  и  $BH$  параллельна  $CF$ , то  $\angle ABH = \angle DCF$  (кн. 11, пред. 10). А потому  $AB = DC$  и  $BH = CF$  (кн. 1,

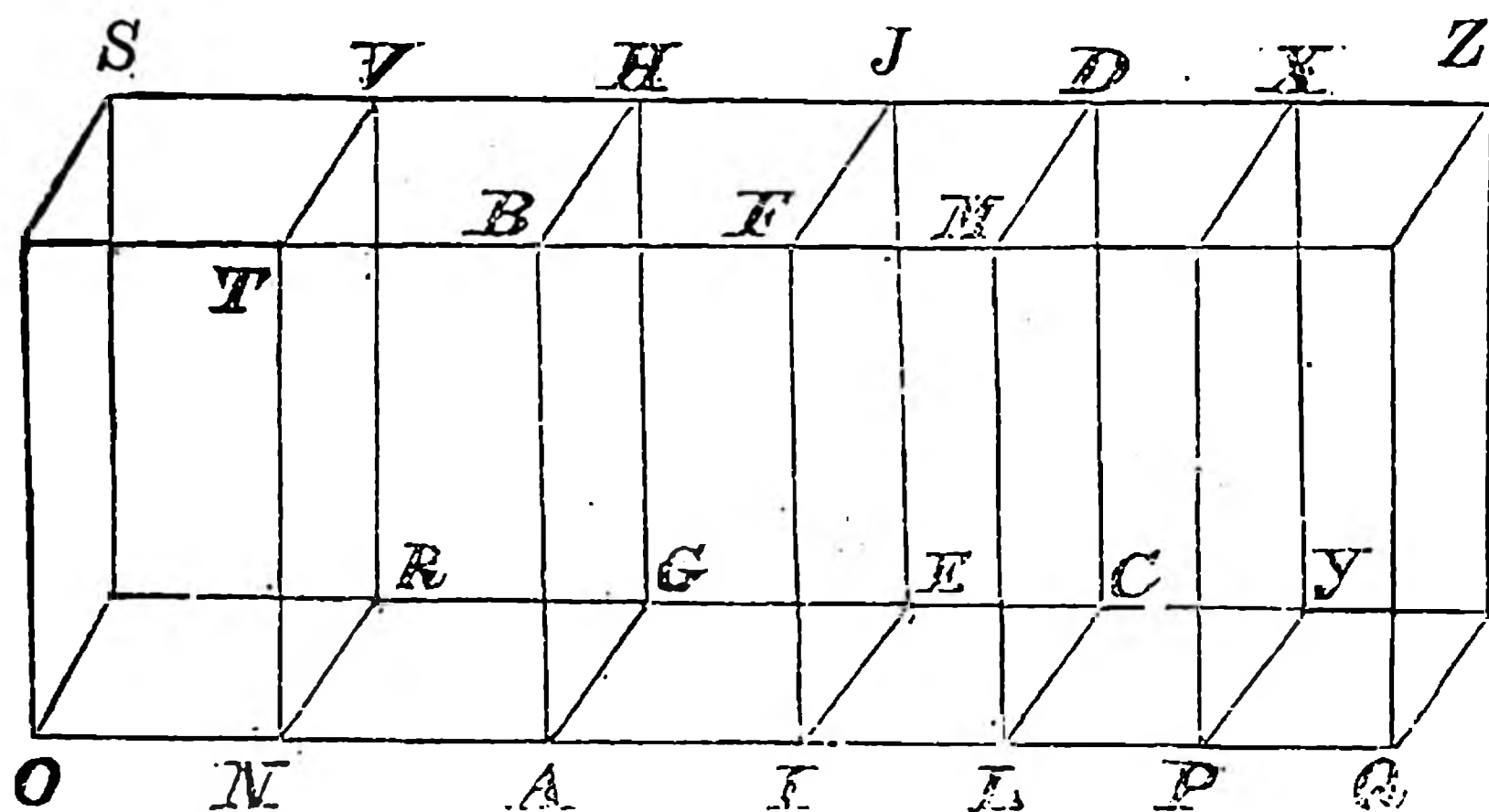
Фиг. 467.



пред. 34). Следовательно  $\triangle ABH \cong \triangle DCF$  (кн. 1, пред. 4), поэтому  $2\triangle ABH = 2\triangle DCF$ , следовательно  $BG = CE$  (кн. 1, пред. 34). (Но, кромѣ того,  $AB = DC = GH = EF$ ,  $AG = DE = BH = CF$ , и углы въ  $BG$  соответственно равны угламъ въ  $CE$ , то также  $BG \cong CE$ ). Подобнымъ же образомъ доказывается, что  $AC \cong GF$  и  $FB \cong AE$ .

*Предложеніе 25.* Параллелепипедъ  $ABCD$  разсѣченъ плоскостью  $EF$ , параллельной двумъ противоположащимъ плоскостямъ  $AH$  и  $DL$ : то отсѣченныя тѣла  $AJ$  и  $ID$ , относятся между собою какъ ихъ основанія  $AE$  и  $IC$  (фиг. 468).

Фиг. 468.



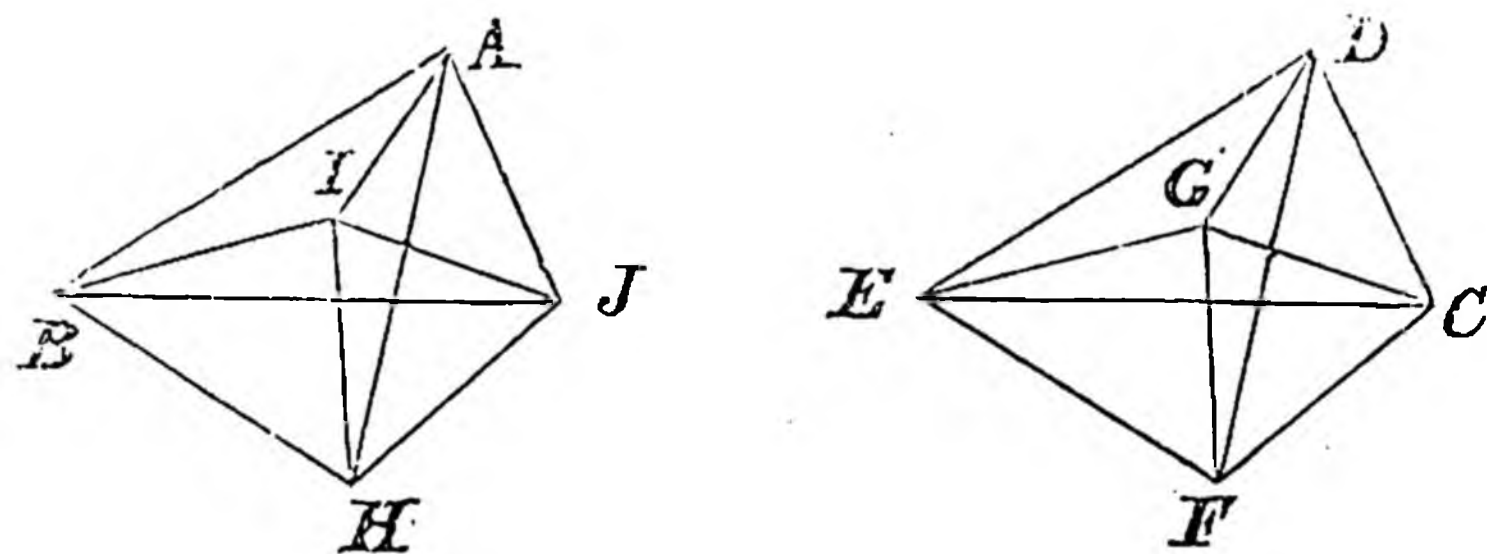
*Доказат.* Продолжимъ  $AL$  въ обѣ стороны; возьмемъ произвольное число отрезковъ  $LP$ ,  $PQ$  равныхъ  $LI$ , а также произвольное число отрезковъ  $AN$ ,  $NO$  равныхъ  $AI$ ; дополнимъ параллелограммы  $AR$ ,  $RO$ ,  $LY$ ,  $YQ$ , а также тѣла  $NH$ ,  $OV$ ,  $LY$ ,  $PZ$ . Такъ какъ  $IA = AN = NO$ , то  $EA = AR = RO$  и  $EH = HR = RS$  (кн. 1, пред. 36), точно также  $AH = NV = OS$  (кн. 11, пред. 24). А потому во всѣхъ трехъ тѣлахъ  $JA$ ,  $AV$ ,  $VO$ , выше поименованныя, другъ противъ друга лежація, плоскости равны и подобны. Следовательно эти три тѣла равны (кн. 11, опред. 10). По той же причинѣ три тѣла  $ID$ ,  $DP$ ,  $PZ$  также равны. Следовательно  $OJ$  такое же кратное отъ  $AJ$ , какъ  $OE$  отъ  $AE$ , а  $JQ$  такое кратное отъ  $ID$ , какъ



$EQ$  отъ  $IC$ . Но если  $OE \geq EQ$ , то  $OJ \geq JQ$ . Следовательно (кн. 5, опред. 5)  $AJ:ID=AE:IC$ .

*Предложение 26.* При данной прямой  $AB$ , и при данной на ней точкѣ  $B$ , построить тѣлесный уголъ, равный данному тѣлесному углу  $D$  (фиг. 469)?

Фиг. 469.



*Рѣшеніе.* Пусть данный тѣлесный уголъ  $D$ , составленъ изъ плоскихъ угловъ  $EDC$ ,  $EDF$  и  $FDC$ . Изъ произвольной точки  $F$  прямой  $DF$ , опустимъ перпендикуляръ  $FG$ , на плоскость, проходящую чрезъ  $ED$  и  $DC$ , встрѣчающій эту плоскость въ точкѣ  $G$ , проведемъ  $DG$ . На прямой  $AB$ , въ точкѣ  $A$  построимъ уголъ  $\angle BAJ = \angle EDC$ , и (въ плоскости, проведенной чрезъ  $BA$  и  $AJ$ )  $\angle BAI = \angle EDG$ ; сдѣлаемъ  $AI = DG$ ; къ плоскости проведенной чрезъ  $\angle BAJ$ , въ точкѣ  $I$  возставимъ перпендикуляръ  $IH$  (кн. 11, опред. 12), отложимъ  $IH = GF$  и проведемъ  $AH$ , то тѣлесный уголъ при  $A$  равенъ данному тѣлесному углу при  $D$ .

Отложивъ  $AB = DE$  и проведя  $HB$ ,  $IB$ ,  $FE$ ,  $GE$ : то, такъ какъ  $FG$  перпендикулярна къ данной плоскости,  $\angle FGD$ ,  $\angle FGE$  будутъ прямые (кн. 11, опред. 3), по той же причинѣ  $\angle HIA$  и  $\angle HIB$  будутъ также прямые.

Такъ какъ  $AI = DG$ ,  $AB = DE$  и  $\angle BAI = \angle EDG$ ; то  $BI = EG$  (кн. 1, пред. 4). Точно также,  $IH = GF$ , и при точкахъ  $I$  и  $G$  углы прямые. Следовательно  $BH = EF$  (кн. 1, пред. 4). Далѣе,  $AI = DG$ ,  $IH = GF$ , при точкахъ  $I$  и  $G$  углы также прямые, а потому  $AH = DF$ . Но  $AB = DE$ , следовательно  $\angle BAH = \angle EDF$  (кн. 1, пред. 8).

Отложимъ  $AJ = DC$ , и проведемъ  $IJ$ ,  $HJ$ ,  $GC$ ,  $FC$ . Такъ какъ  $\angle BAJ = \angle EDC$ , и  $\angle BAI = \angle EDG$ : то  $\angle IAJ = \angle GDC$ . Но  $AI = DG$  и  $AJ = DC$ , следовательно  $IJ = GC$  (кн. 1, пред. 4). Но  $IH = GF$  и углы при точкахъ  $I$  и  $G$  прямые, следовательно  $HJ = FC$ . Но  $HA = FD$  и  $AJ = DC$ , следовательно  $\angle HAJ = \angle FDC$  (кн. 1, пред. 8).

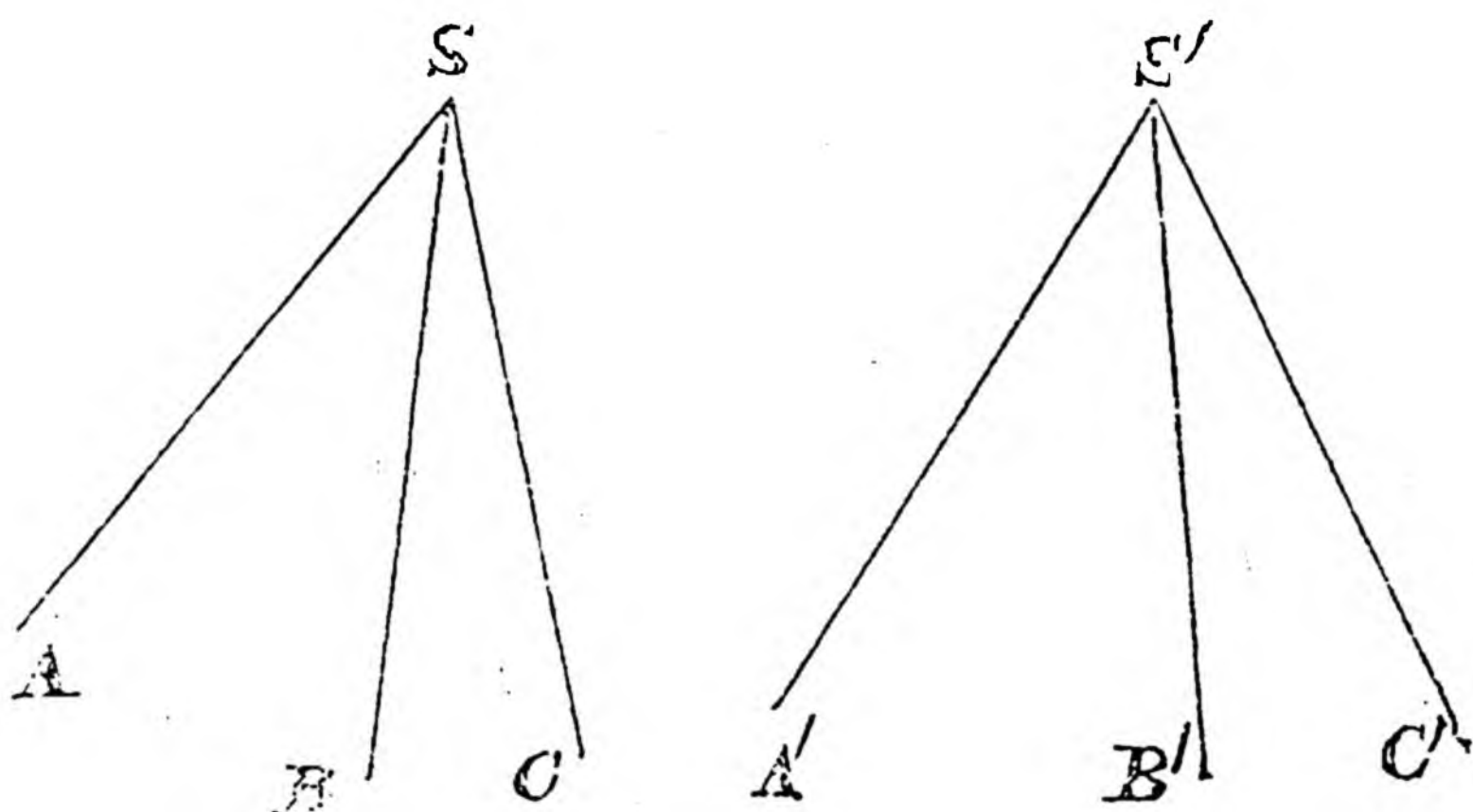
А потому  $\angle BAH = \angle EDF$ ,  $\angle HAJ = \angle FDC$ , а по предыдущему  $\angle BAJ = \angle EDC$ , следовательно тѣлесный уголъ при точкѣ  $A$ , составленный плоскими углами  $\angle BAH$ ,  $\angle HAJ$ ,  $\angle BAJ$ , равными плоскимъ угламъ  $\angle EDF$ ,  $\angle FDC$ ,  $\angle EDC$ , равенъ данному тѣлесному углу при точкѣ  $D$ .

*Примѣч. 8.* Это предложеніе заканчивается заключеніемъ, что тригранные углы равны, если плоскіе, ихъ составляющіе, углы равны, т. е. если въ тригранномъ углу, плоскіе углы равны, то и двугранные углы равны. Это предложеніе у Евклида не доказанно, поэтому я здѣсь покажу всѣ условія равенства тригранныхъ угловъ:

1. Два тригранные углы, равны, когда имѣютъ по одному равному двугранному углу заключенному между равными плоскими углами каждый каждому (фиг. 470).

*Доказат.* Пусть двугранный уголъ  $AS$  равенъ двугранному углу  $A'S'$ . Пусть плоскій уголъ  $ASB = A'S'B'$  и плоскій уголъ  $ASC = A'S'C'$ . Я говорю, что углы  $S$  и  $S'$  совмѣстятся.

Фиг. 470.



Нанесемъ уголъ  $S'$  на  $S$  такъ, чтобы грань  $A'S'C'$  совмѣстилась съ гранью  $ASC$ , то такъ какъ углы двугранные  $AS$  и  $A'S'$  равны, то и грань  $A'S'B'$  совмѣстится съ гранью  $ASB$  и по равенству ихъ ребро  $S'B'$  совпадетъ съ ребромъ  $SB$ . Слѣд. и т. д.

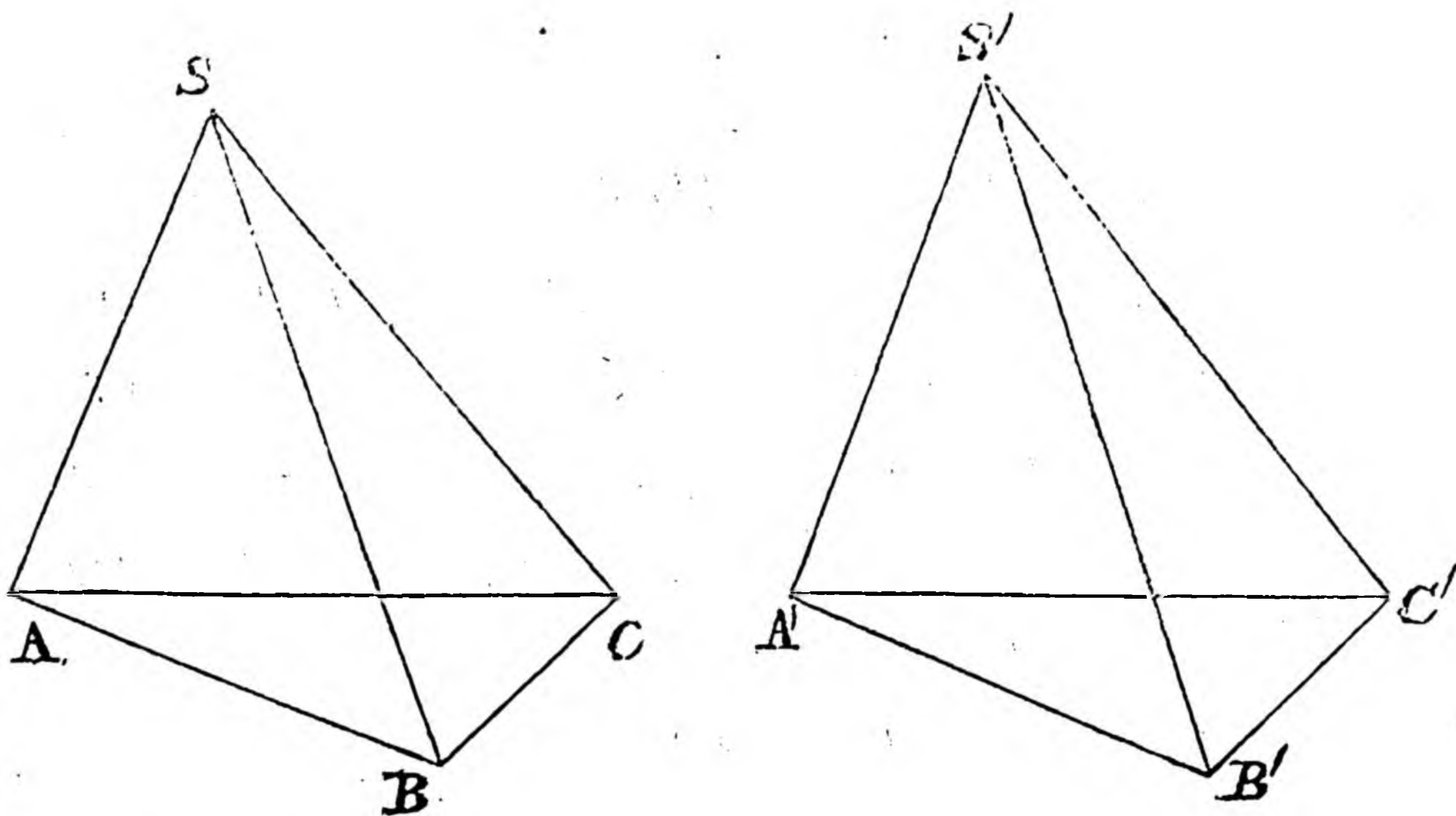
Замѣтимъ, что если бы равныя грани равныхъ двугранныхъ угловъ  $AS$  и  $A'S'$  были расположены въ обратномъ порядкѣ, то углы  $S$  и  $S'$  совмѣстить невозможно, хотя они равны. Такіе углы называются *симметричными*.

2. Два двугранные угла равны, когда имѣютъ по одному равному плоскому углу и двумъ равнымъ, каждый каждому двуграннымъ угломъ, прилежащимъ плоскому.

*Доказат.* Для доказательства этого предложенія поступаютъ какъ выше. Тоже замѣчаніе относительно симметріи.

3. Два тригранные угла равны, когда они составлены изъ равныхъ, каждый каждому, плоскихъ угловъ.

Фиг. 471.



*Доказат.* Надобно только показать, что сходственные двугранные углы равны, на примѣръ, что двугранный уголъ  $SA$  равенъ двугранному углу  $S'A'$ , тогда этотъ случай сводится на первый.

Для этого на ребрахъ  $AS$  и  $A'S'$  возьмемъ точки  $A$  и  $A'$  такъ, чтобы  $AS=A'S'$ . Чрезъ эти точки проведемъ плоскости  $ACB$  и  $A'C'B'$  перпендикулярныя къ ребрамъ  $AS$  и  $A'S'$ . Пересѣченіи этихъ плоскостей съ ребрами  $SB, SC$  и  $S'B', S'C'$  образуетъ два треугольника  $ABC$  и  $A'B'C'$ , которые будутъ равны. Въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что  $\triangle ASC=\triangle A'S'C'$  и  $\triangle ASB=\triangle A'S'B'$ , откуда и  $\triangle BSC=\triangle B'S'C'$ . Слѣдовательно  $AC=A'C'$ ,  $AB=A'B'$  и  $BC=B'C'$ , поэтому  $\triangle ABC=\triangle A'B'C'$ . Изъ равенства этихъ треугольниковъ мы имѣемъ  $\angle BAC=\angle B'A'C'$ , слѣдовательно двугранные углы  $AS$  и  $A'S'$  равны. Слѣд. и т. д.

Если бы плоскіе углы, составляющіе тригранные были равны, но расположены въ обратномъ порядкѣ, то углы  $S$  и  $S'$  не совмѣстимы, хотя равны. Въ этомъ случаѣ онѣ называются *симметричными*.

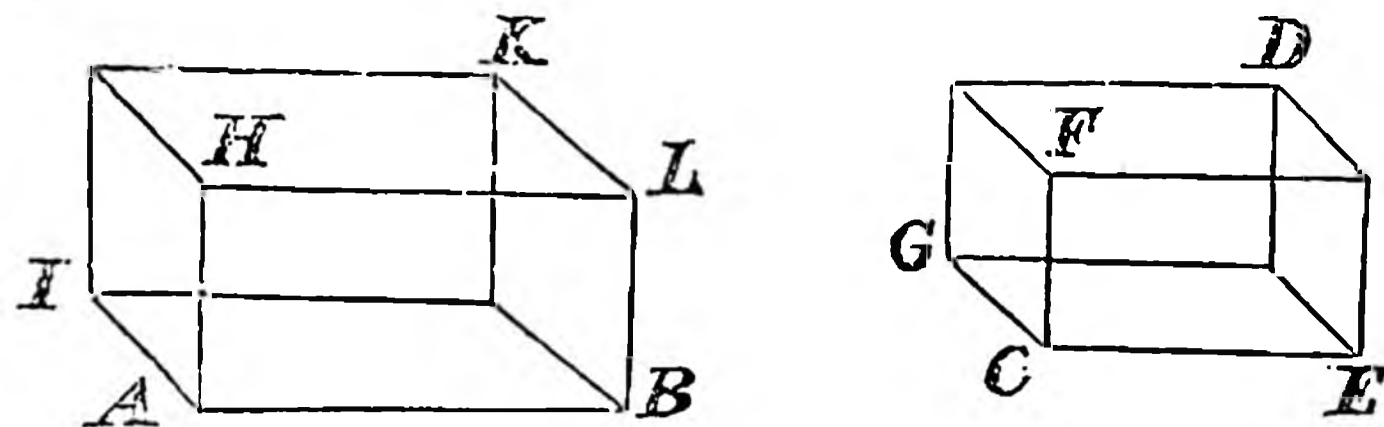
4. Два тригранные угла равны когда три двугранные угла одного равны тремъ двуграннымъ угламъ другого, каждый каждому.

*Доказат.* Дополнительные тригранныхъ угловъ имѣютъ плоскіе равные углы, а если плоскіе углы дополнительнаго триграннаго угла равны, то двугранные углы данныхъ тригранныхъ угловъ равны. Слѣд. и т. д.

Если двугранные углы одного триграннаго угла равны двуграннымъ угламъ другого триграннаго угла, но расположены въ обратномъ порядкѣ, то такіе углы *симметричны*, равны во всѣхъ частяхъ, но несовмѣстимы.

*Предложеніе 27.* На данной прямой линіи  $AB$  построить параллелепипедъ подобный и подобно расположенный данному параллелепипеду  $CD$  (фиг. 472)?

Фиг. 472.



*Рѣшеніе.* На прямой  $AB$ , какъ на ребрѣ, въ точкѣ  $A$ , построимъ тѣлесный уголъ, равный тѣлесному углу при  $C$  (кн. 11, пред. 26), ограниченный плоскими углами  $\angle BAN=\angle ECF$ ,  $\angle NAI=\angle FCG$ , и  $\angle IAB=\angle GCE$ . Сдѣлаемъ:  $EC:CG=BA:AI$  (кн. 6, пред. 12), равно какъ  $CG:CF=IA:AN$ , откуда получимъ (кн. 5, пред. 22)  $EC:CF=AB:AN$ . Если построимъ параллелограмъ  $BN$  и параллелепипедъ  $AK$ , то этотъ послѣдній будетъ требуемый.

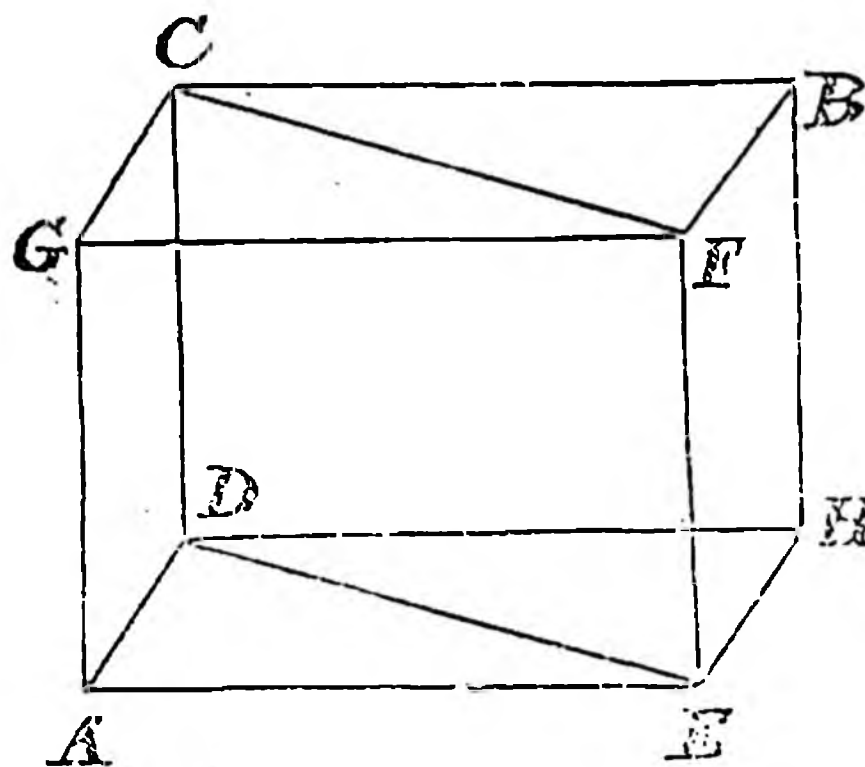
Такъ какъ  $EC:CG=BA:AI$ , и  $\angle ECG=\angle BAI$ , то  $BI \sim EG$  (кн. 6, пред. 4 и кн. 1, пред. 33); по той же самой причинѣ  $IN \sim GF$  и  $NB \sim FE$ . А потому три плоскости тѣла  $AK$  подобны тремъ плоскостямъ, одинаково расположеннымъ, тѣла  $CD$ . Но въ обѣихъ тѣлахъ плоскости, противолежащія вышесказаннымъ плоскостямъ соотвѣтственно равны и подобны (кн. 11, пред. 24), слѣдовательно  $AK \sim CD$  (кн. 11, опред. 9).

*Предложеніе 28.* Всякій параллелепипедъ  $AB$ , плоскостью  $CDEF$ , пересѣкающею двѣ противолежащія плоскости  $GB$  и  $AN$  по ихъ діагоналямъ  $CF$  и  $DE$ , дѣлится пополамъ (фиг. 473).



*Доказат.* Такъ какъ  $\triangle CGF = \triangle CBF$ , и  $\triangle DAE = \triangle DHE$  (кн. 1, пред. 34), равно какъ  $CA = BE$  и  $GE = CH$  (кн. 11, пред. 24); то призма

Фиг. 473.

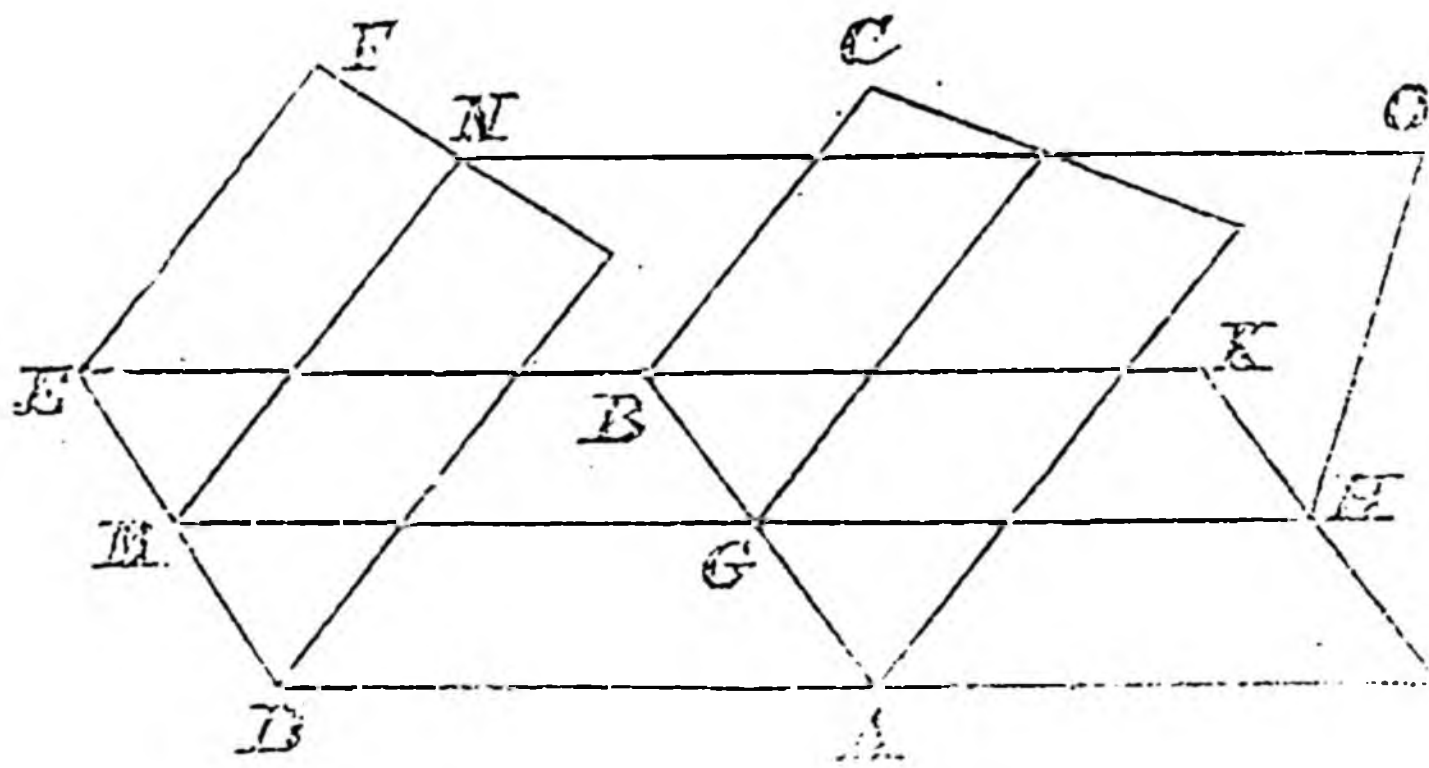


$CGFEDA$ , ограниченная треугольниками  $CGF$  и  $EDA$  и параллелограммами  $CE$  (кн. 11, пред. 16),  $GE$ ,  $AC$  равна (кн. 11, опред. 10) призме  $FCBHED$ , ограниченной треугольниками  $FCB$  и  $HED$  и параллелограммами  $CE$ ,  $CH$ ,  $BE$ ; слѣдовательно параллелепипедъ  $AB$  плоскостью  $CDEF$  дѣлится пополамъ.

*Примѣч.* 9. Если мы желаемъ доказать это предложеніе на основаніи дополненій сдѣланныхъ къ 10 опредѣленію, то это можно сдѣлать на основаніи слѣдующихъ соображеній.

1. Параллельныя плоскости  $ABC$ ,  $DEF$ , имѣютъ къ одной и той же плоскости  $DK$ , одинаковое наклоненіе (фиг. 474).

Фиг. 474.



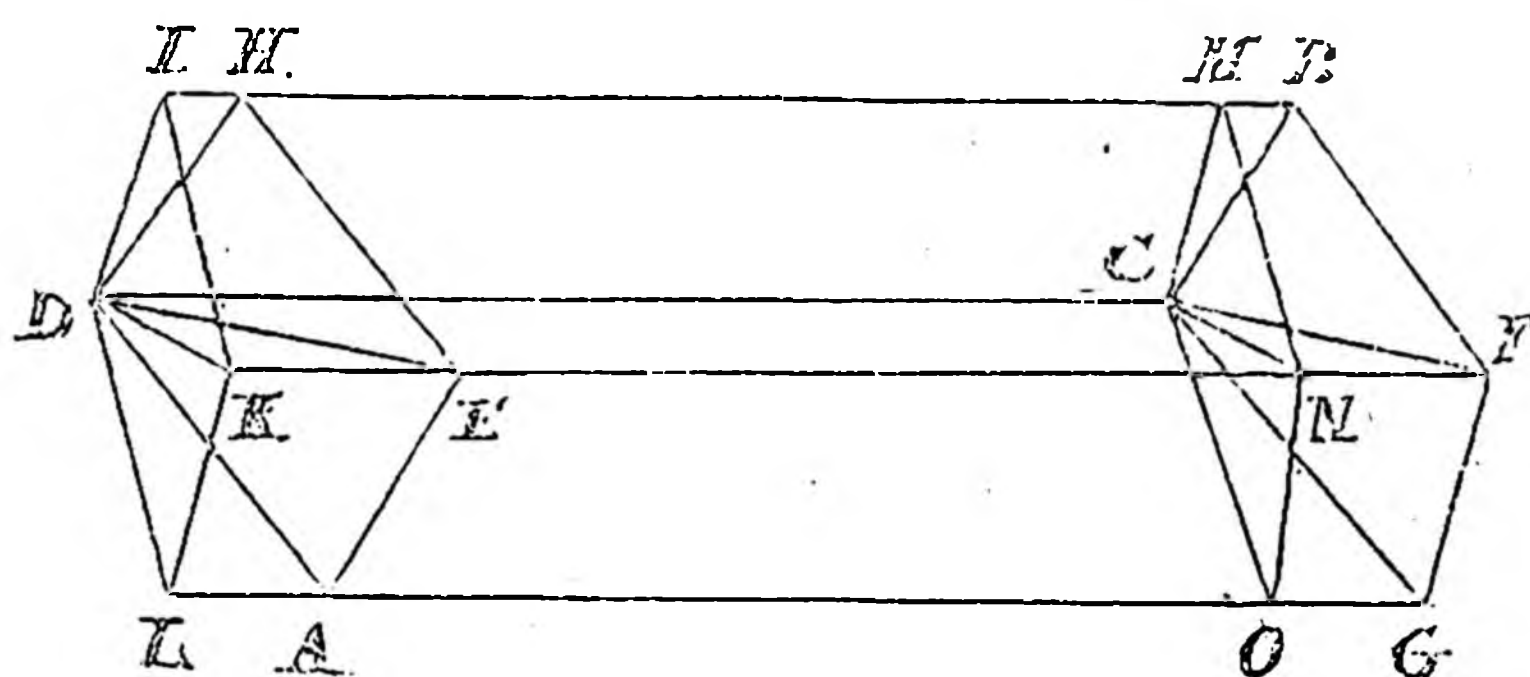
*Доказат.* Пусть  $ABC$  и  $DEF$  плоскостью  $DK$  пересѣкаются по прямымъ  $AB$  и  $DE$ . Въ произвольной точкѣ  $G$  прямой  $AB$ , возставимъ къ ней, въ плоскости  $DK$  перпендикуляръ  $GH$ , и въ плоскости  $AC$  перпендикуляръ  $GL$ ;  $LGH$  будетъ наклоненіемъ плоскостей  $AC$  и  $DK$ . Продолжимъ  $HG$  до  $M$ , и продолжимъ также плоскость, проведенную чрезъ  $GL$ ,  $GH$ , до пересѣченія ея  $MN$  съ плоскостью  $DF$ . Слѣдовательно  $AB$  и  $DE$  параллельны (кн. 11, пред. 16). Но  $AB$  перпендикулярна къ  $GL$  и  $GH$ , слѣдовательно и къ плоскости, въ которой онѣ лежатъ; слѣдовательно и  $DE$  перпендикулярна къ этой плоскости, а потому  $\angle DMN$ ,  $\angle DMG$  суть углы прямые, а  $\angle NMG$  есть наклоненіе плоскостей  $DF$  и  $DK$ . Слѣдовательно  $NM$  и  $GL$  параллельны (кн. 11, пред. 16), откуда  $\angle LGH = \angle NMG$ . А потому плоскости  $AC$  и  $DF$  одинаково наклонены къ плоскости  $DK$ .

2. Всякій параллелепипедъ  $AB$ , діагональною плоскостью  $CDEF$ , дѣлится пополамъ (фиг. 475).



*Доказат.* Если ребра перпендикулярны къ основной плоскости, то призмы могут быть сложены одна съ другой, и совершенно равны между собою.

Фиг. 475.

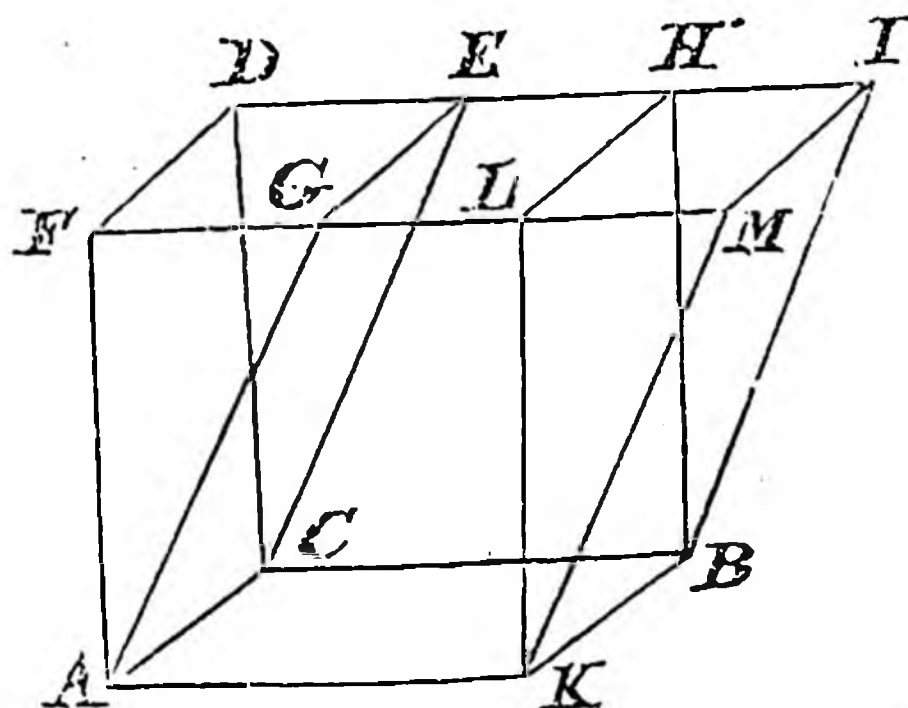


Если же ребра не перпендикулярны къ  $АН$ ; то проведемъ чрезъ точку  $D$  плоскость перпендикулярную  $DC$ , ребра  $AG$ ,  $EF$ ,  $HB$  будутъ также перпендикулярны къ ней. Эта плоскость пересѣчетъ плоскости  $BE$  по  $IK$ ,  $FA$  по  $KL$ ,  $DG$  по  $DL$ ,  $DB$  по  $DI$ ,  $DF$  по  $DK$ . Плоскость ей параллельная, проведенная чрезъ  $C$ , пересѣчетъ тѣ же самыя плоскости по  $MN$ ,  $NO$ ,  $OC$ ,  $CM$ ,  $CN$ .

Тѣла  $CFGON$ ,  $DEALK$  равны и подобны; потому что  $OF \cong LE$ ,  $CFG \cong DEA$ ,  $CFN \cong DEK$ ,  $CNO \cong DKL$ ,  $CGO \cong DAL$ . Равныя плоскости въ одномъ и томъ же порядкѣ слѣдуетъ одна за другой. Двѣ соответствующія другъ другу плоскости имѣютъ одинаковое наклоненіе, такъ какъ  $CFG$ ,  $DEA$ , равно какъ и  $CNO$ ,  $DKL$ , будучи параллельными плоскостями имѣютъ одинаковое наклоненіе къ  $FL$ . Далѣе,  $CFN$ ,  $DEK$ , какъ части плоскости  $DF$ , равно какъ  $CGO$ ,  $DAL$ , какъ части плоскости  $DG$ , имѣютъ одинаковыя наклоненія къ  $LF$  и т. д. Слѣдовательно тѣла могутъ быть сложены, а потому онѣ равны и подобны. Точно такимъ же образомъ  $CBFNM$  и  $DHEKI$  равны и подобны между собою. Слѣдовательно  $DEACNO + CNOFG = DEACNO + DEALK$ , или призма  $DEACGF =$  призмѣ  $DKLCNO$ . Точно такимъ же образомъ призма  $DHECBF =$  призмѣ  $DIKCMN$ . Призмы  $DKLCNO$ ,  $DIKCMN$ , какъ половины параллелепипеда  $LM$ , ребра котораго перпендикулярны къ  $LI$ , равны между собою; слѣдовательно также равны между собою призмы  $DEACGF$ ,  $DHECBF$ . А потому параллелепипедъ  $AB$  плоскостью  $CDEF$  дѣлится пополамъ.

*Предложеніе 29.* Параллелепипеды  $АН$  и  $AI$ , имѣющіе одинаковыя высоты и одно и тоже основаніе  $AB$ , коихъ ребра  $AF$ ,  $AG$ ,  $KL$ ,  $KM$  и  $CD$ ,  $CE$ ,  $BH$ ,  $BI$ , стоящія на основной плоскости оканчиваются на однѣхъ и тѣхъ же прямыхъ  $FM$ ,  $DI$ , равны между собою (фиг. 476).

Фиг. 476.



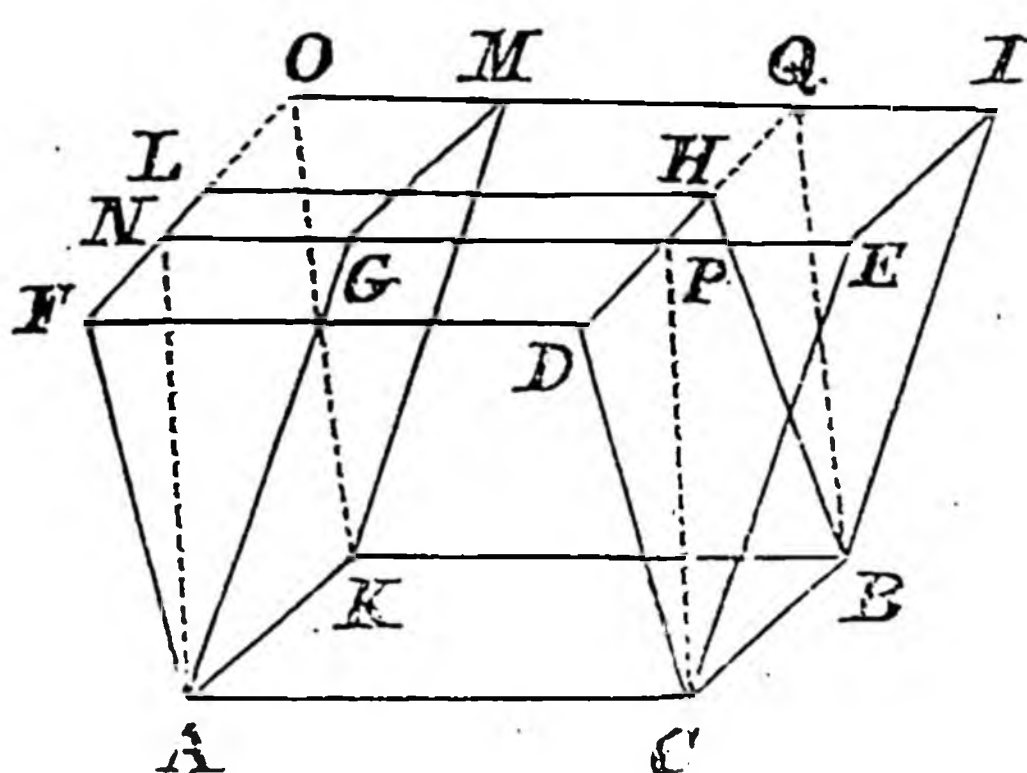
*Доказат.* Такъ какъ  $CH$ ,  $CI$  суть параллелограммы: то  $CB = DH = EI$

(кн. 1, пред. 34); слѣдовательно, отнявъ  $EH$ ,  $DE=HI$ , а потому  $\triangle DEC=$   
 $=\triangle HIB$  (кн. 1, пред. 8) и  $DG=HM$  (кн. 1, пред. 36). По той же при-  
чинѣ  $\triangle AFG=\triangle KLM$ , и  $CF=BL$ ,  $CG=BM$ . Слѣдовательно призма  
 $EFGAC$ =призма  $ILKB$  (кн. 11, опред. 10); а потому, придавъ къ обѣмъ  
тѣло  $ABHG$ , получимъ  $AH=AI$ .

*Примѣч. 10.* Легко доказать что призмы  $EFGAC$ ,  $ILKB$  могутъ быть сложены.

*Предложеніе 30.* Параллелепипеды  $ABHF$ ,  $ABIG$ , имѣющіе одина-  
ковыя высоты и одно и тоже основаніе  $AB$ , концы ребра  $AF$ ,  $AG$ ,  $CD$ ,  
 $CE$  и  $KL$ ,  $KM$ ,  $HB$ ,  $BI$ , стоящія на основной плоскости, оканчиваются  
не на однѣхъ и тѣхъ же прямыхъ, равны между собою (фиг. 477).

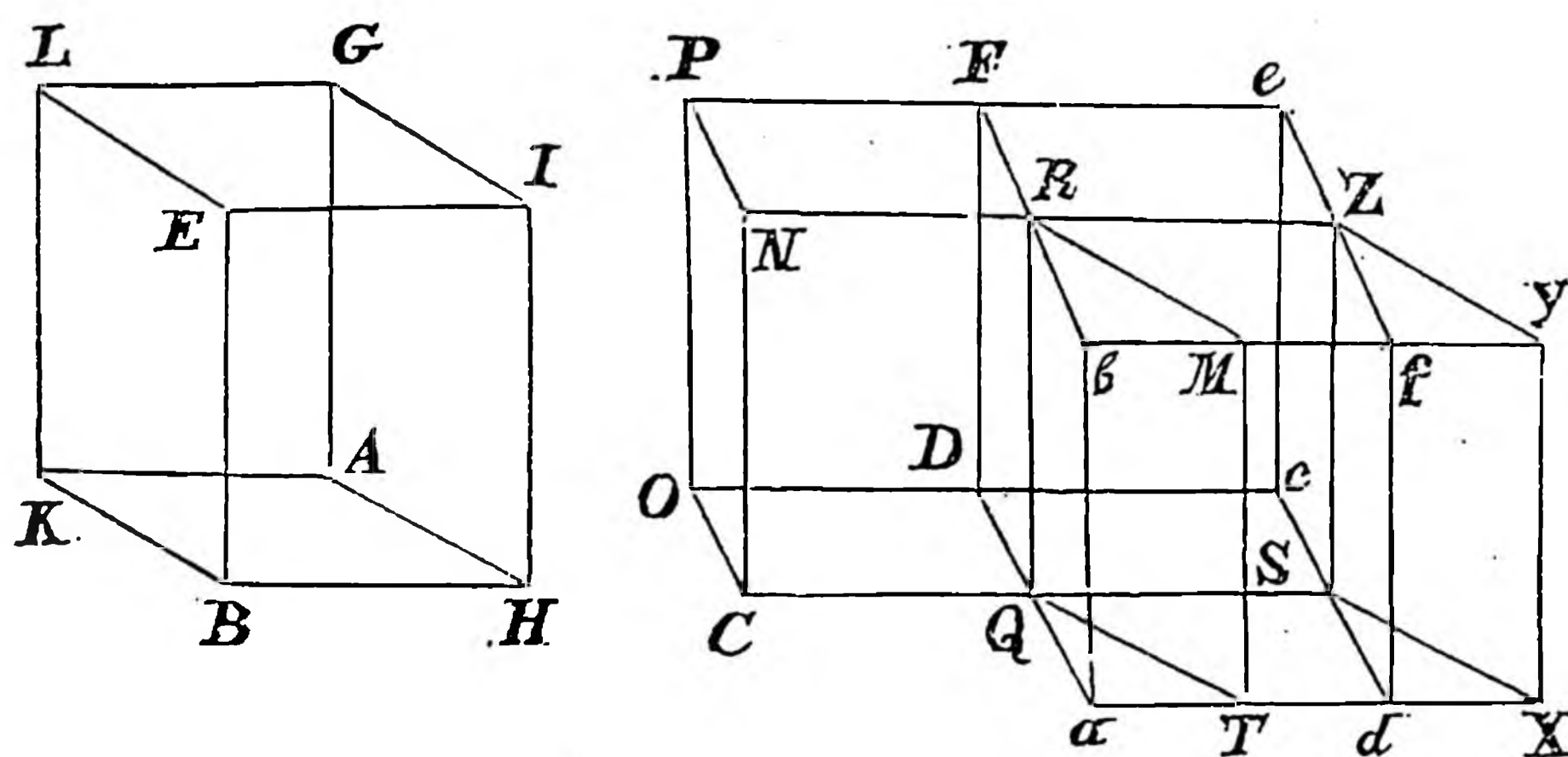
Фиг. 477.



*Доказат.* Продолжимъ  $EG$ ,  $IM$ ,  $FL$ ,  $DH$  до тѣхъ поръ, пока они  
не встрѣтятся въ  $N$ ,  $O$ ,  $Q$ , и проведемъ  $NA$ ,  $OK$ ,  $PC$ ,  $QB$ : то образуется  
третій параллелепипедъ  $ABQN$ , имѣющій съ двумя предыдущими одну и  
ту же высоту и одно и тоже основаніе. Но ребра третьяго и перваго окан-  
чиваются на однѣхъ и тѣхъ же прямыхъ  $FO$ ,  $DQ$ , а ребра третьяго и вто-  
раго на однѣхъ и тѣхъ же прямыхъ  $NE$ ,  $OI$ . Слѣдовательно  $ABHF=$   
 $=ABQN$  и  $ABQN=ABIG$  (кн. 11, пред. 29); а потому  $ABHF=ABIG$ .

*Предложеніе 31.* Параллелепипеды  $ABEG$ ,  $CDEN$ , имѣющіе равныя  
высоты и равныя основанія  $AB$ ,  $CD$ , равны между собою (фиг. 478).

Фиг. 478.



*Доказат. Случай первый.* Пусть ребра  $AG$ ,  $HI$ ,  $BE$ ,  $KL$ ;  $OP$ ,  $DF$ ,

$CN$ ,  $QR$ , стоящія на плоскости основанія, къ ней перпендикулярны; по-  
этому углы  $AKB$ ,  $CQD$  равны между собою или же неравны.

1. Если эти углы неравны, напр.  $\angle AKB < \angle CQD$ . Продолжимъ  $CQ$  до  $S$ , построимъ при  $QS$ , въ точкѣ  $Q$ , уголь  $SQT = AKB$ , сдѣлаемъ  $QS = AK$ ,  $QT = KB$ ; построимъ параллелограммъ  $TS$ , и параллелепипедъ  $TSZM$ .

Изъ этого построенія слѣдуетъ, что  $QS = AK$ ,  $QT = KB$  и  $\angle SQT = \angle AKB$ , а потому параллелограммы  $TS$ ,  $HK$  равны и подобны. Но  $QS = AK$ ,  $QR = KL$ , и эти линіи заключаютъ прямые углы, слѣдовательно параллелограммы  $QZ$ ,  $AL$  равны и подобны. По той же причинѣ параллелограммы  $RT$ ,  $KE$  также равны и подобны. Слѣдовательно три параллелограмма тѣла  $ZT$  равны и подобны тремъ параллелограммамъ тѣла  $AE$ , а потому также равны и подобны между собою параллелограммы противолежащіе первымъ (кн. 11, пред. 24), слѣдовательно  $ST = AE$  (кн. 11, опред. 10).

Продолжимъ  $DQ$ ,  $XT$  до ихъ встрѣчи въ  $a$ , чрезъ  $S$  проведемъ  $Sd$  параллельную  $Da$ ; продолжимъ  $OD$ ,  $dS$ , до ихъ пересѣченія въ  $c$ , и построимъ тѣла  $Za$ ,  $Qe$ .

Тѣла  $Za$ ,  $ZT$  имѣютъ общее основаніе  $ZQ$ , параллельное плоскости  $aY$ , и равной высоты, боковыя же ихъ ребра  $Qa$ ,  $QT$ ,  $Sd$ ,  $SX$ ;  $Rb$ ,  $RM$ ,  $Zf$ ,  $ZY$  оканчиваются на однѣхъ и тѣхъ же прямыхъ линіяхъ  $aX$ ,  $bY$ , то  $Za = ZT$  (кн. 11, пред. 29). Но по выше доказанному  $ZT = AE$ , слѣдовательно  $Za = AE$ .

Такъ какъ  $ST = Sa$  (кн. 1, пред. 35), а  $ST = AB = CD$ , то  $Sa = CD$ , слѣдовательно  $CD : DS = Sa : DS$  (кн. 5, пред. 7).

Такъ какъ тѣло  $Ce$  разсѣкается, плоскостью  $FQ$ , параллельной  $CP$  и  $Se$ , то  $CD : DS = CF : Qe$  (кн. 11, пред. 25). Точно также тѣло  $ae$  разсѣкается плоскостью  $QZ$ , параллельной  $De$  и  $af$ , то  $Sa : DS = Za : Qe$  (кн. 11, пред. 25). Но мы имѣли выше:  $CD : DS = Sa : DS$ , слѣдовательно  $CF : Qe = Za : Qe$  (кн. 5, пред. 11), а потому  $CF = Za$  (кн. 5, пред. 9). Но по выше доказанному  $Za = AE$ , слѣдовательно  $CF = AE$ .

2. Если углы  $AKB$  и  $CQD$  равны. Продолживъ  $CQ$ ,  $DQ$ , такъ чтобы  $QS = AK$ , и  $Qa = KB$ .  $\angle SQa = \angle CQD = \angle AKB$  (кн. 1, пред. 15), слѣдовательно, подобно предыдущему, можно доказать, что  $AE = Za$ , и  $CF = Za$ , а потому и  $CF = AE$ .

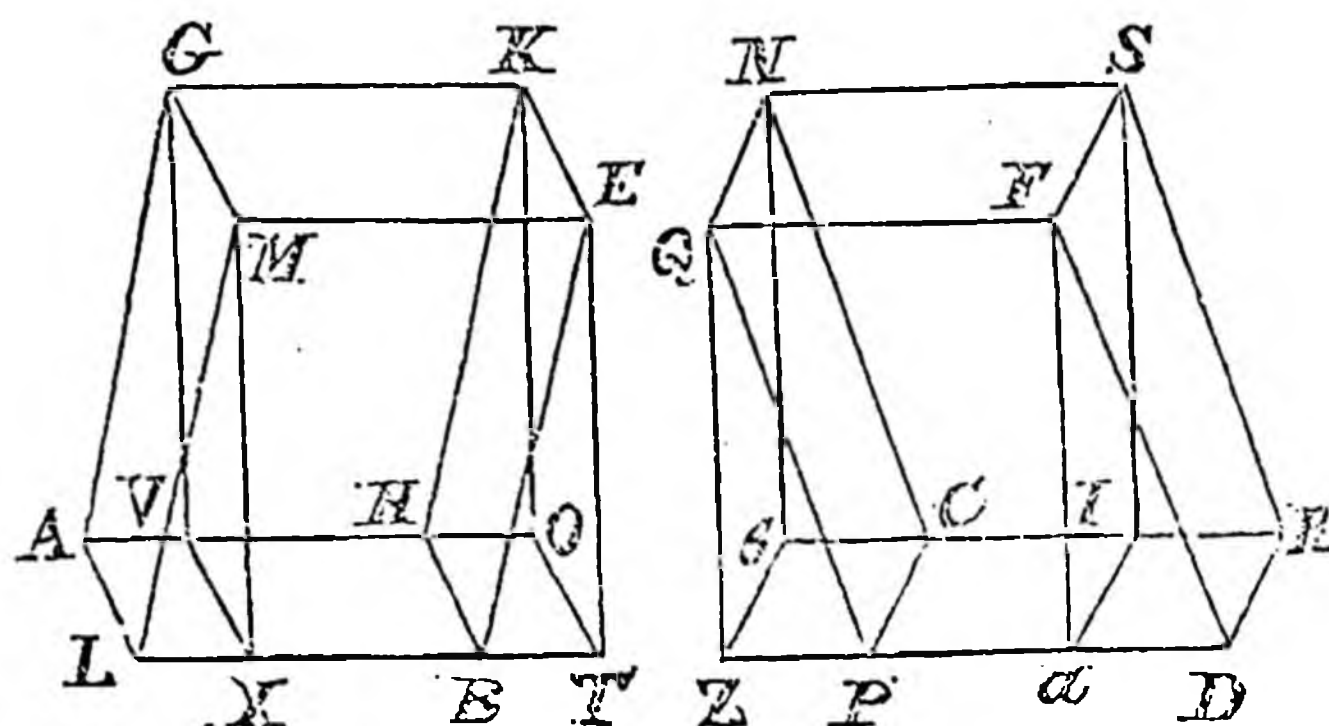
*Случай второй.* Ребра  $AG$ ,  $HK$ ,  $BE$ ,  $LM$ ;  $PQ$ ,  $CN$ ,  $RS$ ,  $DF$ , стоящія на плоскостяхъ основаній, къ нимъ не перпендикулярны (фиг. 479).

Опустимъ изъ точекъ  $K$ ,  $G$ ,  $M$ ,  $E$  и  $S$ ,  $N$ ,  $Q$ ,  $F$  на плоскости основаній  $AB$ ,  $CD$  перпендикуляры  $KO$ ,  $GV$ ,  $MX$ ,  $ET$ ;  $SI$ ,  $Nb$ ,  $QZ$ ,  $Fa$ , и проведемъ  $OT$ ,  $VX$ ,  $TX$ ,  $OV$ ;  $aI$ ,  $Zb$ ,  $Za$ ,  $bI$ .



Такъ какъ тѣла  $KX$ ,  $SZ$  лежатъ на равныхъ основаніяхъ, имѣютъ

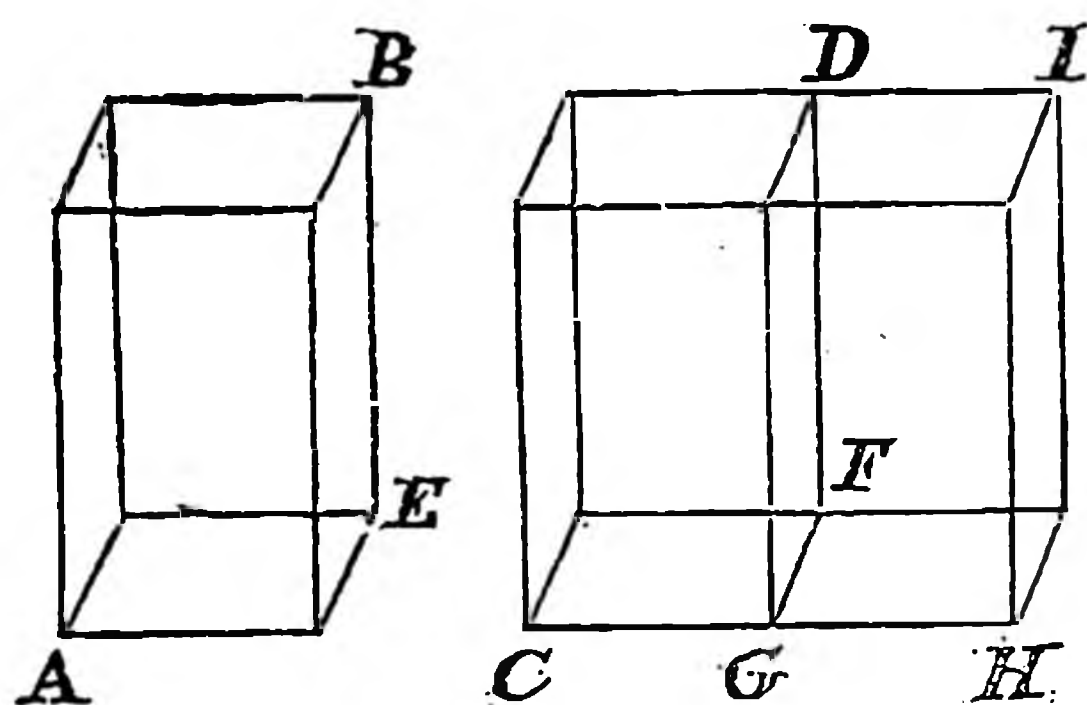
Фиг. 479.



равныя высоты, ребра же ихъ перпендикулярны къ плоскостямъ основаній, то они, на основаніи перваго случая, равны. А потому  $KX=AE$  и  $SZ=CF$  (кн. 11, пред. 30), слѣдовательно  $AE=CF$ .

*Предложеніе 32.* Параллелепипеды  $AB$  и  $CD$ , имѣющіе равныя высоты, относятся между собою какъ площади основаній  $AE$  и  $CF$  (фиг. 480).

Фиг. 480.



*Доказат.* На  $GF$  построимъ параллелограмъ  $FH=AE$  (кн. 1, пред. 45) и построивъ тѣло  $GI$ , найдемъ что  $AB=GI$  (кн. 11, пред. 31).

Такъ какъ тѣло  $CI$  разсѣкается плоскостью  $DG$ , параллельной  $HI$ , то  $GI:CD=FN:CF$  (кн. 11, пред. 25). Но  $AB=GI$ , и  $AE=FN$ , слѣдовательно  $AB:CD=AE:CF$ .

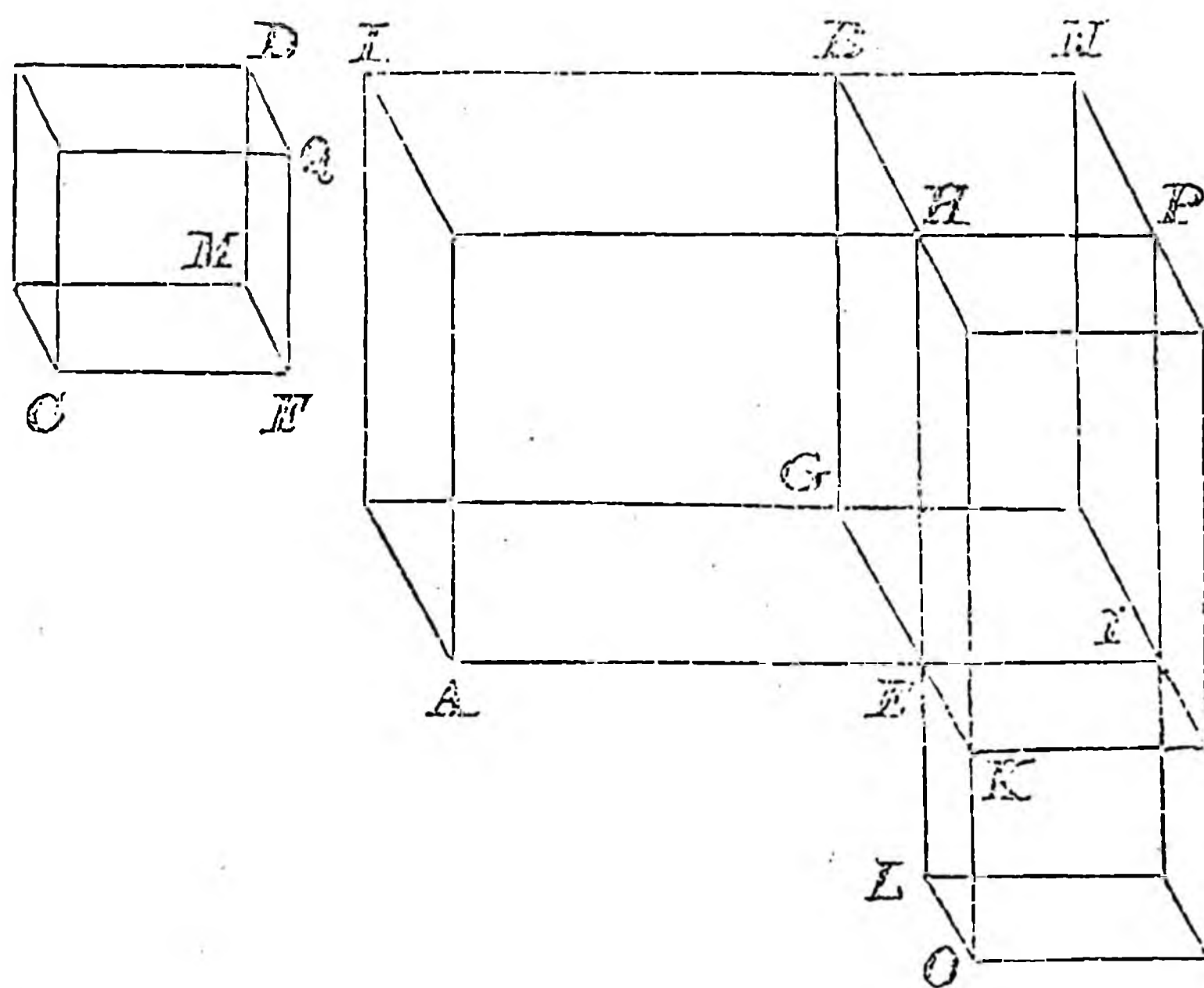
*Предложеніе 33.* Подобные параллелепипеды  $AB$  и  $CD$ , относятся между собою какъ утроенное отношеніе сходственныхъ сторонъ  $AE$  и  $CF$  (фиг. 481).

*Доказат.* Продолжимъ  $AE$ ,  $GE$ ,  $HE$ , до тѣхъ поръ пока  $EI=CF$ ,  $EK=FM$ ,  $EL=FQ$ . Построимъ параллелограмъ  $IK$ , равно какъ и тѣло  $IO$ ; построимъ также параллелограмъ  $GI$ , и на площадяхъ основаній  $GI$  и  $IK$ , построимъ тѣла  $EN$ ,  $KP$ , равной высоты съ тѣломъ  $AB$ . Тѣла  $AB$  и  $CD$  подобны, а потому углы  $AEG$ ,  $CFM$  равны, слѣдовательно также  $\angle IEK=\angle CFM$ , но  $EI=CF$ , и  $EK=FM$ , изъ этого слѣдуетъ, что  $IK$ ,  $CM$  равны и подобны (кн. 6, опред. 1). По той же причинѣ  $IL$ ,  $CQ$ , равно какъ и  $OE$ ,  $DF$  равны и подобны. А потому три параллелограмма тѣла  $IO$  равны и подобны тремъ параллелограммамъ тѣла  $CD$ , равно какъ и



противолежанціе первымъ (кн. 11, пред. 24); слѣдовательно  $IO$ ,  $CD$  равны и подобны (кн. 11, опред. 10).

Фиг. 481.



Такъ какъ  $AB \propto CD$ , то:

$$AE:CF=EG:FM=EH:FQ \text{ (кн. 11, опред. 9 и кн. 6, опред. 1)}$$

но:

$$CF=EI, FM=EK, FQ=EL$$

слѣдовательно:

$$AE:EI=EG:EK=EH:EL$$

Но:

$$\left. \begin{aligned} AE:EI &= AG:GI \\ EG:EK &= GI:IK \\ EH:EL &= PE:IL \end{aligned} \right\} \text{ (кн. 6, пред. 1)}$$

Слѣдовательно:

$$AG:GI=GI:IK=PE:IL$$

Но:

$$\left. \begin{aligned} AG:GI &= AB:EN \\ GI:IK &= EN:PK \\ PE:IL &= PK:IO \end{aligned} \right\} \text{ (кн. 11, пред. 32)}$$

Слѣдовательно:

$$AB:EN=EN:PK=PK:IO$$

а потому:

$$AB:IO=(AB:EN)^3$$

но:

$$AB:EN=AG:GI=AE:EI$$

слѣдовательно:

$$AB:IO=(AE:EI)^3$$

Но мы имѣли:

$$IO=CD \text{ и } EI=CF$$

Слѣдовательно:

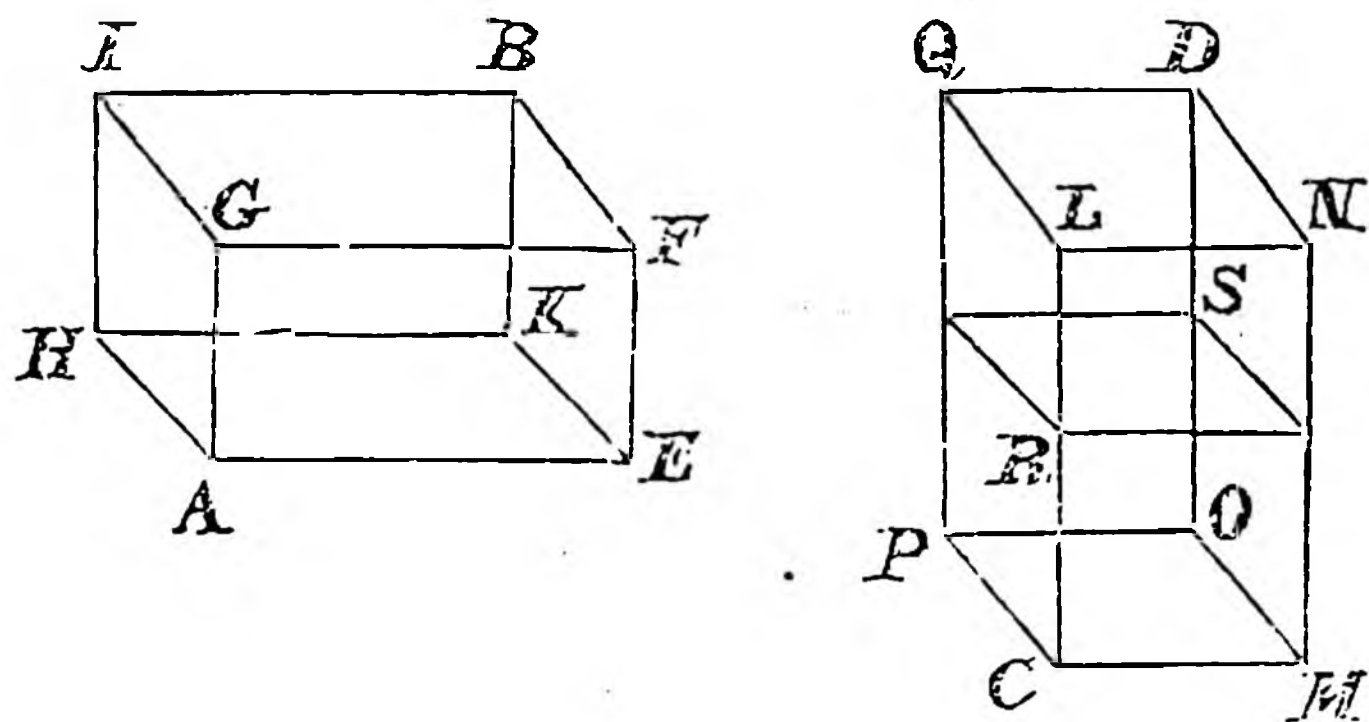
$$AB:CD=(AE:CF)^3$$

*Замѣчаніе.* Отсюда слѣдуетъ, что изъ четырехъ, находящихся въ непрерывной пропорціи, прямыхъ линій, первая относится къ четвертой, какъ параллелепипедъ построенный на первой относится къ подобному и подобно расположенному параллелепипеду, построенному на второй, потому что отношеніе первой къ четвертой равно утроенному отношенію первой ко второй.

*Предложеніе 34.* Въ равныхъ параллелепипедахъ  $AB$  и  $CD$ , площади основаній  $AK$  и  $CO$  обратно пропорціональны высотамъ. А если площади основаній  $AK$  и  $CO$  обратно пропорціональны высотамъ, то параллелепипеды  $AB$  и  $CD$ , равны.

*Первый случай.* Пусть ребра  $AG$ ,  $EF$ ,  $KB$ ,  $HI$ , и  $CL$ ,  $MN$ ,  $OD$ ,  $PQ$  перпендикулярны къ площадямъ основаній  $AK$  и  $CO$ , то высоты тѣлъ будутъ  $AG$  и  $CL$  (фиг. 482).

Фиг. 482.



1. Если  $AB=CD$ , то  $AK:CO=CL:AG$ .

а) Площади основаній равны. Такъ какъ  $AK=CO$  и  $AB=CD$ , то  $CL=AG$ ; въ противномъ бы случаѣ  $AB$  и  $CD$  были бы неравны (кн. 11, пред. 31), что противорѣчитъ положенію. А потому очевидно что,  $AK:CO=CL:AG$ .

б) Площади основаній неравны. Пусть  $AK>CO$ , то  $CL>AG$ , потому что  $AB=CD$ ; въ противномъ бы случаѣ  $AB$  и  $CD$  не могутъ быть равными, что противорѣчитъ положенію. Сдѣлаемъ  $CR=AG$ , и построимъ параллелепипедъ  $CS$ .

Такъ какъ  $AB=CD$ , то:

$$AB:CS=CD:CS \text{ (кн. 5, пред. 7)}$$

Но:

$$AB:CS=AK:CO \text{ (кн. 11, пред. 32)}$$

и

$$CD : CS = CQ : PR = CL : CR \text{ (кн. 11, пред. 25 и кн. 6, пред. 1)}$$

слѣдовательно:

$$AK : CO = CL : CR$$

слѣдовательно и  $AK : CO = CL : AG$ , потому что  $CR = AG$ .

2. Если  $AK : CO = CL : AG$ , то  $AB = CD$ .

а) Площади оснований равны. Такъ какъ  $AK = CO$ , и  $AK : CO = CL : AG$ , то  $CL = AG$ , слѣдовательно  $AB = CD$  (кн. 11, пред. 32).

б) Площади оснований неравны. Пусть  $AK > CO$ , а потому  $CL > AG$ . Сдѣлаемъ  $CR = AG$ , и построимъ параллелепипедъ  $CS$ .

Такъ какъ  $CR = AG$ , то получимъ на основаніи нашего положенія:

$$AK : CO = CL : CR$$

Но:

$$AK : CO = AB : CS \text{ (кн. 11, пред. 32)}$$

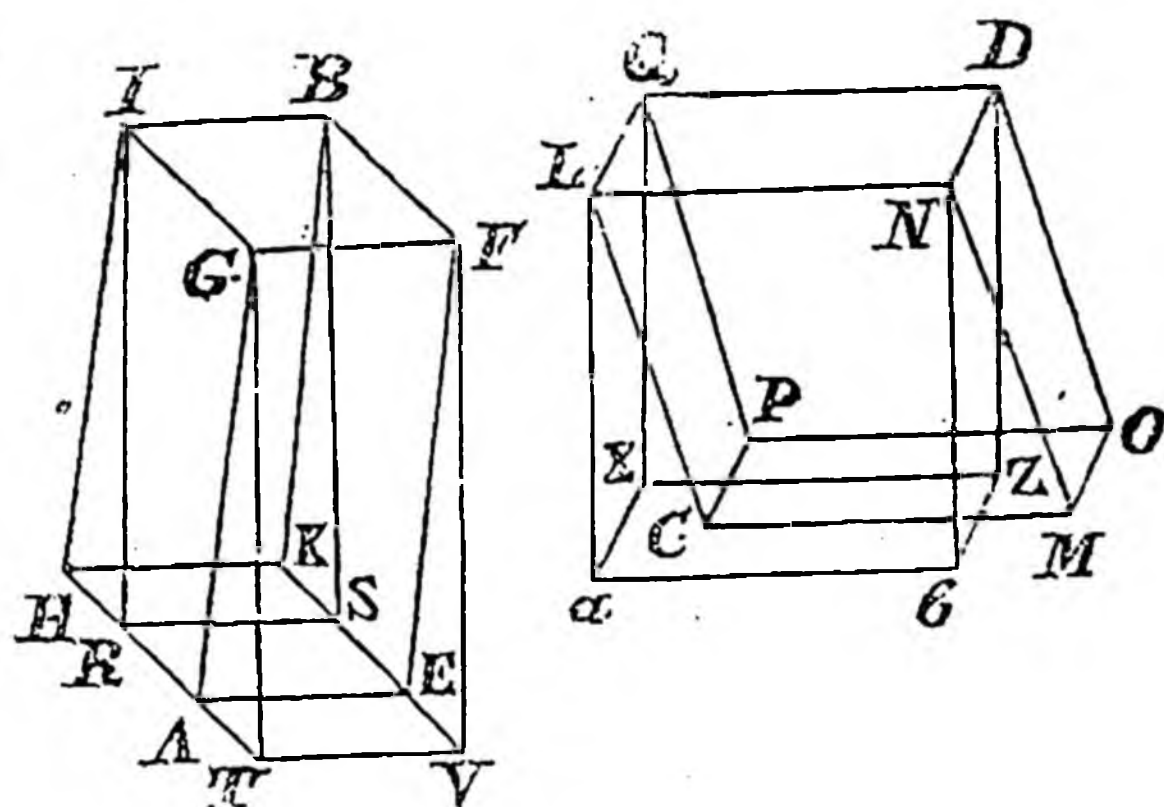
и

$$CL : CR = CQ : PR = CD : CS \text{ (кн. 6, пред. 1 и кн. 11, пред. 25)}.$$

Слѣдовательно:  $AB : CS = CD : CS$ ; а потому  $AB = CD$  (кн. 5, пред. 9).

*Второй случай.* Пусть ребра  $AG$ ,  $EF$ ,  $KB$ ,  $HI$  и  $CL$ ,  $MN$ ,  $OD$ ,  $PQ$  не перпендикулярны къ площадямъ оснований  $AK$  и  $CO$  (фиг. 483).

Фиг. 483.



На плоскости оснований  $AK$  и  $CO$  опустимъ перпендикуляры изъ точекъ  $G$ ,  $F$ ,  $B$ ,  $I$  и  $L$ ,  $N$ ,  $D$ ,  $Q$ , которые пересѣкутъ эти плоскости въ точкахъ  $T$ ,  $V$ ,  $S$ ,  $R$  и  $a$ ,  $b$ ,  $Z$ ,  $X$ . Построимъ параллелепипеды  $BT$  и  $Da$ ; тѣла  $BT$  и  $AB$  имѣютъ высоту  $TG$ , а  $Da$  и  $CD$  имѣютъ высоту  $aL$  (кн. 6, опред. 4).

1. Если  $AB = CD$ , то  $AK : CO = aL : TG$ .

Такъ какъ  $AB = CD$ , а  $AB = BT$  (кн. 11, пред. 30) и  $CD = Da$ , то  $BT = Da$ , слѣдовательно, на основаніи первого случая,  $TS : aZ = aL : TG$ . Но  $TS = AK$  и  $aZ = CO$  (кн. 11, пред. 24), слѣдовательно  $AK : CO = aL : TG$ .

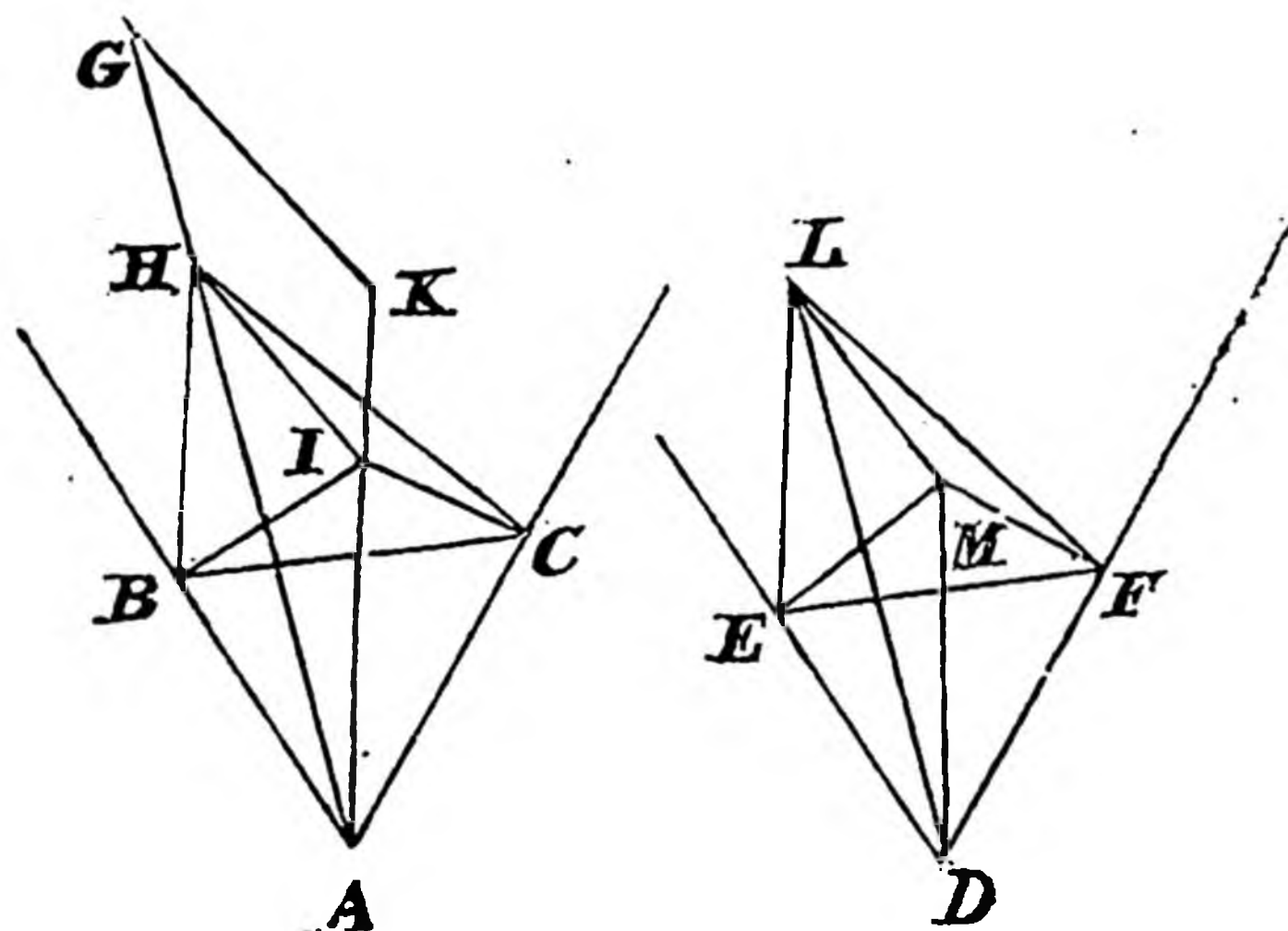
2. Если  $AK : CO = aL : TG$ , то  $AB = CD$ .

Такъ какъ  $AK = TS$ , и  $CO = aZ$  (кн. 11, пред. 24), то получимъ на основаніи нашего положенія  $TS : aZ = aL : TG$ , слѣдовательно, на основа-

ніи первого случая  $TB=Da$ . Но  $TB=AB$  и  $Da=CD$  (кн. 11, пред. 30), слѣдовательно  $AB=CD$ .

*Предложеніе 35.* Если чрезъ вершины  $A$  и  $D$  двухъ плоскихъ угловъ  $\angle BAC$  и  $\angle EDF$  проведемъ двѣ прямыя линіи  $AG$  и  $DL$ , образующія, со сторонами данныхъ угловъ, равные углы  $\angle BAG$ ,  $\angle EDL$  и  $\angle GAC$ ,  $\angle LDF$ , и если изъ произвольныхъ точекъ  $G$  и  $L$ , выше сказанныхъ прямыхъ, опустимъ перпендикуляры  $GK$  и  $LM$  на плоскости данныхъ угловъ, и если чрезъ основанія ихъ  $A$  и  $D$  проведемъ прямыя  $KA$  и  $MD$ , то эти послѣднія прямыя съ проведенными  $AG$  и  $DL$  образуютъ равные углы  $\angle KAG$  и  $\angle MDL$  (фиг. 484).

Фиг. 484.



*Доказат.* Отложимъ  $АН=DL$  и чрезъ точку  $H$  проведемъ прямую  $HI$  параллельную  $GK$ ; прямая  $HI$  встрѣчающая плоскость проведенную чрезъ  $BAC$  въ точкѣ  $I$ , равно какъ и прямая  $GK$  къ ней перпендикулярны (кн. 11, пред. 8). Изъ точекъ  $I$ ,  $M$  опустимъ на прямыя  $AB$ ,  $AC$ ,  $DE$ ,  $DF$  перпендикуляры  $IB$ ,  $IC$ ,  $ME$ ,  $MF$ , и проведемъ прямыя  $HC$ ,  $CB$ ,  $BH$ ,  $LF$ ,  $FE$ ,  $EL$ . Такъ какъ  $HI$  перпендикулярна къ плоскости проведенной чрезъ  $BAC$ , слѣдовательно она перпендикулярна къ прямымъ  $IA$ ,  $IB$ ,  $IC$  (кн. 11, опред. 3), то (кн. 1, пред. 47)  $\square HA = \square HI + \square IA$ , но  $\square IA = \square IC + \square CA$ , слѣдовательно  $\square HA = \square HI + \square IC + \square CA$ ; а потому, такъ какъ  $\square HI + \square IC = \square HC$ , то и  $\square HA = \square HC + \square CA$ , слѣдовательно  $\angle HCA = d$  (кн. 1, пред. 48). По той же причинѣ  $\angle LFD = d$ . Слѣдовательно  $\angle HCA = \angle LFD$ . Но по положенію  $\angle HAC = \angle LDF$ , и  $АН=DL$ , слѣдовательно  $AC=DF$  (кн. 1, пред. 26).

Далѣе, такъ какъ  $\square AH = \square AI + \square IH$ , но  $\square AI = \square AB + \square BI$ , то  $\square AH = \square AB + \square BI + \square IH$ ; слѣдовательно, такъ какъ  $\square BI + \square IH = \square BH$ , то и  $\square AH = \square AB + \square BH$ , а потому  $\angle ABH = d$  (кн. 1, пред. 48). По той же причинѣ  $\angle DEL = d$ . Слѣдовательно  $\angle ABH = \angle DEL$ . Но по положенію  $\angle BAH = \angle EDL$  и  $АН=DL$ , слѣдовательно  $AB=DE$  (кн. 1, пред. 26).

Итакъ  $AB=DE$ ,  $AC=DF$ , а по положенію  $\angle BAC = \angle EDF$ ; то



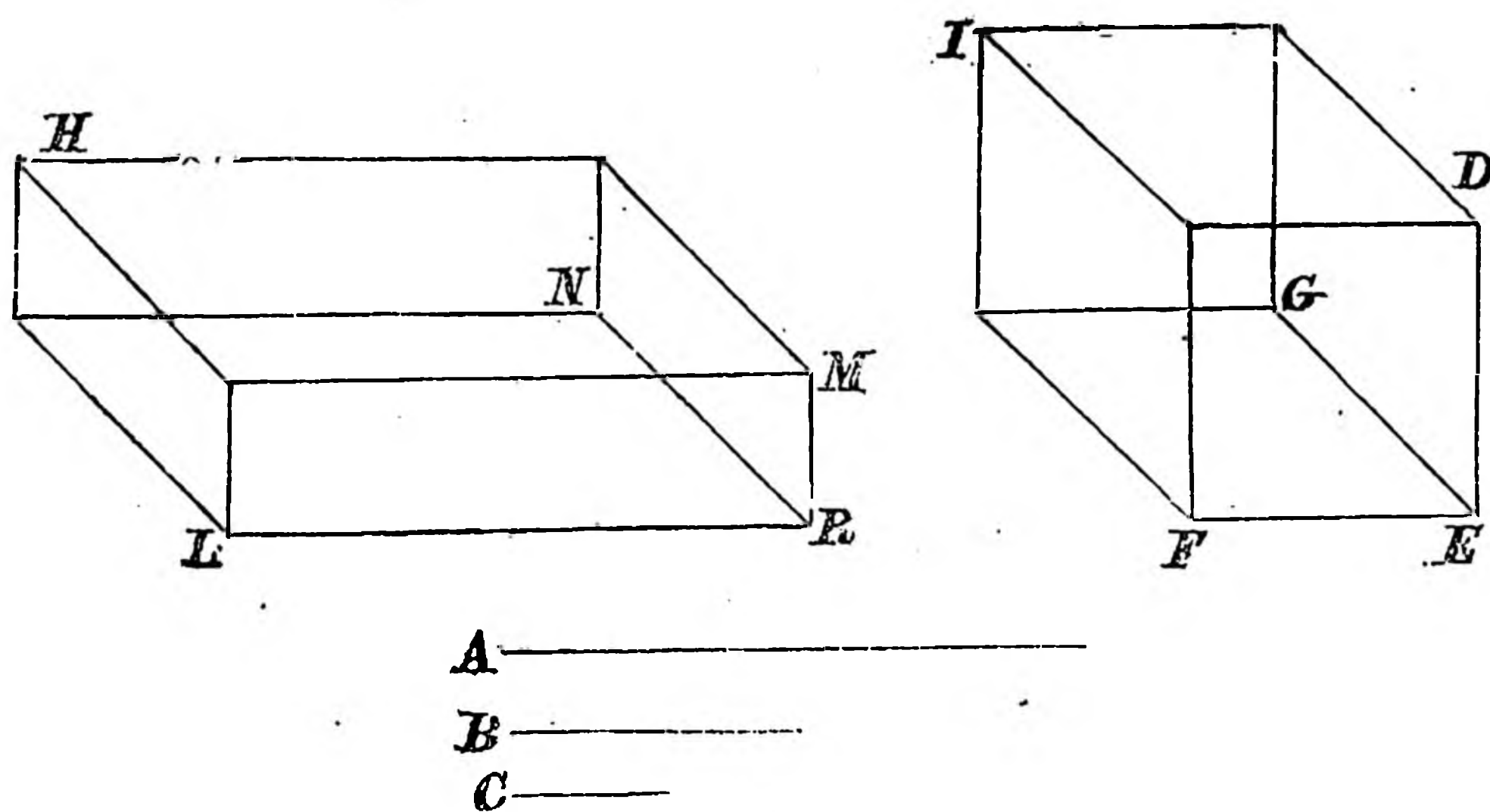
$BC=EF$  и  $\angle ACB=\angle DFE$  (кн. 1, пред. 4); следовательно, такъ какъ  $\angle ICA=\angle MFD=d$ , то и  $\angle BCI=\angle EFM$ . По той же причинѣ  $\angle CBI=\angle FEM$ , следовательно  $CI=FM$  (кн. 1, пред. 26). Но  $AC=DF$  и  $\angle ICA=\angle MFD$ , а потому  $AI=DM$  (кн. 1, пред. 4), следовательно  $\square AI=\square DM$ .

Такъ какъ  $\angle AIN$  и  $\angle DML$  суть углы прямые, то  $\square AH=\square AI+\square IN$  и  $\square DL=\square DM+\square ML$ ; но  $AH=DL$ , а потому  $\square AH=\square DL$ , следовательно  $\square AI+\square IN=\square DM+\square ML$ . Но по предыдущему  $\square AI=\square DM$ , следовательно  $\square IN=\square ML$ , откуда  $IN=ML$ . Но по предыдущему  $AI=DM$  и  $HA=DL$ , следовательно  $\angle HAI=\angle LDM$  (кн. 1, пред. 8).

*Слѣдствіе.* Отсюда ясно, что если изъ вершинъ  $A$  и  $D$  двухъ равныхъ плоскихъ угловъ  $BAC$  и  $EDF$ , проведемъ равныя прямыя  $AH$  и  $DL$ , образующія со сторонами данныхъ угловъ углы равные, то перпендикуляры  $HI$  и  $LM$ , опущенные изъ оконечностей  $H$  и  $L$ , проведенныхъ прямыхъ, будутъ равны.

*Предложеніе 36.* Если три прямыя  $A$ ,  $B$  и  $C$  пропорціональны, то параллелепипедъ построенный на этихъ трехъ прямыхъ равенъ равноугольному параллелепипеду, построенному на средней  $B$  (фиг. 485).

Фиг. 485.



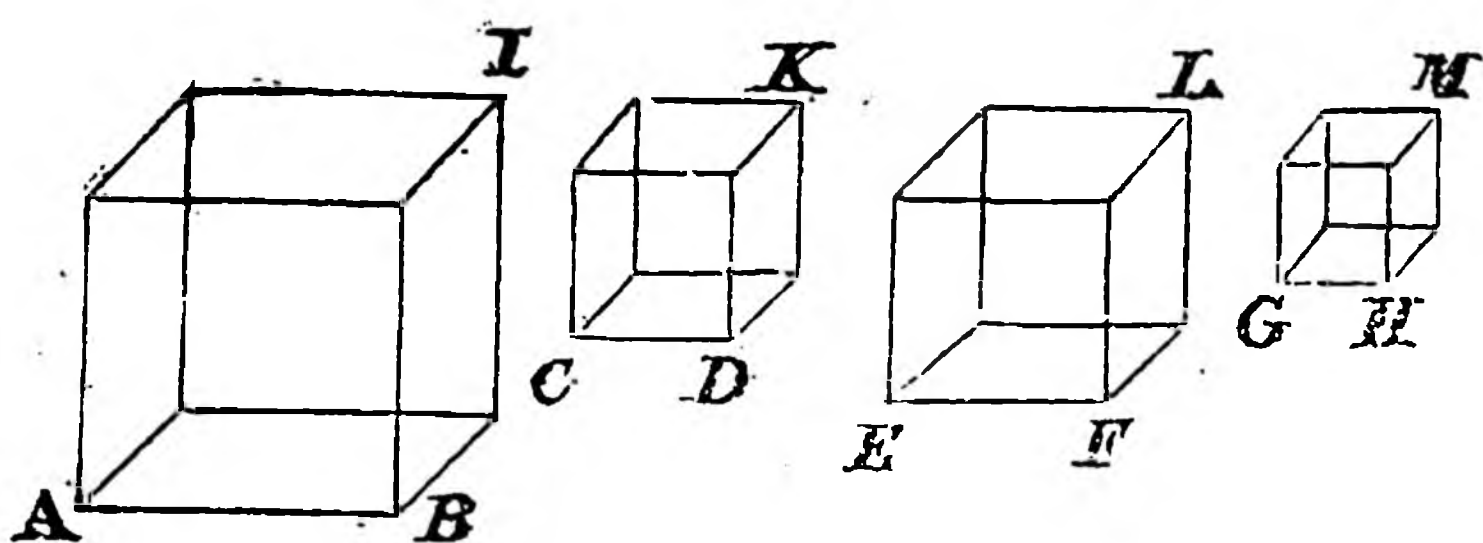
*Доказат.* Пусть  $E$  будетъ тѣлесный уголъ, составленный изъ трехъ плоскихъ угловъ  $\angle DEG$ ,  $\angle GEF$  и  $\angle FED$ . Отложимъ на каждой изъ прямыхъ  $DE$ ,  $GE$ ,  $EF$  части равныя  $B$ , и построимъ параллелепипедъ  $EI$ . Далѣе, пусть  $RL$  равна  $A$ ; при прямой  $KL$ , въ точки  $K$  построимъ тѣлесный уголъ, составленный плоскими углами  $\angle MRN$ ,  $\angle NRL$ ,  $\angle LRM$ , равный тѣлесному углу  $E$  (кн. 11, пред. 26); отложимъ  $RN=B$  и  $RM=C$ , и построимъ параллелепипедъ  $RH$ .

Такъ какъ  $A:B=B:C$  и  $A=RL$ ,  $B=RN=EF=EG=ED$  и  $C=RM$ , то  $RL:EF=ED:RM$ . Но  $\angle LRM=\angle DEF$ , следовательно

параллелограммъ  $ML=DF$  (кн. 6, пред. 14). Такъ какъ, чрезъ вершины  $\angle DEF$  и  $\angle LRM$ , въ точкахъ  $E$  и  $R$ , проведены равныя прямыя  $EG$  и  $RN$ , такія, что  $\angle LRN=\angle FEG$  и  $\angle MRN=\angle DEG$ , то перпендикуляры, опущенные изъ точекъ  $G$  и  $N$  на плоскости угловъ  $DEF$  и  $MRL$ , равны (кн. 11, пред. 35, слѣд.), а потому тѣла  $EI$  и  $RH$  равной высоты. Но по предыдущему площади ихъ основаній  $DE$  и  $ML$  равны, слѣдовательно  $RH=EI$  (кн. 11, пред. 31).

*Предложеніе 37.* Если четыре прямыя линіи  $AB, CD, EF, GH$  пропорціональны, то построенные на нихъ параллелепипеды  $AI, CK, EL, GM$  подобные и подобно расположенные будутъ пропорціональны. Если построенные на четырехъ прямыхъ подобные и подобно расположенные параллелепипеды пропорціональны, то и прямыя линіи также пропорціональны (фиг. 486).

Фиг. 486.

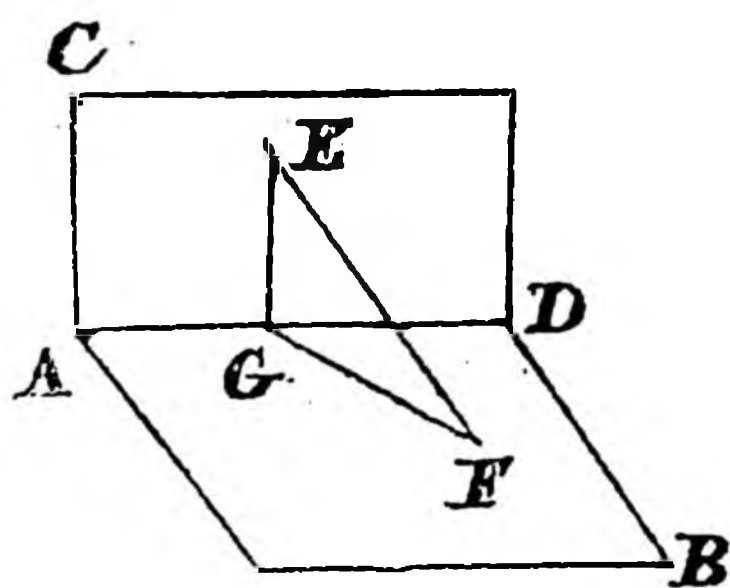


*Доказат.* 1. Такъ какъ  $AI \sim CK$ , то  $AI:CK=(AB:CD)^3$  (кн. 11, пред. 33). По той же причинѣ  $EL:GM=(EF:GH)^3$ . Но по положенію  $AB:CD=EF:GH$ , слѣдовательно  $AI:CK=EL:GM$ .

2. Такъ какъ  $AI:CK=(AB:CD)^3$  и  $EL:GM=(EF:GH)^3$  (кн. 11, пред. 33), и по положенію  $AI:CK=EL:GM$ , то  $AB:CD=EF:GH$ .

*Предложеніе 38.* Если двѣ плоскости  $AB$  и  $CD$  взаимно перпендикулярны, то перпендикуляръ, опущенный изъ произвольной точки  $E$  одной изъ плоскостей, на другую, встрѣчаетъ прямую  $AD$  взаимнаго пересѣченія двухъ плоскостей (фиг. 487).

Фиг. 487.

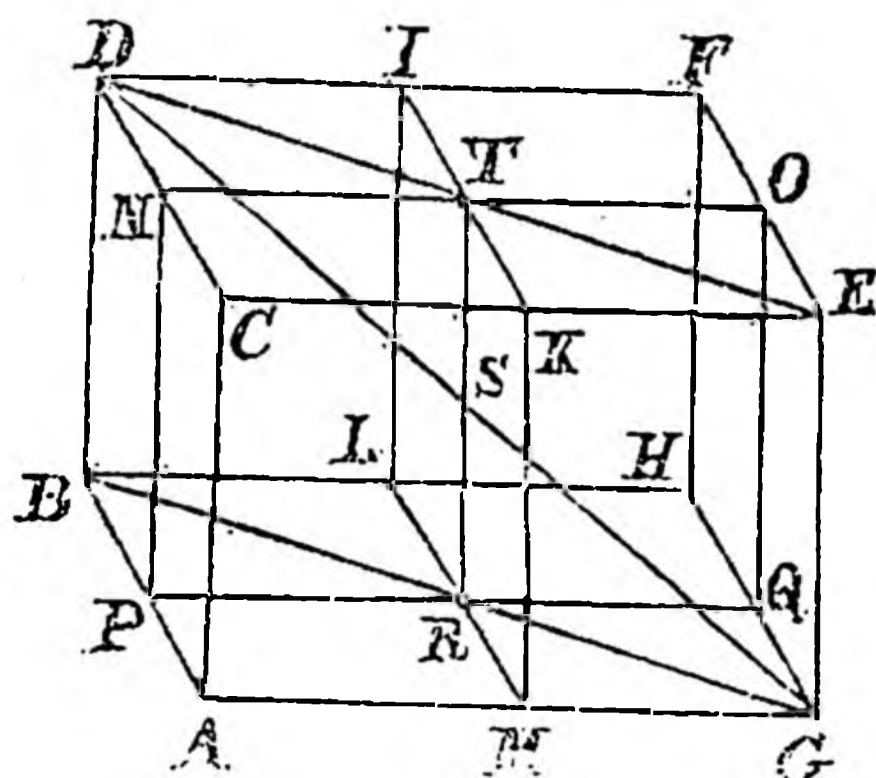


*Доказат.* Пусть этотъ перпендикуляръ не встрѣчаетъ плоскость  $AB$  на прямой  $AD$ , а пройдетъ внѣ этой послѣдней, какъ напр. прямая  $EF$ ; изъ точки

$F$ , плоскости  $AB$ , опустимъ перпендикуляръ  $FG$  на прямую  $AD$ , онъ будетъ перпендикуляренъ къ плоскости  $CD$  (кн. 11, опред. 4). Проведемъ  $EG$ , то  $\angle FGE=d$ , но  $\angle EFG=d$ , слѣдовательно въ  $\triangle EFG$  два угла  $=2d$ , что невозможно (кн. 1, пред. 17). Слѣдовательно, перпендикуляръ опущенный изъ точки  $E$  на плоскость  $AB$ , не можетъ упасть внѣ прямой  $AD$ , а потому пересѣкаетъ ее.

*Предложеніе 39.* Если мы раздѣлимъ пополамъ противоположнія стороны  $АН$  и  $СF$  параллелепипеда  $AF$ , и проведемъ чрезъ точки дѣленія  $I, K, M, L, O, N, P, Q$  плоскости  $IM, NQ$ , то прямая пересѣченія  $TR$  этихъ плоскостей и діагональ параллелепипеда взаимно дѣлятся пополамъ (фиг. 488).

Фиг. 488.



*Доказат.* Проведемъ  $DT, TE, BR$  и  $RG$ . Такъ какъ  $DN$  и  $OE$  параллельны то  $\angle DNT=\angle TOE$  (кн. 1, пред. 29). Но  $DN=OE$ , и  $NT=TO$ , слѣдовательно  $DT=TE$  и  $\angle NTD=\angle OTE$  (кн. 1, пред. 4), а потому  $DTE$  есть прямая линія (кн. 1, пред. 14). По той же причинѣ  $BR=RG$ , и  $BRG$  также прямая линія.

Такъ какъ  $CA$  равна и параллельна какъ  $DB$ , такъ и  $EG$ , то  $DB$  также равна и параллельна  $EG$  (кн. 11, пред. 9). Слѣдовательно  $DE$  и  $GB$  равны и параллельны (кн. 1, пред. 33), откуда прямые  $DG$  и  $TR$  лежатъ въ одной плоскости (кн. 11, пред. 7).

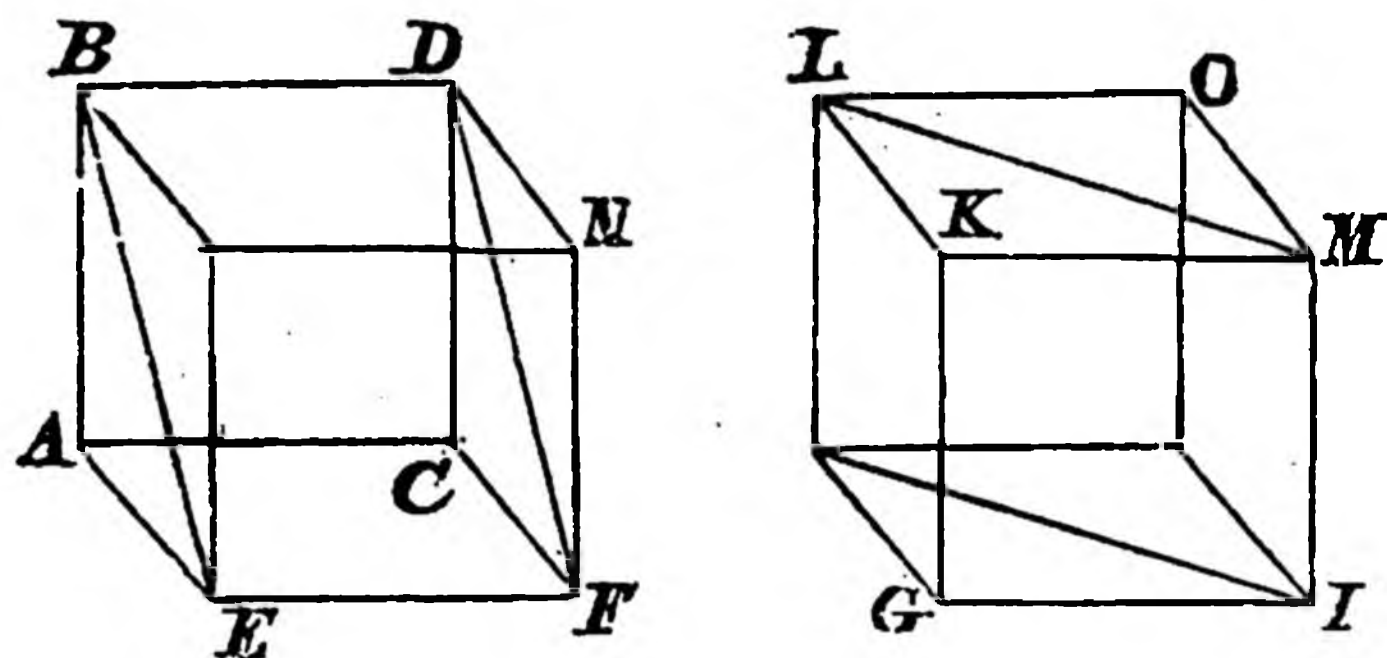
Такъ какъ  $DE$  и  $BG$  равны и параллельны, и  $DT=TE, BR=RG$ , то  $DT=GR$ . Но  $\angle TDS=\angle SGR$  (кн. 1, пред. 29) и  $\angle DST=\angle RSG$  (кн. 1, пред. 15), слѣдовательно  $TS=SR$  и  $DS=SG$  (кн. 1, пред. 26), а потому обѣ прямые  $TR$  и  $DG$ , въ точкѣ  $S$ , взаимно дѣлятся пополамъ.

*Предложеніе 40.* Двѣ призмы  $AEBCFD$  и  $HGIMKL$  равной высоты, изъ коихъ одна имѣетъ основаніемъ параллелограмъ  $AEFC$ , а другая треугольникъ  $GHI$ , котораго удвоенная площадь равна площади параллелограмма, равны между собою (фиг. 489).

*Доказат.* Построимъ параллелепипеды  $ED$  и  $GO$ . По положенію параллелограмъ  $AF=2\triangle GHI$  и  $HI=2\triangle GHI$  (кн. 1, пред. 34), а потому

$AF=HI$ ; следовательно, такъ какъ высоты равны, параллелепипеды  $ED$  и  $GO$  (кн. 11, пред. 31), а потому и ихъ половины равны. Но  $AEF CBD$

Фиг. 489.



есть половина  $ED$ , а  $GHIMKL$  половина  $GO$  (кн. 11, пред. 28), следовательно  $AEF CBD = GHIMKL$ .



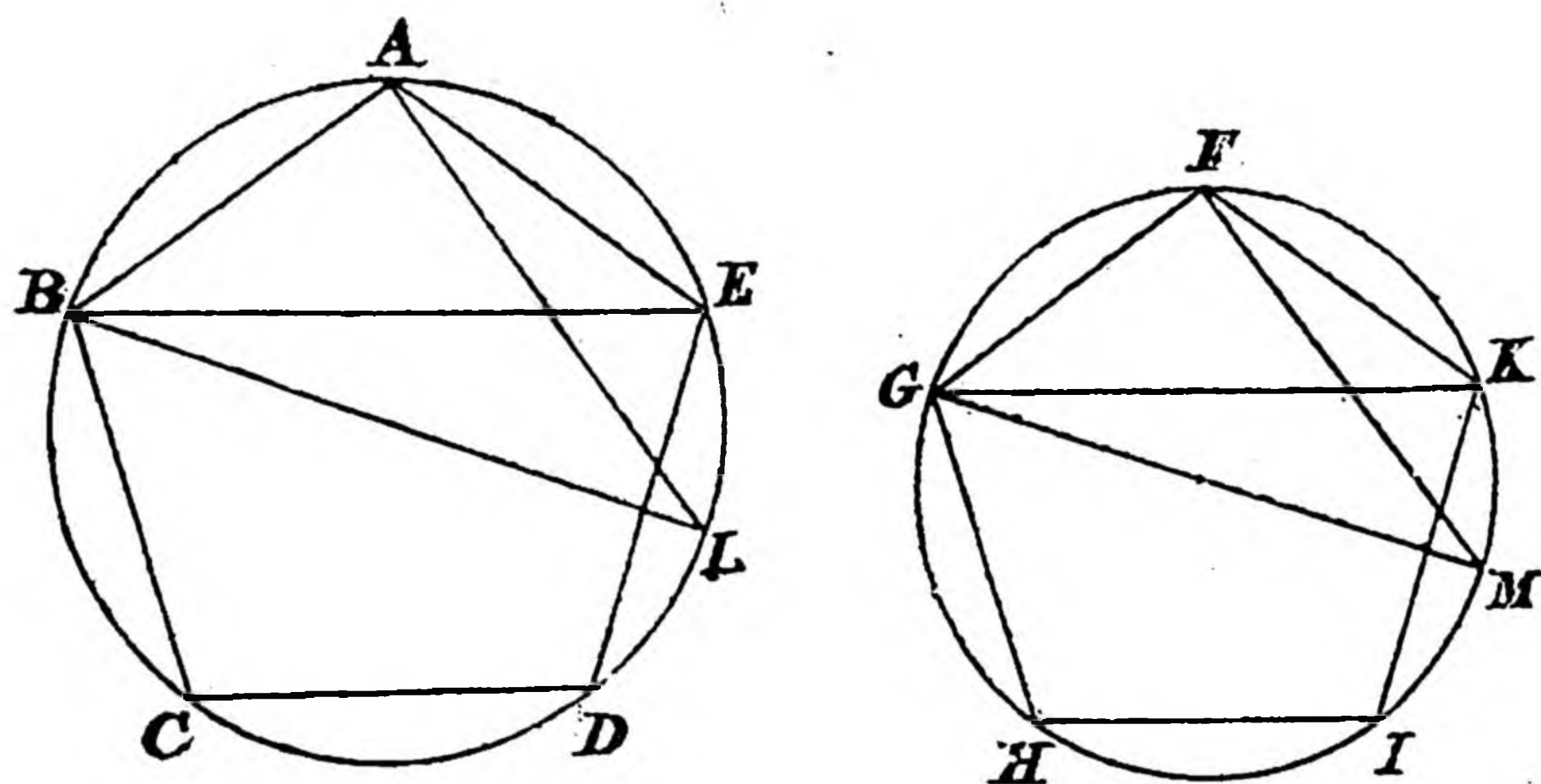
## КНИГА XII.

### Книга вторая „О тѣлахъ“.

#### Предложенія.

*Предложеніе 1.* Подобные, вписанные въ круги многоугольники  $ABCDE$  и  $FGHIK$ , относятся между собою, какъ квадраты діаметровъ  $BL$  и  $GM$  (фиг. 490).

Фиг. 490.



*Доказат.* Проведемъ прямыя  $BE$ ,  $AL$ ,  $GK$ ,  $FM$ . Такъ какъ многоугольники подобны, то  $\angle BAE = \angle GFK$  и  $BA : AE = GF : FK$  (кн. 6, опред. 1); а потому треугольники  $ABE$  и  $FGK$  равноугольны (кн. 6, пред. 6), слѣдовательно  $\angle AEB = \angle FKG$ . Но  $\angle AEB = \angle ALB$  и  $\angle FKG = \angle FMG$  (кн. 3, пред. 21), слѣдовательно  $\angle ALB = \angle FMG$ ; но  $\angle BAL = d = \angle GFM$  (кн. 3, пред. 31), слѣдовательно и  $\angle ABL = \angle FGM$ . Изъ этого слѣдуетъ что треугольники  $ABL$  и  $FGM$  равноугольны. Слѣдовательно:

$$BL : GM = BA : GF$$

а потому:

$$(BL : GM)^2 = (BA : GF)^2$$

Но:

$$(BL : GM)^2 = \square BL : \square GM \text{ (кн. 6, пред. 20)}$$

и

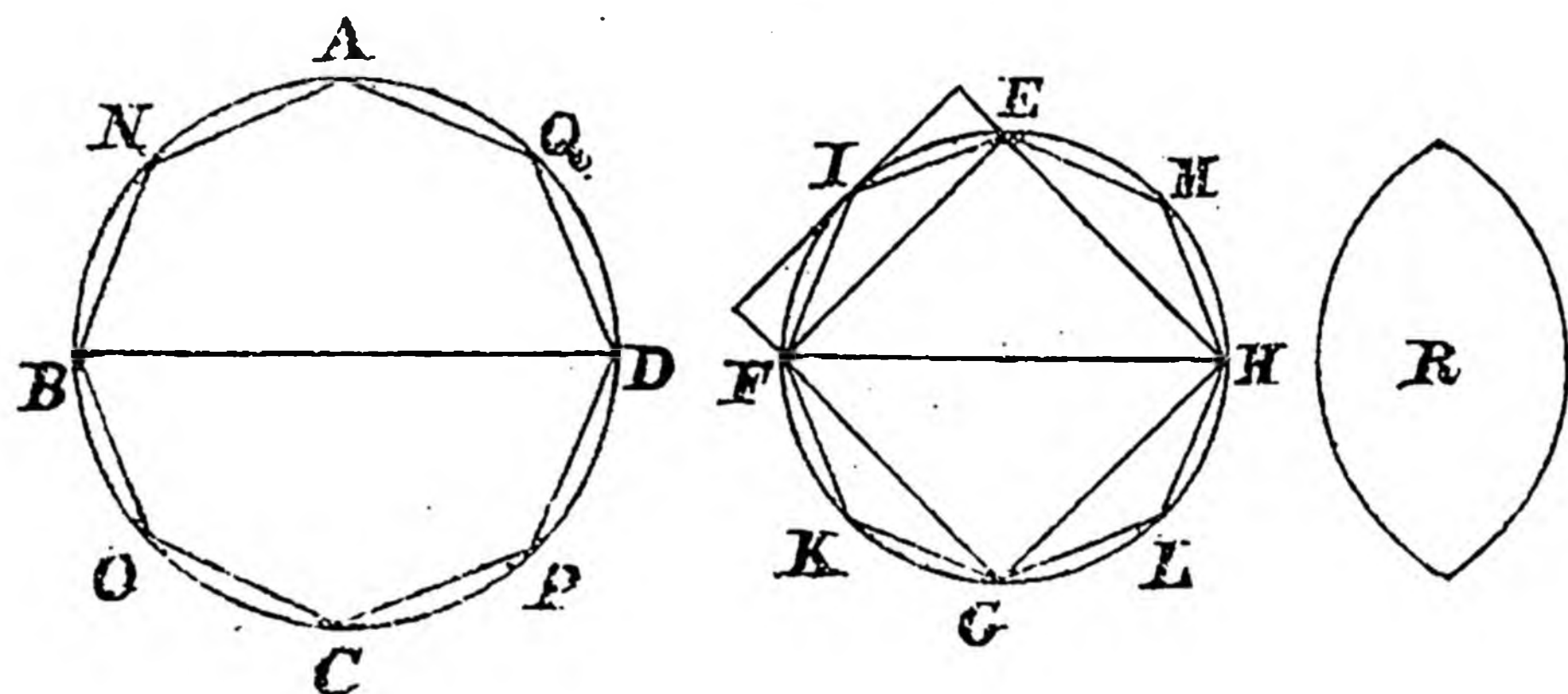
$$(BA : GF)^2 = ABCDE : FGHIK$$

Слѣдовательно также:

$$ABCDE : FGHIK = \square BL : \square GM.$$

*Предложеніе 2.* Круги  $ABCD$  и  $EFGH$  относятся между собою какъ квадраты ихъ діаметровъ  $BD$  и  $FH$  (фиг. 491).

Фиг. 491.



*Доказат.* Если бы не было  $\square BD : \square FH = \text{кр. } ABCD : \text{кр. } EFGH$ , то пусть  $\square BD : \square FH = \text{кр. } ABCD : R$ , гдѣ  $R$  есть площадь, которая или меньше или больше круга  $EFGH$ .

*Случай первый.* Пусть площадь  $R < \text{кр. } EFGH$ , и  $\square BD : \square FH = \text{кр. } ABCD : R$ .

Впишемъ въ кругъ  $EFGH$  квадратъ  $EFGH$  (кн. 4, пред. 6); то этотъ послѣдній будетъ больше полукруга. Чрезъ точки  $E, F, G, H$  проведемъ касательныя, то внутренній квадратъ  $EFGH$  равенъ половинѣ внѣшняго (кн. 1, пред. 41). Но кругъ меньше внѣшняго квадрата, слѣдовательно внутренній квадратъ болѣе половины круга.

Раздѣлимъ пополамъ дуги  $EF, FG, GH, HE$  въ точкахъ  $I, K, L, M$  и проведемъ прямыя  $EI, IF, FK, KG, GL, LH, HM, ME$ , то каждый изъ полученныхъ треугольниковъ  $IFE, KGF, LHG, MEN$  больше половины сегмента въ который онъ вписанъ. Въ самомъ дѣлѣ, если мы проведемъ чрезъ точки  $I, K, L, M$  касательныя, и построимъ параллелограммы на  $EF, FG, GH, HE$ ; то каждый изъ поименованныхъ треугольниковъ равенъ половинѣ параллелограмма, въ которомъ онъ находится. Но каждый сегментъ менѣе соответствующаго ему параллелограмма, слѣдовательно каждый изъ упомянутыхъ треугольниковъ болѣе половины соответствующаго ему сегмента.

Продолжая, такимъ образомъ, далѣе подобное дѣленіе пополамъ дугъ круга, и дѣлая при каждомъ дѣленіи вышеупомянутое построение,

получимъ сегменты,  $EI$ ,  $IF$ ,  $FK$  и т. д., сумма которыхъ меньше избытка круга  $EFGH$  надъ площадью  $R$  (кн. 10, пред. 1). Слѣдовательно, такимъ образомъ полученный многоугольникъ  $EIFKGLHM > R$ .

Въ кругъ  $ABCD$  впишемъ многоугольникъ  $ANBOSCPDQ$  подобный многоугольнику  $EIFKGLHM$ , то  $\square BD : \square FH = \text{много. } ANB \dots : \text{много. } EIF \dots$  (кн. 12, пред. 1). Но мы предположили, что  $\square BD : \square FH = \text{кр. } ABCD : R$ , слѣдовательно  $\text{кр. } ABCD : R = \text{много. } ANB : \text{много. } EIF \dots$ . Но очевидно  $\text{кр. } ABCD > \text{много. } ANB \dots$ . Слѣдовательно  $R > \text{много. } EIF \dots$  (кн. 5, пред. 14), что противорѣчитъ предъидущему  $R < \text{много. } EIF \dots$ . А потому не можетъ быть  $\square BD : \square FH = \text{кр. } ABCD : R$ , когда  $R < \text{кр. } EFGH$ .

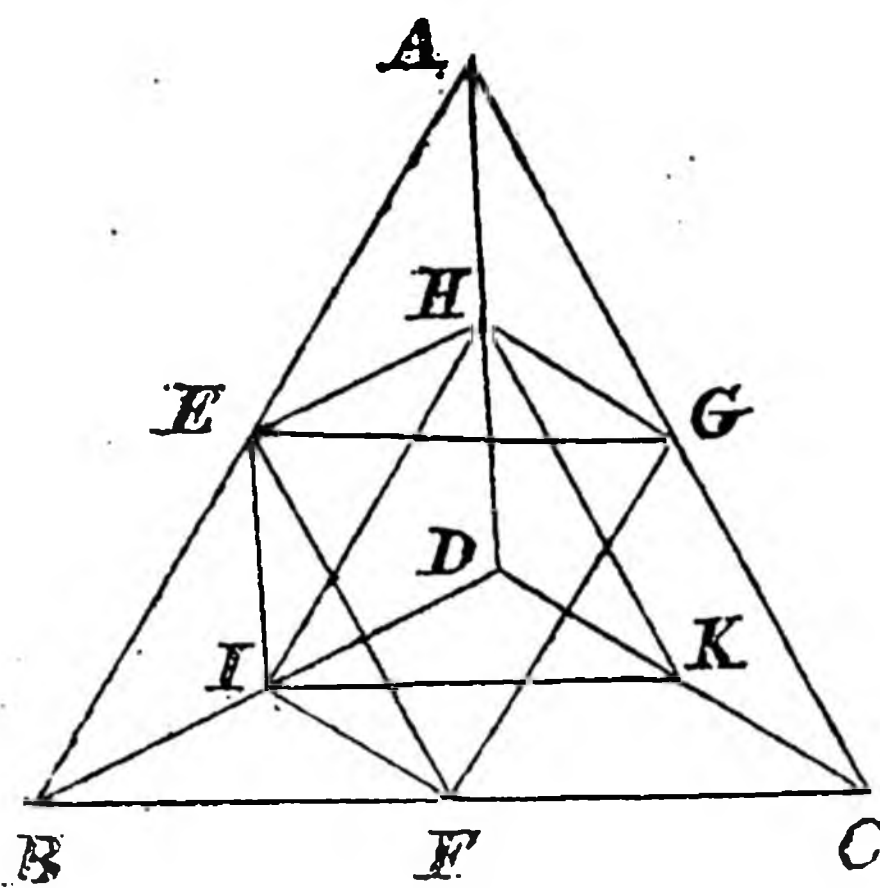
По той же причинѣ не можетъ быть  $\square FH : \square BD = \text{кр. } EFGH : Z$ , когда площадь  $Z < \text{кр. } ABCD$ .

*Случай второй.* Пусть площадь  $R > \text{кр. } EFGH$  и  $\square BD : \square FH = \text{кр. } ABCD : R$ , слѣдовательно также  $\square FH : \square BD = R : \text{кр. } ABCD$ .

Пусть  $R : \text{кр. } ABCD = \text{кр. } EFGH : Z$ , но  $R > \text{кр. } EFGH$ , а потому  $\text{кр. } ABCD > Z$  (кн. 5, пред. 14). Но мы положили, что  $\square FH : \square BD = R : \text{кр. } ABCD$ , слѣдовательно  $\square FH : \square BD = \text{кр. } EFGH : Z$ , что невозможно, на основаніи перваго случая, такъ какъ  $Z < \text{кр. } ABCD$ . А потому не можетъ быть  $\square BD : \square FH = \text{кр. } ABCD : R$ , при  $R > \text{кр. } EFGH$ , а также, на основаніи перваго случая, при положеніи  $R < \text{кр. } EFGH$ . Слѣдовательно  $\square BD : \square FH = \text{кр. } ABCD : \text{кр. } EFGH$ .

*Предложеніе 3.* Всякая треугольная пирамида  $ABCD$ , можетъ быть разбита на двѣ равныя и подобныя другъ другу треугольныя пирамиды, подобныя каждая цѣлой, и на двѣ равныя призмы, которыя вмѣстѣ взятыя больше половины цѣлой пирамиды (фиг. 492).

Фиг. 492.



*Доказат.* Пусть основаніе пирамиды будетъ треугольникъ  $ABC$ , а ея вершина  $D$ . Раздѣлимъ пополамъ прямыя  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ ,  $AD$ ,  $DB$ ,  $DC$  въ точкахъ  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $I$ ,  $K$ . Проведемъ прямыя  $EH$ ,  $EG$ ,  $GH$ , образуемъ треугольную пирамиду  $AEGH$ ; далѣе проведя прямыя  $HI$ ,  $IK$ ,  $KH$  образуемъ треугольную пирамиду  $HIKD$ ; наконецъ проведя прямыя

$IF$ ,  $FG$  образуемъ призму  $EBFGHI$  на основаніи  $EBFG$  и призму  $GFCKHI$  на основаніи  $FGC$ . Требуется доказать:

1. Что обѣ треугольныя пирамиды  $AEGH$  и  $HIKD$  съ вершинами  $H$  и  $D$  и съ основаніями  $AEG$  и  $HIK$ , равны и подобны между собою.

Такъ какъ  $AE=EB$ , и  $AH=HD$ , то  $EH$  параллельна прямой  $BD$  (кн. 6, пред. 2); по той же причинѣ  $HI$  параллельна  $AB$ ; а потому  $HEBI$  есть параллелограмъ, слѣдовательно  $HI=EB$  (кн. 1, пред. 34); а потому, такъ какъ  $EB=AE$ , то и  $AE=HI$ . Но  $AH=HD$  и  $\angle EAH=\angle IHD$  (кн. 1, пред. 29), слѣдовательно  $\triangle AEH \cong \triangle HID$  и  $EH=ID$  (кн. 1, пред. 4 и кн. 6, пред. 6). По той же причинѣ  $\triangle AHG \cong \triangle HKD$  и  $KD=GH$ .

Изъ этого слѣдуетъ, что  $HE$  равна и параллельна  $DI$ ,  $HG$  равна и параллельна  $KD$ , а потому  $\angle EHG=\angle IDK$  (кн. 11, пред. 10), слѣдовательно  $\triangle EHG \cong \triangle IDK$  (кн. 1, пред. 4 и кн. 6, пред. 6). По той же причинѣ  $\triangle AEG \cong \triangle HIK$ .

Изъ этого видно, что пирамиды  $AEGH$  и  $HIKD$  образованы одинаковымъ числомъ, равныхъ и подобныхъ плоскостей, а потому онѣ равны и подобны между собою (кн. 11, опред. 10).

2. Что построенныя пирамиды  $AEGH$  и  $HIKD$  подобны цѣлой  $ABCD$ .

Такъ какъ  $HI$  параллельна  $AB$ ; то треугольники  $ADB$  и  $HDI$  равноугольны (кн. 1, пред. 29), а потому ихъ стороны пропорціональны (кн. 6, пред. 4), слѣдовательно треугольники  $ADB$  и  $HDI$  подобны (кн. 6, опред. 1). По той же причинѣ треугольники  $BDC$ ,  $DIK$  и  $ADC$ ,  $DHK$  также подобны.

Такъ какъ  $BA$  параллельна  $IH$  и  $AC$  параллельна  $HK$ , то  $\angle BAC = \angle IHK$  (кн. 11, пред. 10), а такъ какъ  $HI=BE=EA$  и  $HK=CG=GA$ , то  $BA:AC=IH:HK$  (кн. 5, пред. 15), слѣдовательно  $\triangle ABC \sim \triangle HIK$  (кн. 6, пред. 6). Изъ этого слѣдуетъ, что пирамиды  $ABCD$  и  $HIKD$  подобны (кн. 11, опред. 9), слѣдовательно онѣ подобны и пирамидѣ  $AEGH$ , потому что эта послѣдняя подобна пирамидѣ  $HIKD$ , на основаніи первой части этой теоремы.

3. Что призмы  $EBFGHI$  и  $GFCKHI$ , которыя мы получимъ, отнявъ отъ цѣлой пирамиды обѣ вышепоименованныя маленькія пирамиды, равны между собою.

Такъ какъ  $BF=FC$ , то  $EBFG=2\triangle GFC$  (кн. 1, пред. 41), а потому сказанныя призмы имѣютъ одинаковыя высоты, такъ какъ въ первой площади основанія  $EBGF$  противолѣжитъ прямая  $HI$ , а во второй площади основанія  $GFC$  противолѣжитъ площадь  $IKH$ . Слѣдовательно эти призмы равны (кн. 11, пред. 40).

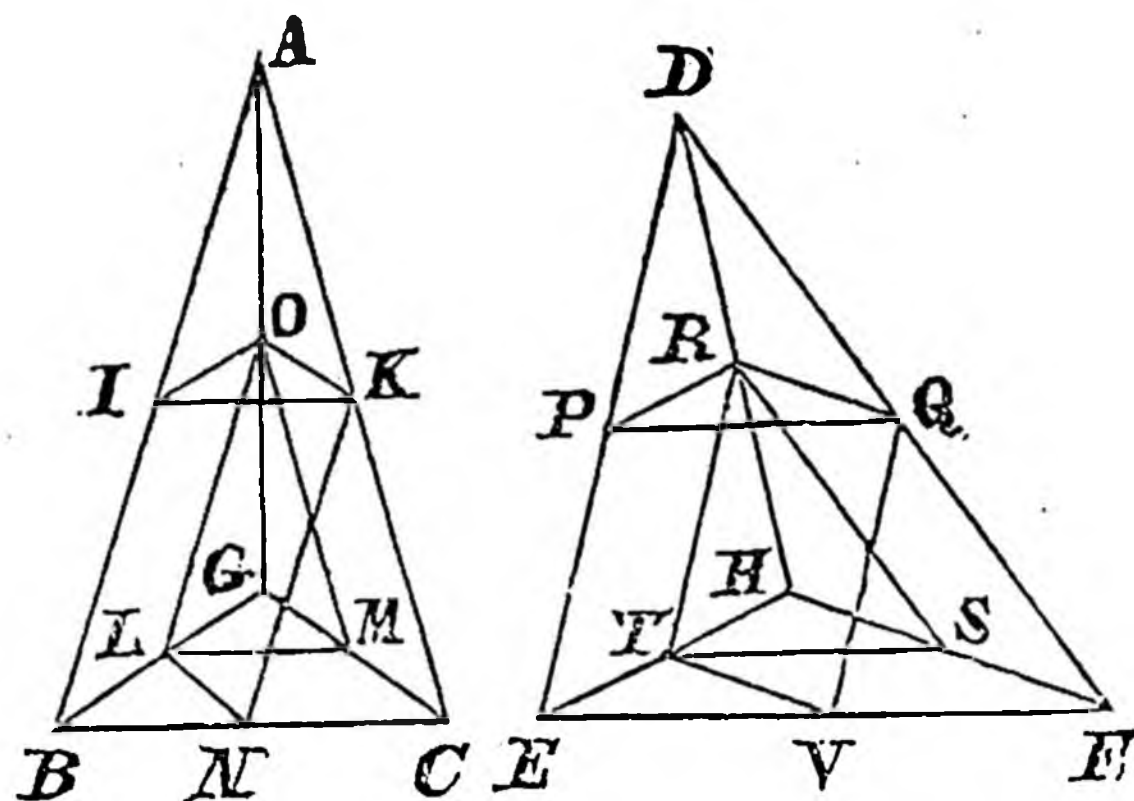


4. Что объ призм  $EBFGHI$  и  $GFCKHI$  вмѣстѣ взятыя больше половины цѣлой пирамиды  $ABCD$ .

Проведя  $EF$ ,  $EI$  образуемъ пирамиду  $EBFI$  съ основаніемъ  $EBF$  и вершиной  $I$ , очевидно, что призма  $EBFGHI >$  пирамиды  $EBFI$ . Но пирамиды  $EBFI$  и  $AEGH$ , какъ составленныя одинаковымъ числомъ равныхъ и подобныхъ плоскостей, равны и подобны между собою. Слѣдовательно призма  $EBFGHI >$  пирамид.  $AEGH$ . Но мы имѣли, что призма  $EBFGHI =$  призмѣ  $FGCKHI$ , и пир.  $AEGH =$  пир.  $HIKD$ . Слѣдовательно призма  $FGCKHI >$  пир.  $HIKD$ . А потому призма  $EBFGHI +$  призма  $GFCKHI >$  пир.  $AEGH +$  пир.  $HIKD$ . Изъ этого слѣдуетъ, что цѣлая пирамида  $ABCD$  раздѣлена на двѣ неравныя части, изъ которыхъ большая заключаетъ объ призмъ, а меньшая—объ пирамиды. Слѣдовательно объ призмъ, вмѣстѣ взятыя, меньше половины цѣлой пирамиды.

*Предложеніе 4.* Если разложимъ двѣ треугольныя пирамиды  $ABCG$  и  $DEFH$ , одинаковой высоты, на двѣ равныя, другъ другу и цѣлой подобныя пирамиды, и на двѣ равныя призмы, и если разложимъ полученныя пирамиды снова подобнымъ же образомъ, то продолжая подобное разложеніе далѣе, мы получимъ, что всѣ призмы одной изъ пирамидъ относятся ко всѣмъ соотвѣтственнымъ призмамъ другой пирамиды, какъ площадь основанія  $ABC$ , одной изъ нихъ относится къ площади основанія  $DEF$  другой (фиг. 493).

Фиг. 493.



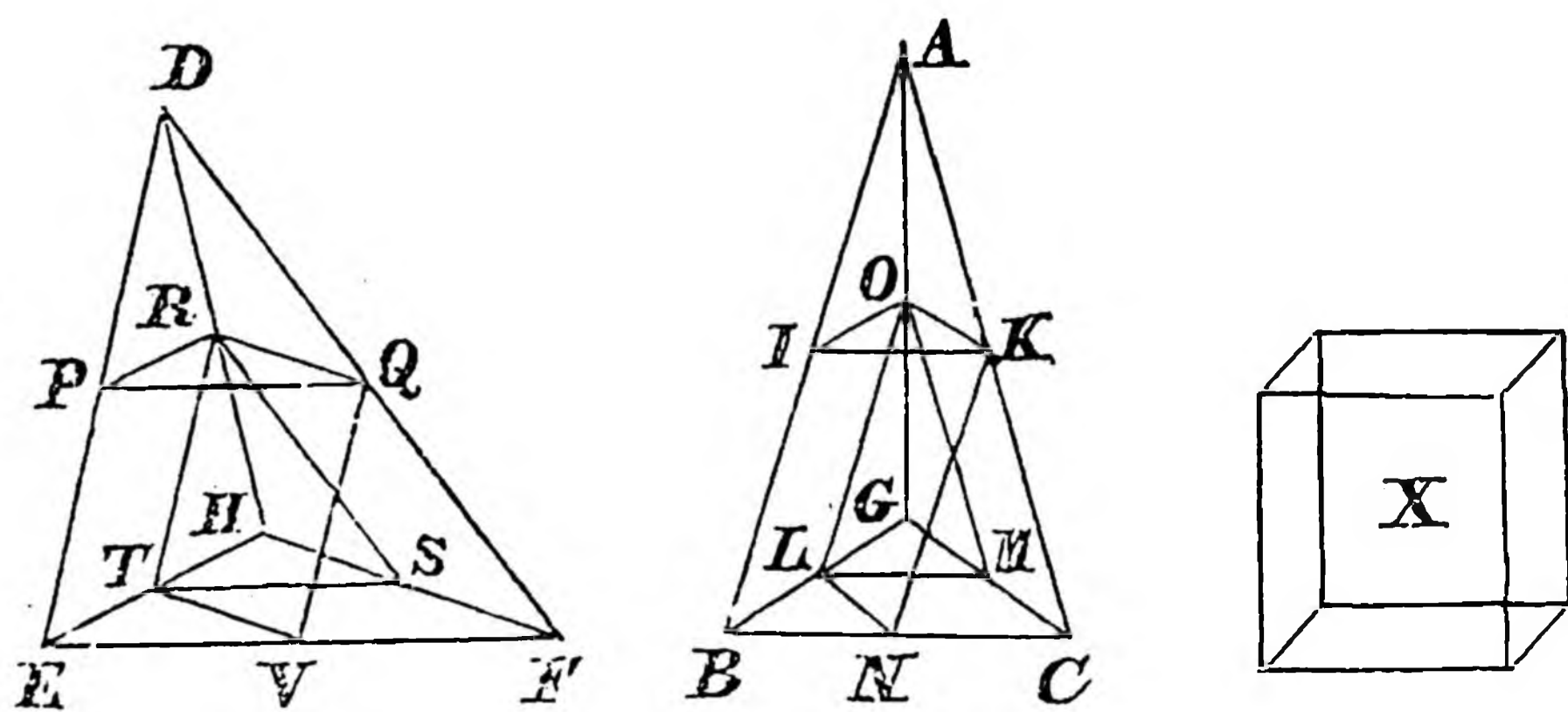
*Доказат.* Такъ какъ объ пирамиды  $ABCG$  и  $DEFH$  одинаковой высоты, то очевидно, перпендикуляры, опущенные изъ точекъ  $G$ ,  $H$  на плоскости  $ABC$  и  $DEF$ , равны. Но, перпендикуляръ, опущенный изъ точки  $G$  и прямая  $GC$  параллельными плоскостями  $ABC$  и  $OLM$ , разсѣкаются на пропорціональныя части (кн. 11, пред. 17); изъ этого слѣдуетъ, что вышеупомянутый перпендикуляръ опущенный изъ точки  $G$ , плоскостью  $OLM$  дѣлится пополамъ, такъ какъ  $GC$  плоскостью  $OLM$  въ точкѣ  $M$  дѣлится пополамъ. По той же причинѣ перпендикуляръ, опущенный изъ точки  $H$  на плоскость  $DEF$  дѣлится пополамъ плоскостью  $RTS$ . Но вышеупомянутые перпендикуляры равны, а потому равны и половины ихъ. Слѣдова-

тельно призмы  $KNCMLO$  и  $QVFSTR$  имѣютъ одинаковыя высоты, а потому онѣ относятся между собою какъ площади основаній  $KNC$  и  $QVF$  (кн. 11, пред. 28 и 32). Но призмы, въ каждой изъ пирамидъ  $ABCG$  и  $DEFH$ , равны между собою, а потому: призма  $IKNBLO$  : призмѣ  $KNCMLO$  = призма  $EPQVTR$  : призмѣ  $QVFSTR$ ; или призма  $IKNBLO$  + призма  $KNCMLO$  : призмѣ  $EPQVTR$  + призма  $QVFSTR$  = призма  $KNCMLO$  : призмѣ  $QVFSTR$  (кн. 5, пред. 18, 16). Слѣдовательно:  $\triangle KNC$  :  $\triangle QVF$  = призма  $EPQVTR$  : призмѣ  $QVFSTR$ .

Такъ какъ  $BN=NC$  и  $AK=KC$ , то  $NK$  параллельна  $AB$  (кн. 6, пред. 2); а потому  $\triangle ABC \sim \triangle KNC$  (кн. 6, пред. 4). По той же причинѣ  $\triangle DEF \sim \triangle QVF$ . Но  $BC=2CN$  и  $EF=2FV$ , а потому  $BC:CN=EF:FV$ . Слѣдовательно  $\triangle ABC : \triangle KNC = \triangle DEF : \triangle QVF$  (кн. 6, пред. 22), или же  $\triangle ABC : \triangle DEF = \triangle KNC : \triangle QVF$  = призма  $IKNBLO$  + призма  $KNCMLO$  : призмѣ  $EPQVTR$  + призма  $QVFSTR$ , на основаніи выше доказаннаго. Разлагая подобнымъ же образомъ полученныя маленькія пирамиды  $OLMG$  и  $BTSH$ , будемъ имѣть какъ выше, что площади основаній  $OLM$ ,  $RST$  относятся между собою какъ призмы въ обѣихъ вышесказанныхъ пирамидахъ. Итакъ  $\triangle OLM : \triangle RST = \triangle ABC : \triangle DEF$ , а потому  $\triangle ABC : \triangle DEF = 2$  приз. въ  $ABCG$  : 2 приз. въ  $DEFH = 2$  приз. въ  $OLMG$  : 2 приз. въ  $RTSH$ , слѣдовательно и какъ  $\triangle ABC : \triangle DEF = 4$  приз. въ  $ABCG$  : 4 приз. въ  $DEFH$ . Точно такимъ же образомъ доказывается и для призмъ  $AIKO$  и  $DPQR$ , и вообще для всѣхъ слѣдующихъ дѣленій одного и того же порядка.

**Предложеніе 5.** Треугольныя пирамиды  $ABCG$  и  $DEFH$ , одинаковой высоты, относятся между собою какъ площади основаній  $ABC$  и  $DEF$  (фиг. 494).

Фиг. 494.



**Доказат.** Если бы не было  $\triangle ABC : \triangle DEF$  = пир.  $ABCG$  : пир.  $DEFH$ , то мы имѣли бы  $\triangle ABC : \triangle DEF$  = пир.  $ABCG$  :  $X$ , гдѣ тѣло  $X$  больше или меньше пир.  $DEFH$ .

**Первый случай.** Пусть тѣло  $X$  < пир.  $DEFH$ , и пусть  $\triangle ABC : \triangle DEF$  = пир.  $ABCG$  :  $X$ .

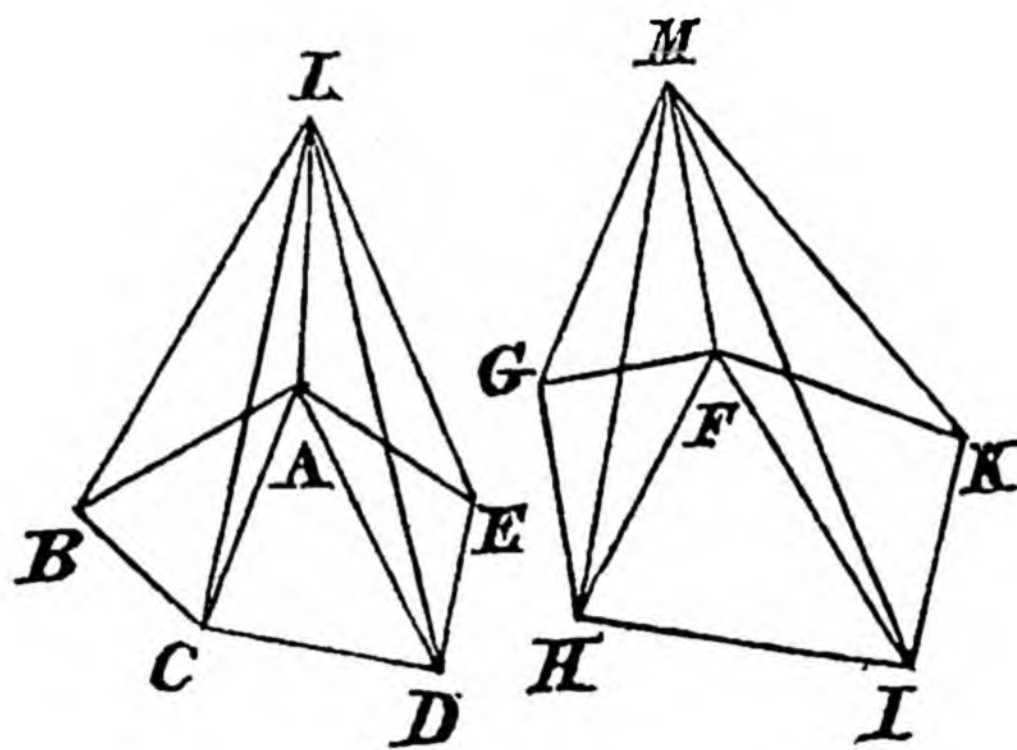
Разложимъ пир.  $DEFH$  на двѣ меньшія равныя, подобныя между собою и подобныя цѣлой и на двѣ равныя призмы (кн. 12, пред. 3), такъ что обѣ призмы вмѣстѣ взятыя меньше половины цѣлой пирамиды  $DEFH$ . Эти меньшія пирамиды разложимъ подобнымъ же образомъ, и будемъ продолжать такое разложеніе, до тѣхъ поръ пока мы дойдемъ до такихъ пирамидъ, которыя, вмѣстѣ взятыя, меньше чѣмъ избытокъ пир.  $DEFH$  надъ тѣломъ  $X$  (кн. 10, пред. 1). Пусть эти пирамиды будутъ  $DPQR$  и  $RTSH$ , то остающіяся въ пир.  $DEFH$  призмы больше тѣла  $X$ .

Пусть другая пир.  $ABCG$  разложена подобнымъ же образомъ на то же число пирамидъ, то  $\triangle ABC : \triangle DEF = \text{приз. въ } ABCG : \text{призмѣ въ } DEFH$  (кн. 12, пред. 4). Но мы положили, что  $\triangle ABC : \triangle DEF = \text{пир. } ABCG : X$ , слѣдовательно пир.  $ABCG : X = \text{призм. въ } ABCG : \text{призм. въ } DEFH$ . Но пир.  $ABCG > \text{приз. въ } ABCG$ , слѣдовательно  $X > \text{приз. въ } DEFH$  (кн. 5, пред. 14), что противорѣчитъ предъидущему положенію, приз. въ  $DEFH > X$ . А потому не имѣетъ мѣста пропорція  $\triangle ABC : \triangle DEF = \text{пир. } ABCG : X$ , когда  $X < \text{пир. } DEFH$ . По той же причинѣ не можетъ быть  $\triangle DEF : \triangle ABC = \text{пир. } DEFH : Z$ , при  $Z < \text{пир. } ABCG$ .

*Второй случай.* Пусть  $X > \text{пир. } DEFH$  и  $\triangle ABC : \triangle DEF = \text{пир. } ABCG : X$ , а потому и  $\triangle DEF : \triangle ABC = X : \text{пир. } ABCG$ . Пусть  $X : \text{пир. } ABCG = \text{пир. } DEFH : Z$ , слѣдовательно и  $X : \text{пир. } DEFH = \text{пир. } ABCG : Z$ , а потому  $Z < \text{пир. } ABCG$  (кн. 5, пред. 14). Но мы положили, что  $\triangle DEF : \triangle ABC = X : \text{пир. } ABCG$ , слѣдовательно  $\triangle DEF : \triangle ABC = \text{пир. } DEFH : Z$ , что на основаніи перваго случая невозможно. А потому невозможно, чтобы  $\triangle ABC : \triangle DEF = \text{пир. } ABCG : X$ , при  $X > \text{пир. } DEFH$ , а на основаніи перваго случая также невозможно, при  $X < \text{пир. } DEFH$ . Слѣдовательно  $\triangle ABC : \triangle DEF = \text{пир. } ABCG : \text{пир. } DEFH$ .

*Предложеніе 6.* Многоугольныя пирамиды  $ABCDEI$ ,  $FGHIK$ , равной высоты, относятся между собою какъ площади ихъ основаній  $ABCDE$  и  $FGHIK$  (фиг. 495).

Фиг. 495.



*Доказат.* Раздѣлимъ эти основанія на треугольники  $ABC$ ,  $ACD$ ,  $ADE$ ,  $FGH$ ,  $FHI$ ,  $FIK$ , и проведемъ чрезъ  $CAI$ ,  $DAI$ ,  $HFM$ ,



*IFM* плоскости, то многоугольные пирамиды разобьются на треугольные.

Такъ какъ  $\triangle ABC : \triangle ACD = \text{пир. } ABCL : \text{пир. } ACDL$  (кн. 12, пред. 5), то:

$$ABCD : \triangle ACD = \text{пир. } ABCDL : \text{пир. } ACDL \text{ (кн. 5, пред. 18).}$$

Но мы имѣемъ также:

$$\triangle ACD : \triangle ADE = \text{пир. } ACDL : \text{пир. } ADEL$$

Откуда сравнивая послѣднія двѣ пропорціи, получимъ:

$$ABCD : \triangle ADE = \text{пир. } ABCDL : \text{пир. } ADEL \text{ (кн. 5, пред. 22),}$$

а потому необходимо:

$$ABCDE : \triangle ADE = \text{пир. } ABCDEL : \text{пир. } ADEL$$

По той же причинѣ:

$$FGHIK : \triangle FIK = \text{пир. } FGHIKM : \text{пир. } FIKM$$

а потому также:

$$\triangle FIK : FGHIK = \text{пир. } FIKM : \text{пир. } FGHIKM$$

Такъ какъ:

$$\triangle ADE : \triangle FIK = \text{пир. } ADEL : \text{пир. } FIKM$$

а на основаніи предъидущаго:

$$ABCDE : \triangle ADE = \text{пир. } ABCDEL : \text{пир. } ADEL.$$

Откуда сравнивая эти пропорціи, получимъ:

$$ABCDE : \triangle FIK = \text{пир. } ABCDEL : \text{пир. } FIKM$$

но по предъидущему:

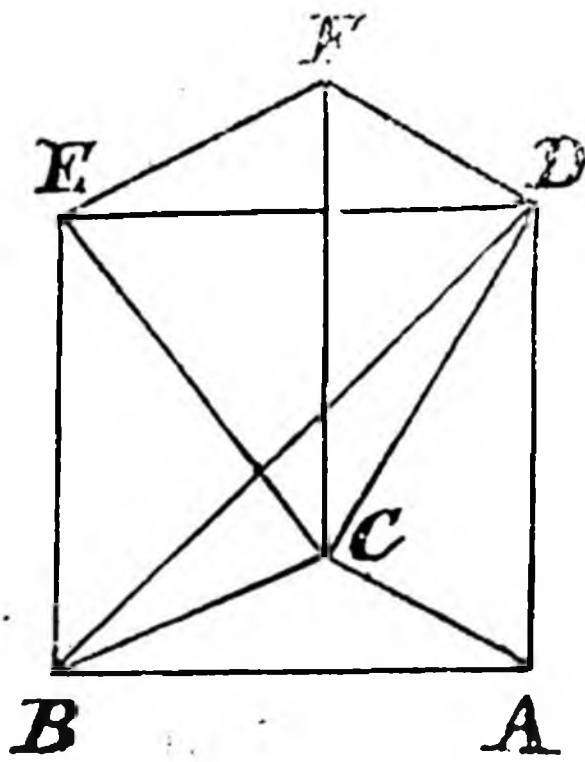
$$\triangle FIK : FGHIK = \text{пир. } FIKM : \text{пир. } FGHIKM$$

Слѣдовательно, получимъ:

$$ABCDE : FGHIK = \text{пир. } ABCDEL : \text{пир. } FGHIKM$$

**Предложеніе 7.** Всякая трехсторонняя призма  $ABCDEF$ , можетъ быть разложена на три равныя треугольные пирамиды (фиг. 496).

Фиг. 496.



**Доказат.** Проведемъ прямыя  $BD$ ,  $EC$ ,  $CD$ .



Такъ какъ  $ABED$  есть параллелограмъ (кн. 11, опред. 13), то  $\triangle ABD = \triangle EDB$  (кн. 1, пред. 34), слѣдовательно пирамиды  $ABDC$  и  $EDBC$  имѣя вершины въ точкѣ  $C$  равны (кн. 12, пред. 5). Но пир.  $EDBC$  и пир.  $EBDC$  суть одна и таже пирамида, слѣдовательно пир.  $ABDC = \text{пир. } EBDC$ .

Далѣе, такъ какъ  $FCBE$  параллелограмъ, то  $\triangle EBC = \triangle ECF$  (кн. 1, пред. 34), слѣдовательно пирамиды  $EBDC$  и  $ECFD$  имѣя вершины въ точкѣ  $D$  равны (кн. 12, пред. 5). Но мы имѣли пир.  $EBDC = \text{пир. } ABDC$ . слѣдовательно пир.  $ECFD = \text{пир. } ABDC$ . Изъ этого слѣдуетъ, что призма  $ABCDEF$  разбита на три равныя треугольныя пирамиды  $ABDC$ ,  $BECD$ ,  $ECFD$ .

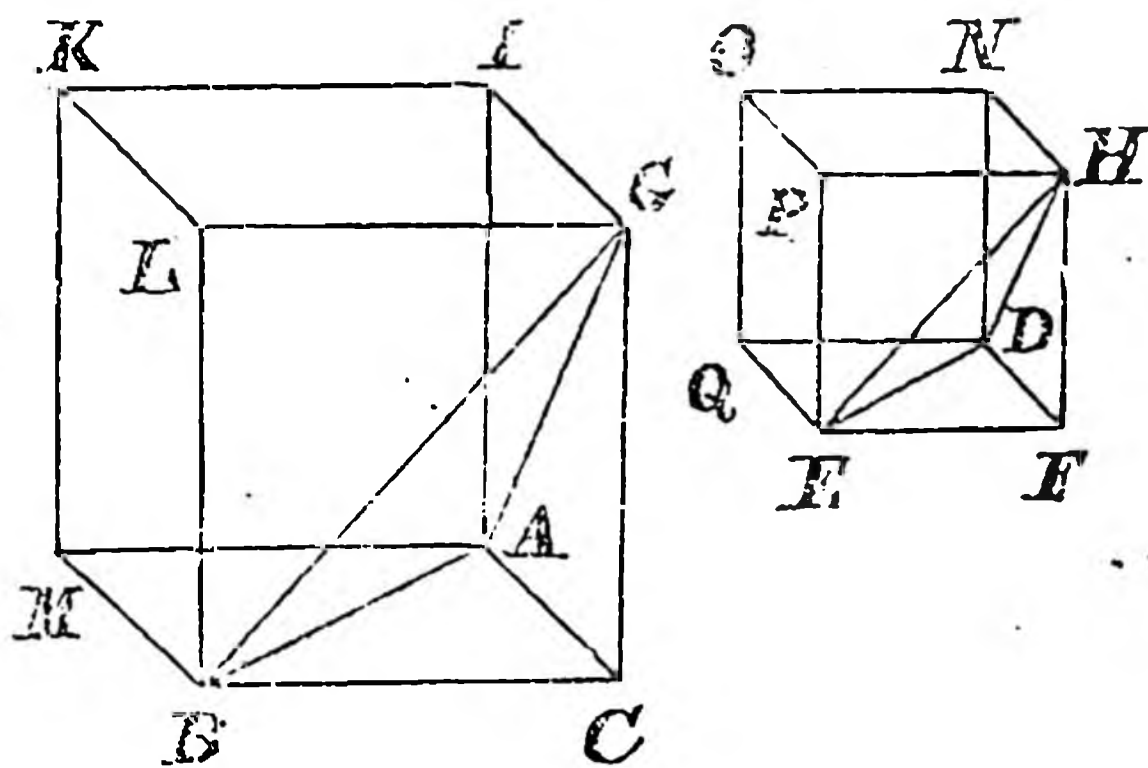
*Замѣчаніе.* Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что всякая пирамида есть треть призмы, имѣющей съ ней одно и то же основаніе и равныя высоты.

Въ самомъ дѣлѣ пир.  $ABDC$  съ пир.  $CABD$  равны; но пирам.  $ABDC = \frac{1}{3}$  приз.  $ABCDFE$ , слѣдовательно также пир.  $CABD = \frac{1}{3}$  приз.  $ABCDEF$ .

Если призма многосторонняя, то она можетъ быть разбита на трехстороннія.

*Предложеніе 8.* Подобныя треугольныя пирамиды  $ABCG$ ,  $DEFH$  относятся между собою какъ тройное (кубы) отношеніе соотвѣствующихъ сторонъ  $BC$  и  $EF$  (фиг. 497).

Фиг. 497.

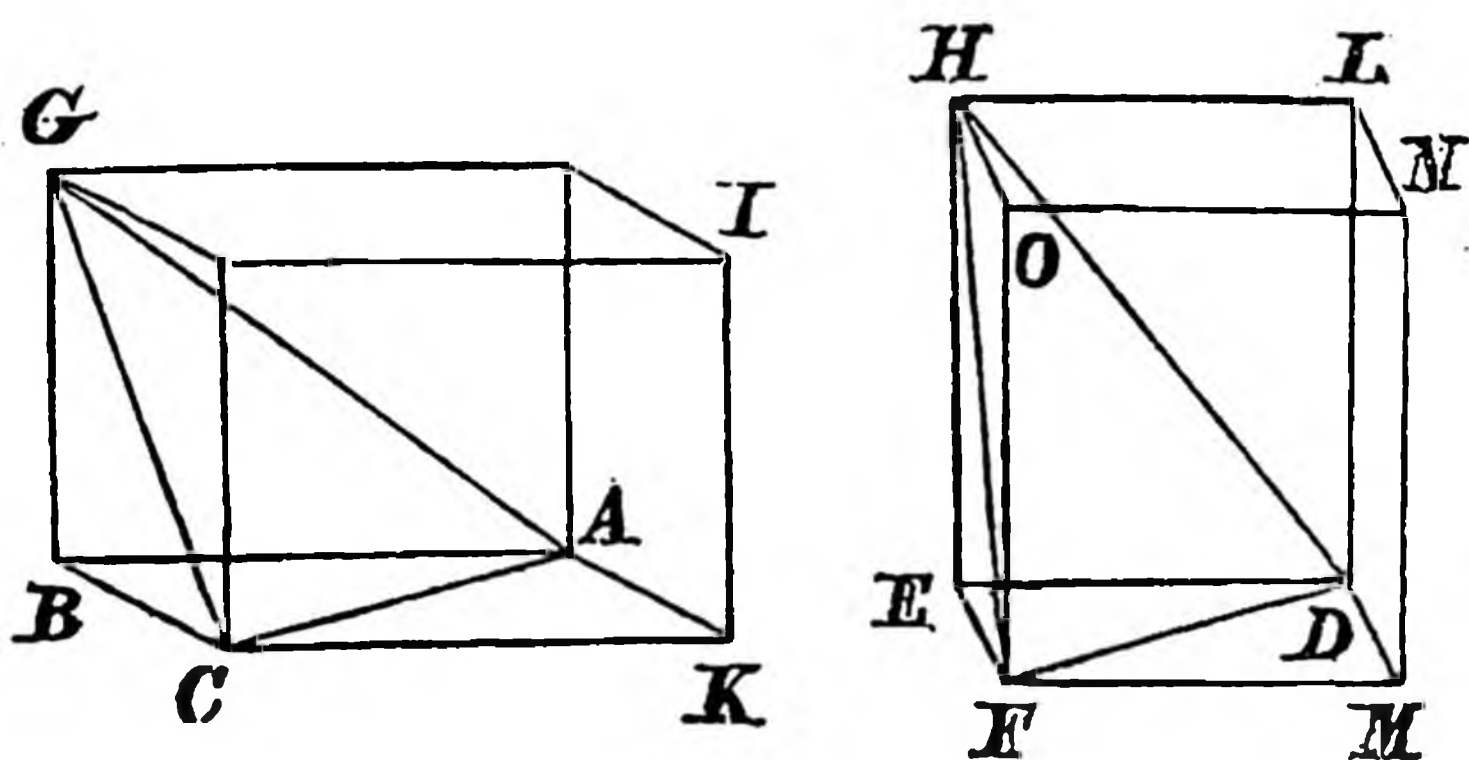


*Доказат.* Построимъ параллелепипеды  $BI$ ,  $EN$ . Такъ какъ пир.  $ABCG \sim \text{пир. } DEFH$ , то  $\angle BCA = \angle EFD$ ,  $\angle ACG = \angle DFH$ ,  $\angle BCG = \angle EFH$ , и  $BC:EF = AC:DF = GC:HF$  (кн. 11, опред. 9), слѣдовательно  $CM \sim FQ$ ,  $CI \sim FN$ ,  $CL \sim FP$  (кн. 6, опред. 1). Но въ обоихъ параллелепипедахъ стороны, лежащія противъ трехъ вышеупомянутыхъ плоскостей, равны и подобны (кн. 11, пред. 24). А потому  $BI \sim EN$  (кн. 11, опред. 9), слѣдовательно  $BI:EN = (BC:EF)^3$  (кн. 11, пред. 33). Но призма есть половина параллелепипеда, а пирамида треть призмы, слѣдовательно пирамида есть шестая часть параллелепипеда, а потому  $BI:EN = \text{пир. } ABCG : \text{пир. } DEFH$  (кн. 5, пред. 15). слѣдовательно также пир.  $ABCG : \text{пир. } DEFH = (BC:EF)^3$ .

*Замѣчаніе.* Изъ этого предложенія также слѣдуетъ, что многоугольныя подобныя пирамиды относятся между собою какъ тройное отношеніе соотвѣствующихъ сторонъ. Разложивъ подобныя многоугольныя площади основаній на одинаковое число подобныхъ треугольниковъ (кн. 6, пред. 20), т. е. разложивъ многоугольныя пирамиды на треугольныя, то одна изъ треугольныхъ пирамидъ данной многоугольной относится къ треугольной пирамидѣ другой многоугольной, какъ всѣ треугольныя пирамиды одной ко всѣмъ треугольнымъ пирамидамъ другой, т. е. какъ одна многоугольная пирамида къ другой многоугольной. Но такъ какъ треугольныя пирамиды относятся между собою какъ тройное отношеніе соотвѣствующихъ сторонъ, то въ такомъ же отношеніи находятся и многоугольныя пирамиды.

*Предложеніе 9.* Въ равныхъ треугольныхъ пирамидахъ  $ABCG$ ,  $DEFH$ , площади основаній  $ABC$ ,  $DEF$  находятся въ обратномъ отношеніи высотъ. Если же площади основаній  $ABC$ ,  $DEF$  находятся въ обратномъ отношеніи высотъ, то пирамиды  $ABCG$ ,  $DEFH$ , равны между собою (фиг. 498).

Фиг. 498.



*Доказат.* Построимъ параллелепипеды  $BI$ ,  $EN$ .

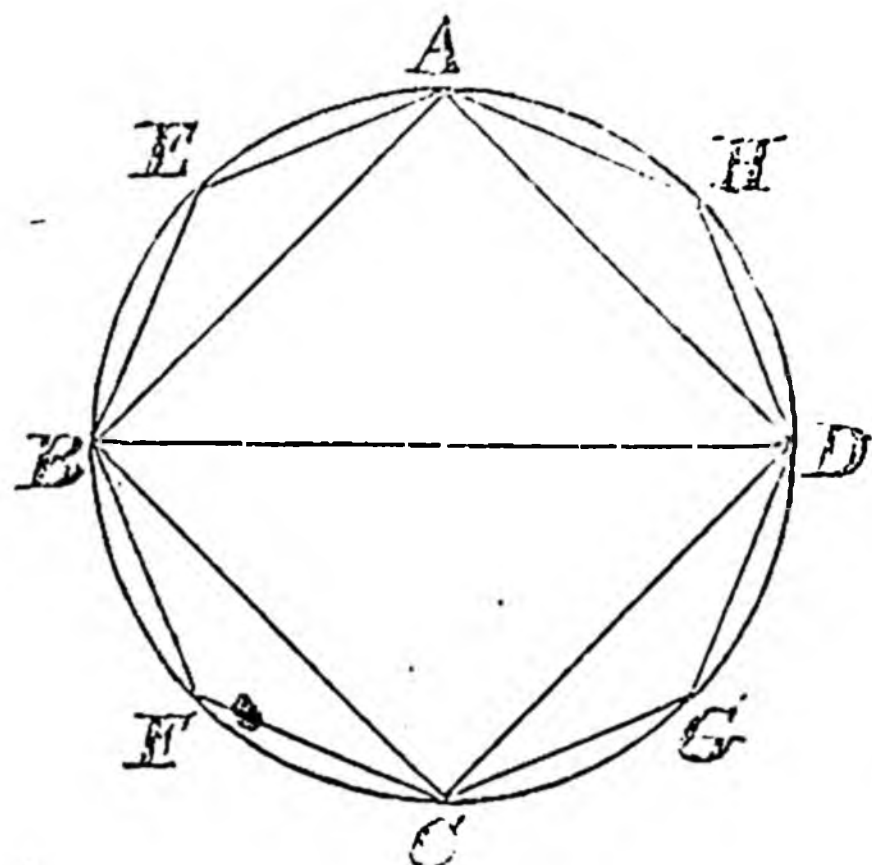
1. Пусть пир.  $ABCG$  = пир.  $DEFH$ , то, такъ какъ  $BI = 6$  пир.  $ABCG$ , и  $EN = 6$  пир.  $DEFH$ ,  $BI = EN$ , слѣдовательно (кн. 11, пред. 34)  $BK : EM =$  высота въ  $EN :$  высотѣ въ  $BI =$  высота пир.  $DEFH :$  высотѣ пир.  $ABCG$ . Но  $BK : EM = \triangle ABC : \triangle DEF$ , слѣдовательно также  $\triangle ABC : \triangle DEF =$  высота пир.  $DEFH :$  высотѣ пир.  $ABCG$ .

2. Пусть  $\triangle ABC : \triangle DEF =$  высота пир.  $DEFH :$  высотѣ пир.  $ABCG$ . Такъ какъ  $\triangle ABC : \triangle DEF = BK : EM$ , то  $BK : EM =$  высота пир.  $DEFH :$  высотѣ пир.  $ABCG$ , или  $BK : EM =$  высота въ  $EN :$  высотѣ въ  $BI$ , слѣдовательно  $BI = EN$  (кн. 11, пред. 34). Но  $BI = 6$  пир.  $ABCG$  и  $EN = 6$  пир.  $DEFH$ , слѣдовательно пир.  $ABCG =$  пир.  $DEFH$ .

*Предложеніе 10.* Всякій конусъ есть треть цилиндра, имѣющаго съ нимъ равную высоту и общее основаніе  $ABCD$  (фиг. 499).

*Доказат.* Если бы цилиндръ не былъ равенъ утроенному конусу, то цилиндръ или больше, или меньше трижды взятого конуса.

Фиг. 499.



*Первый случай.* Цилиндръ больше утроеннаго конуса.

Впишемъ квадратъ  $ABCD$  въ кругъ, служащій основаніемъ цилиндру и конусу, этотъ квадратъ будетъ больше половины круга. На квадратѣ построимъ призму, равной высоты съ цилиндромъ, эта призма будетъ больше половины цилиндра.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы опишемъ квадратъ около круга, то внутренній квадратъ равенъ половинѣ внѣшняго. Но призмы, построенныя на этихъ квадратахъ, имѣющія равныя высоты съ цилиндромъ, относятся между собою какъ площади основаній, слѣдовательно призма, построенная на внутреннемъ квадратѣ, равна половинѣ призмы построенной на внѣшнемъ квадратѣ. Но такъ какъ цилиндръ меньше призмы на внѣшнемъ, то призма построенная на внутреннемъ квадратѣ  $ABCD$  больше половины цилиндра.

Раздѣлимъ пополамъ дуги круга  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$ , въ точкахъ  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  и соединимъ точки дѣленія, то каждый изъ полученныхъ такимъ образомъ треугольниковъ, какъ напр.  $AEB$ , больше половины соотвѣтствующей ему половины сегмента (кн. 12, пред. 2). Построивъ на каждомъ изъ этихъ треугольниковъ призмы одинаковой высоты съ цилиндромъ, то каждая изъ нихъ больше половины соотвѣтствующаго отрѣзка цилиндра.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы чрезъ точки  $E$ ,... проведемъ прямыя параллельныя къ  $AB$ ,..., построимъ параллелограммы, и на этихъ послѣднихъ построимъ параллелепипеды, одинаковой высоты съ цилиндромъ, то каждая изъ призмъ, построенныхъ на треугольникахъ  $AEB$ ,... разна половинѣ такого параллелепипеда, а половина параллелепипеда больше отрѣзка цилиндра, слѣдовательно призма больше половины отрѣзка цилиндра.

Раздѣливъ снова пополамъ дуги круга  $AE$ ,... и продолжая далѣе построение подобное предыдущему, мы наконецъ дойдемъ до такихъ отрѣзковъ цилиндра, которые больше избытка цилиндра надъ утроеннымъ конусомъ (кн. 10, пред. 1). Пусть эти отрѣзки цилиндра будутъ надъ



$AE, EB, \dots$ , то остающаяся многосторонняя призма съ основаніемъ  $AEB, \dots$ , и равной высоты съ цилиндромъ, больше утроеннаго конуса. Но извѣстно также, что эта многосторонняя призма равна утроенной пирамидѣ, имѣющей съ конусомъ одно и тоже основаніе и одинаковую высоту (кн. 12, пред. 7, замѣч.). Слѣдовательно такая пирамида больше конуса съ основаніемъ  $ABCD$ . Но такъ какъ эта пирамида заключена въ конусѣ, то она меньше конуса. Это противорѣчитъ одно другому. Слѣдовательно цилиндръ не можетъ быть больше утроеннаго конуса.

*Второй случай.* Пусть цилиндръ меньше утроеннаго конуса, то обратно конусъ больше одной трети цилиндра.

Пусть снова въ кругъ вписанъ квадратъ  $ABCD$ , то этотъ послѣдній больше половины круга. Построимъ на квадратѣ пирамиду, одинаковой высоты съ конусомъ, то эта послѣдняя больше половины конуса.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ, какъ въ первомъ случаѣ, около круга описанъ квадратъ, то внутренній квадратъ равенъ половинѣ внѣшняго. Построимъ на обоихъ квадратахъ призмы, одинаковой высоты съ конусомъ, которыя будутъ относиться между собою какъ площади ихъ основаній (кн. 11, пред. 32), то внутренняя призма равна половинѣ внѣшней, а также третья часть первой равна половинѣ третьей части второй, т. е. пирамида построенная на внутреннемъ квадратѣ равна половинѣ пирамиды построенной на внѣшнемъ квадратѣ. Но послѣдняя, какъ заключающая конусъ, больше конуса. Слѣдовательно пирамида построенная на внутреннемъ квадратѣ  $ABCD$ , имѣющая одинаковую высоту съ конусомъ, больше половины конуса.

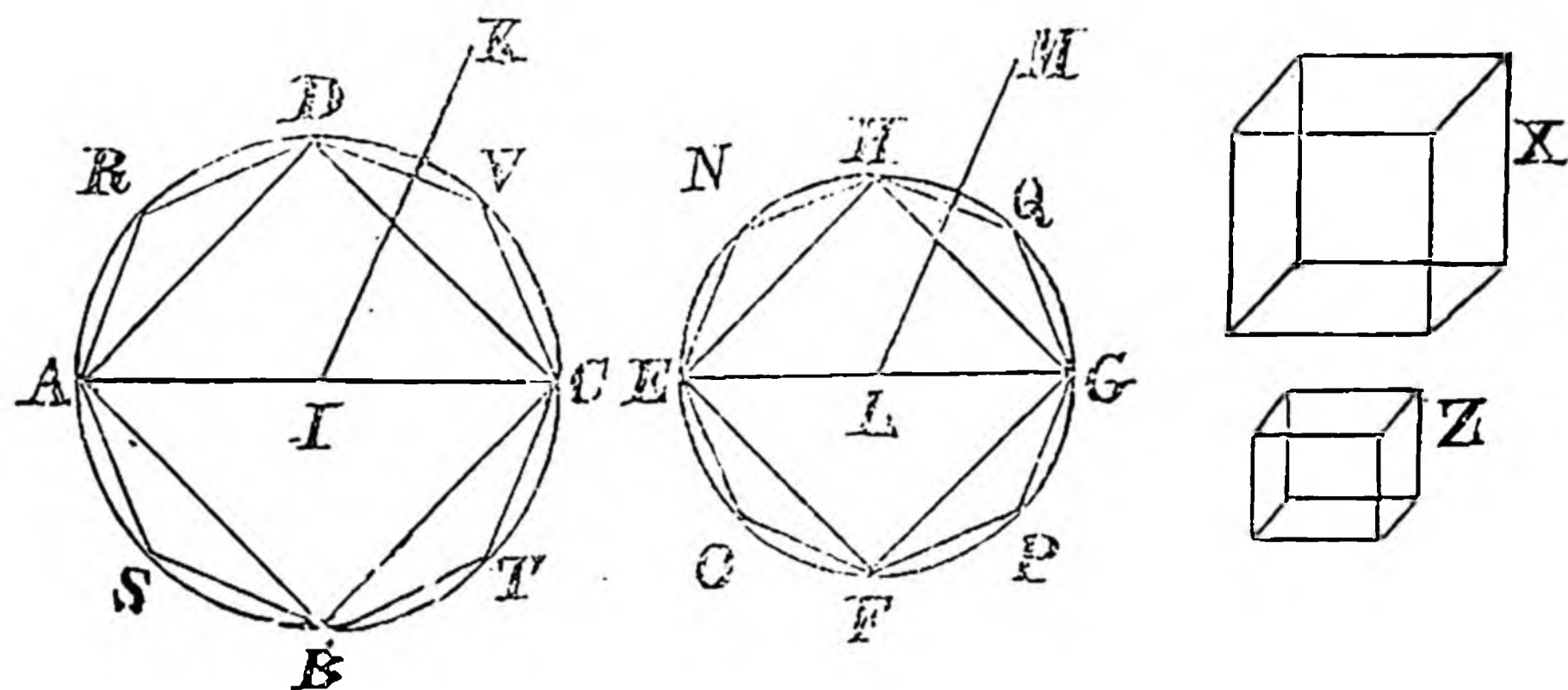
Раздѣлимъ снова пополамъ дуги круга  $AB, \dots$  и проведемъ  $AE, \dots$ , такъ что каждый изъ треугольниковъ, какъ напр.  $AEB$ , былъ бы больше половины соответствующаго отрезка круга; построимъ на каждомъ изъ этихъ треугольниковъ  $AEB, \dots$  пирамиды одинаковой высоты съ конусомъ, то каждая изъ нихъ больше соответствующаго ей отрезка конуса. Продолжая далѣе подобное дѣленіе пополамъ дугъ круга и подобное построеніе, мы наконецъ дойдемъ до такихъ отрезковъ конуса, которые меньше избытка конуса надъ третьей частью цилиндра (кн. 10, пред. 1). Пусть эти отрезки будутъ надъ  $AE, EB, \dots$ , то остающаяся пирамида на основаніи  $AEBF, \dots$ , одинаковой высоты съ конусомъ, больше третьей части цилиндра. Но эта пирамида есть третья часть призмы, одинаковой высоты и одинаковой площади основанія съ цилиндромъ (кн. 12, пред. 7, замѣч.). Слѣдовательно призма на основаніи  $AEBF, \dots$  больше цилиндра, на кругѣ  $ABCD$ , одинаковой съ нимъ высоты. Но она заключена въ цилиндрѣ, а потому она меньше его, что противорѣчитъ предъидущему. Слѣдовательно цилиндръ не можетъ быть меньше утроеннаго конуса; но по прежде дока-



занному опъ не можетъ быть и больше, а потому конусъ есть третья часть цилиндра.

*Предложеніе 11.* Конусы  $AK$ ,  $EM$ , и цилиндры одинаковой высоты  $IK$ ,  $LM$ , относятся между собою, какъ площади ихъ основаній  $ABCD$ ,  $EFGH$  (фиг. 500).

Фиг. 500.



*Доказат.* Если бы этого не было, то:

$$ABCD : EFGH = \text{кон. } AK : X$$

гдѣ тѣло  $X$  должно быть или меньше, или больше конуса  $EM$ .

*Первый случай.* Пусть тѣло  $X < \text{конуса } EM$ , такъ что конусъ  $EM = X + Z$ .

Впишемъ въ кругъ  $EFGH$  квадратъ  $EFGH$ , то этотъ послѣдній болѣе половины круга. На этомъ квадратѣ построимъ пирамиду  $FM$ , одинаковой высоты съ конусомъ  $EM$ , то она болѣе половины конуса, потому что она равна половине пирамиды, равной съ ней высоты, построенной на описанномъ квадратѣ (кн. 12, пред. 6), а конусъ меньше послѣдней.

Раздѣливъ пополамъ дуги круга  $EF$ ,  $FG$ ,.... и дѣлая такое же построение какъ для втораго случая предъидущаго предложенія, и продолжая такимъ образомъ далѣе, мы наконецъ дойдемъ до такихъ отрѣзковъ конуса, которые меньше  $Z$  (кн. 10, пред. 1). Пусть это будутъ отрѣзки надъ  $HN$ ,..., то остающаяся пирамида  $FM$  на основаніи  $HNE$ ,..., одинаковой высоты съ конусомъ  $EM$ , болѣе  $X$ .

Впишемъ въ кругъ  $ABCD$  многоугольникъ  $DRA$ ..., подобный и подобно расположенный многоугольнику  $HNE$ ..., и на немъ построимъ пирамиду  $BK$ , одинаковой высоты съ конусомъ  $AK$ .

Такъ какъ (кн. 12, пред. 1):

$$\square AC : \square EG = \text{много. } DRA... : \text{много. } HNE...$$

и (кн. 12, пред. 2):

$$\square AC : \square EG = \text{кр. } ABCD : \text{кр. } EFGH$$

то (кн. 5, пред. 11):

$$\text{кр. } ABCD : \text{кр. } EFGH = \text{мног. } DRA... : \text{мног. } HNE....$$

Но мы положили, что:

$$\text{кр. } ABCD : \text{кр. } EFGH = \text{кон. } AK : X$$

а потому и:

$$\text{мног. } DRA... : \text{мног. } HNE... = \text{кон. } AK : X.$$

Но (кн. 12, пред. 6):

$$\text{мног. } DRA... : \text{мног. } HNE... = \text{пир. } BK : \text{пир. } FM$$

Слѣдовательно:

$$\text{кон. } AK : X = \text{пир. } BK : \text{пир. } FM.$$

Но пирамида лежитъ внутри конуса, а потому конусъ  $AK > \text{пир. } BK$ . Изъ этого слѣдуетъ, что и  $X > \text{пир. } FM$  (кн. 5, пред. 14), что противорѣчитъ предъидущему, что  $\text{пир. } FM > X$ . Слѣдовательно не можетъ быть:

$$\text{кр. } ABCD : \text{кр. } EFGH = \text{кон. } AK : X$$

при  $X < \text{конуса } EM$ .

Такимъ же точно образомъ можно доказать, что не можетъ быть:

$$\text{кр. } EFGH : \text{кр. } ABCD = \text{кон. } EM : Y$$

при  $Y < \text{конуса } AK$ .

*Второй случай.* Пусть  $X > \text{конуса } EM$ , то изъ пропорціи:

$$\text{кр. } ABCD : \text{кр. } EFGH = \text{кон. } AK : X$$

будемъ имѣть обратно:

$$\text{кр. } EFGH : \text{кр. } ABCD = X : \text{кон. } AK.$$

Пусть будетъ:

$$X : \text{кон. } AK = \text{кон. } EM : Y$$

гдѣ  $Y < \text{конуса } AK$ , то:

$$\text{кр. } EFGH : \text{кр. } ABCD = \text{кон. } EM : Y$$

что, на основаніи перваго случая, невозможно. А потому не можетъ быть:

$$\text{кр. } ABCD : \text{кр. } EFGH = \text{кон. } AK : X$$

при  $X > \text{конуса } EM$ , и на основаніи перваго случая, также невозможно, при  $X < \text{конуса } EM$ . Слѣдовательно необходимо:

$$\text{кр. } ABCD : \text{кр. } EFGH = \text{кон. } AK : \text{кон. } EM.$$

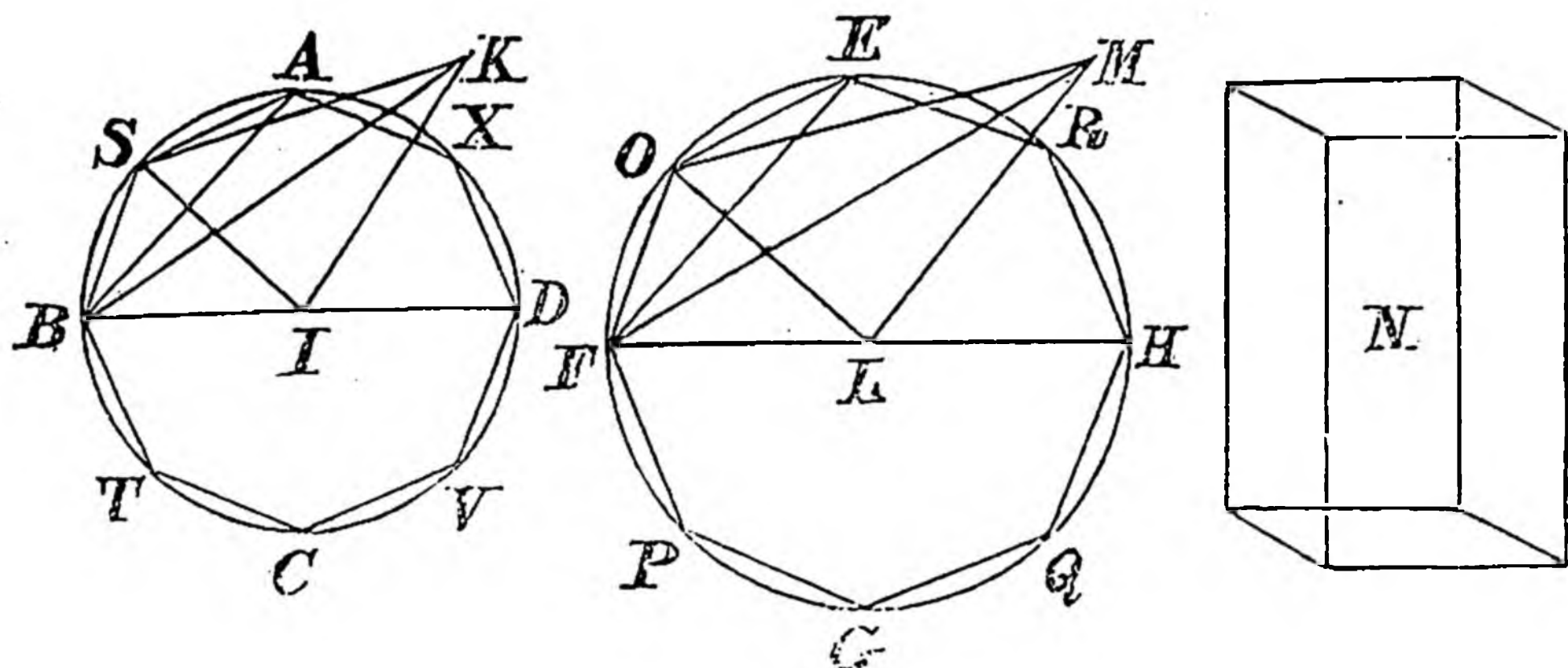
Такъ какъ цилиндры въ три раза больше конусовъ, одинаковой съ ними высоты и одинаковаго основанія (кн. 12, пред. 10), то они относятся между собою какъ конусы, слѣдовательно:

$$\text{кр. } ABCD : \text{кр. } EFGH = \text{цил. на } ABCD : \text{цил. на } EFGH.$$

*Предложеніе 12.* Подобные конусы  $BK$ ,  $FM$ , а также подобные ци-

линдры относятся между собою какъ утроенное (кубы) отношеніе діаметровъ  $BD, FH$  ихъ основаній (фиг. 501).

Фиг. 501.



*Доказат.* Если бы этого не было, то пусть:

$$(BD:EH)^3 = \text{кон. } BK:N$$

гдѣ тѣло  $N$ , или меньше, или больше конуса  $FM$ .

*Случай первый.* Пусть будетъ  $N < \text{конуса } FM$ .

Сдѣлаемъ тоже построеніе, какъ при началѣ перваго случая предъидущаго предложенія: то мы получимъ пирамиду  $GM$ , которой вершина будетъ  $M$ , а основаніе будетъ площадь многоугольника  $EOF\dots$ , пирамида эта больше тѣла  $N$ .

Впишемъ въ кругъ  $ABCD$  многоугольникъ  $ASB\dots$  подобный многоугольнику  $EOF\dots$ , и на этомъ многоугольникѣ построимъ пирамиду  $СК$ , коей вершина  $K$ . Пусть одна изъ боковыхъ поверхностей пирамиды  $СК$  будетъ  $\triangle KSB$ , а пирамиды  $GM$  треугольникъ  $MOF$ . Проведемъ  $IS, LO$ .

Такъ какъ конусъ  $BK \sim$  конусу  $FM$ , то  $BD:EH=IK:LM$  (кн. 11, опред. 24); но  $BD:EH=BI:FL$ , слѣдовательно  $BI:FL=IK:LM$ , или  $BI:IK=FL:LM$ . Но при точкахъ  $I$  и  $L$  углы прямые, т. е.  $\angle BIK = \angle FLM$ . слѣдовательно  $\triangle BIK \sim \triangle FLM$  (кн. 6, пред. 6).

Далѣе  $BI:IS=FL:LO$ , а на основаніи подобія многоугольниковъ,  $\angle BIS = \angle FLO$ , а потому  $\triangle BIS \sim \triangle FLO$  (кн. 6, пред. 6).

Мы имѣли что  $BI:IK=FL:LM$ , но  $BI=IS$  и  $FL=LO$ , а потому  $IS:IK=LO:LM$ . Но  $\angle SIK = \angle OLM = d$ . слѣдовательно  $\triangle KSI \sim \triangle MOL$  (кн. 6, пред. 6).

Такъ какъ  $\triangle BIK \sim \triangle FLM$ , слѣдовательно  $KB:BI=MF:FL$ ; и  $\triangle BIS \sim \triangle FLO$ , слѣдовательно  $BI:BS=FL:FO$ ; сравнивая эти пропорціи, получимъ:  $KB:BS=MF:FO$ , или  $SB:KB=OF:MF$ .

Такъ какъ  $\triangle KSI \sim \triangle MOL$ , то  $KS:SI=MO:OL$ , а  $\triangle BIS \sim \triangle FLO$ , слѣдовательно  $SI:IB=OL:OF$ ; сравнивая эти пропорціи, получимъ:  $KS:BS=MO:OF$ . Но мы имѣли прежде  $SB:KB=OF:MF$ . слѣдовательно сравнивая эти пропорціи  $KS:KB=MO:MF$ .

А потому стороны треугольниковъ  $KSB$ ,  $MOF$  пропорціональны. Слѣдовательно  $\triangle KSB \sim \triangle MOF$  (кн. 6, пред. 5); слѣдовательно пир.  $BISK \sim$  пир.  $FLOM$  (кн. 11, опред. 9); откуда (кн. 12, пред. 8):

$$\text{пир. } BISK : \text{пир. } FLOM = (BI : FL)^3 = (BD : FH)^3$$

Проведя изъ остальныхъ точекъ окружностей  $ABCD$ ,  $EFGH$ , къ центрамъ  $I$ ,  $L$ , прямыя линіи, и построивъ, на полученныхъ такимъ образомъ треугольникахъ пирамиды, коихъ вершины будутъ въ  $K$ ,  $M$ , то на основаніи предъидущаго слѣдуетъ, что отношеніе каждой соотвѣтствующей пары такихъ пирамидъ равно утроенному отношенію  $BD : FH$ , т. е. что отношенія всѣхъ такихъ паръ равны между собою. Слѣдовательно (кн. 5, пред. 12):

$$\begin{aligned} \text{пир. } BISK : \text{пир. } FLOM &= \text{всѣ пир. на } ABCD : \text{всѣмъ пир. на } EFGH = \\ &= \text{цѣлая пир. } CK : \text{цѣлой пир. } GM. \end{aligned}$$

Слѣдовательно:

$$(BD : FH)^3 = \text{пир. } CK : \text{пир. } GM$$

Но мы предположили:

$$(BD : FH)^3 = \text{кон. } BK : N.$$

Слѣдовательно:

$$\text{кон. } BK : N = \text{пир. } CK : \text{пир. } GM.$$

Но такъ какъ конусъ заключаетъ въ себѣ пирамиду, то конусъ  $BK >$  пир.  $CK$ . Слѣдовательно также  $N >$  пир.  $GM$  (кн. 5, пред. 14), что противорѣчитъ выше написанному, что пир.  $GM > N$ . А потому, не можетъ быть:

$$(BD : FH)^3 = \text{кон. } BK : N$$

при  $N <$  конуса  $FM$ . Подобнымъ же образомъ можно показать, что не можетъ быть:

$$(FH : BD)^3 = \text{кон. } FM : Z$$

при  $Z <$  конуса  $BK$ .

*Второй случай.* Пусть будетъ  $N >$  конуса  $FM$  и:

$$(BD : FH)^3 = \text{кон. } BK : N$$

слѣдовательно:

$$N : \text{конусу } BK = (FH : BD)^3.$$

Пусть:

$$N : \text{кон. } BK = \text{кон. } FM : Z$$

гдѣ слѣдовательно  $BK > Z$  (кн. 5, пред. 14). Слѣдовательно:

$$(FH : BD)^3 = \text{кон. } FM : Z$$

что на основаніи перваго случая невозможно. А потому не можетъ быть:

$$(BD : FH)^3 = \text{кон. } BK : N$$



при  $N > \text{конуса } FM$ ; на основаніи перваго случая также невозможно, при  $N < \text{конуса } FM$ . Слѣдовательно:

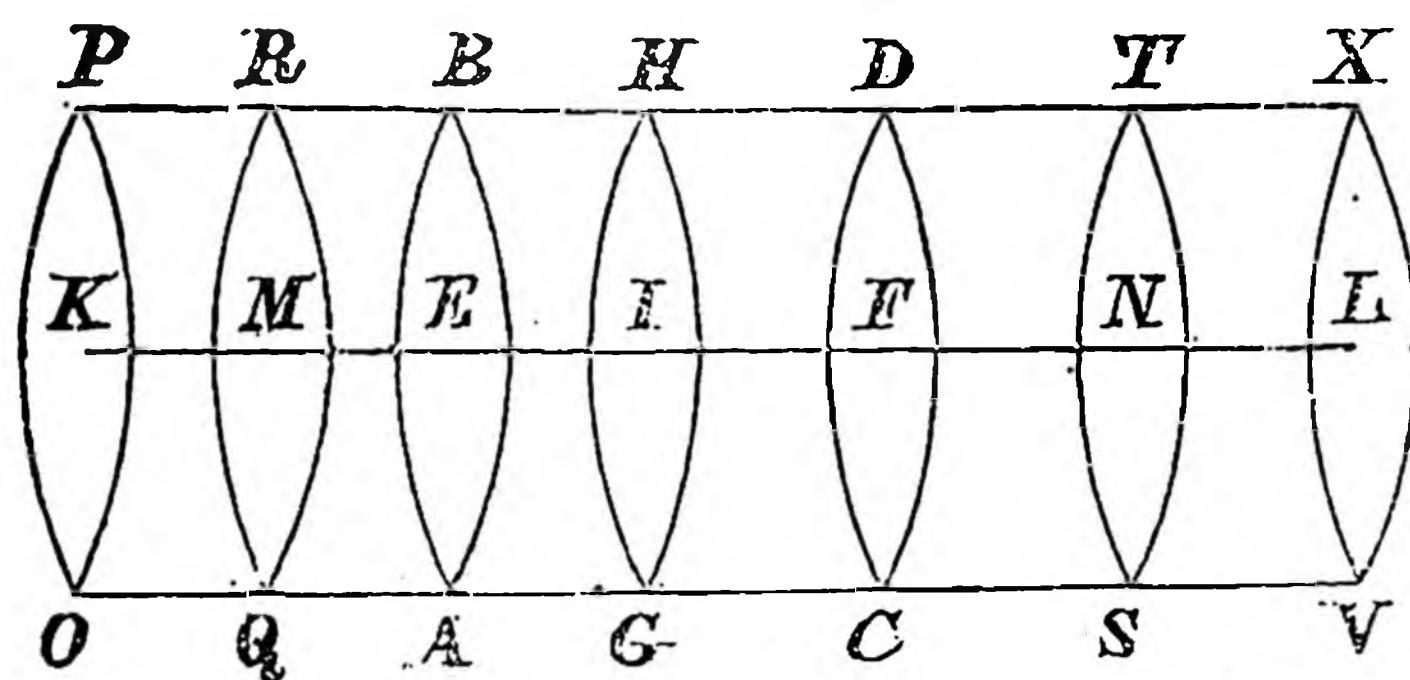
$$(BD : FH)^3 = \text{кон. } BK : \text{конусу } FM.$$

Такъ какъ цилиндры въ три раза больше конусовъ, имѣющихъ съ ними одну и ту же высоту и одно и тоже основаніе (кн. 12, пред. 10), слѣдовательно они относятся между собою какъ конусы, а потому также:

$$\text{цил. } BK : \text{цил. } FM = (BD : FH)^3.$$

*Предложеніе 13.* Если мы пересѣчемъ цилиндръ  $AD$ , плоскостью  $HG$ , параллельной противолѣжающимъ площадямъ основаній  $AB$ ,  $CD$ , то отсѣченные цилиндры  $BG$ ,  $GD$  относятся между собою какъ ихъ оси  $EI$  и  $IF$  (фиг. 502).

Фиг. 502.



*Доказат.* Продолжимъ ось  $EF$  цилиндра  $AD$  по обѣ стороны до  $K$ ,  $L$ ; на  $EK$  нанесемъ произвольное число частей  $EM$ ,  $MK$  равныхъ  $EI$ , а на  $FL$  произвольное число частей  $FN$ ,  $NL$ , равныхъ  $IF$ ; чрезъ точки  $M$ ,  $K$ ,  $N$ ,  $L$ , проведемъ плоскости равныя и параллельныя площадямъ основаній  $AB$ ,  $CD$  и построимъ цилиндры  $PQ$ ,  $QB$ ,  $DS$ ,  $SX$ .

Такъ какъ цилиндры  $PQ$ ,  $QB$ ,  $BG$  одинаковой высоты  $KM$ ,  $ME$ ,  $EI$ , относятся между собою какъ площади ихъ основаній (кн. 12, пред. 11), но такъ какъ эти послѣднія равны, то и сами цилиндры также равны, именно  $PQ = QB = BG$ . Слѣдовательно  $KI$  есть такой же кратности отъ  $EI$ , какой цил.  $PG$  отъ цил.  $BG$ . По той же причинѣ  $IL$  такой же кратности отъ  $IF$ , какой цил.  $GX$  отъ цил.  $GD$ . А потому когда  $KI \geq IL$ , то и  $PG \geq GX$ . Слѣдовательно  $EI : IF = BG : GD$  (кн. 5, опред. 5).

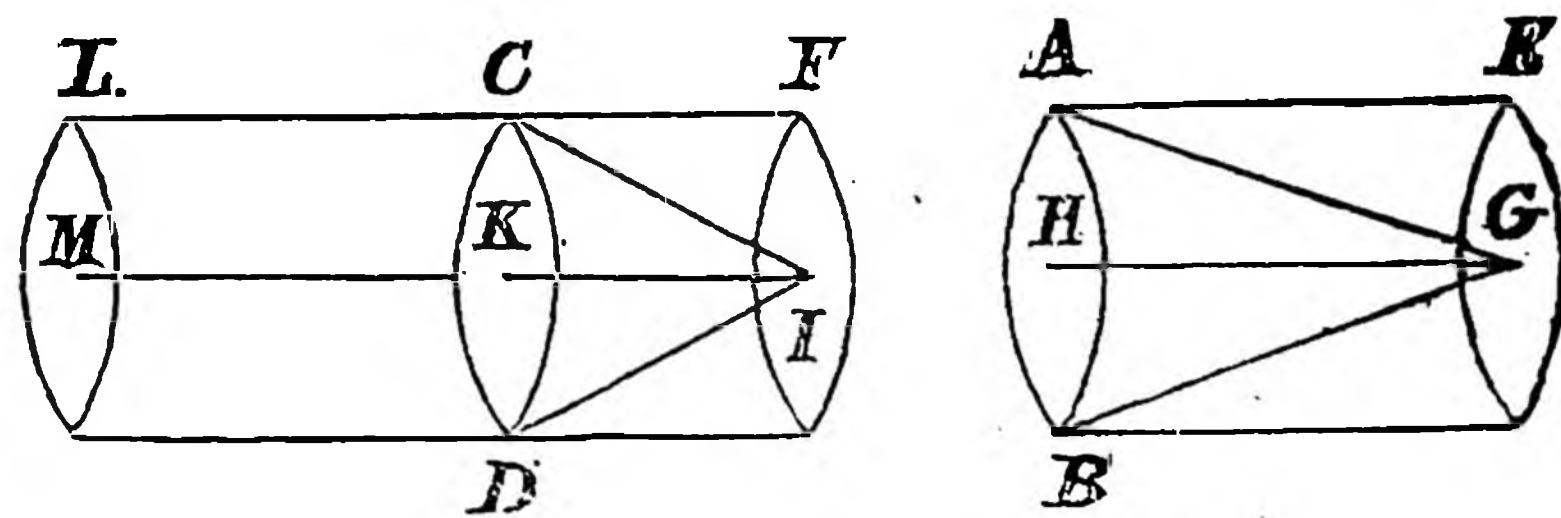
*Предложеніе 14.* Конусы  $ABG$ ,  $CDI$  и цилиндры  $BE$ ,  $DF$ , имѣющіе одинаковыя площади основаній  $AB$ ,  $CD$ , относятся между собою какъ ихъ высоты  $HG$ ,  $KI$  (фиг. 503).

*Доказат.* Продолжимъ  $IK$  до  $M$ , отложимъ  $KM = HG$  и вообразимъ себѣ около оси  $KM$  цилиндръ  $DL$ .

Такъ какъ цилиндры  $BE$ ,  $DL$ , одинаковой высоты  $HG$ ,  $KM$ , то они

относятся между собою какъ площади ихъ оснований (кн. 12, пред. 11), но эти послѣднія равны, а потому и цилиндры равны, именно  $BE=DL$ . Такъ

Фиг. 503.



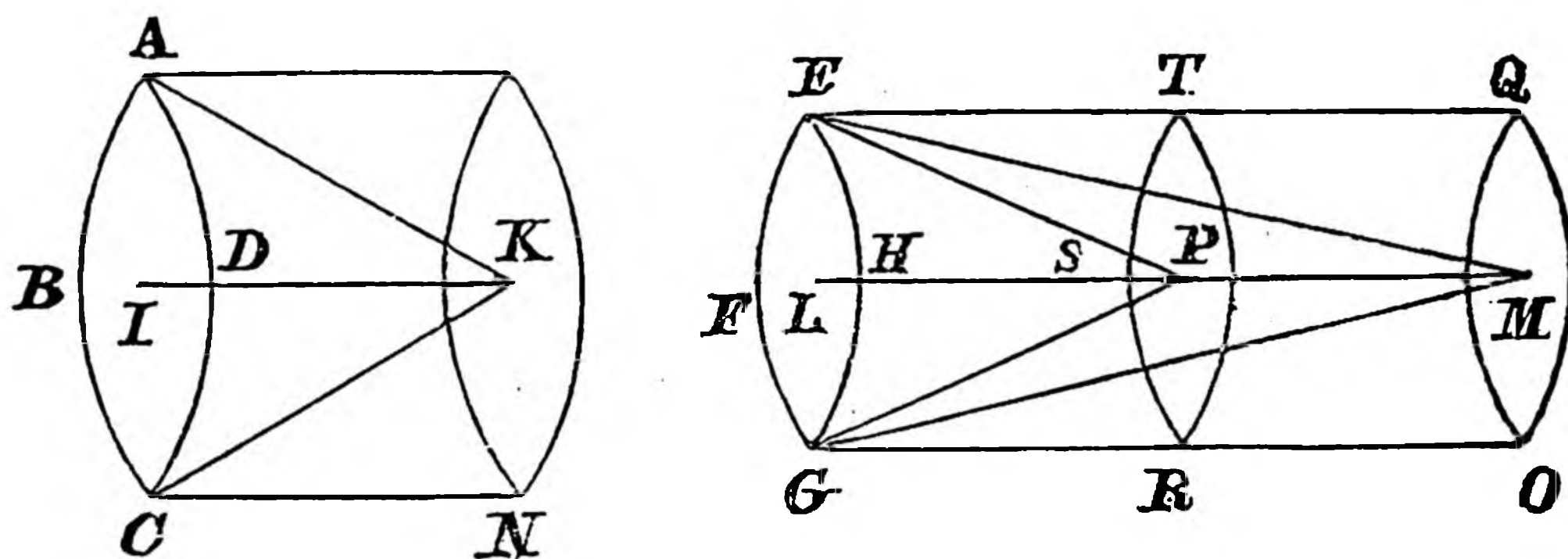
какъ цилиндръ  $FM$  разсѣченъ плоскостью  $CD$ , параллельной площадямъ оснований, то  $DL:DF=MK:KI$  (кн. 12, пред. 13). Но  $DL=BE$ , и  $MK=HG$ . Слѣдовательно  $BE:DF=HG:KI$ .

Такъ какъ цилиндры  $BE$ ,  $DF$  относятся между собою какъ конусы  $ABG$ ,  $CDI$  (кн. 12, пред. 10), то:

$$\text{кон. } ABG : \text{кон. } CDI = HG : KI.$$

*Предложеніе 15.* Если конусы  $ACK$ ,  $EGM$ , или цилиндры  $AN$ ,  $EO$  равны между собою, то площади оснований  $AC$ ,  $EG$  обратно пропорціональны высотамъ  $IK$ ,  $LM$ . И если площади оснований обратно пропорціональны высотамъ, то конусы, равно какъ и цилиндры равны между собою (фиг. 504).

Фиг. 504.



*Доказат.* 1. Пусть цил.  $AN=$ цил.  $EO$ , то высоты  $IK$ ,  $LM$  или равны, или же неравны.

а) Если  $IK=LM$ , то  $AN:EO=AC:EG$  (кн. 12, пред. 11); но  $AN=EO$ , слѣдовательно  $AC=EG$ ; а потому  $AC:EG=LM:IK$ .

б) Если  $LM>IK$ , пусть будетъ  $LP=IK$ . Проведемъ чрезъ  $P$  плоскость  $TR$  параллельную площадямъ оснований, и вообразимъ себѣ на площади  $EG$  цилиндръ  $ER$ .

Такъ какъ  $AN=EO$ , то  $AN:ER=EO:EB$  (кн. 5, пред. 7). Но  $AN:ER=AC:EG$  (кн. 12, пред. 11), и  $EO:ER=LM:LP$  (кн. 12, пред. 13). Слѣдовательно  $AC:EG=LM:LP=LM:IK$ .

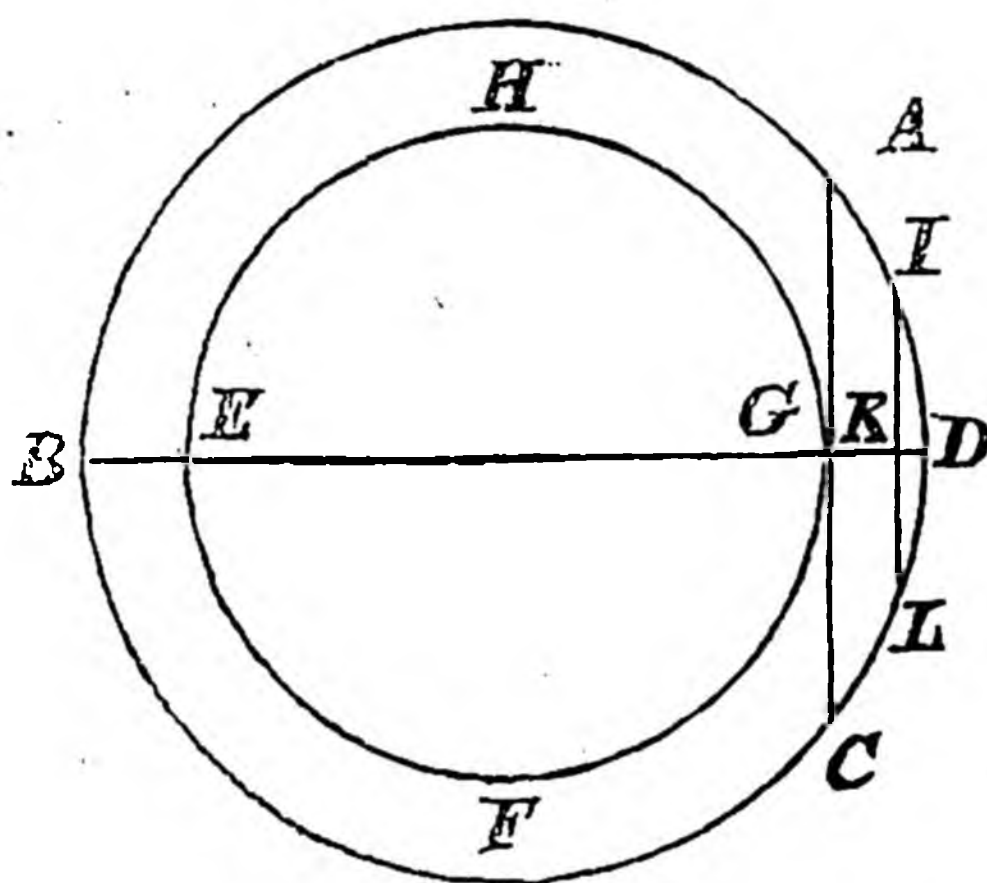
2. Пусть  $AC:EG=LM:IK$ , то на основаніи предъидущаго построе-

нія  $AC:EG=LM:LP$ . Но  $AC:EG=AN:ER$  (кн. 12, пред. 11) и  $LM:LP=EO:ER$  (кн. 12, пред. 13). Слѣдовательно  $AN:ER=EO:ER$ , а потому  $AN=EO$  (кн. 5, пред. 9).

Тоже самое относится къ конусамъ  $ACK$ ,  $EGM$  (кн. 12, пред. 10), т. е. если  $AC:EG=LM:IK$ , то кон.  $ACK$ =кон.  $EGM$ , а если кон.  $ACK$ =кон.  $EGM$ , то  $AC:EG=LM:IK$ .

*Предложеніе 16.* Вписать въ большій изъ двухъ данныхъ концентрическихъ круговъ  $ABCD$  и  $EFGH$  правильный многоугольникъ съ четнымъ числомъ сторонъ, который бы не касался меньшаго круга (фиг. 505)?

Фиг. 505.



*Рѣшеніе.* Проведемъ діаметръ  $BD$  и возставимъ въ нему, въ точкѣ  $G$ , перпендикуляръ  $GA$  и продолжимъ его до  $C$ , то  $AC$  будетъ прямая касающаяся круга  $EFGH$  (кн. 3, пред. 16). Раздѣлимъ пополамъ полуокружность  $BAD$  и будемъ продолжать это дѣленіе далѣе, то наконецъ мы дойдемъ до такой части  $ID$ , которая будетъ меньше  $AD$  (кн. 10, пред. 1). Опустимъ изъ точки  $I$  на  $BD$  перпендикуляръ  $IK$ , продолжимъ его до  $L$ , и проведемъ  $ID$ ,  $DL$ , то  $ID=DL$ .

Такъ какъ  $IL$  параллельна  $AC$ , а послѣдняя касается круга, то  $IL$  не будетъ его касаться, а тѣмъ болѣе не будутъ его касаться  $ID$ ,  $DL$ . Внося въ кругъ  $ABCD$  одну за другою прямыя линіи равныя  $ID$ , такъ чтобы начало одной, совпадало съ концемъ другой, то въ большій кругъ будетъ вписанъ правильный многоугольникъ съ четнымъ числомъ сторонъ, который не касается меньшаго круга.

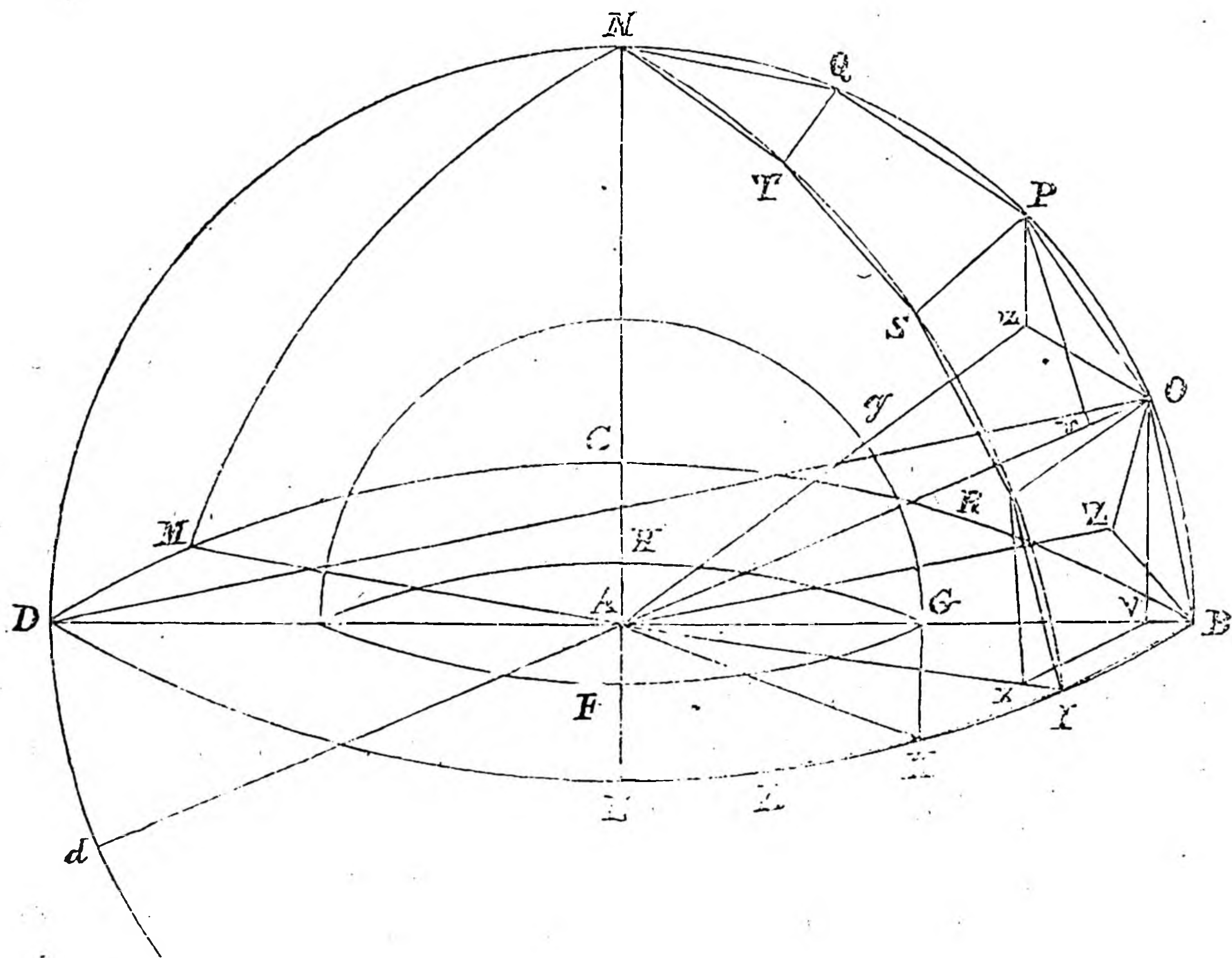
*Предложеніе 17.* Въ большій изъ двухъ данныхъ концентрическихъ шаровъ вписать многогранникъ, который бы не касался своею поверхностью меньшаго шара (фиг. 506)?

*Построеніе.* Проведемъ плоскость чрезъ общій центръ  $A$ , плоскость эта пересѣчетъ поверхности шаровъ по кругамъ. Такъ какъ (кн. 11, опред. 14) шары образованы вращеніемъ полукруга около его неподвижнаго діаметра, то, какое бы положеніе не имѣлъ полукругъ, продолженная его плоскость каждый



разъ образуетъ на шарѣ кругъ, и притомъ большой, такъ какъ діаметръ шара, очевидно, равный діаметру полукруга, больше всѣхъ прямыхъ линий проведенныхъ въ кругѣ или шарѣ (кн. 13, пред. 15). Пусть такимъ образомъ получены на поверхности большого шара кругъ  $BCDE$ , а на поверхности меньшаго шара кругъ  $FGH$ . Проведемъ въ этихъ сѣченіяхъ діаметры  $BD$ ,  $CE$ , взаимно перпендикулярные. Въ больший изъ обоихъ concentрическихъ круговъ  $BCDE$ , впишемъ (кн. 12, пред. 16) правильный многоугольникъ, съ четнымъ числомъ сторонъ, который бы не касался меньшаго круга  $FGH$ . Пусть сторонами этого многоугольника, въ квадрантѣ  $BE$ , будутъ  $BI$ ,  $IK$ ,  $KL$ ,  $LE$ . Проведемъ  $IA$ , и продолжимъ ее до  $M$ . Къ плоскости круга  $BCDE$ , въ точкѣ  $A$ , возставимъ перпендикуляръ  $AN$ ,

Фиг. 506.



встрѣчающій поверхность большого шара въ точкѣ  $N$ . Чрезъ  $AN$  и чрезъ каждый изъ діаметровъ  $BD$ ,  $IM$  проведемъ плоскости, то эти послѣднія, на основаніи выше сказаннаго, образуютъ на поверхности шара большіе круги; половины этихъ круговъ  $DNB$ ,  $INB$  перпендикулярны къ плоскости круга  $BCDE$  (кн. 11, пред. 18) подобно  $AN$ .

Такъ какъ діаметры  $DB$ ,  $IM$ ,  $CE$  равны, то полукруги  $BND$ ,  $INM$ ,  $BED$  равны, слѣдовательно квадранты  $BN$ ,  $IN$ ,  $BE$  также равны. А потому стороны многоугольника, которыя были внесены въ квадрантъ  $BE$ , могутъ быть внесены въ  $BN$  и  $IN$ . Пусть сторонами этими въ  $BN$  будутъ  $BO$ ,  $OP$ ,  $QP$ ,  $QN$ , а въ  $IN$  сторонами будутъ  $IR$ ,  $RS$ ,  $BT$ ,  $TN$ . Прове-



демъ  $OR$ ,  $PS$ ,  $QT$ , то, какъ мы докажемъ въ послѣдствіи, каждая изъ четырехстороннихъ фигуръ  $IBOR$ ,  $ROPS$ ,  $SPQT$ , а также (кн. 11, пред. 2)  $\triangle NQT$  находятся въ одной плоскости.

Представимъ себѣ прямыя линіи проведенныя изъ центра шара  $A$  въ точки  $O$ ,  $R$ ,  $P$ ,  $S$ ,  $Q$ ,  $T$ , такимъ образомъ построимъ между обоими квадрантами  $BN$ ,  $IN$  многогранникъ, составленный изъ пирамидъ, которыхъ общая вершина въ  $A$ , а площади основаній которыхъ суть  $IBOR$ ,  $ROPS$ ,  $SPQT$ ,  $NQT$ .

Въ квадрантѣ  $BE$ , на каждой изъ остальныхъ сторонъ  $IK$ ,  $KL$ ,  $LE$ , сдѣлаемъ такое же построение какъ и на  $BI$ ; въ трехъ остальныхъ квадрантахъ  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$  сдѣлаемъ тоже, что и въ  $BE$ ; въ другой половинѣ полушара повторимъ тоже. Такимъ образомъ мы впишемъ въ большій шаръ многогранникъ, состоящій изъ пирамидъ, съ указаннымъ выше свойствомъ; многогранникъ этотъ не будетъ касаться своею поверхностью меньшаго шара.

*Рѣшеніе.* 1. Докажемъ, что каждая изъ четырехстороннихъ фигуръ  $IBOR$ ,  $ROPS$ ,  $SPQT$  лежитъ въ одной плоскости.

Опустимъ на плоскость круга  $BCDE$ , изъ точекъ  $O$ ,  $R$ , перпендикуляры  $OV$ ,  $RX$ , которые встрѣчая линіи пересѣченія  $BD$ ,  $IM$  (кн. 11, пред. 38), будутъ параллельны (кн. 11, пред. 6); проведемъ  $VX$ .

Такъ какъ отъ каждаго изъ полукруговъ  $BND$ ,  $INM$  отсѣчены равныя дуги  $BO$ ,  $IR$ , то  $\angle ABO = \angle AIR$  (кн. 3, пред. 21). Но углы при точкахъ  $V$ ,  $X$  суть прямые, и  $OB = RI$ , слѣдовательно  $OV = RX$  и  $BV = IX$  (кн. 1, пред. 26).

Такъ какъ  $BA = IA$ , но  $BV = IX$ , а потому  $AV = AX$ , слѣдовательно:

$$BV : VA = IX : XA$$

изъ этого слѣдуетъ, что  $VX$  параллельна  $IB$  (кн. 6, пред. 2). Но по предъидущему  $OV$ ,  $RX$  параллельны и равны между собою. слѣдовательно  $VX$ ,  $RO$  равны и параллельны (кн. 1, пред. 33). А потому также  $RO$  и  $IB$  параллельны (кн. 11, пред. 9). Точно такимъ же образомъ доказывается, что  $PS$  и  $TQ$  параллельны  $IB$ ; а потому  $PS$  параллельна  $RO$  и  $TQ$  параллельна  $PS$ . Такъ какъ  $RO$  параллельна  $IB$ , то четырехсторонняя фигура  $IBOR$  лежитъ въ одной плоскости (кн. 11, пред. 7). По той же причинѣ каждая изъ остальныхъ многостороннихъ фигуръ  $ROPS$ ,  $SPQT$  лежатъ въ одной плоскости.

2. Докажемъ, что поверхность вписаннаго многогранника не касается поверхности меньшаго шара, на которой находится большой кругъ  $FGH$ .

Опустимъ изъ центра шара  $A$  перпендикуляръ  $AZ$  на плоскій четырехугольникъ  $IBOR$ , пересекающій эту плоскость въ точкѣ  $Z$  и проведемъ въ этой плоскости прямыя линіи  $BZ$ ,  $ZO$ , къ которымъ также будетъ перпендикулярна прямая  $AZ$  (кн. 11, опред. 3), слѣдовательно (кн. 1, пред. 47):

$$\square AB = \square AZ + \square ZB$$

и

$$\square AO = \square AZ + \square ZO$$

Но  $AB = AO$ , а потому:

$$\square AB = \square AO$$

откуда:

$$\square AZ + \square ZO = \square AZ + \square ZB$$

слѣдовательно:

$$\square ZO = \square ZB$$

а потому  $ZO = ZB$ . Точно такимъ же образомъ доказывается, что прямыя, проведенныя изъ точки  $Z$  къ точкамъ  $I$ ,  $R$ , соответственно равны  $ZB$ ,  $ZO$ . Слѣдовательно кругъ описанный около точки  $Z$ , радіусомъ  $ZB$ , пройдетъ чрезъ точки  $I$ ,  $R$ ,  $O$ , а потому четырехсторонняя фигура вписана въ этотъ кругъ.

*Примѣч. 1.* Если мы опустимъ изъ точки  $A$  перпендикуляръ  $Az$  на плоскость  $ROPS$  и проведемъ  $zO$ ,  $zP$ , то точно такимъ же образомъ доказывается, что кругъ описанный около точки  $z$  радіусомъ  $zO$ , пройдетъ также чрезъ точки  $R$ ,  $S$ ,  $P$ , а потому четырехсторонняя фигура вписана въ этотъ кругъ и т. д.

Такъ какъ  $IB > XV$  и  $XV = RO$ , то  $IB > RO$ , но  $IB = IR = BO$ , а потому какъ  $IR$ , такъ и  $BO > RO$ . Слѣдовательно, въ кругѣ описанномъ около  $IBOR$ , каждая изъ равныхъ дугъ  $IB$ ,  $BO$ ,  $IR$  больше дуги  $OR$ ; а потому  $\angle OZB$  есть тупой уголъ, слѣдовательно (кн. 2, пред. 12)  $\square BO > \square BZ + \square ZO$ , т. е.:

$$\square BO > 2\square BZ.$$

Изъ точки  $O$  проведемъ  $OV$  перпендикулярную къ  $BD$ . Такъ какъ  $BD < 2DV$  и (кн. 6, пред. 1):

$$BD : DV = DB \cdot BV : DV \cdot VB$$

то:

$$DB \cdot BV < 2DV \cdot VB$$

Но, проведя прямую  $OD$ , (кн. 6, пред. 8, слѣд.):

$$DB.BV = \square BO \quad \text{и} \quad DV.VB = \square OV$$

Слѣдовательно  $\square BO < 2\square OV$ . Но  $\square BO > 2\square BZ$ . Слѣдовательно  $\square OV > \square BZ$ . Далѣе, такъ какъ  $BA = AO$  и  $\square BA = \square AO$  и:

$$\square BA = \square BZ + \square ZA$$

равно какъ:

$$\square AO = \square OV + \square VA$$

то:

$$\square BZ + \square ZA = \square OV + \square VA$$

Но по выше сказанному  $\square OV > \square BZ$ , слѣдовательно  $\square VA < \square ZA$ , а потому  $AZ > AV$ , слѣдовательно тѣмъ болѣе  $AZ > AG$ . Итакъ  $AZ$  перпендикулярна къ одной изъ боковыхъ сторонъ многогранника, а  $AG$  перпендикулярна къ поверхности меньшаго шара. Слѣдовательно многогранникъ (стороною  $IBOR$ ) не касается поверхности меньшаго шара.

*Примѣч. 2.* Равнымъ образомъ многогранникъ не касается стороною  $OPSR$  поверхности меньшаго шара. Опустимъ изъ точки  $A$  на  $OPSR$  перпендикуляръ  $Az$ , и проведемъ  $Oz$ ,  $Pz$ , то кругъ описанный около  $z$  радиусомъ  $zO$  пройдетъ чрезъ точки  $P$ ,  $S$ ,  $R$ . Такъ какъ  $IB$  больше чѣмъ  $RO$ ,  $SP$ , и  $IB = RS = OP$ , то каждая изъ  $RS$ ,  $OP$  соответственно больше  $RO$ ,  $SP$ . Въ кругѣ, описанномъ около четырехсторонней фигуры, дуги  $RS$ ,  $OP$  равны и больше  $RO$ ,  $SP$ . Слѣдовательно уголъ  $PzO$  при точкѣ  $z$  тупой, а потому  $\square OP > 2\square zO$  (кн. 2, пред. 12).

Изъ точки  $P$  проведемъ  $Pv$  перпендикулярно  $OA$ , и продолжимъ  $OA$  до  $d$ . Точно также, какъ прежде, доказывается что  $Az > Av$ , а слѣдовательно тѣмъ болѣе  $Az > AG$ , изъ чего слѣдуетъ, что и сторона  $ROPS$  не касается поверхности меньшаго шара. Равнымъ образомъ ни одна изъ другихъ сторонъ многогранника не касается поверхности меньшаго шара.

*Другое доказательство, что  $AZ > AG$ .*

Въ точкѣ  $G$  возставимъ къ  $AG$  перпендикуляръ  $GK$  и проведемъ  $AK$ . Раздѣливъ продолженную дугу  $BE$  пополамъ, то останется (кн. 10, пред. 1) еще часть  $BI$ , которая меньше дуги, которой хорда была бы  $GK$ , а потому и прямая линія  $BI < GK$ . Но такъ какъ по выше доказанному четырехсторонняя фигура  $IBOR$  вписана въ кругъ и  $OB = BI = IR$ , прямая же  $OR$  меньше каждой изъ предыдущихъ, то уголъ  $OZB$  тупой, слѣдовательно  $BO > BZ$ . Но  $GK > BO$ , слѣдовательно тѣмъ болѣе  $GK > BZ$ , а потому  $\square GK > \square BZ$ .

Такъ какъ:

$$\square AK = \square AG + \square GK$$

и

$$\square AB = \square BZ + \square AZ$$

Но:

$$AK = AB$$

то:

$$\square AK = \square AB$$

а потому:

$$\square AG + \square GK = \square BZ + \square AZ.$$

Но мы имѣли  $\square BZ < \square GK$ , слѣдовательно  $\square AZ > \square AG$ , а потому  $AZ > AG$ .

*Замѣчаніе.* Если въ шаръ  $B$  впишемъ многогранникъ подобный многограннику вписанному въ шаръ  $A$ , то оба многогранника относятся между собою какъ утроенное (кубы) отношеніе діаметровъ этихъ шаровъ.

*Доказат.* Раздѣливъ многогранники на одинаковое число одинаково расположенныхъ пирамидъ (коихъ вершины лежатъ въ центрѣ шаровъ, а основанія суть стороны многогранниковъ), то эти пирамиды подобны (кн. 12, пред. 8). (Стороны прилежащія къ вершинѣ суть радіусы шаровъ). Слѣдовательно каждая пара одинаково расположенныхъ пирамидъ въ обоихъ шарахъ находятся въ томъ же отношеніи, какъ утроенные (кубы) діаметры шаровъ. Итакъ всѣ пирамиды въ шарѣ  $A$  относятся ко всѣмъ пирамидамъ въ шарѣ  $B$ , какъ одна изъ пирамидъ въ  $A$ , къ одной изъ пирамидъ въ  $B$ . А потому отношеніе многогранниковъ равно утроенному отношенію діаметровъ шаровъ.

*Предложеніе 18.* Шары  $ABC$ ,  $DEF$  относятся между собою какъ утроенные (кубы) діаметры  $BC$ ,  $EF$  (фиг. 507).

*Доказат.* Если бы это не имѣло мѣсто, то пусть:

$$(BC : EF)^3 = \text{шар. } ABC : X$$

такъ что тѣло  $X$  или меньше, или больше шара  $DEF$ .

*Случай первый.* Положимъ  $X < \text{шар. } DEF$ . Пусть шаръ  $HGI = X$  будетъ концентрическій съ шаромъ  $DEF$ ; впишемъ (кн. 12, пред. 17) въ большій шаръ  $DEF$  многогранникъ, коего поверхность не касается меньшаго шара  $HGI$ , а въ шаръ  $ABC$  впишемъ многогранникъ подобный предъидущему; мы будемъ имѣть (кн. 12, пред. 17, замѣч.):



$$\text{многогр. } ABC : \text{многогр. } DEF = (BC : EF)^3$$

Но по положенію:

$$\text{шар. } ABC : \text{шар. } GHI = (BC : EF)^3.$$

а потому:

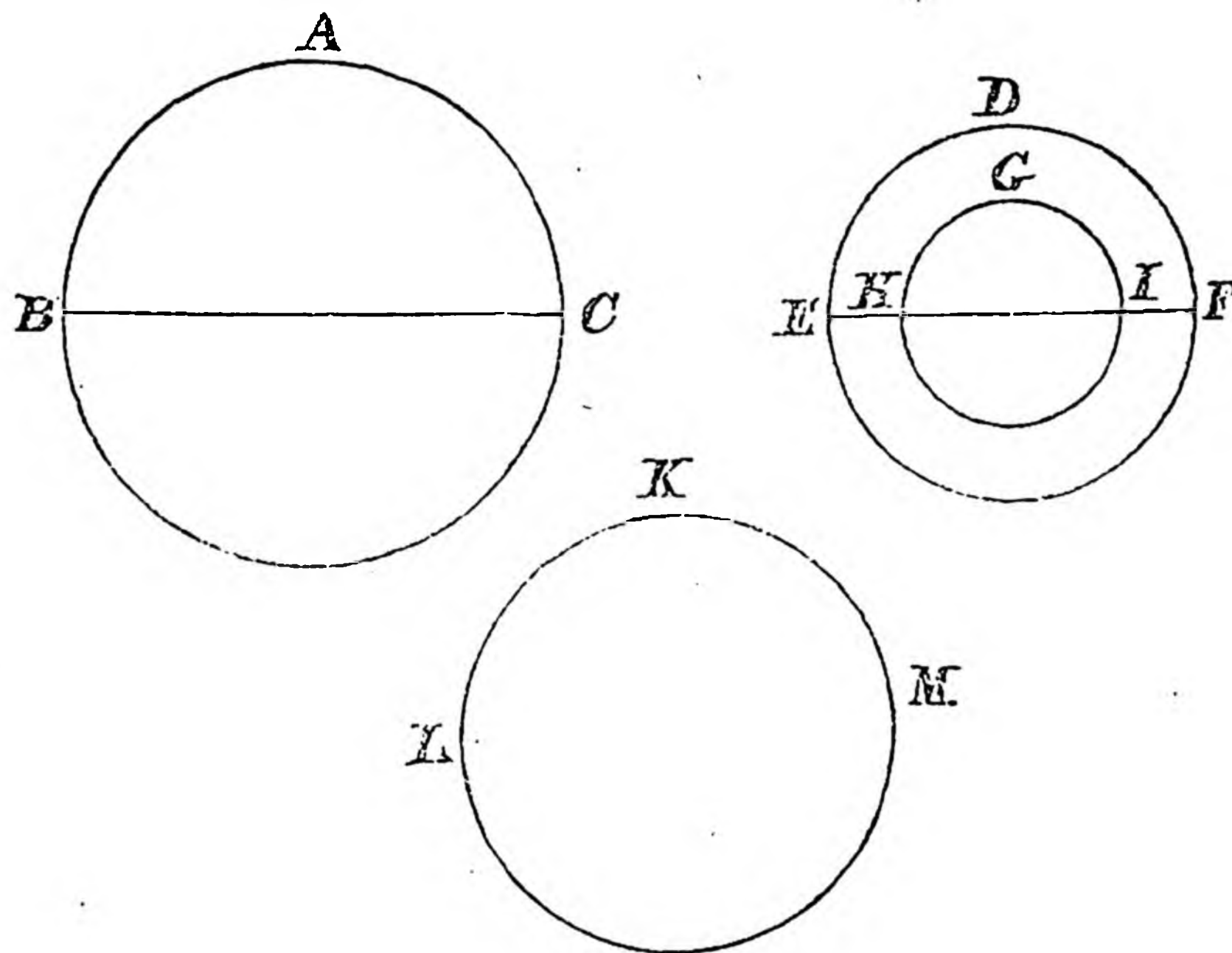
$$\text{шар. } ABC : \text{шар. } GHI = \text{многогр. } ABC : \text{многогр. } DEF$$

но какъ шаръ  $ABC > \text{многогр. } ABC$ , то и шаръ  $GHI > \text{многогр. } DEF$ . Но такъ какъ шаръ  $GHI$  вписанъ въ многогранникъ  $DEF$ , то шаръ  $GHI < \text{многогр. } DEF$ , что противорѣчитъ предъидущему. А потому не можетъ быть:

$$(BC : EF)^3 = \text{шаръ } ABC : X$$

при  $X < \text{шара } DEF$ .

Фиг. 507.



Подобнымъ же образомъ доказывается, что не имѣетъ мѣста пропорція:

$$\text{шаръ } DEF : Z = (EF : BC)^3$$

при  $Z < \text{шара } ABC$ .

*Случай второй.* Пусть  $X > \text{шара } DEF$  и:

$$(BC : EF)^3 = \text{шаръ } ABC : X$$

слѣдовательно, когда шаръ  $KLM = X$ , то:

$$(EF : BC)^3 = \text{шаръ } KLM : \text{шар. } ABC$$

Пусть будетъ:

$$\text{шар. } KLM : \text{шар. } ABC = \text{шар. } DEF : Z$$

гдѣ шар.  $ABC > Z$ , слѣдовательно:

$$(EF : BC)^3 = \text{шаръ } DEF : Z$$

что невозможно на основаніи перваго случая, гдѣ  $Z < \text{шара } ABC$ . А потому не можетъ быть:

$$(BC : EF)^3 = \text{шар. } ABC : X$$

при  $X > \text{шаръ } DEF$ , а на основаніи перваго случая также не можетъ быть при  $X < \text{шара } DEF$ . Слѣдовательно необходимо:

$$(BC : EF)^3 = \text{шар. } ABC : \text{шар. } DEF.$$


---

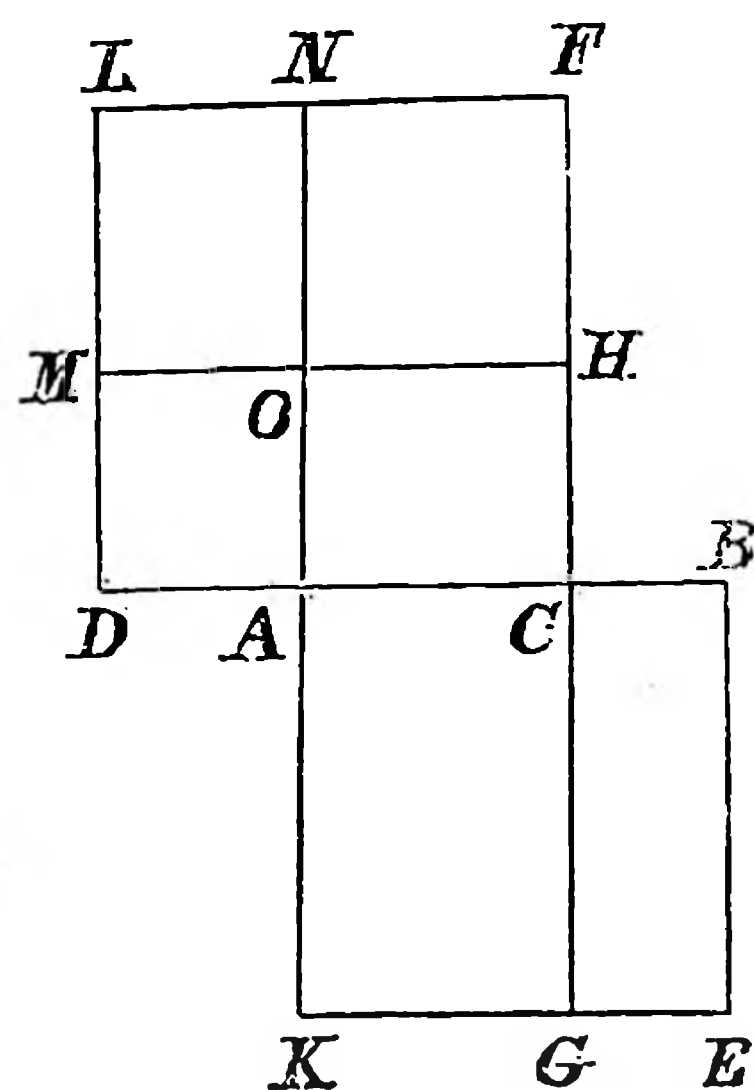
## КНИГА XIII.

### Книга третья „О тѣлахъ“

#### Предложенія.

*Предложеніе 1.* Если прямую  $AB$ , въ точкѣ  $C$ , раздѣлимъ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то квадратъ построенный на прямой, составленной изъ половины  $AD$  данной прямой и изъ большаго отрѣзка  $AC$ , равенъ пять разъ взятому квадрату, построенному на этой половинѣ  $AD$  (фиг. 508).

Фиг. 508.



*Доказат.* На прямыхъ  $AB$ ,  $CD$  построимъ квадраты  $AE$ ,  $DF$ ; построимъ фигуру въ квадратѣ  $DF$  какъ въ пред. 4, кн. 2, и продолжимъ  $FC$  до  $G$ .

Такъ какъ прямая  $AB$  раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то (кн. 6, опред. 3):

$$AB:AC=AC:CB$$

а потому (кн. 6, пред. 17)  $AB.CB=\square AC$ . Но:

$$AB.CB=CE \text{ и } \square AC=FO.$$

Слѣдовательно  $CE=FO$ . Такъ какъ  $AB=2AD$  и  $AB=AK$ ,  $AD=AO$ , то  $AK=2AO$ , слѣдовательно, какъ (кн. 6, пред. 1):

$$AK:AO=KC:CO$$

то и  $KC=2CO$ . Итакъ (кн. 1, пред. 43):

$$LO+OC=2CO$$

Слѣдовательно:

$$KC=LO+OC$$

но по выше доказанному  $CE=FO$ , а потому (кн. 1, пред. 2):

$$AE=\square AB=\text{гномону } OMLFCAO.$$

Но  $AB=2AD$ , а потому (кн. 6, пред. 20, слѣд.)  $\square AB=4\square AD$ , слѣдовательно:

$$\text{гномонъ } OMLFCAO=4\square AD$$

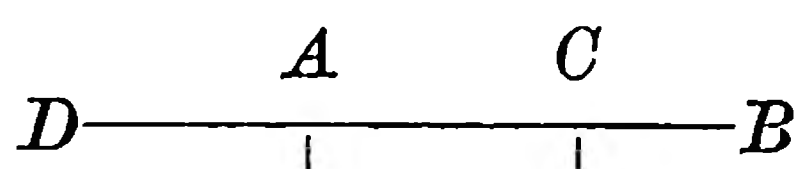
но  $DO=\square AD$ , то (кн. 1, пред. 2)  $DF=5\square AD$ , гдѣ  $AD=\frac{1}{2}AB$  и:

$$DF=\square CD=\square(CA+AD)=\square(CA+\frac{1}{2}AB).$$

*Замѣчаніе.* Предложеніе доказывается *аналитически*, если искомое принять за извѣстное и на основаніи выведенныхъ отсюда слѣдствій получаютъ извѣстныя истины. Напротивъ, предложеніе доказано *синтетически*, если съ помощью извѣстныхъ истинъ доходятъ до искомой.

Пусть прямая линія  $AB$  (фиг. 509) въ точкѣ  $C$  раздѣлена въ край-

Фиг. 509.



немъ и среднемъ отношеніи, и пусть  $AC$  большій отрѣзокъ, прибавимъ къ продолженной прямой  $AB$  ея половину  $AD$ ; требуется доказать, что  $\square CD=5\square AD$ ?

1) *Аналитическое доказательство.* Примемъ за извѣстное, что  $\square CD=5\square AD$ . Но (кн. 2, пред. 4):

$$\square CD=\square AC+\square AD+2(AC.AD)$$

слѣдовательно:

$$\square AC+\square AD+2(AC.AD)=5\square AD$$



а потому (кн. 1, пред. 3):

$$\square AC + 2(AC \cdot AD) = 4\square AD.$$

Но мы предположили  $BA = 2AD$ , а потому  $2(AD \cdot AC) = BA \cdot AC$ ; мы предположили также, что:

$$BA : AC = AC : CB$$

а потому  $AB \cdot BC = \square AC$ . Следовательно:

$$(BA \cdot AC) + (AB \cdot BC) = 4\square AD.$$

Но (кн. 2, пред. 2):

$$(BA \cdot AC) + (AB \cdot BC) = \square AB.$$

Следовательно  $4\square AD = \square AB$ , что и должно быть, такъ какъ  $2AD = AB$ .

2) *Синтетическое доказательство*. Такъ какъ  $\square AB = 4\square AD$ , а (кн. 2, пред. 2):

$$\square AB = (BA \cdot AC) + (AB \cdot BC)$$

то:

$$(BA \cdot AC) + (AB \cdot BC) = 4\square AD.$$

Итакъ:

$$BA \cdot AC = 2(AD \cdot AC)$$

и  $AB \cdot BC = \square AC$ . Следовательно:

$$\square AC + 2(AD \cdot AC) = 4AD$$

а потому (кн. 1, пред. 2):

$$\square AC + \square AD + 2(AD \cdot AC) = 5\square AD.$$

Но (кн. 2, пред. 4):

$$\square AC + \square AD + 2(AD \cdot AC) = \square DC.$$

Следовательно  $\square DC = 5\square AD$ , т. е.:

$$\square(AC + \frac{1}{2} AB) = 5\square \frac{1}{2} AB.$$

*Примѣч. 1.* Уже древнимъ было извѣстно два способа для доказательства теоремъ и рѣшенія задачъ, какъ это видно изъ настоящей книги Началь Евклида: способъ *аналитическій* (*ἀναλυσις* разрѣшеніе) и *синтетическій* (*σύνθεσις* сложеніе). Я войду въ нѣкоторыя подробности относительно этихъ способовъ, такъ какъ я думаю, что преподаватель долженъ, по возможности, доказывая теоремы и рѣшая задачи, указывать на характеръ процесса и мало по малу уяснять оба эти способа. Это тѣмъ важнѣе, что элементарная геометрія, въ качествѣ общеобразовательной науки, наилучше можетъ уяснить процессъ мышленія, такъ какъ никакая другая наука не можетъ сравниться съ нею въ правиль-

ности логического развитія истинъ. Кромѣ этого я не знаю ни одного математическаго сочиненія, въ которомъ бы оба эти способа были обстоятельно изложены, а аналитическій способъ, по большей части, понимается неправильно.

*Способъ аналитическій.* Въ тринадцатой книгѣ Началъ Евклида мы находимъ краткое опредѣленіе анализа и синтеза, но Паппусъ говоритъ, что изобрѣтеніе аналитическаго способа принадлежитъ Платону, хотя въ сочиненіяхъ Платона мы не находимъ ничего относительно этого способа. Кто бы нибылъ творецъ аналитическаго способа, но Евклидъ первый его формулировалъ слѣдующимъ образомъ: въ анализѣ предложенную теорему принимаютъ за истину, чтобы изъ нея вывести слѣдствія, которыя бы привели къ извѣстной уже истинѣ. Изъ этого опредѣленія и примѣровъ, которые Евклидъ даетъ для поясненія, можно заключить, что онъ смотритъ на теорему какъ доказанную, если изъ нея вытекаетъ, какъ необходимое слѣдствіе, какое нибудь, уже доказанное, извѣстное предложеніе.

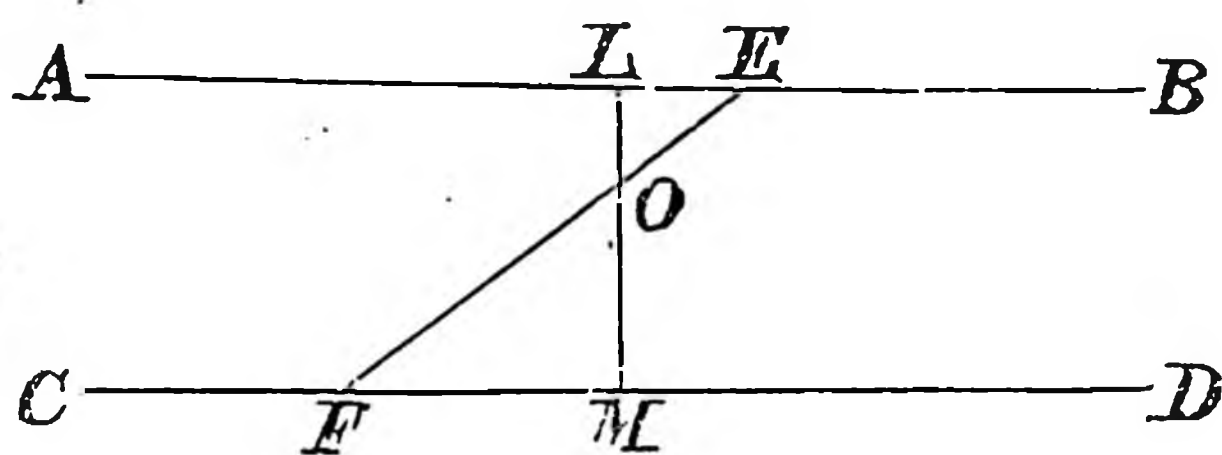
Но уже Аристотель замѣтилъ, что изъ ложнаго предложенія можно вывести, какъ необходимое слѣдствіе, предложеніе истинное, такъ напримѣръ, изъ ложнаго предложенія: въ каждомъ треугольникѣ стороны пропорціональны противолежащимъ угламъ, вытекаетъ, какъ необходимое слѣдствіе, предложеніе истинное: что противъ равныхъ угловъ лежатъ и стороны равныя. Слѣдовательно, истина, выведеннаго слѣдствія, не даетъ намъ права дѣлать заключеніе о истинѣ предложенія.

Но если изъ принятаго предложенія за истинное вытекаетъ, какъ необходимое слѣдствіе, несообразность съ извѣстными истинами, то мы вправѣ заключить, что предложенная теорема ложна, такъ какъ истинное предложеніе не можетъ дать ложнаго слѣдствія; напр.:

*Задача.* Чрезъ данную точку между двумя параллельными линіями провести такую прямую, которая бы въ этой точкѣ дѣлилась пополамъ, т. е. чтобы отрѣзки ея, между данною точкою и параллельными, были равны?

*Рѣшеніе.* Пусть данныя прямая будутъ (фиг. 510)  $AB$  и  $CD$  и данная между ними точка  $O$ . Положимъ, что задача рѣшена и что искомая прямая есть  $EF$ , которая, слѣдовательно въ точкѣ  $O$  дѣлится пополамъ, т. е.  $EO=OF$ . Изъ точки  $O$  опустимъ перпенди-

Фиг. 510.



куляръ  $LM$  на одну изъ прямыхъ, то онъ будетъ перпендикуляръ и къ другой. Если прямая  $EF$  въ точкѣ  $O$  дѣлится пополамъ, то  $\triangle OLE=\triangle OFM$ , такъ какъ  $OE=OF$ ,  $\angle LOE=\angle FOM$  и  $\angle OLE=\angle FMO$  какъ прямые, слѣдовательно и  $OL=OM$ . Что возможно только въ томъ частномъ случаѣ, когда точка  $O$  лежитъ на серединѣ прямой  $LM$ . Слѣдовательно вообще задача невозможна.

Слѣдовательно изъ анализа, такимъ образомъ формулированнаго, можно, въ первомъ случаѣ, только сказать, что теорема *можетъ быть* истинна, а во второмъ случаѣ, мы заключимъ, что предложенная теорема *ложна*.

Такъ обыкновенно понимаютъ аналитическій способъ, который отъ того и получилъ названія *разрѣшенія*, такъ какъ предложенная теорема разлагается на свои составныя части, до тѣхъ поръ, пока не дойдутъ до извѣстной истины или несообразности.

Паппусъ формулировалъ аналитическій способъ иначе, онъ далъ ему такую форму,

что онъ ведетъ всегда къ опредѣленному результату. Въ анализѣ, говоритъ Паппусъ, предложенную теорему принимаютъ за истину и ищутъ изъ какой другой, уже извѣстной теоремы, она можетъ быть выведена, какъ необходимое слѣдствіе, и если такая теорема найдется, то предложенная будетъ доказана. Если же такой извѣстной теоремы не находится, то ищутъ изъ какой теоремы, еще не доказанной, она можетъ быть выведена, и найдя такую теорему, вопросъ сводится къ тому, чтобы доказать эту послѣднюю. Съ этой послѣдней поступаютъ какъ съ предложенной, т. е. опять ищутъ изъ какой извѣстной теоремы она можетъ быть выведена, какъ необходимое слѣдствіе, и если такая теорема находится, то предложенная будетъ доказана, если нѣтъ, то поступаютъ опять подобнымъ образомъ, пока наконецъ, не дойдутъ до теоремы извѣстной, откуда и заключаютъ, что предложенная теорема справедлива.

Изъ этого видимъ, что аналитическій способъ состоитъ въ установленіи непрерывнаго ряда предложеній, начиная съ предложенной теоремы и оканчивая извѣстной. Каждая изъ теоремъ этого ряда есть слѣдствіе теоремы непосредственно за ней слѣдующей. У Евклида рядъ теоремъ идетъ въ обратномъ смыслѣ, именно: каждая изъ теоремъ ряда есть слѣдствіе непосредственно предъидущей.

Посмотримъ какія условія необходимы, чтобы оба процесса Евклидовскій и Паппуса вели къ опредѣленному результату.

Если двѣ теоремы такъ связаны между собою, что каждая изъ нихъ есть слѣдствіе другой, то такія двѣ теоремы называются *взаимными*.

Если въ рядѣ предложеній, о которомъ мы выше говорили, два послѣдовательныя предложенія взаимны, то можно разсматривать вторую теорему какъ слѣдствіе первой, вмѣсто того чтобы разсматривать ее какъ имѣющую слѣдствіемъ первую. Если такая взаимность имѣетъ мѣсто, начиная съ первой теоремы ряда до послѣдней, то можно сказать, что аналитическій способъ состоитъ въ установленіи ряда теоремъ, изъ коихъ вторая есть слѣдствіе первой, которую нужно доказать, третья есть слѣдствіе второй и т. д. пока не дойдемъ до извѣстнаго истиннаго предложенія.

Такъ какъ вывести слѣдствіе изъ данной теоремы легче, чѣмъ найти теорему, которой данная есть слѣдствіе, то можно прилагать Евклидовскій аналитическій процессъ съ тѣмъ условіемъ, чтобы каждый разъ, когда изъ данной теоремы выводится, какъ слѣдствіе, другая, убѣдиться, что обѣ эти теоремы взаимны, тогда и этотъ процессъ ведетъ также вѣрно къ доказательству данной теоремы какъ и Паппуса.

Здѣсь представляется вопросъ: какую изъ различныхъ теоремъ, изъ коихъ предложенная можетъ быть выведена, какъ слѣдствіе или которыя могутъ быть выведены, какъ слѣдствія данной, слѣдуетъ выбрать? Тотъ же вопросъ представляется и относительно каждой изъ теоремъ аналитическаго ряда.

Отвѣта на этотъ вопросъ дать нельзя, такъ какъ ни какихъ правилъ для этого не существуетъ. Рядъ теоремъ можетъ быть продолженъ неопредѣленно, а извѣстной теоремы не представится, иногда же такой рядъ заканчивается весьма скоро извѣстнымъ предложеніемъ. Это зависитъ отъ способности соображенія и обширности геометрическихъ познаній.

*Примѣръ.* Возьмемъ для примѣра извѣстную теорему Пифагора: во всякомъ прямоугольномъ треугольникѣ квадратъ построенный на гипотенузѣ равенъ суммѣ квадратовъ построенныхъ на катетахъ.

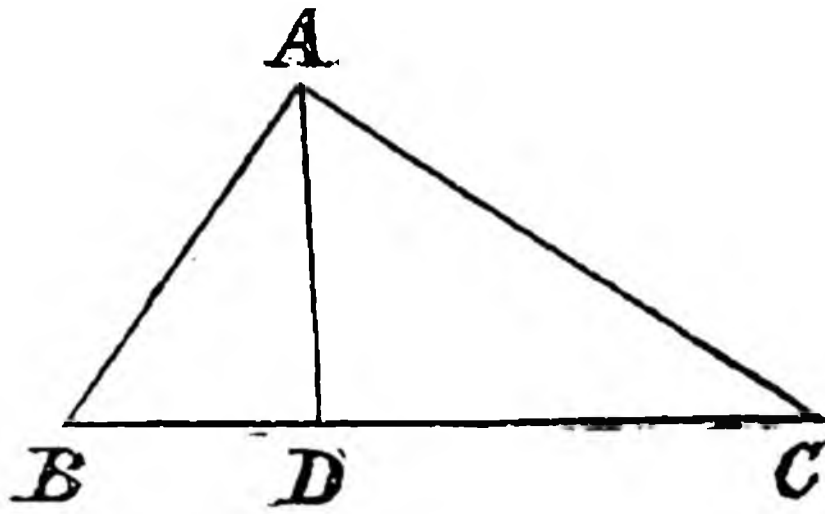
*Доказат.* Пусть  $ABC$  будетъ данный треугольникъ (фиг. 511), въ которомъ уголъ  $A$  прямой. Положимъ что предложеніе справедливо, т. е. пусть будетъ:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$



Эта теорема есть слѣдствіе другой: во всякомъ прямоугольномъ треугольникѣ каждый изъ катетовъ средне-пропорціоналенъ между гипотенузою и отрѣзкомъ гипотенузы, ле-

Фиг. 511.



жащимъ между основаніемъ перпендикуляра, опущеннаго изъ вершины прямого угла на гипотенузу, и катетомъ. И въ самомъ дѣлѣ, если эта теорема справедлива, то мы имѣемъ:

$$AB^2 = BC \cdot BD, \quad AC^2 = BC \cdot CD$$

складывая получимъ предложенную теорему. Слѣдовательно предложенная теорема сведена на другую, которую надобно доказать.

Вторая теорема будетъ слѣдствіе третьей: во всякомъ прямоугольномъ треугольникѣ, перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу, дѣлитъ треугольникъ на два треугольника подобные между собою и каждый подобенъ цѣлому.

Эту послѣднюю теорему легко доказать, слѣдовательно и предложенная справедлива. Въ этомъ примѣрѣ рядъ теоремъ состоялъ изъ трехъ, изъ коихъ первая была слѣдствіемъ второй, а вторая слѣдствіемъ третьей.

Докажемъ ту же теорему аналитическимъ процессомъ Евклида.

Если мы имѣемъ:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

то:

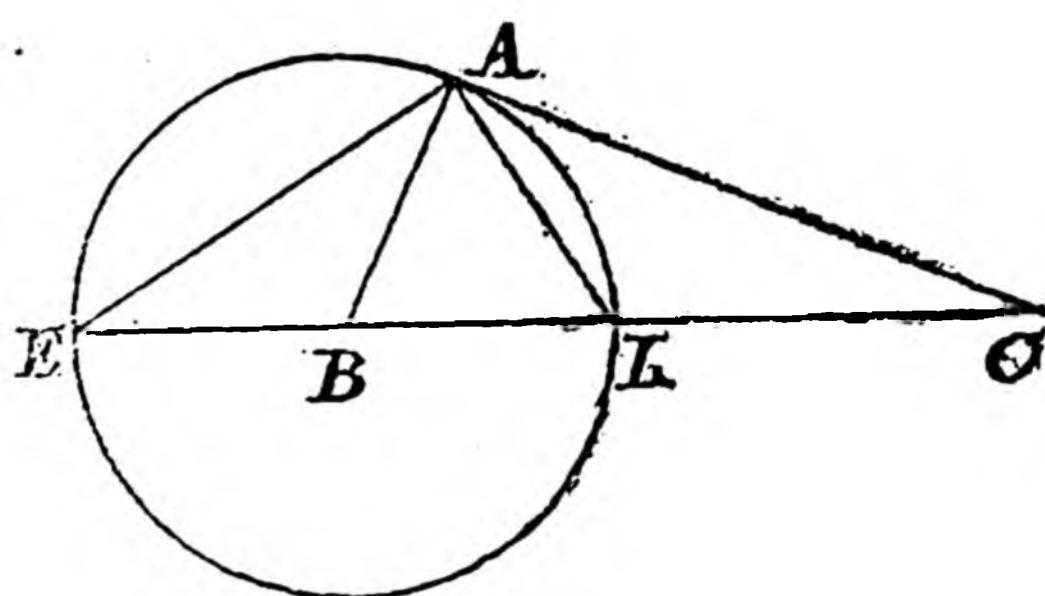
$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = (BC + AB)(BC - AB)$$

т. е. одинъ изъ катетовъ долженъ быть средне пропорціоналенъ между суммою и разностью гипотенузы и другаго катета.

Очевидно, что предложенная теорема и выведенная изъ нея, какъ слѣдствіе, суть взаимныя. Надобно доказать эту послѣднюю.

Для этого, изъ точки  $B$  какъ изъ центра опишемъ радиусомъ  $BA$  кругъ (фиг. 512) и продолжимъ гипотенузу до встрѣчи съ кругомъ въ точкѣ  $E$ . Очевидно, что  $CE = BC + AB$ ,

Фиг. 512.



а  $LC = BC - AB$ . Слѣдовательно надобно показать, что  $AC$ , касательная къ кругу, есть средне пропорціональная между  $CE$  и  $CL$ .

Если эта послѣдняя теорема будетъ справедлива, то изъ нея будетъ выходить, какъ



слѣдствіе третья теорема: что треугольники  $AEC$  и  $ALC$ , имѣющіе одинъ уголъ  $C$  общій и стороны заключающія этотъ уголъ пропорціональны, будутъ подобны.

Очевидно опять, что эти двѣ послѣднія теоремы взаимны, слѣдовательно остается доказать послѣднюю: что треугольники  $AEC$  и  $ALC$  подобны, а это слѣдуетъ изъ того, что эти треугольники равноугольны.

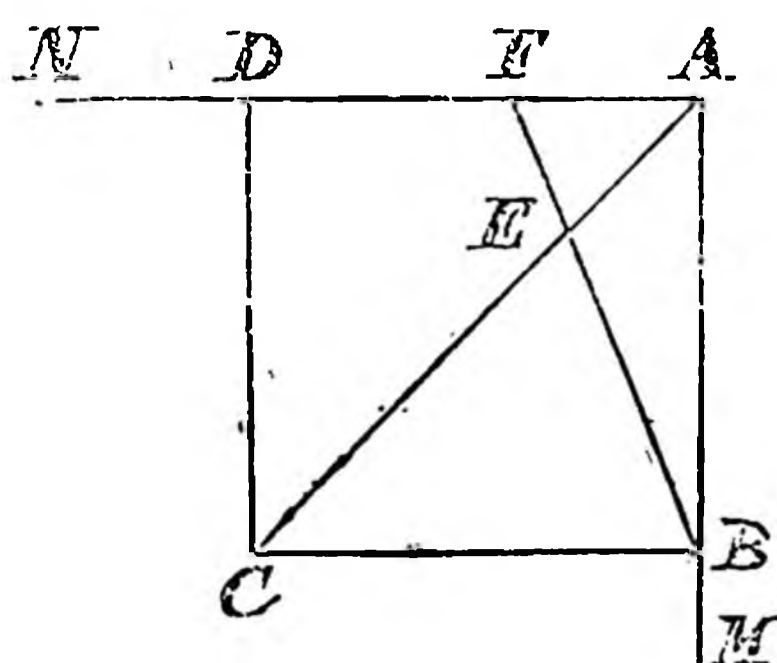
Въ этомъ послѣднемъ процессѣ надобно было удостовѣриться всякій разъ, что двѣ послѣдовательныя теоремы взаимны, чтобы отъ истины послѣдней заключать о истинѣ предложенной. Если такая взаимность не имѣетъ мѣста, или если мы не удостовѣрились въ взаимности, то надобно удостовѣриться обратнымъ порядкомъ доказательства въ справедливости предложенной теоремы.

Для примѣра я возьму слѣдующую задачу:

*Задача.* Построить квадратъ по данной разности діагонали и стороны?

*Рѣшеніе.* Пусть  $ABCD$  будетъ требуемый квадратъ (фиг. 513),  $AE$  данная разность,  $CE$  будетъ равна сторонѣ квадрата, слѣдовательно, треугольникъ  $CEB$  будетъ равнобедренный. Если продолжимъ  $BE$  до встрѣчи съ  $AD$  въ точкѣ  $F$ , то углы треугольника  $AEF$  будутъ равны угламъ треугольника  $CEB$ , слѣдовательно и  $\triangle AEF$  будетъ равнобедренный и мы будемъ имѣть  $AF=AE$ . Точка  $F$  слѣдовательно можетъ быть построена, а за тѣмъ и требуемый квадратъ.

Фиг. 513.



Въ самомъ дѣлѣ, построивъ линію  $AE$  равную данной разности, проведемъ неопредѣленные прямыя  $AM$  и  $AN$ , составляющія углы съ  $AE$  равные, каждый, половинѣ прямого. На линіи  $AN$  возьмемъ  $AF=AE$  и продолжимъ  $FE$  до встрѣчи съ  $AM$  въ точкѣ  $B$ ,  $AB$  и будетъ сторона квадрата, который и построимъ, если изъ точки  $B$  возставимъ перпендикуляры  $BC$  къ  $AB$  и  $CD$  къ  $AN$ .

Такъ какъ мы не удостовѣрились во взаимности, то надобно показать, что фигура построенная по условію  $AF=AE$  есть квадратъ и удовлетворяетъ задачѣ. Во первыхъ это квадратъ, такъ какъ уголъ  $A$  есть прямой. Кромѣ этого углы треугольника  $CEB$  равны угламъ равнобедреннаго  $\triangle AEF$ , слѣдовательно и  $\triangle CEB$  будетъ равнобедренный и мы будемъ имѣть  $CE=CB$ , слѣдовательно  $AE$  будетъ дѣйствительно разность діагонали и стороны квадрата.

Мнѣ кажется я достаточно выяснилъ аналитическій способъ, перейду къ синтезу.

*Способъ синтетическій.* Синтезъ отличается отъ анализа только обратнымъ порядкомъ теоремъ начинающихся въ анализѣ съ предложенной и оканчивающійся, какою нибудь извѣстною теоремой.

Въ синтезѣ начинаютъ съ извѣстныхъ предложеній, чтобы вывести изъ нихъ другія, какъ необходимыя слѣдствія, изъ этихъ послѣднихъ выводятъ новыя и продолжаютъ, такимъ образомъ, до тѣхъ поръ, пока не дойдутъ до предложенной теоремы. Изъ этого ви-

димъ, что если мы знаемъ аналитическое доказательство теоремы, то изъ него получимъ синтетическое, поставивъ въ обратномъ порядкѣ аналитическій рядъ предложеній.

Примѣромъ для синтетическаго способа можетъ служить обыкновенное доказательство, изложенное въ Началахъ Евклида, теоремы Пифагора (кн. 1, пред. 47).

Къ этому способу относится тоже замѣчаніе, что и къ анализу именно: какія предложенія мы должны выбрать для исхода? Отвѣта на этотъ вопросъ и здѣсь дать нельзя, часто можно сдѣлать много попытокъ безъ успѣха. Анализъ, въ этомъ отношеніи имѣетъ нѣкоторое преимущество предъ синтезомъ, въ анализѣ исходная теорема дана—это предложенная теорема для доказательства.

*Способъ приведенія къ нелѣпости—абсурду.* Два предложенія, изъ коихъ каждое есть отрицаніе другого, называются *противорѣчащими*. Справедливость одного изъ этихъ предложеній влечетъ ложность другаго и обратно.

Изъ этого послѣдняго замѣчанія вытекаетъ не прямой способъ доказательства известной теоремы и состоитъ въ томъ, что рассматриваютъ ей противорѣчащую и показываютъ ея ложность. Обыкновенно это противорѣчащее предложеніе будетъ заключать нѣсколько случаевъ и чтобы это противорѣчащее предложеніе было ложно необходимо чтобы каждый изъ случаевъ былъ ложенъ, въ противномъ случаѣ, т. е. если хоть одинъ изъ всѣхъ случаевъ не будетъ ложенъ, то предложенная теорема будетъ ложна.

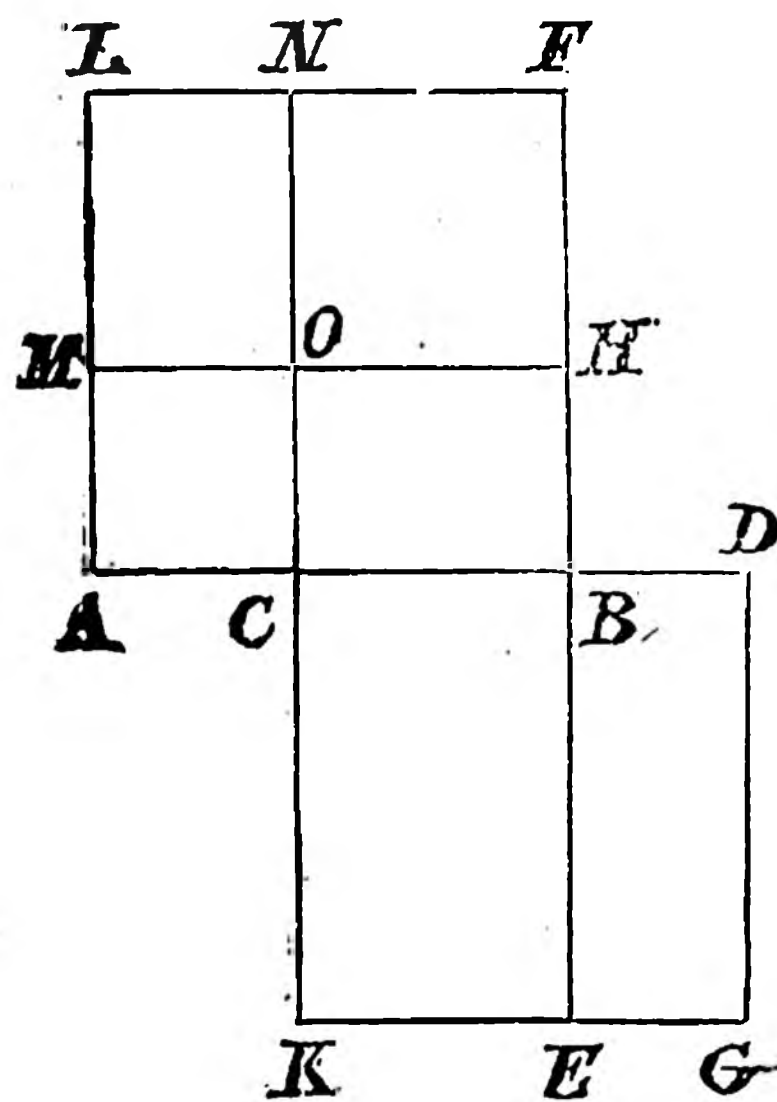
Слѣдовательно, надобно рассматривать каждый случай отдѣльно и показать, что каждый изъ нихъ, будучи принятъ, ведетъ къ нелѣпости. Для примѣра можно взять пред. 6, кн. 1 Началъ Евклида.

Замѣтимъ еще, что *способъ предположъ* есть ничто иное какъ способъ приведенія къ нелѣпости.

Замѣтимъ, что изобрѣтеніе этого способа приписываютъ Евклиду. Древніе геометры часто употребляли этотъ способъ, такъ какъ софисты своими тонкими возраженіями принуждали ихъ къ этому.

*Предложеніе 2.* Если квадратъ, построенный на прямой  $AB$  равенъ пять разъ взятому квадрату построенному на одномъ изъ ея отрѣзковъ  $AC$ , то отрѣзокъ  $CD=2AC$  въ точкѣ  $B$  будетъ раздѣленъ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи такъ, что  $CB$  есть другой, большій отрѣзокъ данной прямой  $AB$  (фиг. 514).

Фиг. 514.



*Доказат.* На прямыхъ  $AB$ ,  $CD$  построимъ квадраты  $AF$ ,  $CG$ ; дополнимъ (какъ въ кн. 2, пред. 4) фигуру въ  $AF$  и продолжимъ  $FB$  до  $E$ .

Такъ какъ  $\square AB = 5\square AC$ , т. е.  $AF = 5AO$ , то:

$$\text{гномонъ } OMLFBCO = 4AO = 4\square AC$$

Но  $DC = 2AC$ , а потому (кн. 6, пред. 20, слѣд.)  $\square DC = 4\square AC$ , т. е.  $CG = 4AO$ , слѣдовательно гномонъ  $OMLFBCO = CG$ .

Такъ какъ  $DC = 2AC$ , но  $DC = CK$  и  $AC = CO$ , то  $CK = 2CO$ , слѣдовательно  $KB = 2BO$ ; а потому, такъ какъ:

$$LO + OB = 2OB$$

то:

$$LO + OB = KB$$

Но мы имѣли гномонъ  $OMLFBCO = CG$ . слѣдовательно (кн. 1, пред. 3)  $OF = BG$ ; но  $BG = CD.DB$ , такъ какъ  $CD = DG$  и  $OF = \square BC$ , слѣдовательно  $CD.DB = \square BC$ ; а потому (кн. 6, пред. 17):

$$CD : BC = BC : DB$$

Изъ этого слѣдуетъ, что  $CD$ , т. е.  $2AC$ , въ точкѣ  $B$ , раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи; а потому  $CD > BC$  (слѣдующая Лемма), слѣдовательно  $BC > DB$ .

*Лемма.* Что  $CD$ , т. е.  $2AC > BC$ , доказывается слѣдующимъ образомъ:

Пусть не будетъ  $2AC > BC$ , а пусть, если возможно,  $BC = 2AC$ , слѣдовательно  $\square BC > 4\square AC$ , а потому:

$$\square BC + \square AC = 5\square AC$$

Но мы предположили, что  $\square BA = 5\square AC$ , слѣдовательно мы бы имѣли:

$$\square BA = \square BC + \square AC$$

что невозможно (кн. 2, пред. 4). А потому не можетъ быть  $BC = 2AC$ .

Если бы мы предположили, что  $BC > 2AC$ , то изъ подобныхъ заключеній слѣдовало бы, что:

$$\square AB < \square CB + \square AC$$

что еще менѣе возможно. слѣдовательно необходимо  $2AC > BC$ .

*Замѣчаніе.* Пусть  $DA$  и  $AC$  (фиг. 515) будутъ оба отрѣзка прямой

Фиг. 515.



$DC$ ; пусть еще  $AB = 2AD$  и  $\square CD = 5\square AD$ , то требуется еще инымъ образомъ доказать, что:

$$AB : AC = AC : CB$$

и что  $AC > CB$ .

1) *Аналитическое доказательство.* Примемъ за доказанное, что:

$$AB:AC=AC:CB$$

то (кн. 6, пред. 17)  $AB \cdot BC = \square AC$ . Но, такъ какъ  $AB=2AD$  то:

$$BA \cdot AC = 2(DA \cdot AC)$$

слѣдовательно:

$$(AB \cdot BC) + (BA \cdot AC)$$

т. е. (кн. 2, пред. 2):

$$\square AB = \square AC + 2(DA \cdot AC)$$

но  $\square AB = 4\square AD$ , слѣдовательно:

$$\square AC + 2(DA \cdot AC) = 4\square AD$$

а потому:

$$\square AC + \square AD + 2(DA \cdot AC)$$

т. е. (кн. 2, пред. 4):

$$\square CD = 5\square AD$$

что было принято выше.

2) *Синтетическое доказательство.* Такъ какъ  $\square CD = 5\square AD$ ; но (кн. 2, пред. 4):

$$\square CD = \square AD + \square AC + 2(DA \cdot AC)$$

а потому:

$$\square AD + \square AC + 2(DA \cdot AC) = 5\square AD$$

слѣдовательно:

$$\square AC + 2(DA \cdot AC) = 4\square AD.$$

Но:

$$2(DA \cdot AC) = BA \cdot AC$$

и (кн. 2, пред. 2):

$$4\square AD = \square AB = (AB \cdot BC) + (AB \cdot AC)$$

слѣдовательно:

$$(AB \cdot BC) + (AB \cdot AC) = (BA \cdot AC) + \square AC$$

а потому  $AB \cdot BC = \square AC$ , слѣдовательно:

$$AB:AC=AC:CB$$

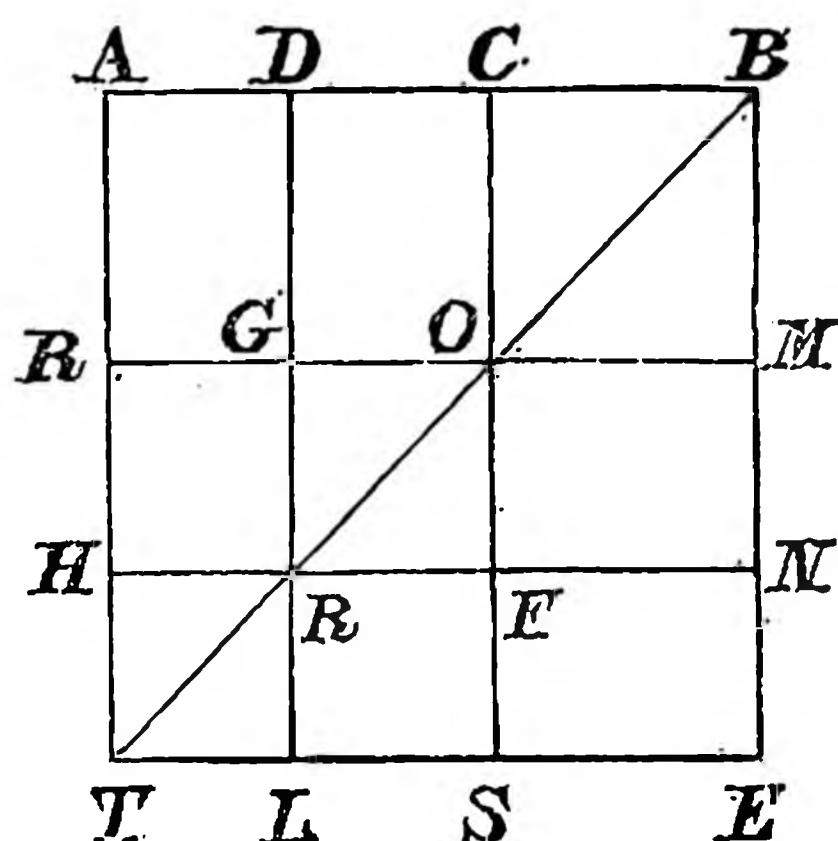
а такъ какъ  $AB > AC$ , то и  $AC > CB$ .

*Предложеніе 3.* Если прямая  $AB$ , въ точкѣ  $C$ , раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то квадратъ построенный на прямой  $BD$ , составленной изъ меньшаго отрѣзка  $BC$  и половины большаго  $DC$ , равенъ



пять разъ взятому квадрату, построенному на половинѣ  $DC$  большаго от-  
рѣзка (фиг. 516).

Фиг. 516.



*Доказат.* На прямой  $AB$  построимъ квадратъ  $AE$  и дополнимъ фи-  
гуру.

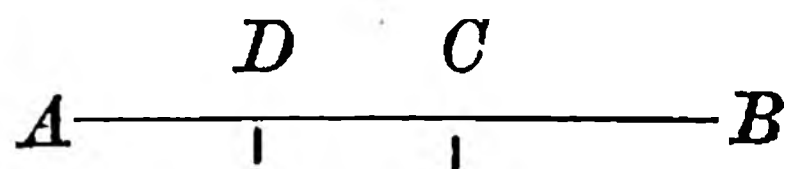
Такъ какъ  $AC=2DC$ , то  $\square AC=4\square DC$ , т. е.  $RS=4FG$ . Но (кн. 6,  
пред. 17)  $AB.BC=\square AC$ , т. е.  $CE=BS$ , слѣдовательно  $CE=4FG$ .

Такъ какъ  $AD=DC$ , а также (кн. 1, пред. 34)  $HK=KF$ , то  
 $GF=HL$ , слѣдовательно  $GK=KL$ , т. е.  $MN=NE$ , откуда (кн. 1,  
пред. 36)  $MF=FE$ . Но (кн. 1, пред. 43)  $MF=CG$ , слѣдовательно  $CG=$   
 $=FE$ , а потому прибавивъ  $CN$ , то гномонъ  $OGDBNF=CE$ , или по выше  
доказанному,  $=4FG$ , слѣдовательно  $DN=5FG$ . Итакъ  $DN=\square DB$ , а также  
 $FG=\square DC$ . слѣдовательно  $\square DB=5\square DC$ , т. е.:

$$\square(BC+\frac{1}{2}AC)=5\square\frac{1}{2}AC.$$

*Замѣчаніе.* Пусть  $AB$ , въ точкѣ  $C$ , раздѣлена въ крайнемъ и сред-  
немъ отношеніи,  $AC$  большій отрѣзокъ и  $CD=\frac{1}{2}AC$ , требуется доказать  
инымъ образомъ, что  $\square BD=5\square CD$  (фиг. 517).

Фиг. 517.



1) *Аналитическое доказательство.* Примемъ за доказанное, что  
 $\square BD=5\square CD$ , такъ какъ (кн. 2, пред. 6):

$$\square BD=(AB.BC)+\square CD$$

то  $AB.BC=4\square CD$ . Но на основаніи предположеннаго  $AB.BC=\square AC$ ,  
слѣдовательно  $\square AC=4\square CD$ , что и должно быть, такъ какъ  $AC=2AD$ .

2) *Синтетическое доказательство.* Такъ какъ  $AC=2DC$ , то  $\square AC=$   
 $=4\square DC$ , но (кн. 6, пред. 17)  $\square AC=AB.BC$ , слѣдовательно  $AB.BC=$   
 $=4\square DC$ , а потому:

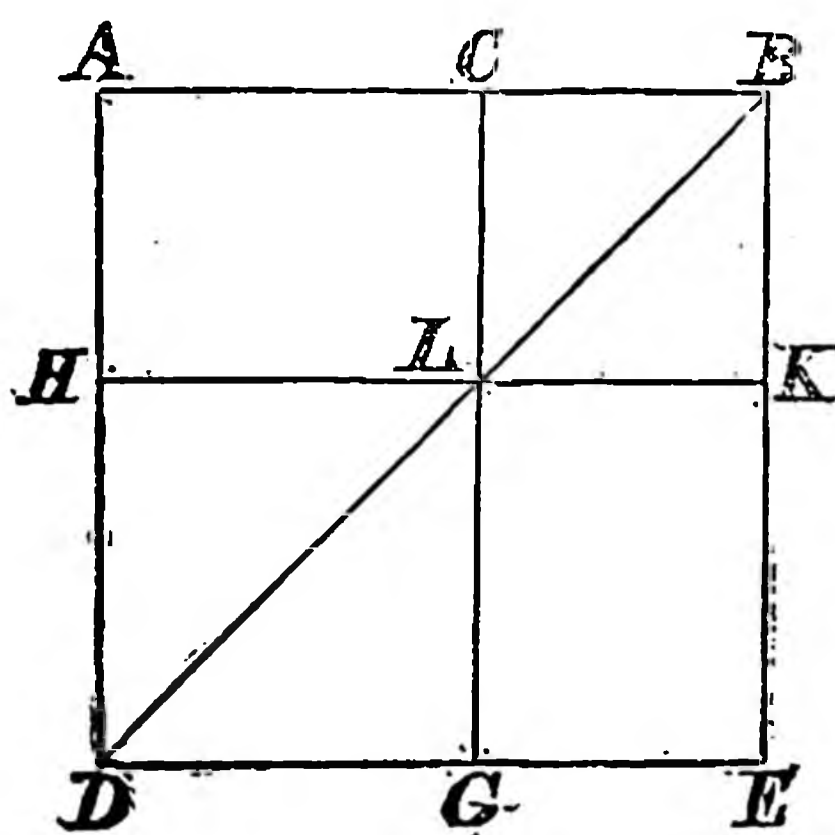
$$AB \cdot BC + \square DC$$

т. е. (кн. 2, пред. 6):

$$\square DB = 5 \square DC.$$

*Предложеніе 4.* Если прямая  $AB$ , въ точкѣ  $C$ , раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то сумма квадратовъ построенныхъ на цѣлой  $AB$  и на меньшемъ отрѣзкѣ  $CB$ , равна утроенному квадрату, построенному на большемъ отрѣзкѣ  $AC$  (фиг. 518).

Фиг. 518.



*Доказат.* На прямой  $AB$  построимъ квадратъ  $ADEB$  и дополнимъ фигуру.

Такъ какъ:

$$AB : AC = AC : CB$$

то  $AB \cdot CB = \square AC$ , т. е.  $AK = HG$ .

Но (кн. 1, пред. 43)  $AF = FE$ , а потому, прибавивъ  $CK$ ,  $AK = CE$ , слѣдовательно:

$$CE + AK = 2AK = 2HG$$

такъ какъ по предыдущему  $AK = HG$ . Но:

$$CE + AK = \text{гномону } FHABEGF + CK$$

Слѣдовательно:

$$\text{гномонъ } FHABEGF + CK = 2HG$$

а потому:

$$\text{гномонъ } FHABEGF + CK + HG = 3HG$$

Итакъ:

$$\text{гномонъ } FHABEGF + CK + HG = AE + CK = \square AB + \square BC$$

и  $HG = \square AC$ . Слѣдовательно:

$$\square AB + \square BC = 3\square AC.$$

*Замѣчаніе.* Пусть  $AB$ , въ точкѣ  $C$ , раздѣлена въ крайнемъ и сред-

немъ отношеніи и пусть  $AC$  большій отрѣзокъ, требуется доказать инымъ образомъ, что (фиг. 519):

Фиг. 519.



$$\square AB + \square BC = 3\square AC$$

1) *Аналитическое доказательство.* Такъ какъ:

$$\square AB + \square BC = 3\square AC$$

и (кн. 2, пред. 7):

$$\square AB + \square BC = 2(AB \cdot BC) + \square AC$$

то:

$$2(AB \cdot BC) + \square AC = 3\square AC$$

слѣдовательно:

$$2(AB \cdot BC) = 2\square AC$$

а потому  $AB \cdot BC = \square AC$ , что справедливо (кн. 6, пред. 17), такъ какъ прямая  $AB$ , въ точкѣ  $C$ , раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

2) *Синтетическое доказательство.* Такъ какъ:

$$AB : AC = AC : CB$$

то (кн. 6, пред. пред. 17)  $AB \cdot CB = \square AC$ , а потому  $2(AB \cdot CB) = 2\square AC$ , слѣдовательно:

$$2(AB \cdot CB) + \square AC = 3\square AC$$

Но (кн. 2, пред. 7):

$$2(AB \cdot CB) + \square AC = \square AB + \square BC$$

слѣдовательно:

$$\square AB + \square BC = 3\square AC$$

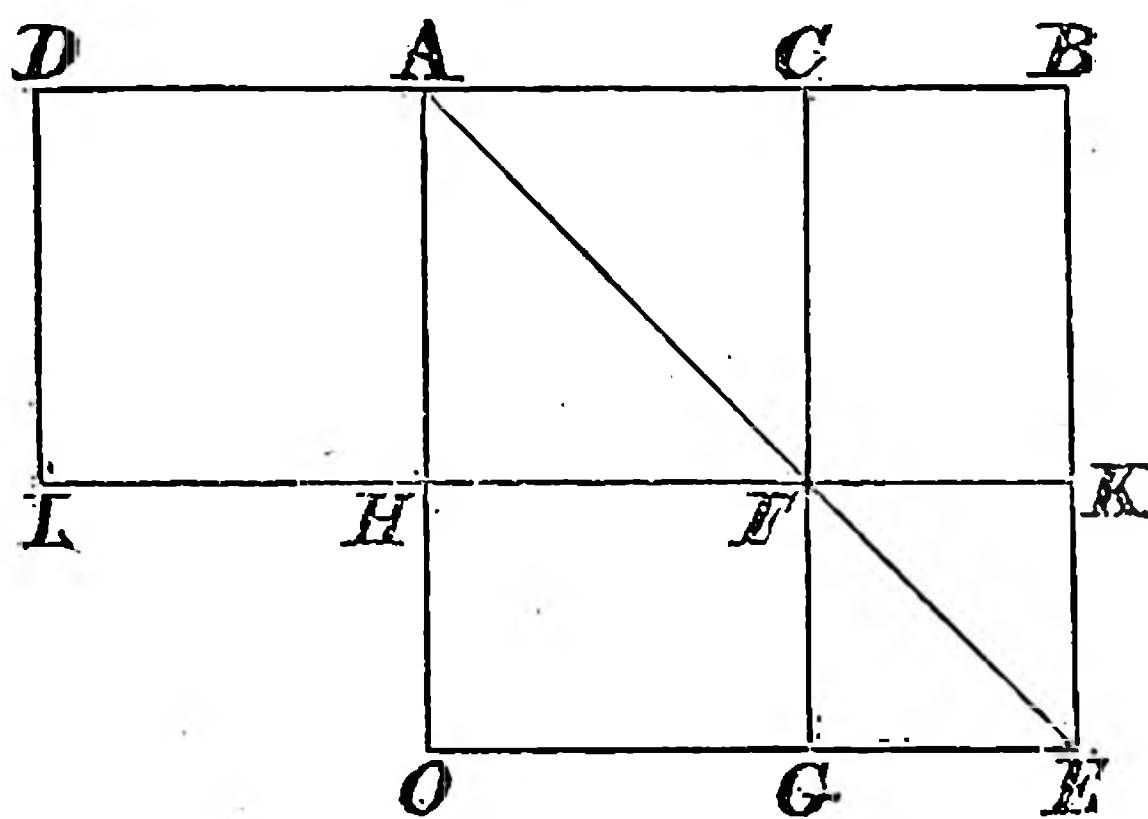
*Предложеніе 5.* Если прямую  $AB$ , въ точкѣ  $C$ , раздѣлимъ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, и на ея продолженіи къ ней приложимъ прямую  $AD$ , равную большому отрѣзку  $AC$ , то цѣлая прямая  $DB$ , въ точкѣ  $A$ , раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, большій же отрѣзокъ есть данная прямая  $AB$  (фиг. 520).

*Доказат.* На прямой  $AB$  построимъ квадратъ  $AE$  и дополнимъ фигуру.

Такъ какъ:

$$AB:AC=AC:CB$$

Фиг. 520.



то (кн. 6, пред. 17)  $AB \cdot CB = \square AC$ , т. е.  $CE = CH$ ; но (кн. 1, пред. 43)  $CH = DH$  и  $CE = HE$ , слѣдовательно  $DH = HE$ ; а потому, прибавивъ  $HB$ ,  $DK = AE$ , т. е.  $BD \cdot DA = \square AB$ , слѣдовательно (кн. 6, пред. 17):

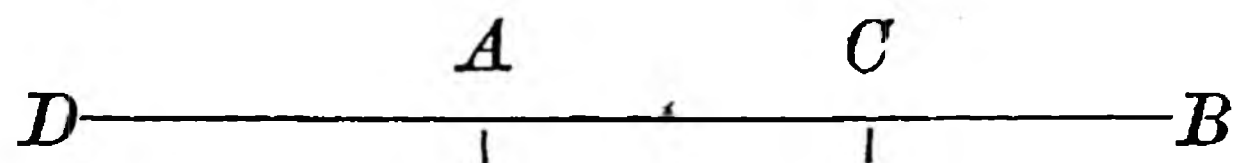
$$BD:AB=AB:DA$$

а такъ какъ  $BD > AB$ , то и  $AB > DA$ .

*Замѣчаніе.* Пусть прямая  $AB$ , въ точкѣ  $C$ , раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи,  $AC > CB$  и къ  $AB$  приложена прямая  $AD = AC$ , требуется доказать инымъ образомъ, что (фиг. 521):

$$DB:BA=BA:AD$$

Фиг. 521.



1) *Аналитическое доказательство.* Такъ какъ:

$$DB:BA=BA:AD$$

но  $AD = AC$ , а потому:

$$DB:BA=BA:AC$$

слѣдовательно (кн. 5, пред. 19, слѣд.):

$$DB:DA=AB:BC$$

а потому (кн. 5, пред. 17, слѣд.):

$$BA:AD=AC:CB$$

Но  $AD = AC$ , слѣдовательно:

$$BA:AC=AC:CB$$

какъ было предположено.



2) *Синтетическое доказательство.* Такъ какъ:

$$BA : AC = AC : CB$$

но  $AC = AD$ , то:

$$BA : AD = AD : CB$$

слѣдовательно (кн. 5, пред. 18):

$$BD : DA = BA : BC$$

откуда (кн. 5, пред. 19, слѣд.):

$$BD : BA = BA : AC$$

Но  $AC = AD$ , слѣдовательно:

$$BD : BA = BA : AD$$

и  $BA > AD$ .

*Предложеніе 6.* Если рациональную прямую  $AB$ , въ точкѣ  $C$ , раздѣлимъ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то каждый изъ ея отрѣзковъ  $AC$  и  $CB$  есть *вычетъ* (фиг. 522).

Фиг. 522.



*Доказат.* Продолжимъ  $BA$  до точки  $D$  и отложимъ  $AD = \frac{1}{2} AB$ , то (кн. 13, пред. 1)  $\square CD = 5 \square AD$ . Изъ этого слѣдуетъ, что  $\square CD$  и  $\square DA$  относятся между собою какъ числа, а потому (кн. 10, пред. 6) они соизмѣримы. Но  $DA = \frac{1}{2} AB$  рациональна, а потому также рационаленъ  $\square DA$ . Слѣдовательно (кн. 10, опред. 6)  $\square CD$  рациональный, а потому и (кн. 10, опред. 8)  $CD$  также рациональна.

Но такъ какъ квадраты  $CD$  и  $AD$  относятся между собою не какъ квадратныя числа, то (кн. 10, пред. 9)  $CD$  и  $AD$  по длинѣ несоизмѣримы. А потому  $CD$  и  $AD$  рациональны, только въ степени соизмѣримы; слѣдовательно (кн. 10, пред. 74)  $AC$  есть *вычетъ*.

Такъ какъ прямая  $AB$ , въ точкѣ  $C$ , раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то (кн. 6, пред. 17)  $AB \cdot BC = \square AC$ , слѣдовательно (кн. 10, пред. 98)  $CB$  есть *первый вычетъ*.

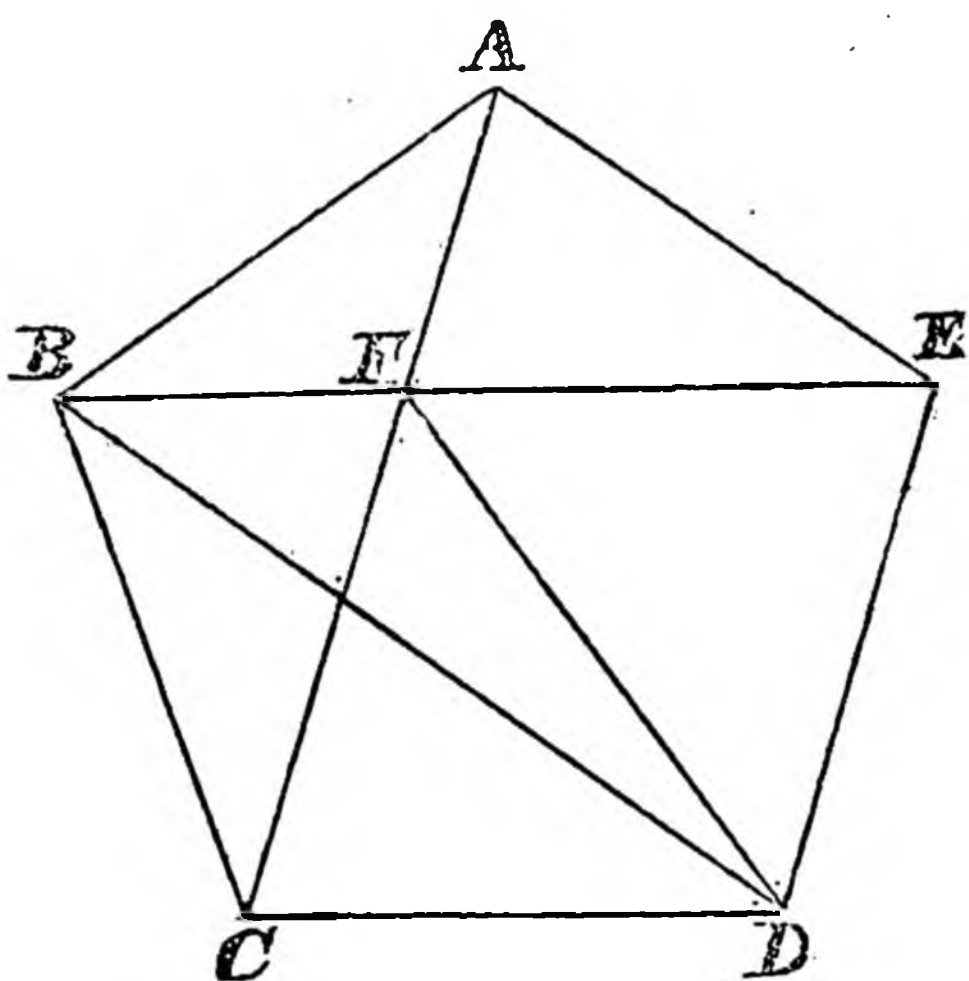
*Предложеніе 7.* Если въ пятиугольникѣ  $ABCDE$ , съ равными сторонами, три угла, слѣдующіе одинъ за другимъ, по порядку, или же не по порядку, равны, то пятиугольникъ будетъ правильный (фиг. 523).

*Доказат. Случай первый.* Три угла  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , слѣдуютъ одинъ за другимъ по порядку.

Проведемъ  $AC$ ,  $BE$ ,  $FD$ .

Такъ какъ въ  $\triangle EAB$  и  $\triangle ABC$ , по положенію  $\angle A = \angle B$  и  $CB = BA = AE$ , то (кн. 1, пред. 4)  $AC = BE$ ,  $\angle BCA = \angle BEA$  и  $\angle ABE =$

Фиг. 523.



$= \angle CAB$ . Изъ этого слѣдуетъ, что въ  $\triangle AFB$   $\angle ABE = \angle CAB$ , а потому (кн. 1, пред. 6)  $AF = BF$ , но по предъидущему  $AC = BE$ , слѣдовательно (кн. 1, пред. 3)  $FC = FE$ . Итакъ въ  $\triangle CFD$ ,  $\triangle DFE$ , стороны  $CD = DE$  и  $FD$  общая. слѣдовательно (кн. 1, пред. 8)  $\angle FCD = \angle FED$ ; но по предъидущему  $\angle BCA = \angle AEB$ , слѣдовательно (кн. 1, пред. 2)  $\angle BCD = \angle AED$ . Но мы предположили  $\angle BCD = \angle A = \angle B$ , слѣдовательно  $\angle AED = \angle A = \angle B$ . Подобнымъ же образомъ доказывается, что  $\angle CDE = \angle A = \angle B$ . слѣдовательно  $ABCDE$  равноугольная фигура.

*Случай второй.* Три угла  $A$ ,  $C$ ,  $D$ , слѣдуютъ одинъ за другимъ не по порядку.

Проведемъ  $BD$ .

Такъ какъ въ  $\triangle ABE$  и  $\triangle BCD$  по предположенію  $\angle A = \angle C$ ,  $BA = BC$ ,  $AE = CD$ , то (кн. 1, пред. 4)  $BE = BD$ ,  $\angle AEB = \angle CDB$  и (кн. 1, пред. 5)  $\angle BED = \angle BDE$ , слѣдовательно (кн. 1, пред. 2)  $\angle AED = \angle CDE$ . Но мы также предположили, что  $\angle CDE = \angle A = \angle C$ , слѣдовательно  $\angle AED = \angle A = \angle C$ . Подобнымъ же образомъ доказывается, что  $\angle ABC = \angle A = \angle C$ . слѣдовательно фигура  $ABCDE$  равноугольна.

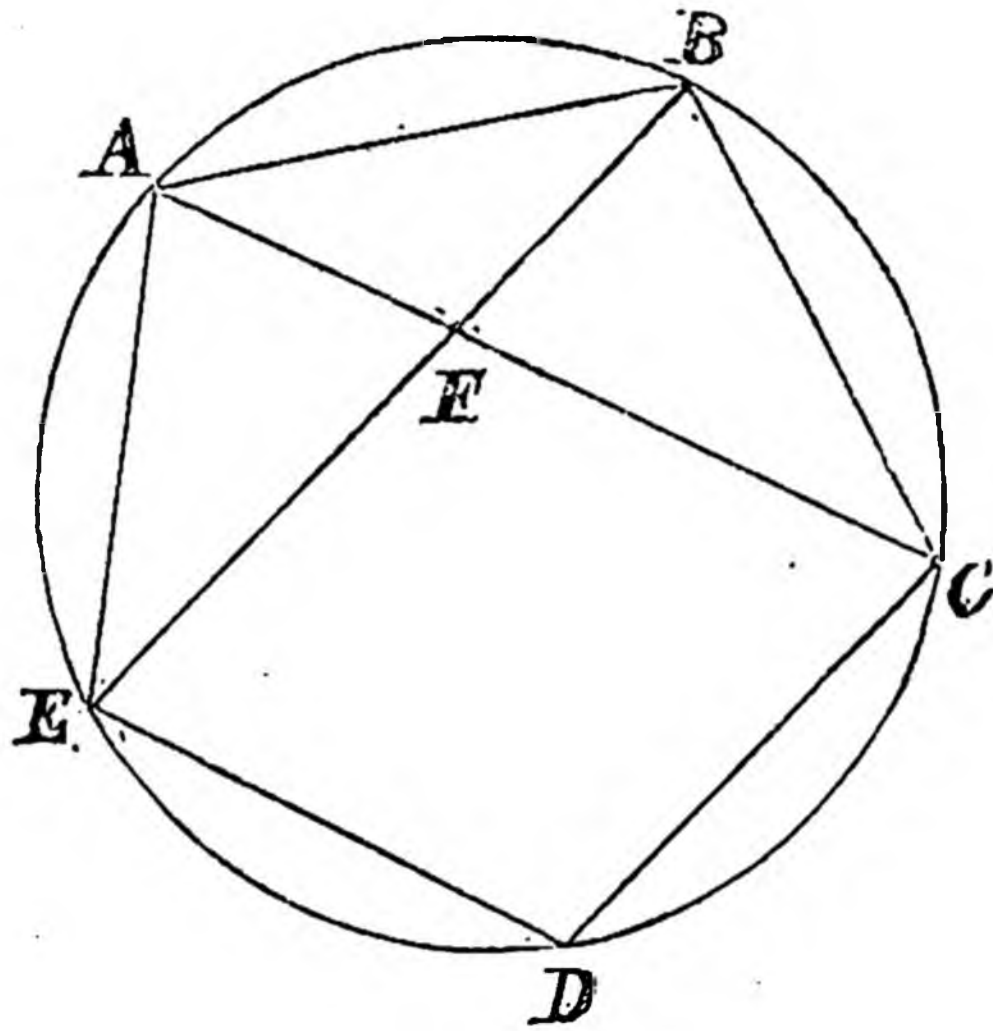
*Предложеніе 8.* Въ пятиугольной фигурѣ  $ABCDE$ , съ равными сторонами и равными углами, діагонали  $BE$  и  $AC$ , проведенныя изъ вершинъ двухъ, слѣдующихъ одинъ за другимъ, угловъ  $A$  и  $B$ , дѣлятся въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, и большій отрѣзокъ равенъ сторонамъ фигуры (фиг. 524).

*Доказат.* Около данной фигуры опишемъ кругъ (кн. 4, пред. 14).

Такъ какъ въ  $\triangle BAE$  и  $\triangle ABC$  по положенію  $\angle A = \angle B$ ,  $EA = AB = BC$ , то (кн. 1, пред. 4)  $BE = AC$  и  $\angle BAC = \angle ABE$ , слѣдовательно (кн. 1, пред. 6 и пред. 32)  $\angle AFE = 2\angle BAF$ , но (кн. 6, пред. 33)  $\angle EAC = 2\angle BAC$ , а потому  $\angle EAC = \angle AFE$ , слѣдовательно (кн. 1, пред. 6)  $FE = EA = AB$ .

Такъ какъ  $EA=AB$ , то (кн. 1, пред. 5)  $\angle ABE=\angle AEB$ , но по предыдущему  $\angle ABE=\angle BAF$ , а потому  $\angle AEB=\angle BAF$ , слѣдовательно

Фиг. 524.



въ  $\triangle ABE$  и  $\triangle ABF$  уголъ  $ABE$  общій, а также  $\angle BAE=\angle AFB$ , слѣдовательно эти треугольники равноугольны, откуда (кн. 6, пред. 4):

$$EB:BA=AB:BF$$

но  $BA=EF$ , слѣдовательно:

$$BE:EF=EF:FB$$

въ этой пропорціи  $BE>EF$ , а потому и  $EF>FB$ . Изъ этого слѣдуетъ, что діагональ  $BE$ , въ точкѣ  $F$ , раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, и больший отрѣзокъ  $EF=AB$ .

Подобнымъ же образомъ доказывается, что и  $AC$ , въ точкѣ  $F$ , раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, и больший отрѣзокъ  $=AB$ .

*Предложеніе 9.* Если мы приложимъ одну къ другой стороны  $CD$  и  $BC$ , вписанныхъ въ одинъ и тотъ же кругъ, шестисторонней и десятисторонней фигуры, то цѣлая прямая  $BD$  раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, и больший отрѣзокъ будетъ сторона  $CD$  шестисторонней фигуры (фиг. 525).

*Доказат.* Найдемъ центръ круга  $E$ , проведемъ прямыя  $EB$ ,  $EC$ ,  $ED$  и продолжимъ  $BE$  до  $A$ .

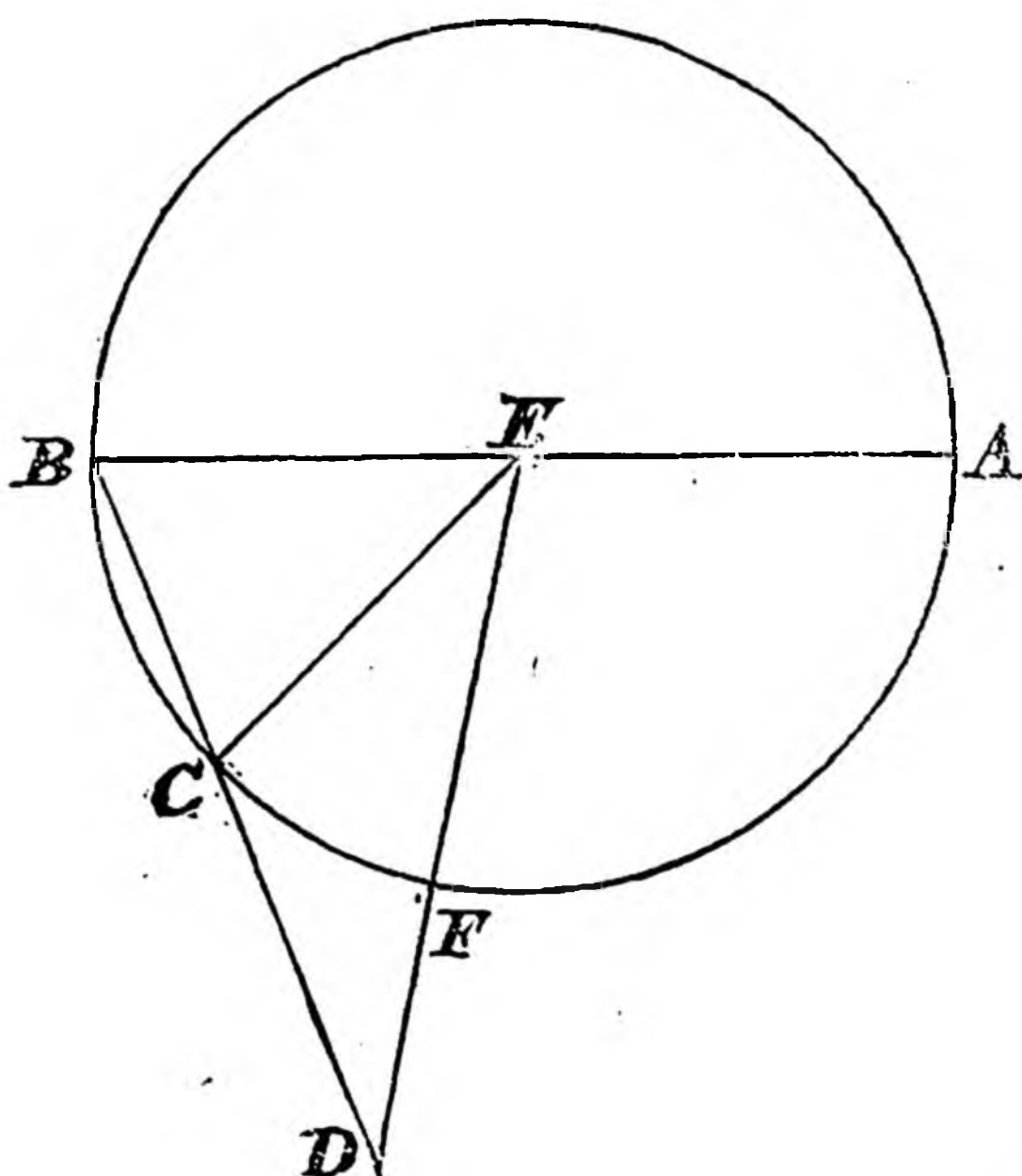
Такъ какъ  $BC$  есть сторона десятисторонней фигуры, то дуга  $ACB=5$  дуг.  $BC$ , слѣдовательно дуга  $AC=4$  дуг.  $BC$ . Но (кн. 6, пред. 33):

$$\text{дуг. } AC:\text{дуг. } BC=\angle AEC:\angle CEB$$

Слѣдовательно  $\angle AEC=4\angle CEB$ . Такъ какъ (кн. 1, пред. 5)  $\angle EBC=\angle ECB$ , то (кн. 1, пред. 32)  $\angle AEC=2\angle ECB$ . Такъ какъ (кн. 4, пред. 15)  $EC=CD$ , слѣдовательно (кн. 1, пред. 5)  $\angle CED=\angle CDE$ , а потому

(кн. 1, пред. 32)  $\angle ECB = 2\angle EDC$ ; но по предыдущему  $\angle AEC = 2\angle ECB$ , следовательно  $\angle AEC = 4\angle EDC$ . Но по предыдущему также  $\angle AEC =$

Фиг. 525.



$= 4\angle ECB$ , следовательно  $\angle EDC = \angle ECB$ ; а потому, такъ какъ въ треугольникахъ  $\triangle BEC$ ,  $\triangle BED$  уголъ  $EBD$  общій, и  $\angle BED = \angle ECB$ , следовательно эти треугольники равноугольны, откуда (кн. 6, пред. 4):

$$DB : BE = EB : BC$$

а потому, такъ какъ  $BE = CD$ , то и:

$$BD : DC = DC : CB$$

въ этой пропорціи  $DC > CB$ , такъ какъ  $BD > DC$ . А потому прямая  $BD$ , въ точкѣ  $C$ , раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, и больший отръзокъ  $DC$  равенъ сторонѣ шестисторонней фигуры.

*Предложеніе 10.* Квадратъ, построенный на сторонѣ  $AB$ , пятисторонней фигуры  $ABCDE$ , вписанной въ кругъ, равенъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на сторонахъ шестисторонней и десятисторонней фигуръ, вписанныхъ въ тотъ же кругъ (фиг. 526).

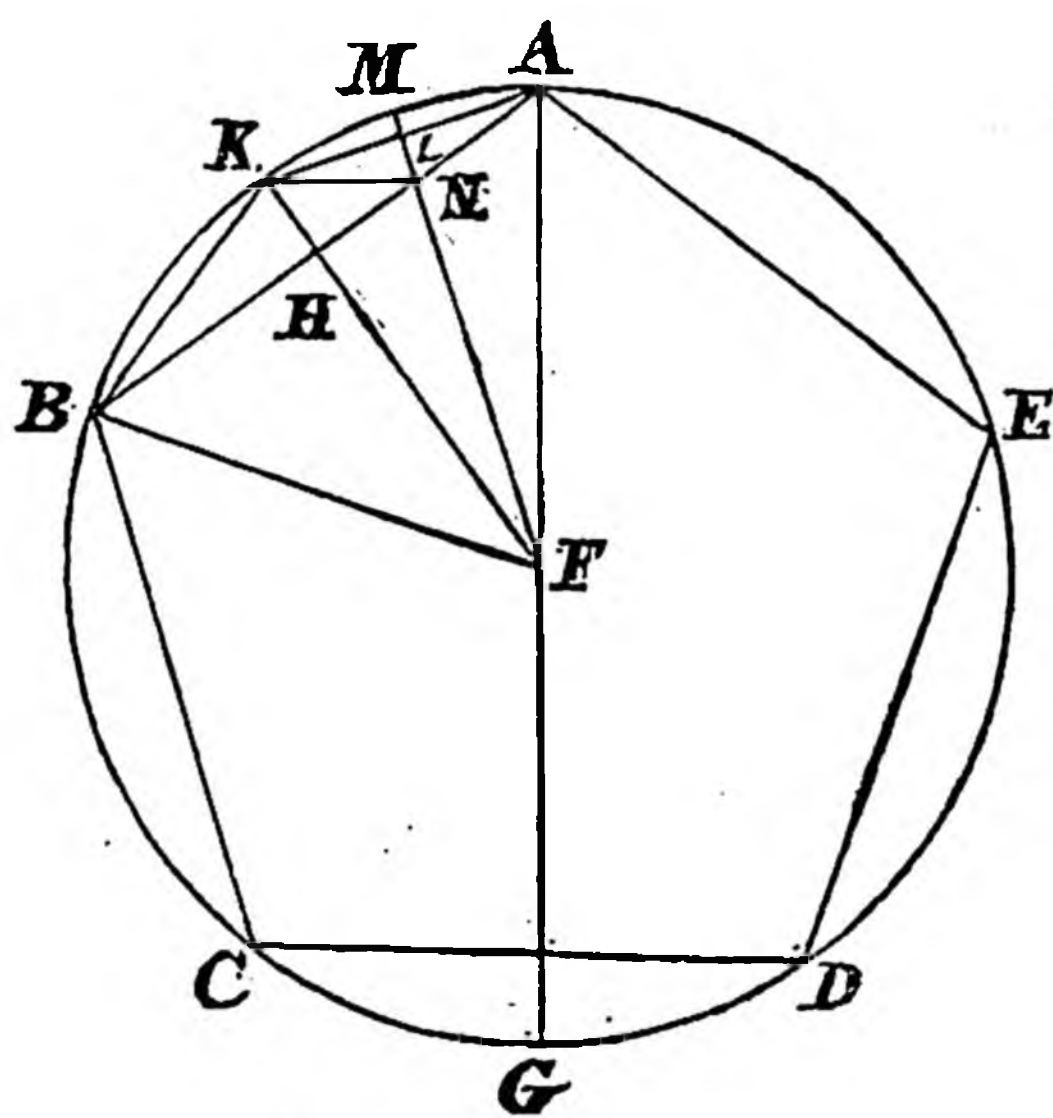
*Доказат.* Возьмемъ центръ круга  $F$ , проведемъ  $AF$  и продолжимъ ее до  $G$ . Проведемъ  $FB$ , изъ точки  $F$  на прямую  $AB$  опустимъ перпендикуляръ  $FH$  и продолжимъ его до точки  $K$ . Проведемъ  $AK$ ,  $KB$ ; изъ точки  $F$ , на прямую  $AK$ , опустимъ перпендикуляръ  $FL$  и продолжимъ его до  $M$ ; проведемъ  $KN$ .

Такъ какъ полуокруги  $ABCG$ ,  $AEDG$  равны, равно какъ и дуги  $ABC$  и  $AED$ , а потому дуги  $CG$  и  $DG$  равны; следовательно  $CG$  есть дуга десятисторонней фигуры. Такъ какъ  $FK$  перпендикулярна къ  $AB$ , то дуга  $AK =$  дугѣ  $KB$ , следовательно  $AK$  также есть дуга десятисторонней фи-



гуры и 2 дуг.  $BK = \text{дуг. } AB = \text{дуг. } BC$ . По той же причинѣ 2 дуг.  $KM = \text{дуг. } AK = \text{дуг. } CG$ . Слѣдовательно (кн. 1, пред. 2) дуга  $BCG = 2 \text{ дуг. } BKM$ ,

Фиг. 526.



а потому (кн. 6, пред. 33)  $\angle GFB = 2 \angle BFM$ . Но  $BF = FA$ , а потому (кн. 1, пред. 5)  $\angle FAB = \angle ABF$ , слѣдовательно (кн. 1, пред. 32)  $\angle GFB = 2 \angle FAB$ . Слѣдовательно  $\angle BFM = \angle FAB$ ; но такъ какъ въ треугольникахъ  $\triangle ABF$ ,  $\triangle BFN$  уголъ  $ABF$  общій,  $\angle AFB = \angle BNF$ , то эти треугольники равноугольны. Слѣдовательно (кн. 6, пред. 4):

$$AB : BF = FB : BN$$

а потому (кн. 6, пред. 17):

$$AB \cdot BN = \square FB$$

Такъ какъ  $AL = LK$  и  $LN$  общая и притомъ перпендикулярная, то (кн. 1, пред. 4)  $KN = AN$  и  $\angle LKN = \angle LAN = \angle NBK$ ; слѣдовательно, такъ какъ въ треугольникахъ  $\triangle AKB$  и  $\triangle AKN$  уголъ  $NAK$  общій и  $\angle AKB = \angle KNA$ , то эти треугольники равноугольны. Слѣдовательно (кн. 6, пред. 4):

$$BA : KA = KA : AN$$

а потому (кн. 6, пред. 17):

$$BA \cdot AN = \square KA$$

Но мы прежде доказали, что:

$$AB \cdot BN = \square FB$$

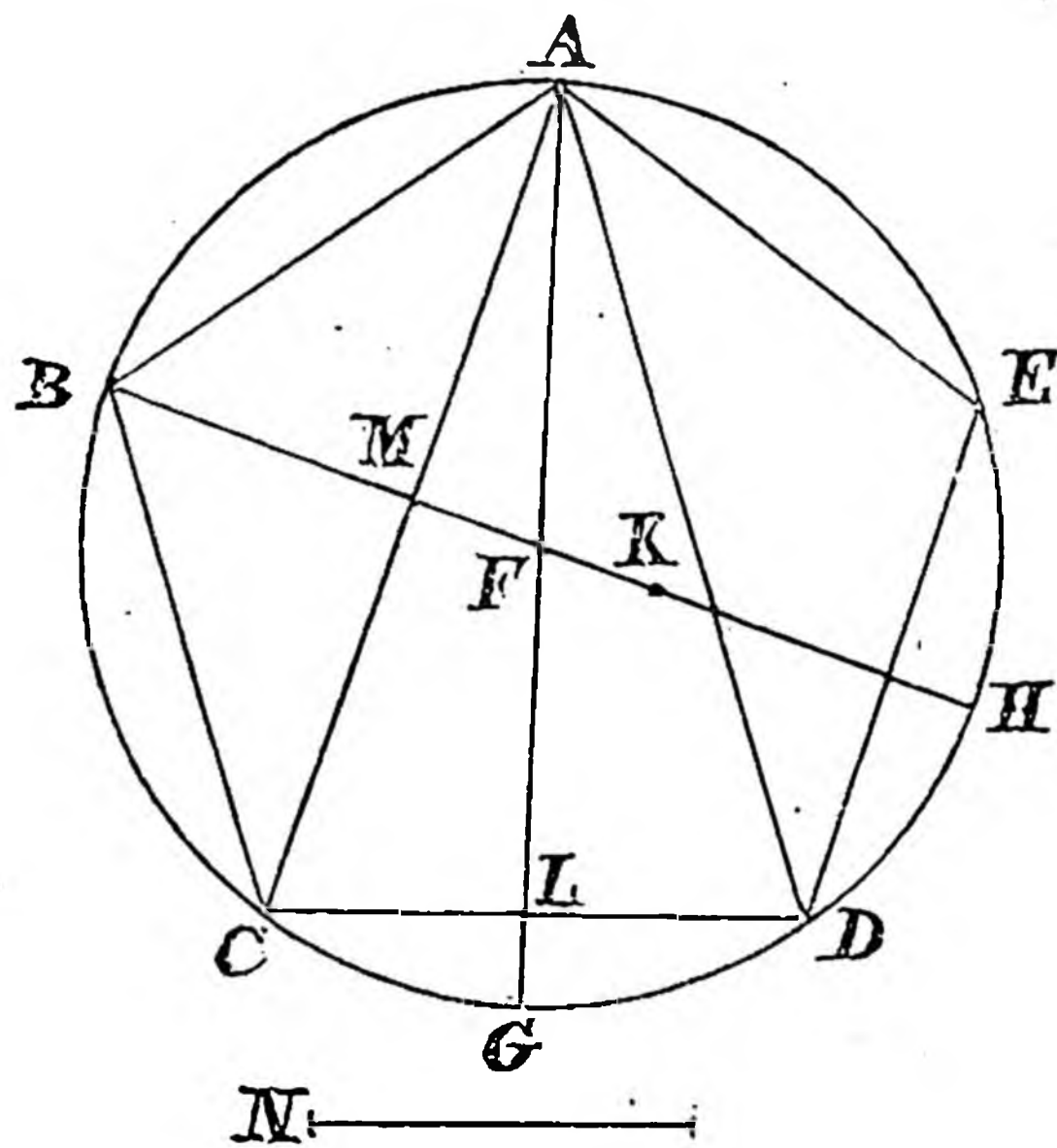
Слѣдовательно (кн. 2, пред. 2):

$$\square FB + \square KA = (AB \cdot BN) + (BA \cdot AN) = \square AB$$

гдѣ  $AB$ ,  $FB$ ,  $KA$  суть стороны, пяти, шести и десятисторонней фигуръ.

*Предложение 11.* Сторона  $AB$  пятисторонней фигуры  $ABCDE$ , вписанной въ кругъ, діаметръ котораго раціоналенъ, есть *малая иррациональная* (фиг. 527).

Фиг. 527.



*Доказат.* Возьмемъ центръ круга  $F$ , проведемъ  $AF$ , продолжимъ ее до  $G$  и  $H$ ; проведемъ  $AC$ ,  $AD$  и сдѣлаемъ  $FB = \frac{1}{2} AF$ .

Такъ какъ  $AF$  и  $BF$  раціональны, то  $FK$ , а потому и  $BK$  раціональны. Такъ какъ полукруги  $ABCG$  и  $AEDG$  равны, а также равны дуги  $ABC$ ,  $AED$ , то дуги  $CG$ ,  $GD$  равны, слѣдовательно (кн. 3, пред. 27)  $\angle CAL = \angle DAL$ . Но (кн. 3, пред. 29)  $AC = AD$  и  $AL$  общая, слѣдовательно (кн. 1, пред. 4) углы при точкѣ  $L$  прямые и  $CD = 2CL$ . По той же причинѣ углы при точкѣ  $M$  также прямые и  $AC = 2CM$ . Слѣдовательно, такъ какъ въ  $\triangle ALC$ ,  $\triangle AMF$  уголь  $LAC$  общій и  $\angle ACL = \angle MFA$ , то изъ этого слѣдуетъ, что эти треугольники равноугольны. Слѣдовательно (кн. 6, пред. 4):

$$LC : CA = MF : FA$$

а потому и:

$$2LC : \frac{1}{2} CA = 2MF : \frac{1}{2} FA = MF : \frac{1}{4} FA$$

Но  $2LC = DC$ ,  $\frac{1}{2} CA = CM$ ,  $\frac{1}{4} FA = FK$ . Слѣдовательно:

$$DC : CM = MF : FK$$

а потому (кн. 5, пред. 18):

$$DC + CM : CM = MK : FK$$

слѣдовательно (кн. 6, пред. 22):

$$\square(DC + CM) : \square CM = \square MK : \square FK$$

Но (кн. 13, пред. 8)  $DC$  есть большій отрѣзокъ, діагонали  $AC$ , проти-

волежашей углу  $B$ , раздѣленной въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, слѣдовательно  $CM = \frac{1}{2} CA$ , а потому (кн. 13, пред. 1):

$$\square(DC + CM) = 5 \square CM$$

Слѣдовательно:

$$\square MK = 5 \square KF$$

изъ этого слѣдуетъ, что  $KF$  рациональна, а потому и  $\square KF$  рационаленъ, слѣдовательно (кн. 10, пред. 6)  $\square MK$ , а потому и  $MK$  рациональны. Такъ какъ  $BF = 4FK$ , то  $BK = 5FK$ , слѣдовательно (кн. 6, пред. 20, слѣд.):

$$\square BK = 25 \square FK$$

но по предыдущему:

$$\square MK = 5 \square FK$$

а потому:

$$\square BK = 5 \square MK$$

Изъ этого слѣдуетъ (кн. 10, пред. 9, слѣд.) что  $BK$ ,  $KM$  только въ степеняхъ соизмѣримы; слѣдовательно (кн. 10, пред. 74)  $MB$  есть *вычетъ*, и къ ней прибавлена  $MK$ .

Пусть будетъ дана прямая  $N$  такая, что:

$$\square BK - \square KM = \square N$$

т. е. что  $BK$  квадратитъ надъ  $KM$  на квадратъ  $N$ . Такъ какъ  $KF$  и  $FB$  по длинѣ соизмѣримы, то также по длинѣ соизмѣримы (кн. 10, пред. 16)  $KV$  и  $VF$ , а также  $BF$  и  $BN$ , слѣдовательно соизмѣримы (кн. 10, пред. 12)  $BK$  и  $BN$ . Такъ какъ:

$$\square BK = 5 \square KM$$

т. е.:

$$\square BK : \square KM = 1 : 5$$

а потому (кн. 5, пред. 19, слѣд.):

$$\square BK : \square N = 5 : 4$$

Слѣдовательно (кн. 10, пред. 9)  $KV$  и  $N$  по длинѣ несоизмѣримы; а потому  $MB$  есть *четвертый вычетъ*.

Проведемъ  $AN$ , то (кн. 6, пред. 8)  $\triangle ABN$  и  $\triangle ABM$  равноугольны, слѣдовательно (кн. 6, пред. 4):

$$NB : BA = AB : BM$$

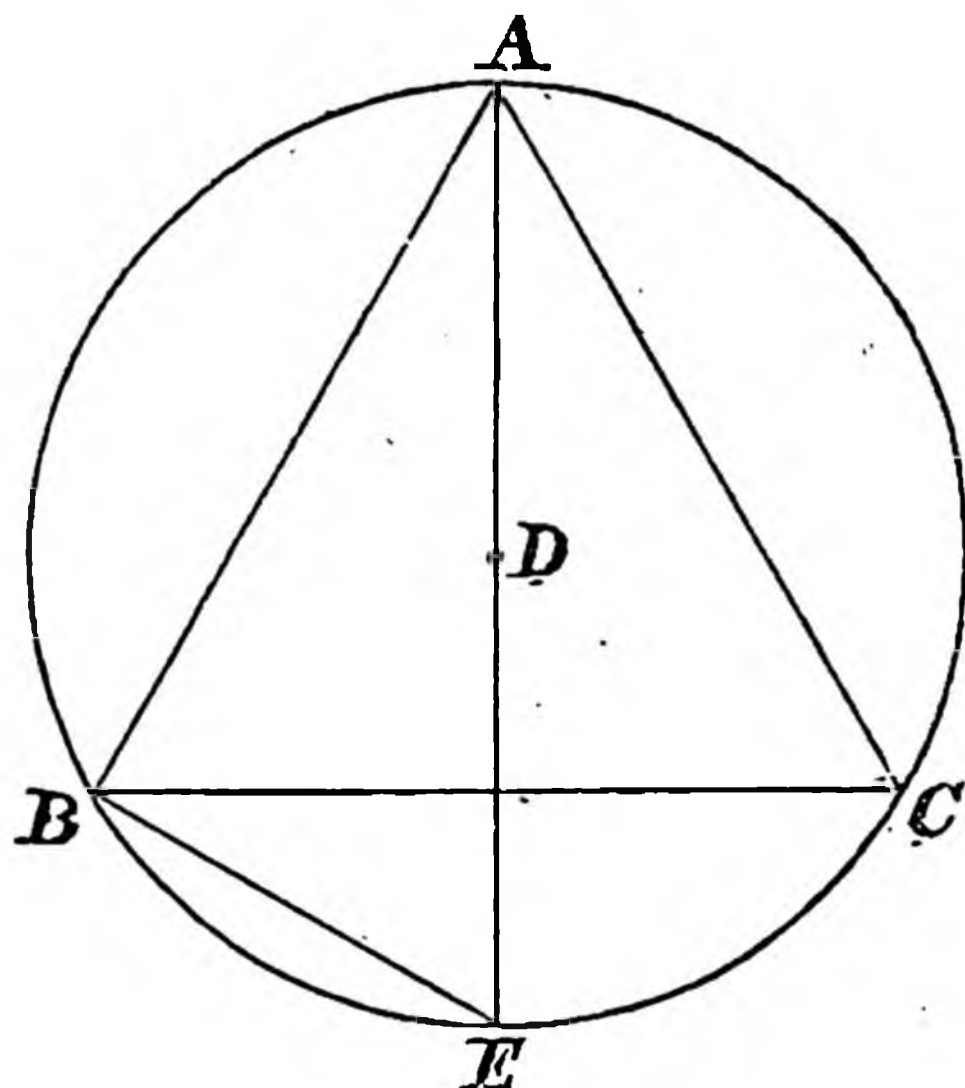
а потому (кн. 6, пред. 17):

$$NB \cdot BM = \square AB$$

Итакъ  $HV$  раціональна, но  $BM$  четвертый вычетъ, слѣдовательно (кн. 10, пред. 95)  $AB$  есть малая ирраціональная.

**Предложеніе 12.** Квадратъ, построенный на сторонѣ  $AB$ , вписаннаго въ кругъ треугольника  $ABC$ , равенъ утроенному квадрату, построенному на половинѣ діаметра круга (фиг. 528).

Фиг. 528.



**Доказат.** Возьмемъ центръ  $D$  круга, проведемъ  $AD$ , продолжимъ ее до  $E$  и проведемъ  $BE$ .

Такъ какъ треугольникъ  $\triangle ABC$  равносторонній, то дуга  $BEC$  есть третья часть, а дуга  $BE$  шестая часть цѣлой окружности; слѣдовательно  $BE$  есть сторона шестисторонней фигуры, а потому (кн. 4, пред. 15)  $BE = DE$ .

Такъ какъ  $AE = 2ED$ , то (кн. 6, пред. 20, слѣд.):

$$\square AE = 4\square ED = 4\square BE$$

Но (кн. 3, пред. 31)  $\angle ABE = d$ , а потому (кн. 1, пред. 47):

$$\square AE = \square AB + \square BE.$$

Слѣдовательно:

$$\square AB + \square BE = 4\square BE$$

а потому:

$$\square AB = 3\square BE = 3\square DE$$

гдѣ  $DE = \frac{1}{2} AE$ .

**Предложеніе 13. Задача.** Вписать въ данный шаръ тетраедръ?

**Теорема.** Квадратъ, построенный на діаметрѣ шара равенъ полтора раза взятому квадрату, построенному на ребрѣ вписаннаго въ шаръ тетраедра.

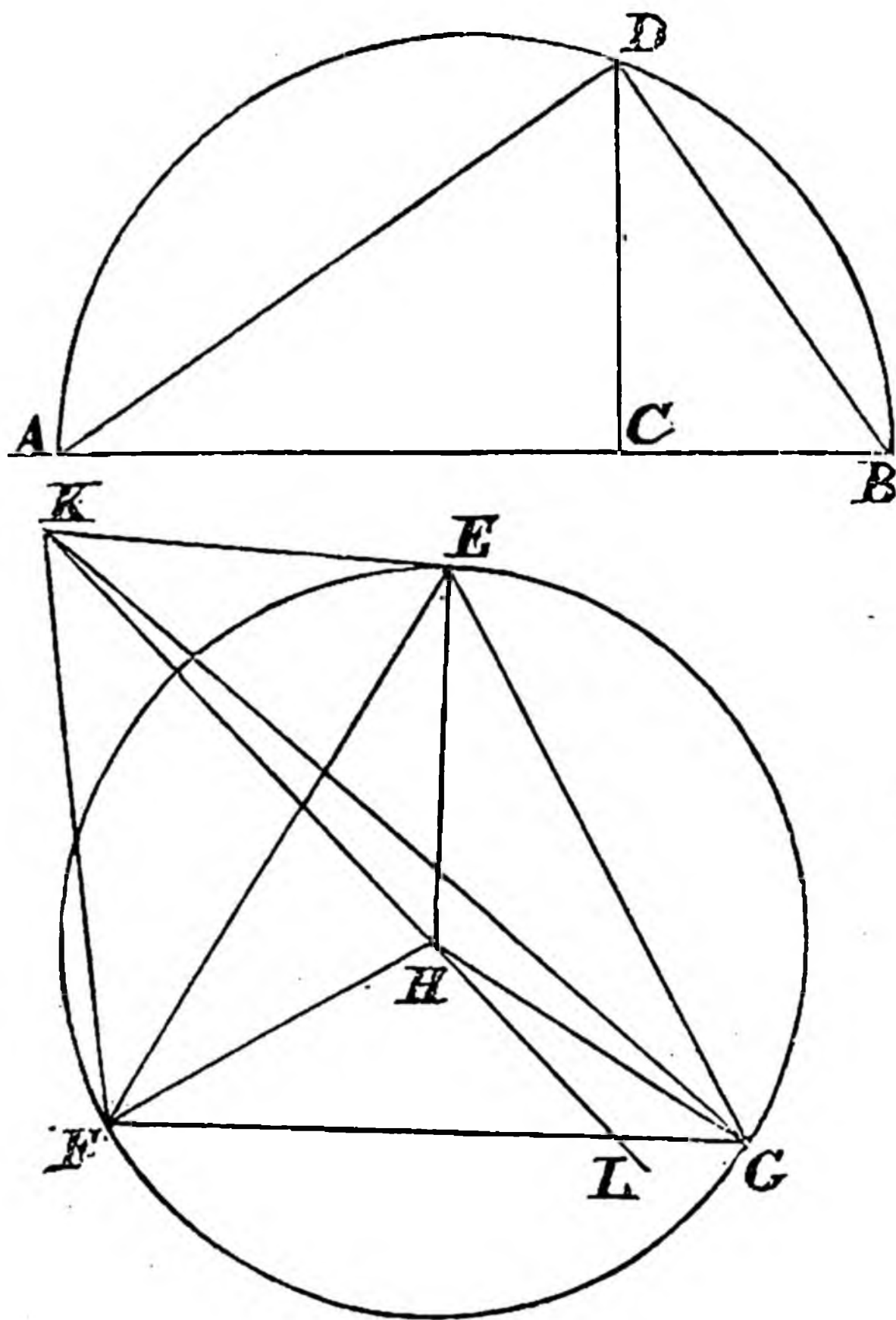
1) **Построеніе тетраедра** (фиг. 529).

Пусть  $AB$  будетъ діаметръ даннаго шара (кн. 6, пред. 9), діаметръ



этотъ въ точкѣ  $C$  такъ раздѣленъ, что  $AC=2CB$ . На прямой  $AB$  опишемъ полукругъ  $ADB$ ; въ точкѣ  $C$ , прямой  $AB$ , возставимъ перпендикуляръ  $CD$

Фиг. 529.



и проведемъ  $DA$ ,  $DB$ . Опишемъ радиусомъ  $CD$ , около произвольной точки  $H$  кругъ  $EFG$ , а въ этотъ послѣдній впишемъ (кн. 4, пред. 2) равносторонній треугольникъ  $EFG$ , проведемъ  $EH$ ,  $HF$ ,  $HG$ . Къ площади круга, въ точкѣ  $H$ , возставимъ (кн. 11, пред. 12) перпендикуляръ  $HK=AC$  и проведемъ  $KE$ ,  $KF$ ,  $KG$ ; тѣло, коего площадь основанія есть  $\triangle EFG$ , а котораго вершина въ  $K$ , будетъ требуемый тетраедръ.

2) *Доказательство построенія.*

1. Что это тѣло есть тетраедръ.

Такъ какъ (кн. 11, опред. 3)  $KH$  образуетъ съ  $HE$ ,  $HF$ ,  $HG$  прямые углы, уголъ при  $C$  также прямой и  $AC=HK$ ,  $CD=HE$ , а потому (кн. 1, пред. 4)  $DA=KE$ . По той же причинѣ  $KF$ , а также  $KG$  равны  $AD$ . Изъ этого слѣдуетъ, что  $AD=KE=KF=KG$ .

Такъ какъ (слѣдующ. Лемма):

$$AB : BC = \square AD : \square DC$$

но  $AC=2CB$ , а потому  $AB=3CB$ , слѣдовательно:

$$\square AD = 3 \square DC$$

Но  $DC=EH$  и (кн. 13, пред. 12):

$$\square FE = 3 \square EH$$

Слѣдовательно:

$$\square AD = \square FE$$

а потому  $AD=FE$ .

Но  $AD$  равна каждой изъ прямыхъ  $KE$ ,  $KF$ ,  $KG$ , слѣдовательно всѣ четыре треугольника  $EFG$ ,  $KEF$ ,  $KFG$ ,  $KEG$  равносторонни и равны. Слѣдовательно (кн. 11, опред. 26) тѣло ограниченное этими треугольниками есть тетраедръ.

2. Что этотъ тетраедръ вписанъ въ данный шаръ.

Приложимъ къ  $KH$  прямую  $HL=BC$ , то  $AB=KL$ . Такъ какъ (кн. 6, пред. 8):

$$AC:CD=CD:CB$$

а  $AC=KH$ ,  $CD=HE$ ,  $CB=HL$ , то:

$$KH:HE=EH:HL$$

слѣдовательно, проведя  $EL$ , (кн. 6, пред. 8, слѣд.), уголъ  $KEL$  будетъ прямой. Слѣдовательно полукругъ, описанный на  $KL$ , пройдетъ чрезъ точку  $E$ . Если мы станемъ вращать этотъ полукругъ, около неподвижнаго діаметра  $KL$ , то онъ пройдетъ необходимо чрезъ точки  $F$ ,  $G$ . Слѣдовательно вершины тетраедра  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $K$  будутъ лежать на поверхности шара, коего діаметръ  $KL=AB$ .

3) Доказательство теоремы.

Такъ какъ  $AC=2CB$ , то  $AB=3CB$ , а потому  $AB=\frac{3}{2}AC$ . Но (кн. 6, пред. 8 и кн. 6, пред. 20, слѣд.):

$$BA:AC=\square BA:\square AD$$

Слѣдовательно и:

$$\square AB=\frac{3}{2}\square AD$$

гдѣ  $AD$  есть діаметръ шара, а  $AD$  сторона тетраедра.

*Лемма.* Требуется еще доказать, что:

$$AB:BC=\square AD:\square DC$$

Построимъ, какъ выше, полукругъ  $ADB$ . На прямой  $AC$  построимъ квадратъ  $EC$  и построимъ параллелограмъ  $FB$  (фиг. 530).

Такъ какъ треугольники  $\triangle DAB$ ,  $\triangle DAC$  равноугольны, то (кн. 6, пред. 4):

$$BA:AD=DA:AC$$

слѣдовательно (кн. 6, пред. 17):

$$BA.AC=\square AD$$

Такъ какъ (кн. 6, пред. 1):

$$AB:BC=EB:BF$$

но

$$EB=BA.AC \text{ и } BF=AC.CB$$

а потому:

$$AB:BC=BA.AC:AC.CB$$

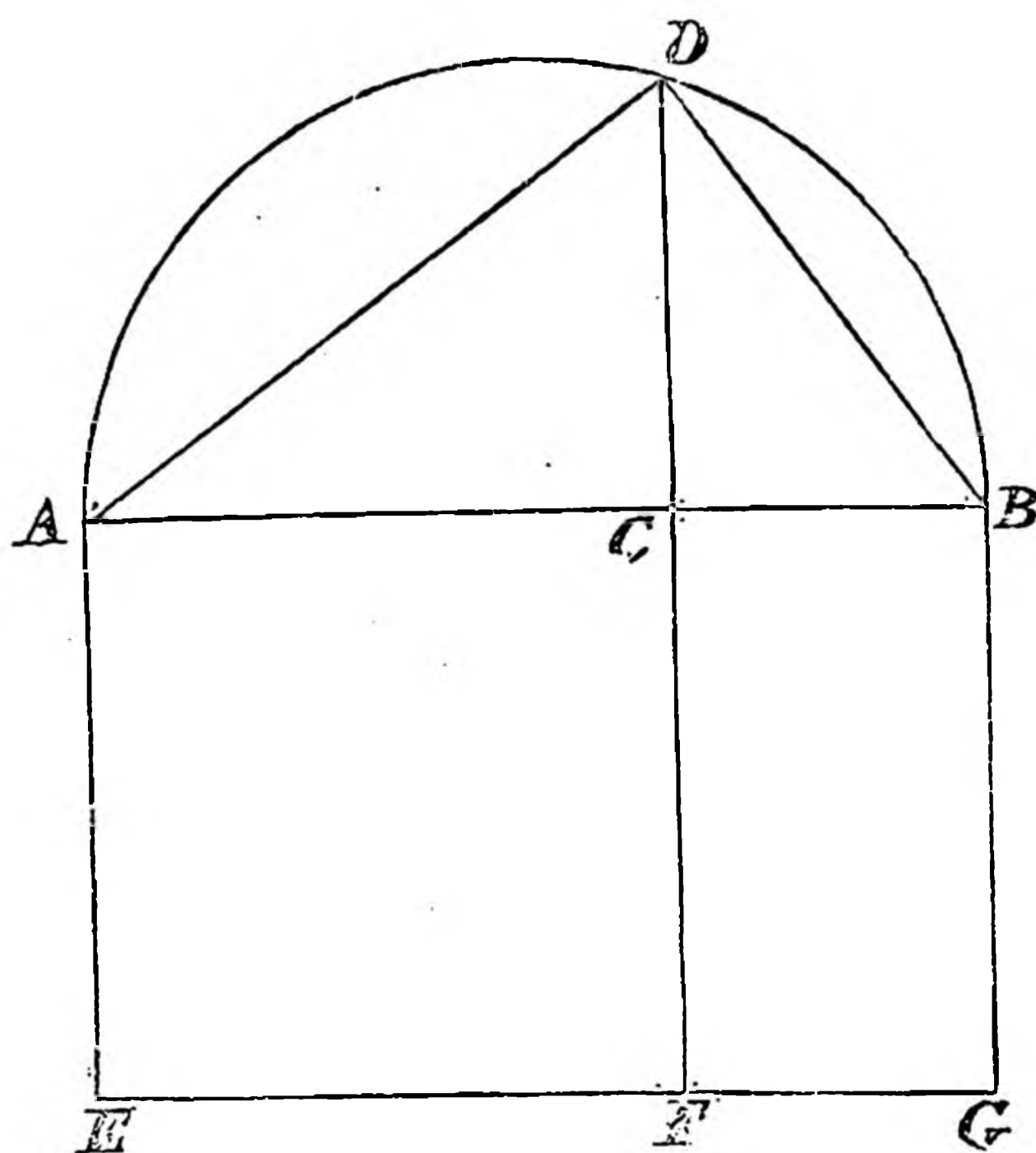
но по предыдущему:

$$BA.AC=\square AD$$

слѣдовательно:

$$AB:BC=\square AD:AC.CB$$

Фиг. 530.



Но (кн. 3, пред. 31) уголъ  $ADB=d$ , и (кн. 6, пред. 8, слѣд.):

$$AC:CD=CD:CB$$

а потому:

$$AC.CB=\square DC$$

слѣдовательно:

$$AB:BC=\square AD:\square DC.$$

*Предложеніе 14. Задача.* Вписать въ данный шаръ октаедръ?

*Теорема.* Квадратъ, построенный на діаметрѣ шара, вдвое больше квадрата, построеннаго на ребрѣ, вписаннаго въ шаръ, октаедра.

1) *Построеніе октаедра* (фиг. 531).

Пусть діаметръ  $AB$  даннаго шара, въ точкѣ  $C$ , раздѣленъ пополамъ. На  $AB$  опишемъ полукругъ  $ADB$ , къ  $AB$ , въ точкѣ  $C$ , возставимъ перпендикуляръ  $CD$  и проведемъ  $DB$ . Пусть  $EFGH$  будетъ квадратъ, коего сторона  $=DB$ . Проведемъ  $HF$ ,  $EG$ , пересѣкающіяся въ точкѣ  $K$ . Къ плоскости  $EFGH$ , въ точкѣ  $K$ , возставимъ (кн. 11, пред. 12) перпендикуляръ  $KL$ , продолжимъ его по другую сторону плоскости до точки  $M$ , и отложимъ  $KL$ , а также  $KM$ , равныя одной изъ прямыхъ  $KE$ ,  $KF$ ,  $KG$ ,  $KH$ . Изъ точекъ  $L$ ,  $M$  проведемъ прямыя къ точкамъ  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$ , то построенное такимъ образомъ тѣло, будетъ требуемый октаедръ.

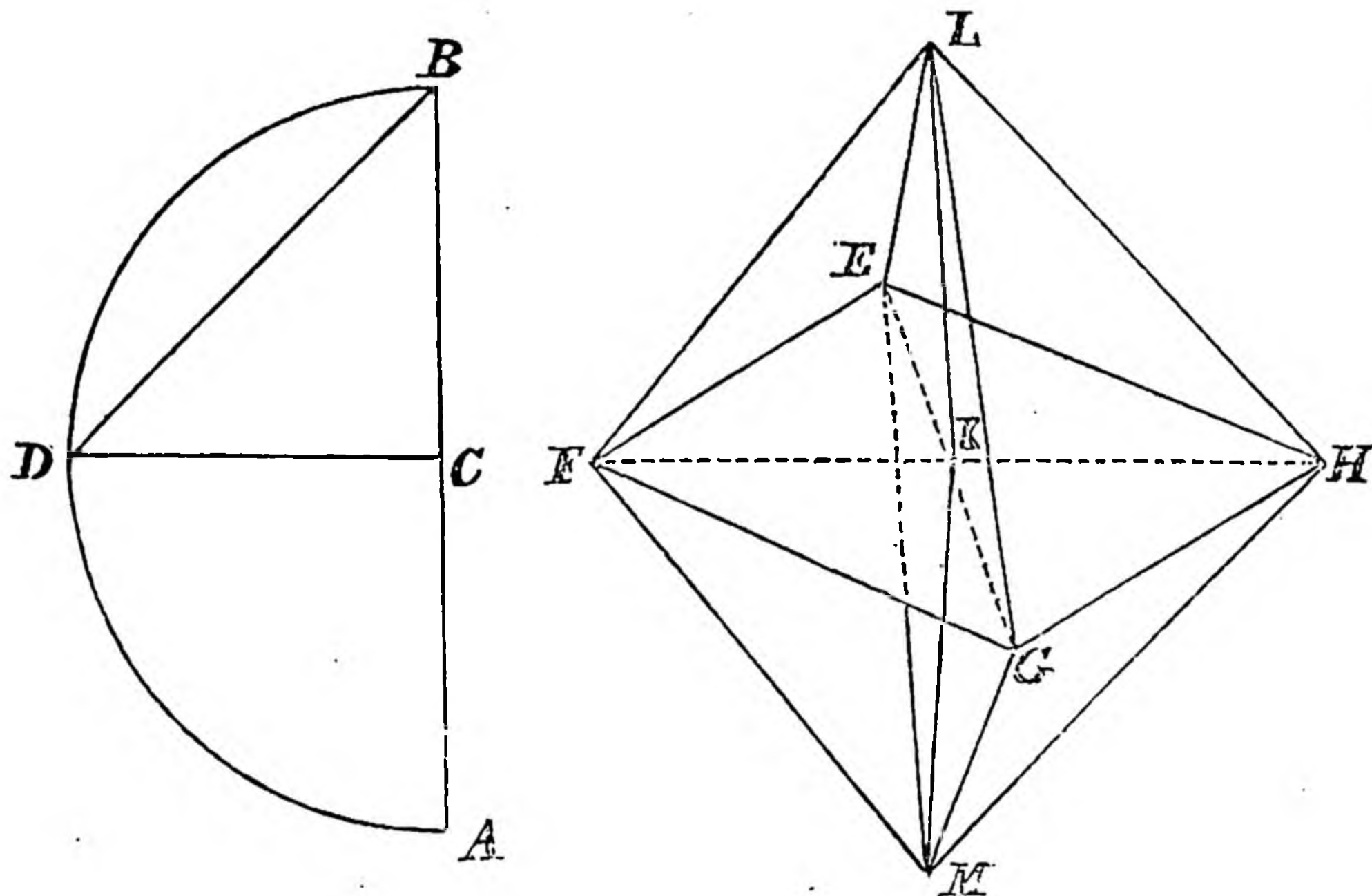
2) Доказательство построения.

1. Что это тѣло есть октаедръ.

Такъ какъ  $KE=KH$  и  $\angle EKH=d$ , то (кн. 1, пред. 47):

$$\square HE=2\square KE$$

Фиг. 531.



Но мы имѣемъ также,  $LK=KE$  и  $\angle LKE=d$ , а потому:

$$\square EL=2\square EK$$

слѣдовательно:

$$\square HE=\square EL$$

а потому  $HE=EL$ ; но по той же причинѣ  $LH=HE$ ; слѣдовательно  $\triangle LEN$  равносторонній. Подобнымъ же образомъ доказывается, что треугольники  $LEF$ ,  $LFG$ ,  $LGH$  также равносторонніе и равны  $\triangle LEN$ ; а также равны этому треугольнику четыре треугольника, коихъ основанія  $EF$ ,  $FG$ ,  $GH$ ,  $HE$  суть основанія предъидущихъ, а вершины въ точкѣ  $M$ , по другую сторону плоскости  $EFGH$ . Слѣдовательно (кн. 11, опред. 27) фигура ограниченная этими треугольниками есть октаедръ.

2. Что этотъ октаедръ вписанъ въ данный шаръ.

Такъ какъ  $LK=KM=KE$ , то полукругъ, описанный на  $LM$ , пройдетъ чрезъ точку  $E$ . Если будемъ вращать этотъ полукругъ около неподвижнаго діаметра  $LM$ , то на основаніи той же причины онъ пройдетъ чрезъ точки  $F$ ,  $G$ ,  $H$ . А потому вершины октаедра будутъ лежать на поверхности шара, коего діаметръ  $LM$ , а этотъ діаметръ  $=AB$ .

Такъ какъ  $LK=KM$ ,  $KE$  общая, и углы при точкѣ  $K$  общіе, то (кн. 1, пред. 4)  $LE=EM$ , но (кн. 3, пред. 31)  $\angle LEM=d$ ; слѣдовательно:

$$\square LM=2\square LE$$



Но (кн. 6, пред. 8 и кн. 6, пред. 20, слѣд.):

$$AB:BC=\square AB:\square DB$$

а потому, такъ какъ  $AB=2BC$ , то:

$$\square AB=2\square DB=2\square LE$$

слѣдовательно:

$$\square LM=\square AB$$

а потому  $LM=AB$ .

3) *Доказательство теоремы.*

Мы только что доказали, что:

$$\square LM=2\square LE$$

и что  $LM=AB$ , а потому:

$$\square AB=2\square LE$$

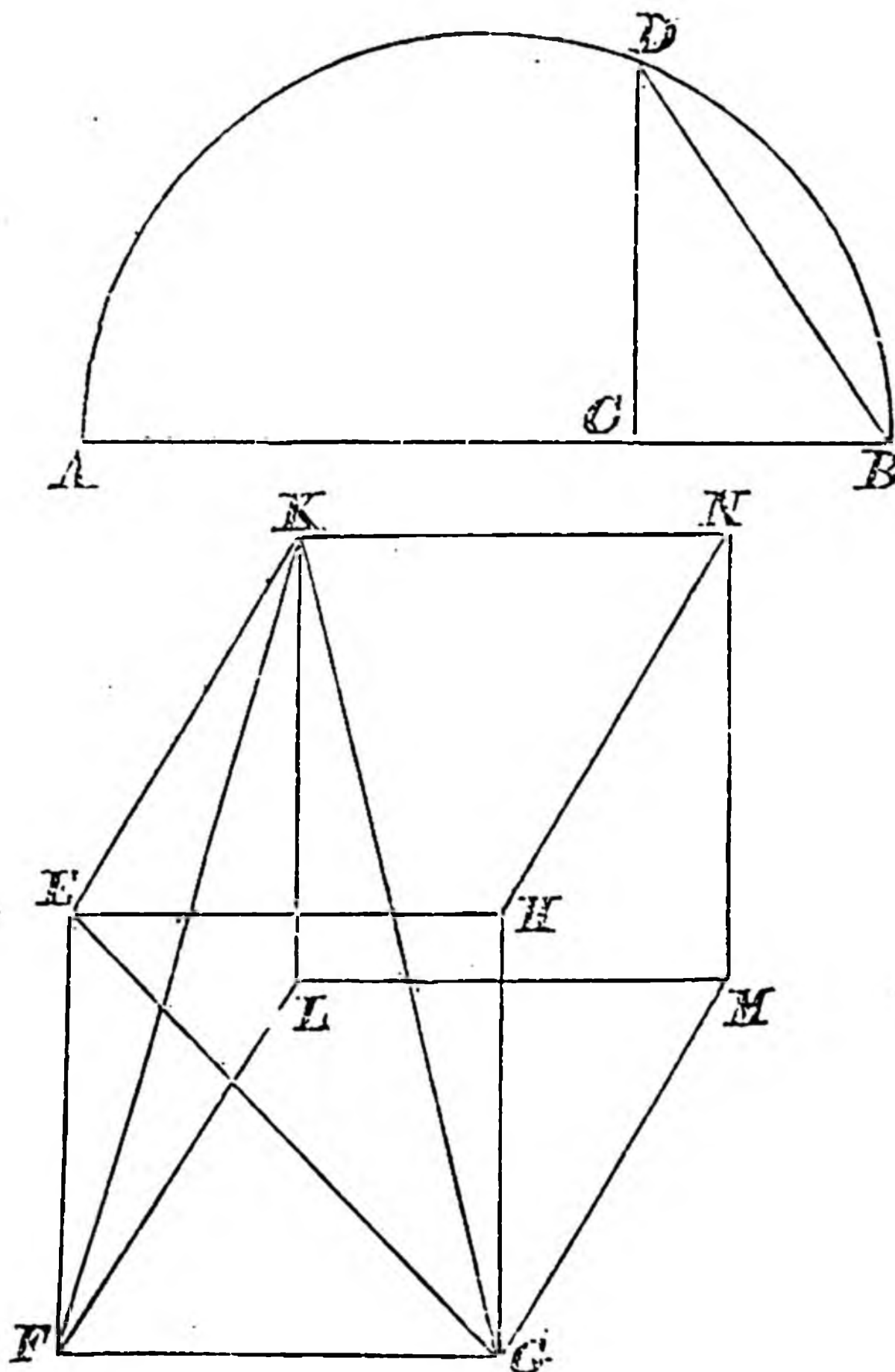
гдѣ  $AB$  есть діаметръ шара, а  $LE$  сторона октаедра.

*Предложеніе 15. Задача.* Вписать кубъ (гексаедръ) въ данный шаръ?

*Теорема.* Квадратъ, построенный на діаметрѣ шара, равенъ утроенному квадрату, построенному на сторонѣ куба, вписаннаго въ данный шаръ.

1) *Построеніе куба* (фиг. 532).

Фиг. 532.



Пусть діаметръ  $AB$  даннаго шара, въ точкѣ  $C$ , раздѣленъ на такія части, что  $AC=2CB$ , или  $AB=3CB$ . На прямой  $AB$  опишемъ полукругъ

$ADB$ , къ прямой  $AB$ , въ точкѣ  $C$  возставимъ перпендикуляръ  $CD$  и проведемъ  $DB$ . Построимъ квадратъ  $EFGH$ , коего сторона равна  $DB$ ; къ плоскости этого квадрата въ точкахъ  $E, F, G, H$  возставимъ (кн. 11, пред. 12) перпендикуляры  $EK, FL, GM, HN$ , изъ коихъ каждый  $= DB$ ; построимъ искомый кубъ  $FN$ .

2) *Доказательство построенія.*

1. Что  $FN$  есть кубъ это очевидно (кн. 11, опред. 25).

2. Что этотъ кубъ вписанъ въ данный шаръ.

Проведемъ  $KG, EG, KE$ . Такъ какъ  $EK$  перпендикулярна къ плоскости  $EFGH$ , то (кн. 11, опред. 3)  $\angle KEG = d$ , полукругъ описанный на  $KG$  пройдетъ чрезъ точку  $E$ . Но  $FG$  перпендикулярна къ  $FL, FE$ , а потому (кн. 11, пред. 4) она перпендикулярна къ плоскости  $EFLK$ , слѣдовательно  $\angle GFK = d$ ; изъ этого слѣдуетъ, что полукругъ, описанный на  $KG$ , пройдетъ чрезъ точку  $F$ , и по той же причинѣ пройдетъ чрезъ остальные вершины куба; а потому вершины эти будутъ лежать на поверхности шара, коего діаметръ  $KG$ , а діаметръ этотъ  $= AB$ .

Такъ какъ  $\angle GFE = d$  и  $GF = FE = EK$ , то (кн. 1, пред. 47):

$$\square EG = 2\square EF = 2\square EK$$

слѣдовательно:

$$\square EG + \square EK$$

т. е.:

$$\square KG = 3\square EK = 3\square DB$$

потому что  $EK = DB$ . Но  $AB = 3BC$  и (кн. 6, пред. 8 и кн. 6, пред. 20, слѣд.):

$$AB : DC = \square AB : \square DB$$

а потому:

$$\square AB = 3\square DB$$

слѣдовательно:

$$\square AB = \square KG$$

а потому  $AB = KG$ .

3) *Доказательство теоремы.* Мы доказали, что:

$$\square GK = 3\square EK$$

и  $GK = AB$ , а потому:

$$\square GK = \square AB$$

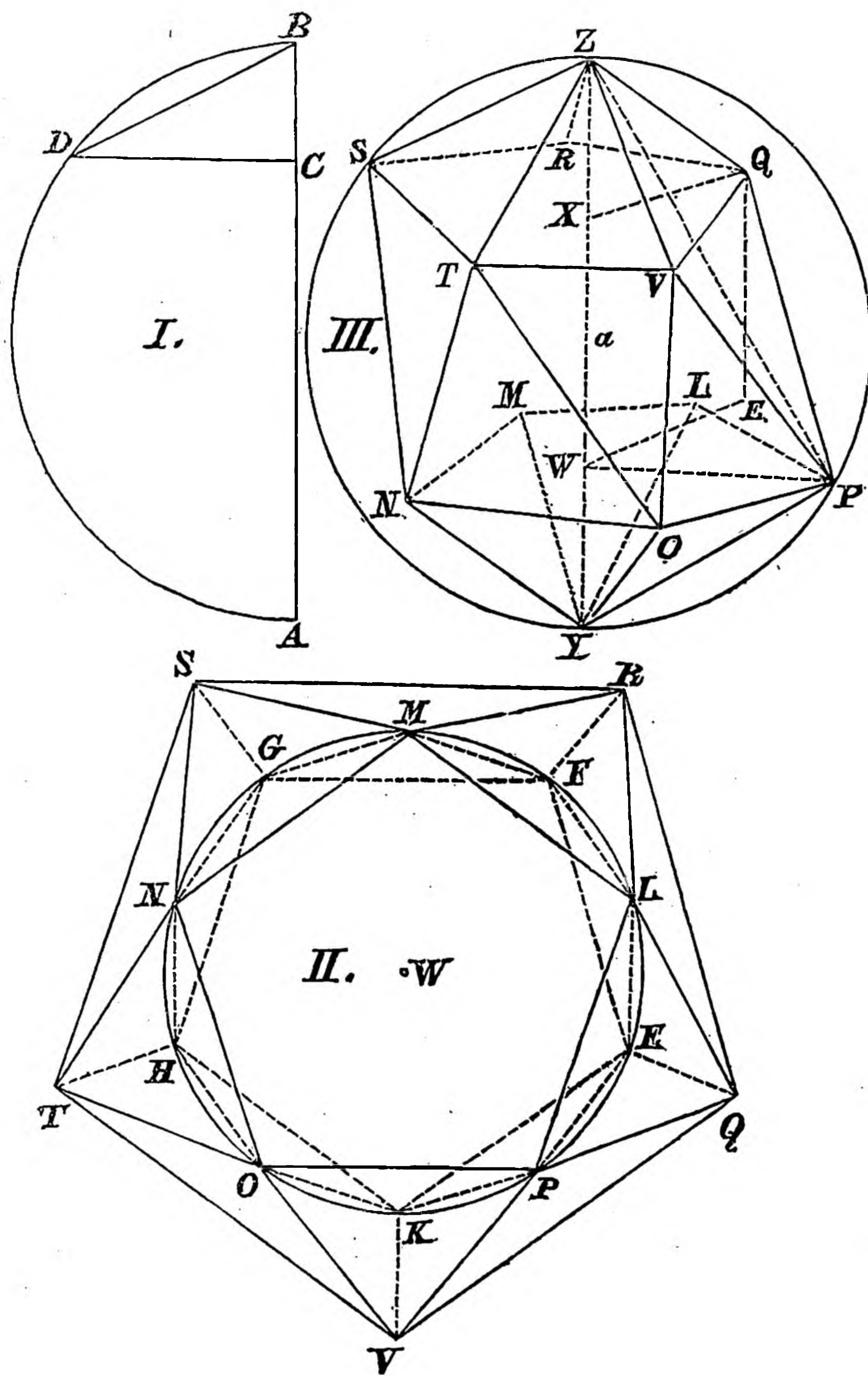
слѣдовательно:

$$\square AB = 3\square EK$$

гдѣ  $AB$  есть діаметръ шара, а  $EK$  сторона куба.

Предложеніе 16. Задача. Вписать въ данный шаръ икосаедръ (фиг. 533)?

Фиг. 533.



*Теорема.* Сторона, вписаннаго въ шаръ, икосаедра есть малая ирраціональная (фиг. 533).

1) Построеніе икосаедра.

Пусть діаметръ  $AB$  даннаго шара въ точкѣ  $C$  раздѣленъ на такія части, что  $AC = 4CB$  (фиг. I), а потому  $AB = 5CB$ . На  $AB$  опишемъ полу-кругъ  $ADB$ , къ  $AB$  возставимъ, въ точкѣ  $C$ , перпендикуляръ  $CD$ , и про-ведемъ  $DB$ .

Пусть, въ фигурѣ II, около центра  $W$  описанъ кругъ, коего діаметръ  $= DB$ . Въ этотъ кругъ впишемъ пятистороннею фигуру  $EFGHK$ , съ равными сторонами, раздѣлимъ пополамъ дуги въ точкахъ  $L, M, N, O, P$ , проведемъ прямыя, составляющія пятистороннею фигуру  $LMNOP$  съ рав-



ными сторонами, а также проведемъ прямыя, составляющія десятистороннюю фигуру  $ELFM$  съ равными сторонами.

Въ точкахъ  $E, F, G, H, K$  возставимъ перпендикуляры  $EQ, FR, GS, HT, KV$  къ площади круга, каждый изъ нихъ сдѣлаемъ  $=DB$ ; чрезъ ихъ оконечности проведемъ прямыя, составляющія пятистороннюю фигуру  $QRSTV$  съ равными сторонами, проведемъ также прямыя  $QL, LR, RM, MS, SN, NT, TO, OV, VP, PQ$ .

Въ центрѣ  $W$  возставимъ перпендикуляръ  $WZ$ , къ площади круга, что представлено на фиг. II, и продолжимъ его по другую сторону площади круга до  $Y$ , сдѣлаемъ  $WX$  равную сторонѣ шестисторонней, а  $XZ$  и  $WY$  равными сторонѣ десятисторонней фигуръ; проведемъ прямыя изъ точки  $Z$  къ вершинамъ угловъ фигуры  $QRSTV$ , подобнымъ же образомъ проведемъ прямыя изъ точки  $Y$  къ вершинамъ угловъ фигуры  $LMNOP$ . Такимъ образомъ построенное тѣло, будетъ требуемый икосаедръ.

## 2) Доказательство построенія.

### 1. Что это тѣло есть икосаедръ.

Такъ какъ на фиг. II,  $EQ, FR$  перпендикулярны къ одной и той же плоскости (къ площади круга), то онѣ параллельны (кн. 11, пред. 6), но онѣ равны, а потому (кн. 1, пред. 33) также равны и параллельны  $QR, EF$ ; слѣдовательно  $QR$  есть сторона вписанной въ кругъ пятисторонней фигуры съ равными сторонами, такъ какъ  $EF$  есть сторона такой фигуры. По той же причинѣ остальные прямыя  $RS, ST, TV, VQ$  суть стороны пятисторонней фигуры  $QRSTV$  съ равными сторонами.

Но  $EQ$  равна  $DB$ , а потому она равна радіусу круга, слѣдовательно она есть сторона шестисторонней фигуры, а  $EL$  равна сторонѣ десятисторонней фигуры, и  $\angle LEQ = d$ , изъ этого слѣдуетъ (кн. 13, пред. 10), что  $QL$  есть сторона пятисторонней фигуры, а по той же причинѣ  $LR$  есть также сторона той же фигуры. Но  $QR$  есть сторона той же фигуры, слѣдовательно  $\triangle QRL$  равносторонній. По той же причинѣ треугольники  $RSM, STN, TVO, VPQ$  также равносторонніе.

Такъ какъ  $LR, RM, ML$  суть также стороны пятисторонней фигуры съ равными сторонами, то  $\triangle LMB$  равносторонній. По той же причинѣ треугольники  $MNS, NOT, OPV, PLQ$  также равносторонніе.

На фиг. III, представлены многоугольники  $RSTVQ$  и  $LMNOP$ ; изъ поименованныхъ треугольниковъ показаны только тѣ, коихъ основанія  $ST, TV, VQ$ , а вершины  $N, O, P$ , равно какъ и тѣ, коихъ стороны  $NO, OP$ , а вершины  $T, V$ .

Такъ какъ  $XW, QE$  перпендикулярны къ одной и той же плоскости (площади круга), то (кн. 11, пред. 6) онѣ параллельны, но онѣ также



равны, а потому (кн. 1, пред. 33)  $WE$ ,  $XQ$  также параллельны и равны; следовательно  $XQ$  есть сторона шестисторонней фигуры, такъ какъ  $WE$  есть радіусъ круга. Итакъ  $XZ$  есть сторона десятисторонней фигуры, а  $\angle QXZ = d$ . Следовательно (кн. 13, пред. 10)  $QZ$  есть сторона пятисторонней фигуры; по той же причинѣ  $VZ$ , а по предъидущему и  $QV$  суть стороны той же фигуры. Следовательно  $\triangle VQZ$  равносторонній. То же самое относится къ треугольникамъ, коихъ основанія  $VT$ ,  $TS$ ,  $SR$ ,  $RQ$ , а коихъ вершины лежатъ въ точкѣ  $Z$ . Точно также доказывается это и для треугольниковъ, коихъ основанія  $PO$ ,  $ON$ ,  $NM$ ,  $ML$ ,  $LP$ , и коихъ вершины лежатъ въ точкѣ  $Y$ . Изъ этого слѣдуетъ (кн. 11, опред. 29), что построенное тѣло есть икосаедръ.

2. Что этотъ икосаедръ вписанъ въ данный шаръ.

Такъ какъ въ фиг. III,  $WX$  есть сторона шестисторонней фигуры, а  $XZ$  десятисторонней, то (кн. 13, пред. 9)  $WZ$ , въ точкѣ  $X$ , раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, и  $WX$  есть больший отрѣзокъ, а потому:

$$WZ : WX = WX : XZ$$

но  $WX = WP$  и  $XZ = WY$ , следовательно:

$$WZ : WP = WP : WY$$

Но углы  $PWZ$ ,  $PWY$  суть прямые, а потому проведя  $PZ$ , треугольники  $PWZ$ ,  $PWY$  будутъ подобны (кн. 6, пред. 6). Следовательно (кн. 6, пред. 8)  $\angle YPZ = d$ . А потому (кн. 3, пред. 31) полукругъ описанный на  $YZ$  пройдетъ чрезъ точку  $P$ .

Изъ предъидущей пропорціи:

$$WZ : WX = WX : XZ$$

гдѣ  $WZ = XY$  и  $WX = XQ$ , слѣдуетъ что:

$$XY : XQ = XQ : XZ$$

Слѣдовательно, проведя  $QY$ , уголъ  $YQZ = d$ . А потому полукругъ, описанный на  $YZ$ , пройдетъ чрезъ точку  $Q$ .

Если теперь вышеупомянутый полукругъ станетъ вращаться, около своего неподвижнаго діаметра  $YZ$ , то на основаніи тѣхъ же причинъ онъ пройдетъ чрезъ остальные точки икосаедра, которыя поэтому лежатъ на поверхности шара, коего діаметръ есть  $YZ$ . Этотъ послѣдній  $= AB$ .

А такъ какъ  $WZ$  раздѣлена, въ точкѣ  $X$ , въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то, раздѣливъ пополамъ  $WX$  въ точкѣ  $a$ , будемъ имѣть (кн. 13, пред. 3):

$$\square Za = 5\square aX$$

Но  $YZ = 2Za$  и  $WX = 2aX$ , слѣдовательно:

$$\square YZ = 5\square WX = 5\square BD$$

Но  $AB = 5BC$  и (кн. 6, пред. 8 и кн. 6, пред. 20, слѣд.):

$$AB:BC = \square AB:\square BD$$

слѣдовательно:

$$\square AB = 5\square BD$$

откуда:

$$\square YZ = \square AB$$

а потому  $YZ = AB$ .

3) *Доказательство теоремы.*

Такъ какъ діаметръ шара раціоналенъ и квадратъ, на немъ построенный, равенъ суммѣ пяти квадратовъ, построенныхъ на радіусѣ круга  $EFGHK$ , то радіусъ, а потому, и діаметръ этого круга раціональны; слѣдовательно (кн. 13, пред. 11) сторона, вписанной въ такой кругъ пятисторонней фигуры, т. е. сторона икосаедра, есть *малая ирраціональная*.

*Замѣчаніе.* Отсюда слѣдуетъ, что квадратъ, построенный на діаметрѣ шара, равенъ пять разъ взятому квадрату, построенному на радіусѣ того круга, на которомъ построенъ икосаедръ, и что діаметръ шара составленъ изъ стороны шестисторонней и двухъ сторонъ десятисторонней фигуръ, вписанныхъ въ этотъ кругъ.

*Предложеніе 17. Задача.* Вписать въ данный шаръ додекаедръ?

*Теорема.* Сторона, вписаннаго въ шаръ, додекаедра есть *вычетъ*.

1) *Построеніе додекаедра* (фиг. 534).

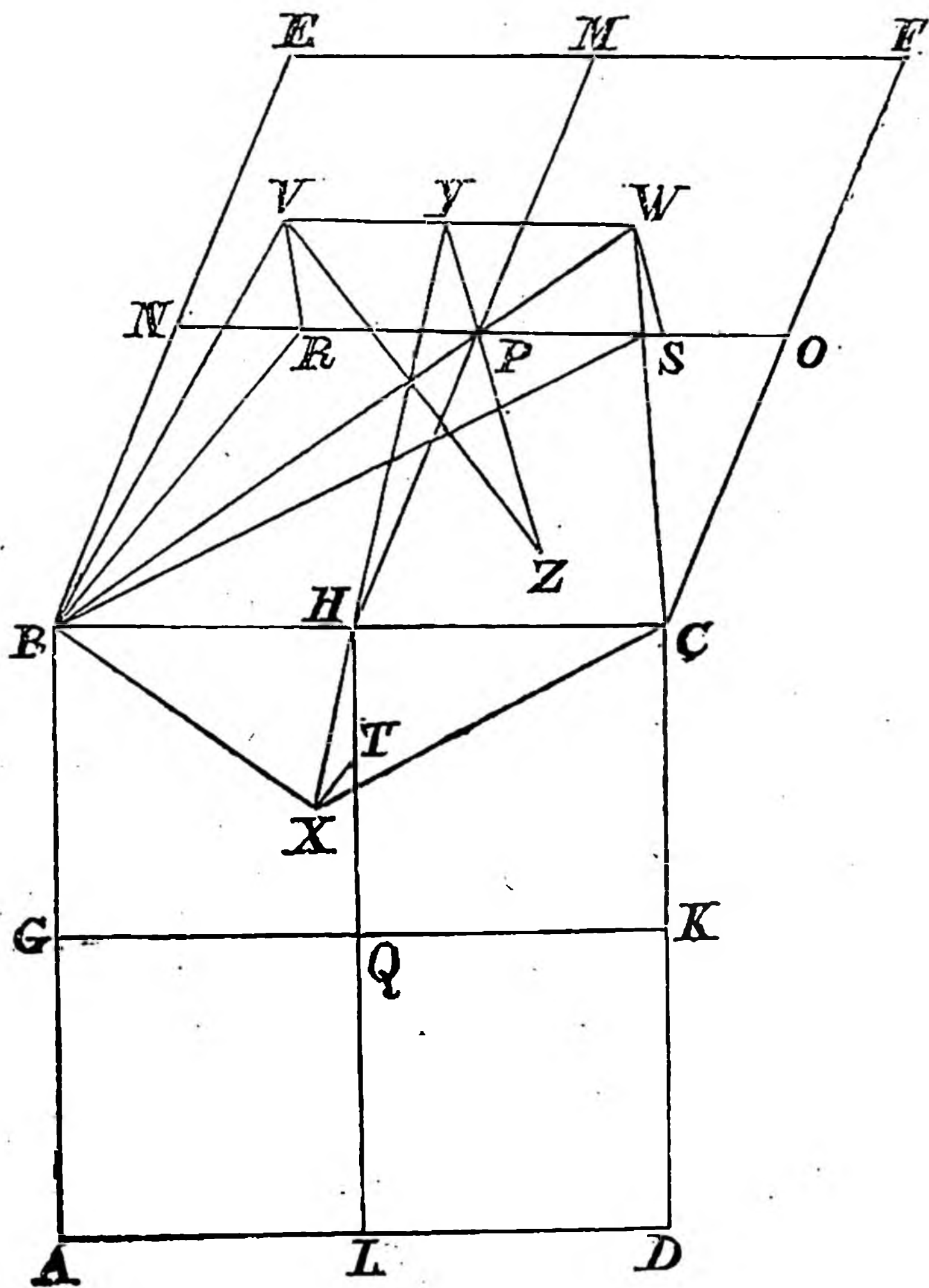
Двѣ боковыя площади  $ABCD$  и  $CBEF$  построеннаго куба (кн. 13, пред. 15) приложимъ перпендикулярно другъ другу. Раздѣлимъ ихъ стороны въ точкахъ  $G, H, K, L, M, N, O$  пополамъ и проведемъ прямыя  $GK, HL, MN, NO$ . Прямыя  $NP, PO, HQ$  раздѣлимъ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи въ точкахъ  $R, S, T$ , и пусть  $PR, PS, QT$  будутъ большіе отрѣзки. Въ этихъ точкахъ возставимъ (кн. 11, пред. 12) перпендикуляры  $RV, SW, TX$  къ боковымъ площадямъ куба, перпендикуляры эти возставимъ въ наружу, сдѣлаемъ ихъ равными вышеупомянутымъ большимъ отрѣзкамъ  $PR, PS, QT$  и проведемъ прямыя  $VB, VX, XC, CW, WV$ , которыя лежатъ въ одной плоскости, заключаютъ равные углы, и ограничиваютъ собою пятистороннею фигуру съ равными сторонами, построенную на ребрѣ куба  $BC$ . Построивъ, на каждомъ изъ двѣнадцати реберъ куба, подобную фигуру, получимъ (кн. 11, опред. 28) требуемый додекаедръ.

## 2) Доказательство построения.

1. Что  $VBXCW$  есть такая пятисторонняя фигура. Именно:

а) Она равносторонняя.

Фиг. 534.



Проведемъ  $BR$ ,  $BS$ ,  $BW$ . Такъ какъ прямая  $NP$ , въ точкѣ  $R$ , раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи и  $PR$  есть большій отрѣзокъ, то (кн. 13, пред. 4):

$$\square PN + \square NR = 3\square PR$$

но  $PN=NB$  и  $PR=RV$ , следовательно:

$$\square BN + \square NR = 3\square RV$$

Но (кн. 1, пред. 47):

$$\square BN + \square NR = \square BR$$

**слѣдовательно:**

$$\square BR = 3 \square RV$$

а потому  $\square BR + \square RV$ , т. е.:

$$\square BV =_4 \square RV$$

слѣдовательно (кн. 6, пред. 20, слѣд.)  $BV=2RV$ . Но  $RS=2RP=2RV$ , а потому  $VW=2RV$ , слѣдовательно  $BV=VW$ . Подобнымъ образомъ доказывается и равенство остальныхъ сторонъ фигуры  $BVWCX$ .

**б) Она лежит в одной плоскости.**

Чрезъ точку  $P$  проведемъ прямую  $PY$ , параллельную прямымъ  $RV$  и  $SW$ , въ наружу куба.

Проведемъ  $YH$ ,  $HX$ , то  $YHX$  есть прямая линия, такъ какъ  $HQ$ , въ точкѣ  $T$ , раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, и  $QT$  больший отрѣзокъ, а потому:

$$HQ:QT=QT:TH$$

Ес  $Q=HP$  и  $QT=TX=PY$ , слѣдовательно:

$$HP:PY=TX:TH$$

Но (кн. 11, пред. 6)  $HP$ ,  $TX$  параллельны, равно какъ и  $FH$ ,  $PY$ , первая потому что онѣ перпендикулярны къ плоскости  $BD$ , а вторая какъ перпендикулярныя къ плоскости  $BF$ . Слѣдовательно (кн. 6, пред. 32)  $YX$ ,  $HX$  лежатъ на одной прямой  $YX$ ; а потому (кн. 11, пред. 1) фигура  $BVWSCX$ , въ которой лежитъ  $YX$ , находится въ одной плоскости.

с) Она равноугольна.

Такъ какъ  $NP$  раздѣлена, въ точкѣ  $R$ , въ крайнемъ и среднемъ отношеніи и  $PR$  есть больший отрѣзокъ, то (кн. 13, пред. 5):

$$NP+PR:PN=NP:PS$$

Но  $PR=PS$ , а потому:

$$NP+PR=NS$$

а также:

$$NS:NP=NP:PS$$

Слѣдовательно  $NS$ , въ точкѣ  $P$ , раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, и  $NP$  есть больший отрѣзокъ, слѣдовательно (кн. 13, пред. 14):

$$\square NS + \square SP = 3 \square PN$$

но  $PN=NB$  и  $SP=SW$ , а потому:

$$\square NS + \square SW = 3 \square NB$$

слѣдовательно также:

$$\square NB + \square NS + \square SW = 4 \square NB$$

Но (кн. 1, пред. 47):

$$\square NB + \square NS = \square BS$$

слѣдовательно:

$$\square BS + \square SW$$

т. е. (кн. 1, пред. 47):

$$\square BW = 4 \square NB$$



а потому (кн. 6, пред. 20, слѣд.):

$$BW=2NB=BC$$

Но, на основаніи доказаннаго въ первой части,  $BV=BX$  и  $VW=CX$ , слѣдовательно (кн. 1, пред. 8)  $\angle BVW=\angle BXC$ . Подобнымъ же образомъ доказывается и равенство остальныхъ угловъ  $VWC$ ,  $BXC$ ,  $BVW$ .

2. Что этотъ додекаедръ вписанъ въ данный шаръ.

Продолжимъ  $YP$  во внутрь куба до  $Z$ , то  $YZ$  встрѣтитъ (кн. 11, пред. 39) діагональ куба, онѣ пересѣкутся пополамъ въ точки  $Z$ . Слѣдовательно  $Z$  есть центръ шара, описаннаго около куба, а  $PZ$  равна половинѣ стороны  $PN$  куба. Проведемъ  $FZ$ .

Такъ какъ  $NS$  раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, и  $NP$  есть большій отрѣзокъ, то (кн. 13, пред. 4):

$$\square NS + \square SP = 3\square NP$$

Но  $NP=PZ$  и  $PS=YP$ , а потому  $NS=YZ$ , а также  $SP=PR$ , а потому  $SP=VY$ . Слѣдовательно:

$$\square YZ + \square VY$$

т. е. (кн. 1, пред. 47):

$$\square VZ = 3\square NP$$

Но (кн. 13, пред. 15) квадратъ построенный на діаметрѣ шара равенъ утроенному квадрату, построенному на сторонѣ куба, а потому и квадратъ, построенный на радіусѣ равенъ утроенному квадрату, построенному на половинѣ стороны  $NP$ . Слѣдовательно  $VZ$  есть радіусъ шара,  $Z$  центръ шара, и  $V$  точка на поверхности шара. Подобнымъ же образомъ доказывается, что кромѣ точки  $V$  и всякая другая вершина додекаедра лежитъ на поверхности шара. Слѣдовательно додекаедръ вписанъ въ данный шаръ.

3) Доказательство теоремы.

Такъ какъ  $NP$ , въ точкѣ  $R$ , раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, и  $PR$  есть большій отрѣзокъ, то:

$$NP:PR=PR:RN$$

а потому также (кн. 5, пред. 15):

$$2NP:2PR=2PR:2BN$$

т. е.:

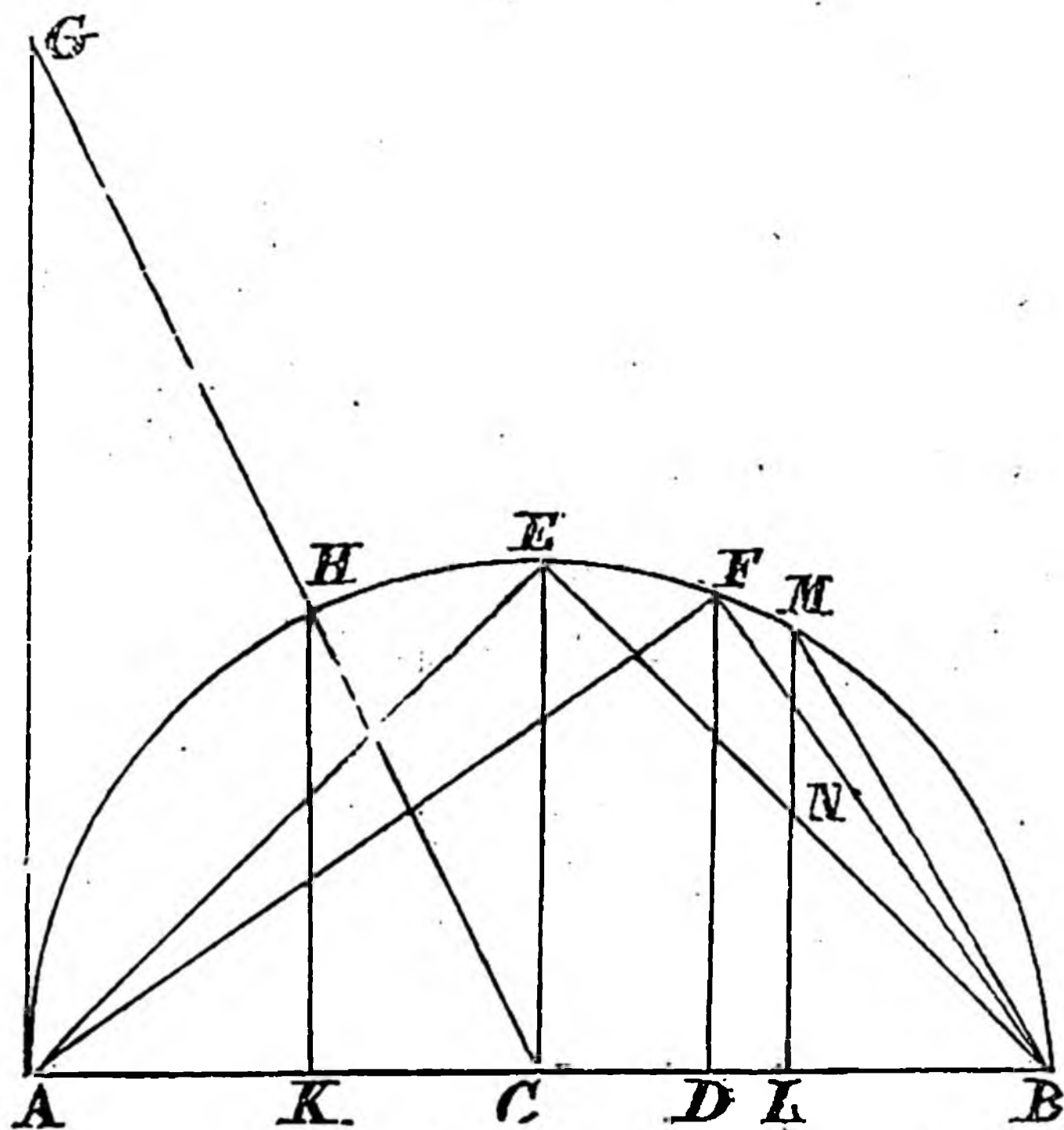
$$NO:RS=RS:RN+SO$$

но  $NO > RS$ , а потому и  $RS > RN + SO$ , слѣдовательно  $NO$  раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи и  $RS$  большій отрѣзокъ. Но діаметръ шара раціоналенъ, и (кн. 13, пред. 15) квадратъ, построенный на немъ равенъ утроенному квадрату, построенному на сторонѣ  $NO$ , а потому  $NO$  также раціональна. Слѣдовательно (кн. 13, пред. 6) ея отрѣзокъ  $RS$  есть *вычетъ*; но  $RS = VW$ , а потому сторона додекаедра есть *вычетъ*.

*Замѣчаніе.* Изъ этого слѣдуетъ, что большій отрѣзокъ стороны куба, раздѣленной въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, равенъ сторонѣ додекаедра.

*Предложеніе 18. Задача.* Найти стороны пяти тѣлъ, рассмотрѣнныхъ въ предыдущихъ предложеніяхъ (фиг. 535).

Фиг. 535.



*Теорема.* Если квадратъ, построенный на діаметрѣ шара, описаннаго около этихъ пяти тѣлъ, раздѣлить на шесть равныхъ частей, то квадратъ построенный на сторонѣ тетраедра равенъ четыремъ такимъ частямъ, октаедра—тремъ, куба—двумъ. Изъ остальныхъ же двухъ, коихъ отношенія къ другимъ и отношеніе между собою не раціональны, сторона икосаедра больше стороны додекаедра.

1) *Построеніе сторонъ.*

Пусть діаметръ  $AB$  даннаго шара, въ точкахъ  $C$  и  $D$ , раздѣленъ на такія части, что  $AC = CB$  и  $AD = 2DB$ . На  $AB$  опишемъ полукругъ  $ADB$ , въ точкахъ  $C$  и  $D$  прямой  $AB$ , возставимъ перпендикуляры  $CE$ ,  $DF$ , проведемъ  $AF$ ,  $FB$  и раздѣлимъ  $FB$ , въ точкѣ  $N$ , въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, такъ что  $BN$  большій отрѣзокъ. Далѣе, въ точкѣ  $A$ , возставимъ къ  $AB$  перпендикуляръ  $AG$ , сдѣлаемъ его равнымъ  $AB$  и проведемъ  $GC$ , которая пересѣчетъ полукругъ въ точкѣ  $H$ ; изъ точки  $H$  опустимъ на  $AB$  перпендикуляръ  $HK$  и сдѣлаемъ  $CL = CK$ , такъ что

$LK=2KC$ ; наконецъ въ точкѣ  $L$ , возставимъ къ  $AB$  перпендикуляръ  $LM$  и проведемъ  $BM$ , то сторона тетраедра будетъ  $AF$ ; куба— $BF$ ; октаедра— $BE$ ; додекаедра— $BN$ ; и икосаедра— $BM$ .

2) Доказательство построенія.

а) Такъ какъ  $AD=2DB$ , то  $AB=3DB$ , т. е.:

$$AD:DB=3:1$$

или (кн. 5, пред. 19):

$$BA:AD=3:2$$

т. е.:

$$BA=\frac{3}{2}AD$$

Но (кн. 6, пред. 8)  $\triangle AFB \sim \triangle AFD$ , а потому (кн. 6, пред. 20, слѣд. 2):

$$BA:AD=\square AB:\square AF$$

слѣдовательно и:

$$\square AB:\square AF=3:2$$

т. е.:

$$\square AB=\frac{3}{2}\square AF$$

но  $AB$  есть діаметръ шара, слѣдовательно (кн. 13, пред. 13)  $AF$  есть сторона тетраедра.

б) Такъ какъ  $AD=2DB$ , а потому  $AB=3DB$  и (кн. 6, пред. 8, и кн. 6, пред. 20, слѣд.):

$$AB:BD=\square AB:\square FB$$

то также:

$$\square AB=3\square FB$$

но  $AB$  есть діаметръ шара, слѣдовательно (кн. 13, пред. 15)  $BF$  есть сторона куба.

в) Такъ какъ сторона куба  $FB$ , въ точкѣ  $N$ , раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то (кн. 13, пред. 17, слѣд.) большій отрѣзокъ  $BN$  есть сторона додекаедра.

д) Такъ какъ  $AC=CB$ , то  $AB=2BC$  и:

$$AB:BC=\square AB:\square BE$$

а потому

$$\square AB=2\square BE$$

но  $AB$  есть діаметръ шара, слѣдовательно (кн. 13, пред. 14)  $BE$  сторона октаедра.

е) Такъ какъ:

$$AG=AB=2AC$$

и (кн. 6, пред. 4):

$$GA:AC=HK:KC$$

то и  $HK=2KC$ , слѣдовательно (кн. 6, пред. 20):

$$\square HK=4\square KC$$

а потому  $\square HK+\square KC$ , т. е. (кн. 1, пред. 47):

$$\square HC=5\square KC$$

но  $HC=CB$ , а потому:

$$\square HC=\square CB$$

слѣдовательно:

$$\square CB=5\square KC$$

Но  $AB=2BC$  и  $LK=2KC$ , а потому:

$$BC:KC=AB:LK$$

Слѣдовательно и:

$$\square AB=5\square LK$$

Но  $AC=CB$  и  $KC=LC$ , а потому  $AK=LB$ , а также:

$$AB=LK+2CB$$

но  $AB$  есть діаметръ шара, слѣдовательно (кн. 13, пред. 16, слѣд.)  $LK$  и  $LB$  суть стороны, вписанныхъ въ одинъ и тотъ же кругъ шестисторонней и десятисторонней фигуръ. Такъ какъ  $KC=CL$ , а потому (кн. 3, пред. 14)  $ML=HK$ ; но какъ  $HC=2KC=KL$ , то  $ML=KL$ ; а потому  $ML$  есть также сторона шестисторонней фигуръ, а  $LB$  сторона десятисторонней и  $\angle MLB=d$ . Слѣдовательно (кн. 13, пред. 10)  $MB$  есть сторона пятисторонней фигуръ, а потому (кн. 13, пред. 16) она есть также сторона *икосаедра*.

3) *Доказательство теоремы.*

На основаніи теоремъ предложеній 13, 14 и 15 мы нашли, что:

$$\square AB=\frac{3}{2}\square AF=2\square BE=3\square BF$$

Раздѣливъ  $\square AB$  на шесть равныхъ частей, то 4 изъ нихъ прійдутся на  $\square AF$ , 3 на  $\square BE$  и 2 на  $\square BF$ , такъ что отношенія сторонъ тетраедра, октаедра и куба рациональны. Такъ какъ стороны икосаедра и додекаедра иррациональны, ибо одна изъ нихъ есть *малая иррациональная* (кн. 10, пред. 16), другая (кн. 10, пред. 17) *вычетъ*, а потому отношенія этихъ сторонъ ни между собою, ни къ упомянутымъ выше тремъ не могутъ быть рациональны.



Что сторона икосаедра  $BM$  больше стороны додекаедра  $BN$ , доказывается слѣдующимъ образомъ:

1. Такъ какъ треугольники  $FDB$ ,  $FAB$  равноугольны, то (кн. 6, пред. 4):

$$DB:BF=BF:BA$$

слѣдовательно (кн. 6, пред. 20, слѣд.):

$$DB:BA=\square DB:\square BF$$

или:

$$AB:DB=\square BF:\square DB$$

но  $AB=3DB$ , слѣдовательно:

$$\square BF=3\square DB$$

Но  $AD=2DB$ , а потому:

$$\square AD=4\square DB$$

слѣдовательно  $\square AD > \square BF$ , а потому  $AD > BF$ , а слѣдовательно тѣмъ болѣе  $AL > BF$ . Но, такъ какъ  $KL$  есть сторона шестисторонней фигуры и  $KL=LB$  сторона десятисторонней, то (кн. 13, пред. 9)  $AL$ , въ точкѣ  $K$ , раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, и  $KL$  болѣе отръзокъ, но  $BF$  также была раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, въ точкѣ  $N$ , и  $BN$  болѣе отръзокъ. Слѣдовательно  $KL > BN$ , но такъ какъ  $KL=ML$ , то и  $ML > BN$ ; но (кн. 1, пред. 19)  $BM > ML$ , слѣдовательно тѣмъ болѣе  $BM > BN$ .

2. Или иначе. Такъ какъ  $AD=2DB$ , то  $AD=3DB$ . Но (кн. 6, пред. 8)  $\triangle FAB \sim \triangle FBD$ , а потому:

$$AB:BD=\square AB:\square BF$$

слѣдовательно:

$$\square AB=3\square BF$$

но:

$$\square AB=5\square KL$$

слѣдовательно:

$$5\square KL=3\square BF$$

Но (слѣдующая Лемма):

$$3\square BF > 6\square BN$$

слѣдовательно:

$$\square KL > \square BN$$

а потому  $KL > BN$ , но  $KL=LM$ , слѣдовательно  $LM > BN$ , а потому тѣмъ болѣе  $BM > BN$ .

*Лемма.* Что  $3\Box BF > 6\Box BN$  доказывается слѣдующимъ образомъ:  
Такъ какъ  $BN > NF$ , то:

$$FB \cdot BN > BF \cdot FN$$

а потому:

$$(FB \cdot BN) + (BF \cdot FN) > 2(BF \cdot FN)$$

Но (кн. 2, пред. 2):

$$(FB \cdot BN) + (BF \cdot FN) = \Box BF$$

и такъ какъ  $BF$ , въ точкѣ  $N$ , раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отно-  
шеніи, то (кн. 6, пред. 17):

$$BF \cdot FN = \Box BN$$

слѣдовательно:

$$\Box BF > 2\Box BN$$

а потому:

$$3\Box BF > 6\Box BN$$

*Замѣчаніе.* Кромѣ поименованныхъ пяти тѣлъ, нѣтъ другаго, состав-  
ленного изъ равныхъ фигуръ съ равными сторонами и равными углами.

Въ самомъ дѣлѣ:

1) Изъ двухъ треугольниковъ, или изъ двухъ плоскихъ угловъ нельзя  
составить (кн. 11, опред. 11) тѣлесный уголъ. Изъ трехъ равностороннихъ  
треугольниковъ состоитъ тѣлесный уголъ *тетраэдра*, изъ четырехъ—*ок-*  
*таэдра*, изъ пяти—*икосаэдра*. Но изъ шести, или болѣе равностороннихъ  
треугольниковъ нельзя (кн. 11, пред. 21) составить тѣлесный уголъ, такъ  
какъ уголъ подобнаго треугольника  $= \frac{2}{3}d$ , а слѣдовательно сумма шести  
такихъ угловъ  $= 4d$ , а семи и болѣе угловъ  $> 4d$ .

2) Изъ трехъ квадратовъ состоитъ тѣлесный уголъ *куба*; но изъ че-  
тырехъ, которые  $= 4d$ , нельзя составить (кн. 11, пред. 21) тѣлесный уголъ.

3) Изъ трехъ равностороннихъ и равноугольныхъ пятистороннихъ  
фигуръ состоитъ тѣлесный уголъ *додэкаэдра*; но изъ четырехъ нельзя соста-  
вить тѣлеснаго угла (кн. 11, пред. 21), такъ какъ (слѣдующая Лемма) уголъ  
подобной фигуры  $= 1\frac{1}{3}d$ , слѣдовательно сумма четырехъ такихъ угловъ  $> 4d$ .

4) Изъ другихъ многоугольниковъ еще менѣе возможно составить  
тѣлесный уголъ.

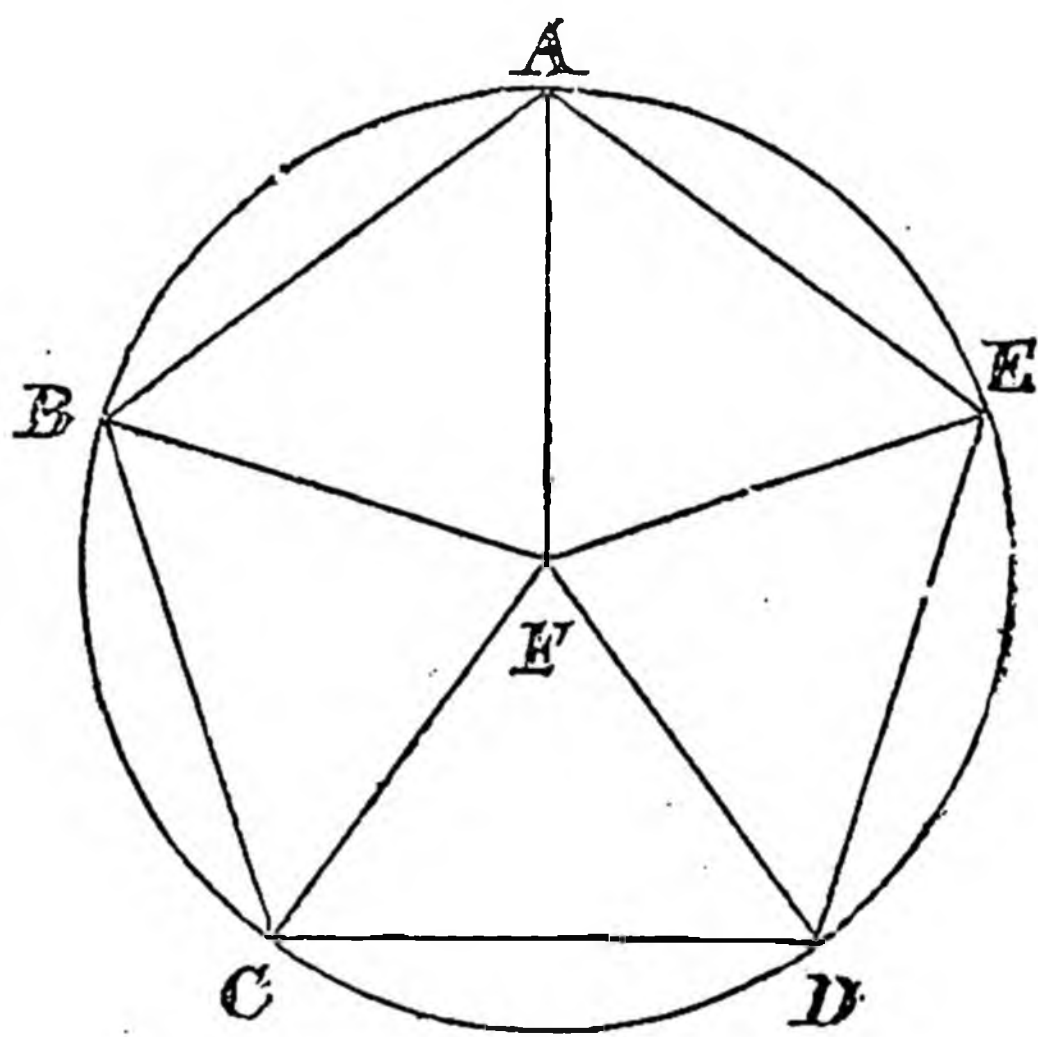
*Лемма.* Что уголъ равноугольной, пятисторонней фигуры съ равными  
сторонами  $= 1\frac{1}{3}d$  доказывается такимъ образомъ (фиг. 536).

Около этой пятисторонней фигуры  $ABCDE$  опишемъ кругъ, коего  
центръ  $F$ , проведемъ прямыя  $FA$ ,  $FB$ ,  $FC$ ,  $FD$ ,  $FE$ , которыя раздѣляютъ  
пополамъ (кн. 4, пред. 4) равные углы фигуры. Такъ какъ сумма угловъ

около  $F=4d$  и они равны, то каждый изъ нихъ  $=\frac{4}{5}d$ , или  $1-\frac{1}{5}$  прямого угла, слѣдовательно (кн. 1, пред. 32):

$$\angle FAB + \angle ABF = \frac{6}{5}d$$

Фиг. 536.



но  $\angle FAB = \angle FBC$ , слѣдовательно и  $\angle FBC + \angle ABF$  т. е.

$$\angle ABC = \frac{6}{5}d.$$

*Примѣчаніе 2.* Изъ предыдущихъ построений сторонъ пяти правильныхъ тѣлъ легко вывести ихъ алгебраическія выраженія чрезъ радіусъ шара, въ который онѣ вписаны.

Если назовемъ чрезъ  $R$  радіусъ шара, въ который вписаны правильныя тѣла, чрезъ  $a$  сторону какого нибудь изъ нихъ, то соображаясь съ предыдущими построениями, найдемъ:

Сторона тетраэдра:

$$a = \frac{2}{3}R\sqrt{6}$$

Сторона гексаэдра:

$$a = \frac{2}{3}R\sqrt{3}$$

Сторона октаэдра:

$$a = R\sqrt{2}$$

Сторона додекаэдра:

$$a = \frac{1}{3}R(\sqrt{15} - \sqrt{3})$$

Сторона икосаэдра:

$$a = \frac{1}{5}\sqrt{10(5 - \sqrt{5})}$$

Если чрезъ  $r$  означимъ радіусъ шара, вписаннаго въ каждое изъ пяти правильныхъ тѣлъ, то найдемъ:

Для тетраэдра:

$$r = \frac{1}{3}R$$

Для гексаэдра:

$$r = \frac{1}{3} R \sqrt{3}$$

Для октаэдра:

$$r = \frac{1}{3} R \sqrt{3}$$

Для додекаэдра:

$$r = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}$$

Для икосаэдра:

$$r = R \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}$$

Имѣя эти выраженія легко найти поверхности и объемы пяти правильныхъ тѣлъ.

Поверхности:

Тетраэдра:

Поверхность каждой грани, если ее назовемъ чрезъ  $u$  будетъ  $u = \frac{2}{3} R^2 \sqrt{3}$ , следовательно, если чрезъ  $A$  назовемъ всю поверхность тетраэдра, то найдемъ:

$$A = \frac{8}{3} R^2 \sqrt{3}$$

Гексаэдра:

$$u = \frac{4}{3} R^2, \quad A = 8R^2$$

Октаэдра:

$$u = \frac{1}{2} R^2 \sqrt{3}, \quad A = 4R^2 \sqrt{3}$$

Додекаэдра:

$$u = \frac{1}{6} R^2 \sqrt{10(5-\sqrt{5})}, \quad A = 2R^2 \sqrt{10(5-\sqrt{5})}$$

Икосаэдра:

$$u = \frac{1}{10} R^2 (5\sqrt{3} - \sqrt{15}), \quad A = 2R^2 (5\sqrt{3} - \sqrt{15}).$$

Объемы:

Тетраэдра.

Если поверхность  $A$  умножимъ на  $\frac{1}{3} r$ ,  $r$  есть радиусъ шара вписаннаго въ правильное тѣло, то очевидно найдемъ его объемъ  $V$ .

$$V = \frac{8}{3} R^2 \sqrt{3} \cdot \frac{1}{9} R = \frac{8}{27} R^3 \sqrt{3}$$

Гексаэдра.

$$V = 8R^2 \cdot \frac{1}{9} R \sqrt{3} = \frac{8}{9} R^3 \sqrt{3}$$

Октаэдра.

$$V = 4R^2 \sqrt{3} \cdot \frac{1}{9} R \sqrt{3} = \frac{4}{3} R^3$$

Додекаэдра.

$$V = 2R^2 \sqrt{10(3-\sqrt{5})} \cdot \frac{1}{3} R \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} = \frac{2}{9} R^3 \sqrt{30(3+\sqrt{5})}$$

Икосаэдра.

$$V = 2R^2 (5\sqrt{3} - \sqrt{15}) \cdot \frac{1}{3} R \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} = \frac{2}{3} R^3 \sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$



## КНИГА XIV.

### Книга четвертая „О тѣлахъ“

---

*По мнѣнію нѣкоторыхъ приписываемая Гипсиклу Александрійскому.*

#### Книга первая „О пяти тѣлахъ.“

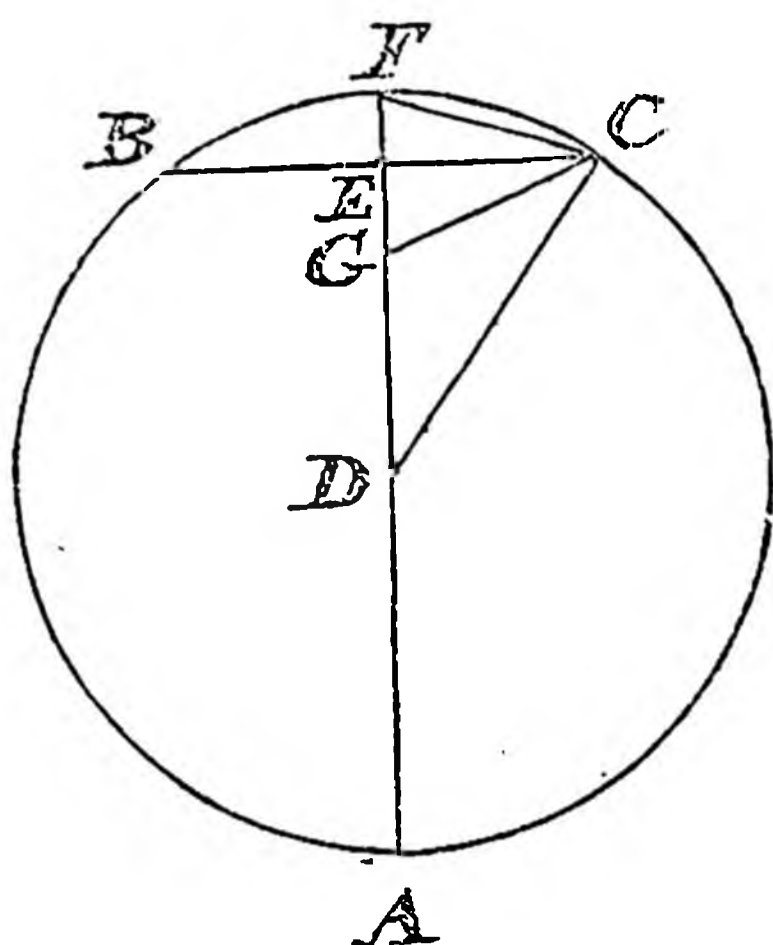
Дорогой мой Протархъ, однажды прибылъ въ Александрію Базилидъ изъ Тира, онъ былъ рекомендованъ моему отцу, какъ отличающійся подобно ему любовью къ математикѣ, большую часть времени своего пребывания онъ провелъ въ общеніи съ нимъ. Однажды они просматривали сочиненія Аполлонія о соотношеніи, вписанныхъ въ одинъ и тотъ же шаръ, додекаедра и икосаедра, и объ отношеніи между ними; имъ показалось, что разсужденія Аполлонія не совсѣмъ справедливы, и они написали, какъ мнѣ сообщалъ мой отецъ, поправки ими сдѣланныя. Впослѣдствіи мнѣ попалось подъ руки другое сочиненіе Аполлонія, которое содержало въ себѣ вѣрное рѣшеніе упомянутой задачи; чтеніе этого сочиненія доставило мнѣ большое удовольствіе. Сочиненіе изданное Аполлоніемъ можетъ каждый просмотрѣть, такъ какъ его можно вездѣ найти; настоящее же сочиненіе, которое я впослѣдствіи, на сколько я могу судить, съ возможнымъ стараніемъ дополнилъ, я думаю тебѣ, имѣющему прекрасныя познанія по всѣмъ наукамъ, а въ особенности по геометріи, представить прежде всего какъ свѣдущему судѣ; въ твердомъ ожиданіи, что ты изъ дружбы къ моему отцу, равно какъ изъ расположенія ко мнѣ, согласишься подарить своимъ вниманіемъ мою попытку. Но время окончить мнѣ предисловіе и приступить къ самому дѣлу.

#### Предложенія.

*Предложеніе 1.* Перпендикуляръ  $DE$ , опущенный изъ центра  $D$  круга,

на сторону  $BC$ , пятисторонней фигуры вписанной въ кругъ, равенъ половинѣ прямой, составленной изъ радіуса  $DF$  круга и стороны  $FC$ , десятисторонней фигуры, вписанной въ тотъ же кругъ (фиг. 537).

Фиг. 537.



*Доказат.* Продолжимъ  $DE$  по обѣ стороны до  $F$  и  $A$ , проведемъ  $DC$ ,  $CF$ , сдѣлаемъ  $EG=EF$  и проведемъ  $GC$ . Такъ какъ дуга  $BFC$  равна пятой части цѣлой окружности, дуга  $ACF$  равна полуокружности и дуга  $FC$  равна половинѣ дуги  $BFC$ , то:

$$\text{дуг. } ACF = 5 \cdot \text{дуг. } FC$$

слѣдовательно:

$$AC = 4 \cdot \text{дуг. } FC$$

Но (кн. 6, пред. 33):

$$\text{дуг. } AC : \text{дуг. } FC = \angle ADC : \angle FDC$$

слѣдовательно:

$$\angle ADC = 4 \angle FDC$$

но (кн. 3, пред. 20)  $\angle ADC = 2 \angle DFC$ , а потому:

$$4 \angle FDC = 2 \angle DFC$$

слѣдовательно  $2 \angle FDC = \angle DFC$ . Но (кн. 1, пред. 4)  $\angle DFC = \angle FGC$ , слѣдовательно  $\angle FGC = 2 \angle FDC$ , а потому (кн. 1, пред. 6 и кн. 1, пред. 32)  $DG = GC$ ; но (кн. 1, пред. 4)  $GC = FC$ , слѣдовательно  $DG = FC$ . Но  $GE = EF$ , слѣдовательно:

$$DE = EF + FC$$

а потому, прибавивъ по  $DE$ , получимъ:

$$2DE = DF + FC$$

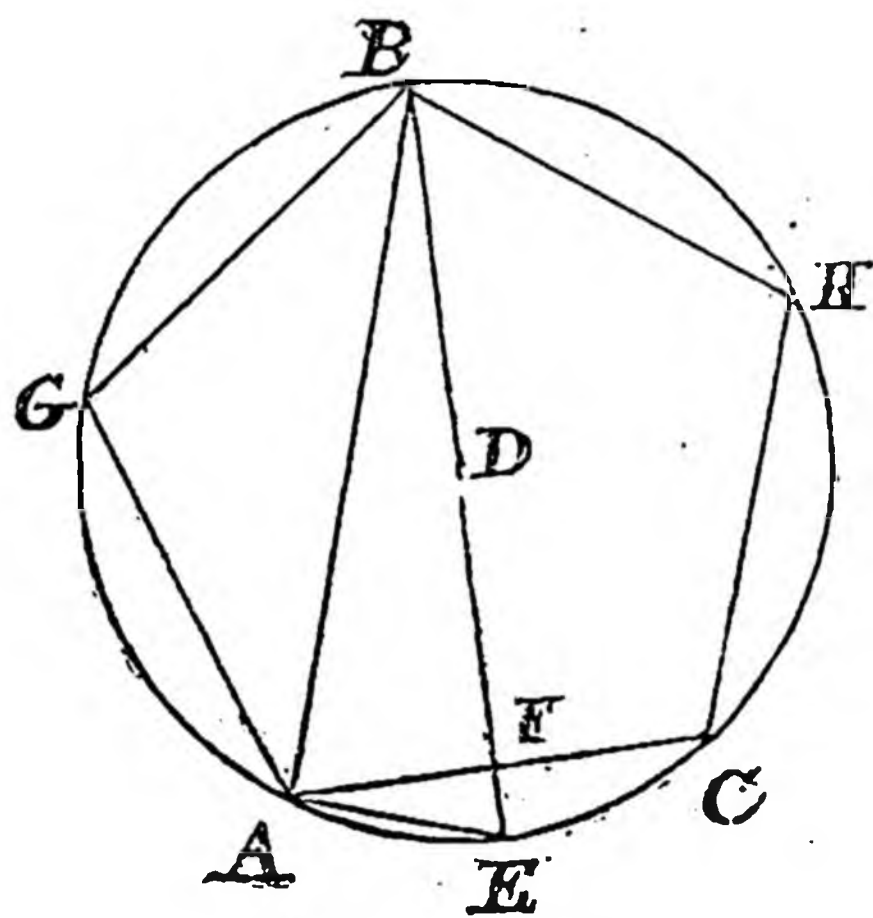
*Замѣчаніе.* Изъ (кн. 12, пред. 13) слѣдуетъ, что перпендикуляръ, опущенный изъ центра круга, на сторону, вписаннаго въ этотъ кругъ треугольника, равенъ половинѣ радіуса.

*Предложеніе 2.* Въ одинъ и тотъ же кругъ вписаны пятисторонняя грань додекаедра и трехсторонняя грань икосаедра, вписанныхъ въ одинъ и тотъ же шаръ.

Аристеевъ въ своемъ сравненіи пяти тѣлъ и Аполлоній во второмъ сочиненіи „о сравненіи додекаедра съ икосаедромъ“ утверждаютъ, что поверхность додекаедра относится къ поверхности икосаедра, какъ додекаедръ къ икосаедру, такъ какъ перпендикуляры, опущенные изъ центра шара на пятистороннюю грань додекаедра и трехстороннюю грань икосаедра, равны. Мы же дадимъ здѣсь доказательство предложеннаго предложенія, предпославши ему слѣдующую лемму.

*Лемма.* Если мы въ кругъ впишемъ пятистороннюю фигуру  $AGBHC$  съ равными сторонами, то сумма квадратовъ, построенныхъ на сторонахъ  $AC$  и на діагонали  $AB$ , равна пять разъ взятому квадрату построенному на радіусѣ (фиг. 538).

Фиг. 538.



Изъ центра  $D$  опустимъ перпендикуляръ  $DF$  на сторону  $AC$ , продолжимъ его по обѣ стороны до  $B$ ,  $E$  и проведемъ  $AE$ ; то эта прямая будетъ сторона десятисторонней фигуры. Такъ какъ  $BE=2DE$ , то (кн. 6, пред. 20, слѣд.):

$$\square BE=4\square DE$$

Но (кн. 3, пред. 31)  $\angle BAE=d$ , а потому (кн. 1, пред. 47):

$$\square BE=\square BA+\square AE$$

слѣдовательно:

$$\square BA+\square AE=4\square DE$$

а потому прибавивъ по  $\square DE$ :

$$\square BA+\square AE+\square DE=5\square DE$$

Но (кн. 13, пред. 10):

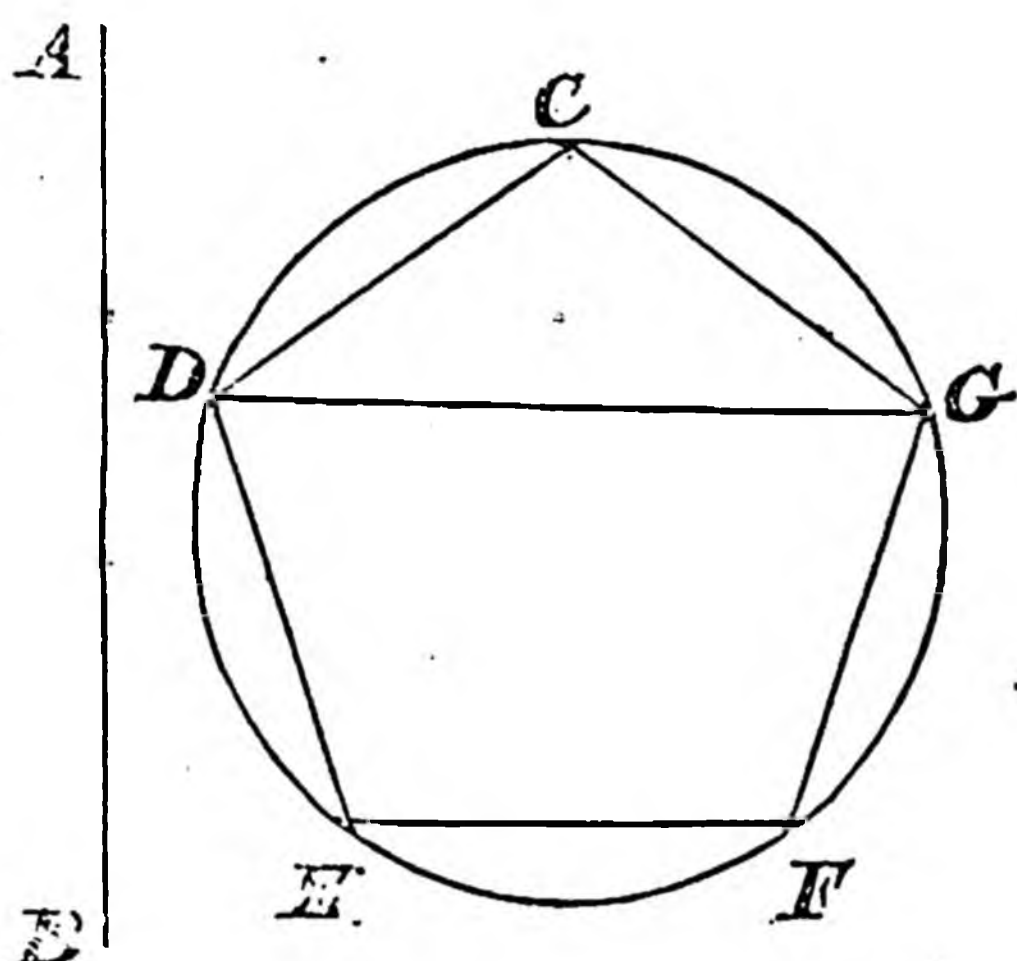
$$\square AE + \square DE = \square AC$$

слѣдовательно:

$$\square AC + \square AB = 5\square DE$$

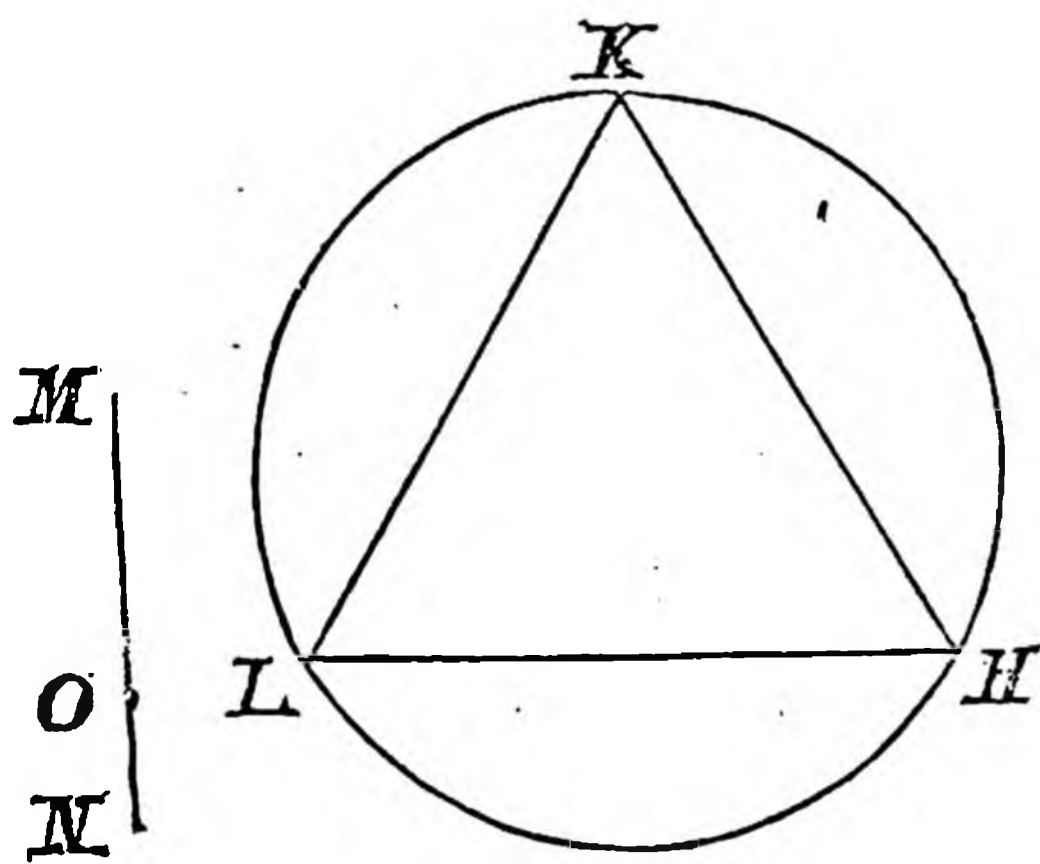
Итакъ, вышеупомянутое предложеніе можно доказать слѣдующимъ образомъ (фиг. 539):

Фиг. 539.



Пусть  $AB$  будетъ діаметръ шара, въ которомъ вписаны додекаедръ и икосаедръ,  $CDEFG$  есть пятисторонняя грань додекаедра, а  $KLH$  трехсторонняя грань икосаедра (фиг. 540), требуется доказать, что обѣ грани вписаны въ одинъ и тотъ же кругъ, или что  $r = \varsigma$ , если  $r$ ,  $\varsigma$  суть радіусы круговъ, описанныхъ около вышесказанныхъ пятистороннихъ и трехстороннихъ фигуръ

Фиг. 540.



Проведемъ въ пятисторонней фигурѣ діагональ  $DG$ ; то эта послѣдняя, будетъ (кн. 13, пред. 8 и кн. 13, пред. 7) сторона вписаннаго въ шаръ куба. Возьмемъ такую прямую  $MN$ , чтобы (кн. 10, пред. 6, слѣд.)  $\square AB = 5\square MN$ . Но (кн. 13, пред. 16, слѣд.) квадратъ, построенный на діаметрѣ  $AB$  равенъ пять разъ взятому квадрату, построенному на радіусѣ того круга, въ который вписана грань икосаедра, слѣдовательно радіусъ этотъ есть  $MN$ . Раздѣлимъ (кн. 6, пред. 30) прямую  $MN$  въ крайнемъ и среднемъ



отношеніи, въ точкѣ  $O$ , и пусть  $OM$  большій отрѣзокъ, то (кн. 13, пред. 5 и пред. 9)  $MO$  будетъ сторона, вписанной въ тотъ же кругъ, десятисторонней фигуры.

Такъ какъ:

$$\square AB = 5 \square MN$$

и (кн. 13, пред. 15 и кн. 13, пред. 17, слѣд.):

$$\square AB = 3 \square DG$$

а потому:

$$3 \square DG = 5 \square MN$$

Но (кн. 13, пред. 8 и кн. 14, пред. 7):

$$DG : CG = MN : MO$$

а также:

$$DG : MN = CG : MO$$

слѣдовательно:

$$3 \square DG : 5 \square MN = 3 \square CG : 5 \square MO$$

а потому:

$$3 \square CG = 5 \square MO$$

Но (кн. 13, пред. 16 и пред. 10):

$$5 \square KL = 5 \square MN + 5 \square MO$$

слѣдовательно:

$$5 \square KL = 3 \square DG + 3 \square CG$$

Но (предъидущая лемма):

$$\square DG + \square CG = 5 \square r$$

а потому:

$$3 \square DG + 3 \square CG = 15 \square r$$

слѣдовательно:

$$5 \square KL = 15 \square r$$

Но (кн. 13, пред. 12):

$$\square KL = 3 \square \varsigma$$

а потому:

$$5 \square KL = 15 \square \varsigma$$

слѣдовательно:

$$15 \square r = 15 \square \varsigma$$

а потому  $r = \varsigma$ .

*Предложеніе 3.* Если опустимъ перпендикуляръ  $FG$ , изъ центра  $F$  круга, описаннаго около пятисторонней фигуры  $ABCDE$ , съ равными

сторонами, на одну изъ этихъ сторонъ  $CD$ , то тридцать разъ взятый прямоугольникъ, построенный на перпендикулярѣ  $FG$  и сторонѣ  $CD$ , равенъ поверхности додекаедра. А если изъ центра  $D$ , круга описаннаго около равносторонняго треугольника  $ABC$ , опустимъ перпендикуляръ  $DE$  на одну изъ его сторонъ  $BC$ , то тридцать разъ взятый прямоугольникъ, построенный на сторонѣ  $BC$  и перпендикулярѣ  $DE$ , равенъ поверхности икосаедра.

*Доказат.* 1) Проведемъ  $CF, FD$  (фиг. 541). Такъ какъ (кн. 1, пред. 41):

$$CD.FG=2\triangle CDF$$

то:

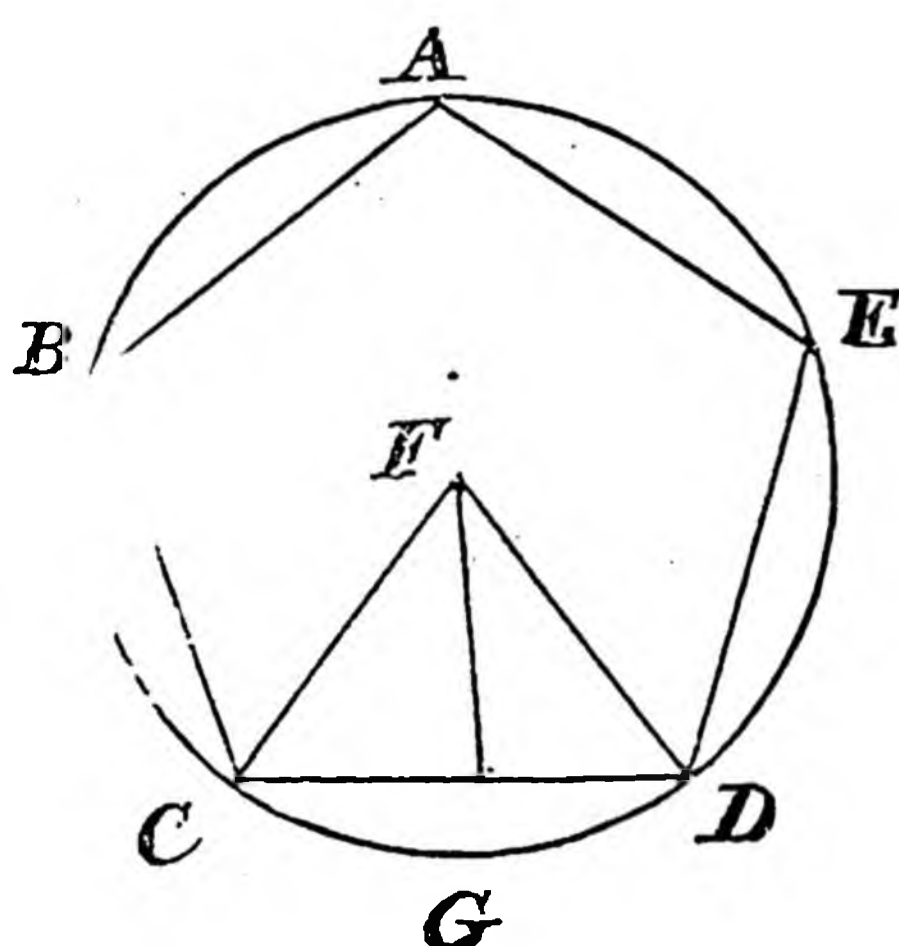
$$5(CD.FG)=10\triangle CDF=2ABCDE$$

слѣдовательно:

$$30(CD.FG)=12ABCDE=$$

(кн. 11, опред. 28) поверхности додекаедра.

Фиг. 541.



2) Проведемъ  $BD, DC$  (фиг. 542). Такъ какъ (кн. 1, пред. 41):

$$BC.DE=2\triangle DBC$$

то:

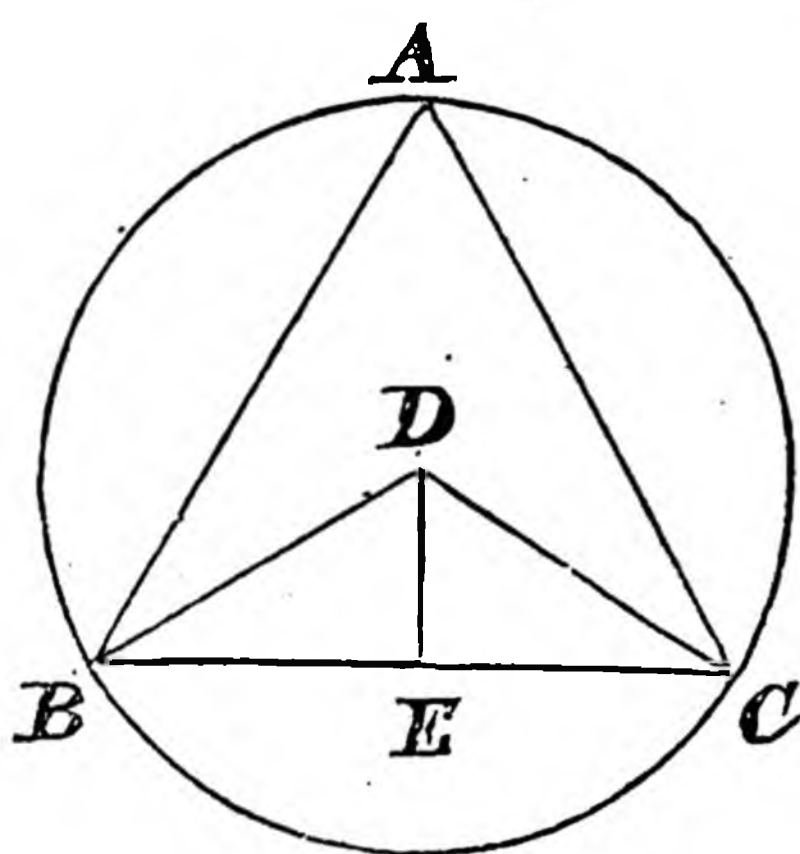
$$3(BC.DE)=6\triangle DBC=2\triangle ABC$$

слѣдовательно:

$$30(BC.DE)=20\triangle ABC=$$

(кн. 11, опред. 29) поверхности икосаедра.

Фиг. 542.

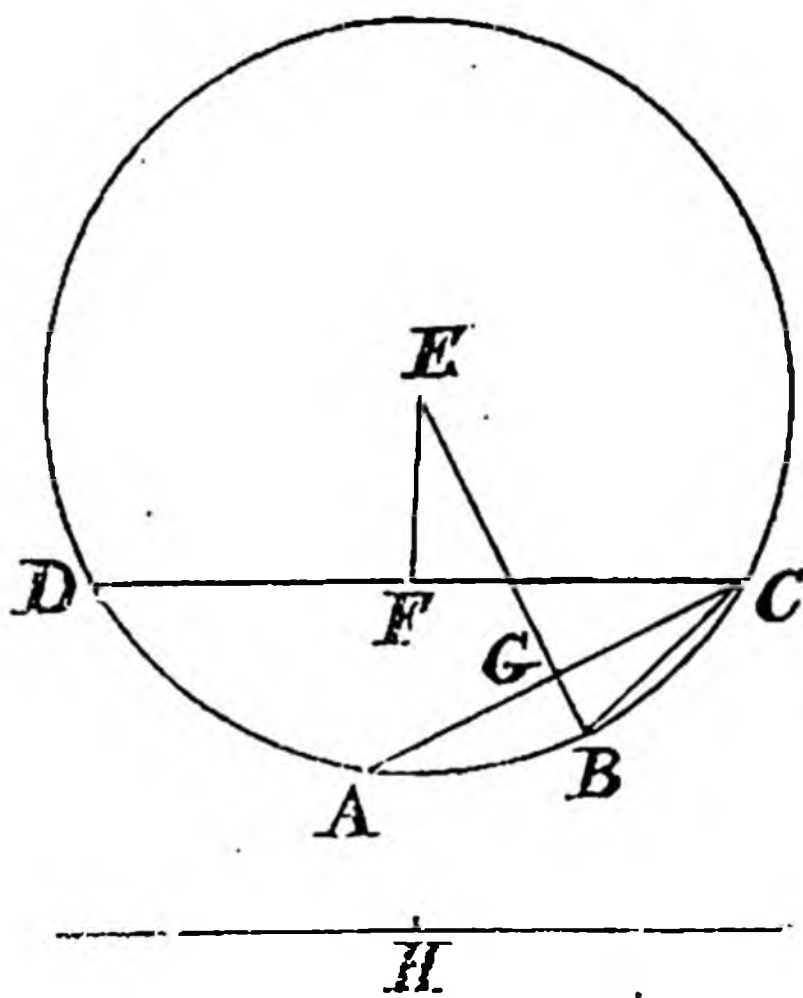


*Замѣчаніе.* Отсюда слѣдуетъ, что поверхности, вписанныхъ въ одинъ

и тотъ же шаръ, додекаедра и икосаедра относятся между собою какъ вышеупомянутые прямоугольники.

*Предложеніе 4.* Поверхность додекаедра относится къ поверхности икосаедра, какъ сторона  $H$  куба къ сторонѣ  $DC$  икосаедра (фиг. 543).

Фиг. 543.



*Доказат.* Пусть въ кругѣ, описанномъ около точки  $E$ , вписаны пяти-сторонняя и трехсторонняя фигуры, вписанныхъ въ одинъ и тотъ же шаръ додекаедра и икосаедра. Въ кругъ этотъ внесемъ сторону  $DC$  треугольной и сторону  $AC$  пятиугольной фигуры. Изъ центра  $E$  опустимъ перпендикуляры  $EF$ ,  $EG$ , на стороны  $DC$ ,  $AC$ , продолжимъ  $EG$  до  $B$  и проведемъ  $BC$ , сторону десятисторонней фигуры.

Если мы прямую линію, составленную изъ  $EB$  и  $BC$  раздѣлимъ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то (кн. 13, пред. 9)  $EB$  будетъ большій отрѣзокъ. Но (кн. 14, пред. 1):

$$2EG = EB + BC$$

и (кн. 13, пред. 12):

$$2EF = BE$$

Слѣдовательно, если  $2EG$  раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то (кн. 13, пред. 9)  $2EF$  есть большій отрѣзокъ. Но если мы  $H$  раздѣлимъ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то  $CA$  большій отрѣзокъ (кн. 13, пред. 17, слѣд.). Слѣдовательно (кн. 14, пред. 7):

$$H : CA = 2EG : 2EF = EG : EF$$

а потому (кн. 6, пред. 16):

$$H.EF = CA.EG$$

но (кн. 6, пред. 1):

$$H : CD = H.EF : CD.EF$$

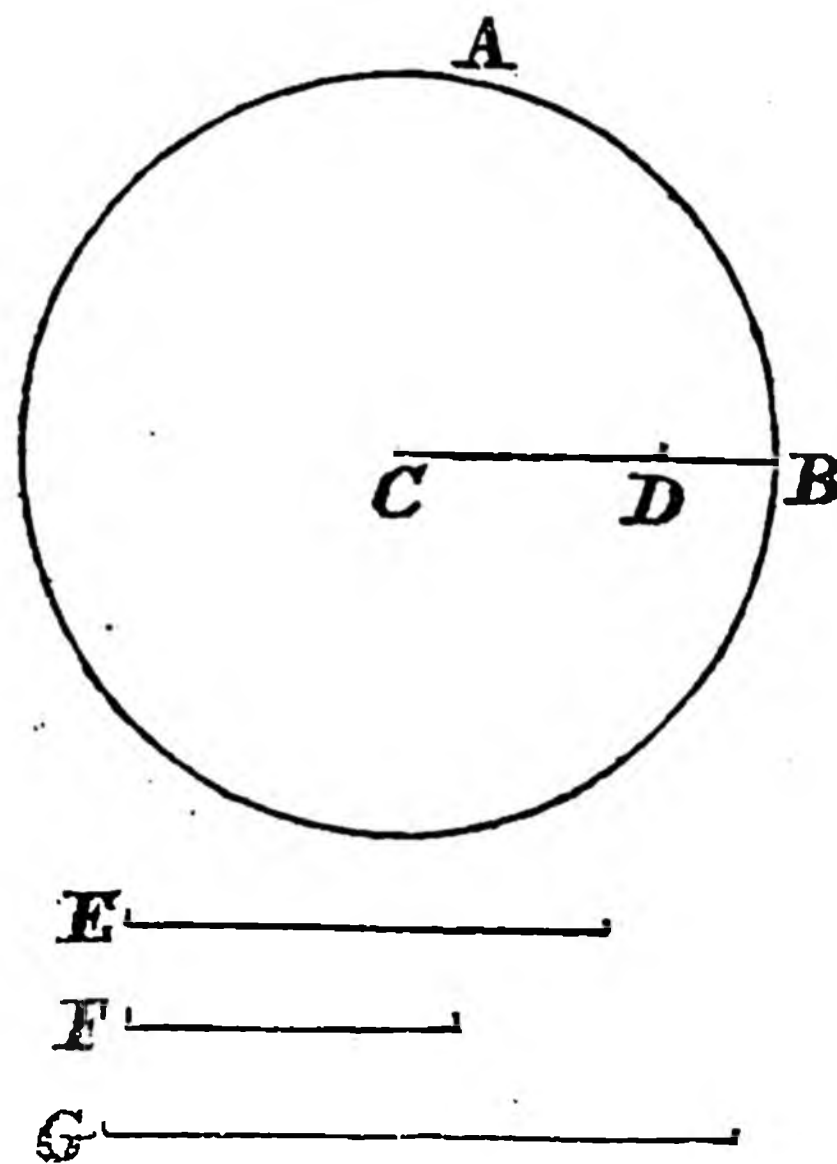
слѣдовательно:

$$H : CD = CA.EG : CD.EF$$

т. е. сторона куба относится къ сторонѣ икосаедра (кн. 14, пред. 3) какъ поверхность додекаедра къ поверхности икосаедра.

*Предложеніе 5.* Если какая нибудь прямая  $BC$  раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то сумма квадратовъ, построенныхъ на цѣлой прямой  $BC$  и большемъ отрѣзкѣ  $CD$  относится къ суммѣ квадратовъ построенныхъ на цѣлой  $BC$  и на меньшемъ отрѣзкѣ  $DB$ , какъ ребро  $G$  куба относится къ ребру  $E$  икосаедра (фиг. 544).

Фиг. 544.



*Доказат.* Пусть въ кругъ радіуса  $CB$ , вписаны пятисторонняя и трехсторонняя грани, вписанныхъ въ одинъ и тотъ же шаръ додекаедра и икосаедра. Пусть  $CB$  раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то (кн. 13, пред. 5 и пред. 9) большій отрѣзокъ  $CD$  будетъ сторона вписанной въ этотъ же кругъ десятисторонней фигуры. Пусть (кн. 13, пред. 18)  $E$  будетъ ребро икосаедра,  $F$  ребро додекаедра, а  $G$  ребро куба. Слѣдовательно  $E$  будетъ сторона треугольника,  $F$  сторона въ этотъ же кругъ вписаннаго пятиугольника, но  $F$  есть (кн. 13, пред. 17, слѣд.) большій отрѣзокъ, раздѣленнаго въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, ребра  $G$  куба, а потому (кн. 13, пред. 12):

$$\square E = 3 \square CB$$

и (кн. 13, пред. 4):

$$\square CB + \square BD = 3 \square CD$$

слѣдовательно (кн. 14, пред. 7):

$$\square E : \square CB + \square BD = \square CB : \square CD = \square G : \square F$$

а потому также:

$$\square G : \square E = \square F : \square CB + \square BD$$

Но (кн. 13, пред. 10):

$$\square F = \square CB + \square BD$$



слѣдовательно:

$$\square G : \square E = \square BC + \square DC : \square CB + \square BD$$

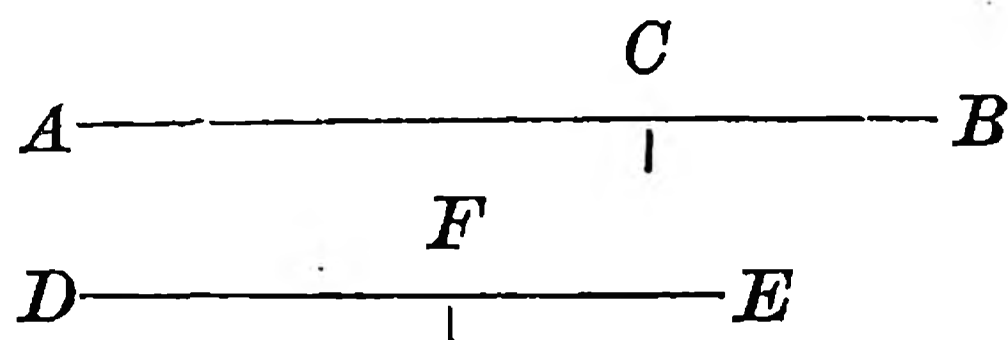
т. е. сторона  $G$  куба относится къ сторонѣ  $E$  икосаедра, какъ линія квадрата  $\square BC + \square DC$  къ линіи, квадратащей  $\square CB + \square BD$ .

*Предложеніе 6.* Объемъ додекаедра относится къ объему икосаедра, какъ сторона куба къ сторонѣ икосаедра.

*Доказат.* Такъ какъ (кн. 14, пред. 2) въ равные круги вписаны пятистороннія и трехстороннія грани, вписанныхъ въ одинъ и тотъ же шаръ додекаедра и икосаедра, но равные круги на поверхности шара равно отстоятъ отъ центра шара, потому что перпендикуляры опущенные изъ центра на плоскости упомянутыхъ круговъ равны, а изъ этого слѣдуетъ что прямыя, проведенныя изъ центра шара къ центрамъ упомянутыхъ круговъ, равны и перпендикулярны. Слѣдовательно пирамиды, имѣющія общей вершиной центръ шара, а основаніями пятистороннія и трехстороннія грани додекаедра и икосаедра, равной высоты, а потому онѣ относятся между собою какъ площади ихъ основаній (кн. 12, пред. 5 и пред. 6). Слѣдовательно одна изъ пирамидъ додекаедра относится къ одной изъ пирамидъ икосаедра, какъ пятисторонняя грань къ трехсторонней; слѣдовательно отношеніе двѣнадцати пирамидъ додекаедра къ двадцати пирамидамъ икосаедра, равно отношенію двѣнадцати пятистороннихъ граней къ двадцати трехстороннимъ, т. е. объемъ додекаедра относится къ объему икосаедра, какъ поверхность додекаедра относится къ поверхности икосаедра, слѣдовательно и (кн. 14, пред. 4) какъ сторона куба къ сторонѣ икосаедра.

*Предложеніе 7.* Двѣ прямыя  $AB$ ,  $DE$ , раздѣленныя въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, относятся между собою какъ ихъ большія отрѣзки  $AC$ ,  $DF$  (фиг. 545).

Фиг. 545



*Доказат.* Такъ какъ (кн. 6, пред. 17):

$$AB.CB = \square AC$$

и

$$DE.FE = \square DF$$

слѣдовательно:

$$AB.CB : \square AC = DE.FE : \square DF$$

а потому (кн. 5, пред. 15):

$$4(AB.CB) : \square AC = 4(DE.FE) : \square DF$$

слѣдовательно:

$$4(AB.CB) + \square AC : \square AC = 4(DE.FE) + \square DF : \square DF$$

Но (кн. 2, пред. 8):

$$4(AB.BC) + \square AC = \square (AB + BC)$$

и

$$4(DE.EF) + \square DF = \square (DE + EF).$$

слѣдовательно:

$$\square (AB + BC) : \square AC = \square (DE + EF) : \square DF$$

а потому (кн. 6, пред. 22):

$$AB + BC : AC = DE + EF : DF$$

слѣдовательно:

$$AB + BC + AC : AC = DE + EF + DF : DF$$

т. е.:

$$2AB : AC = 2DE : DF$$

а потому также:

$$AB : AC = DE : DF$$

слѣдовательно:

$$AB : DE = AC : DF$$

*Замѣчаніе.* Если произвольную прямую раздѣлимъ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то сумма квадратовъ, построенныхъ на цѣлой прямой и большемъ отрѣзкѣ относится къ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на цѣлой прямой и меньшемъ отрѣзкѣ какъ поверхность, или объемъ, додекаедра относится къ поверхности, или объему, икосаедра вписаннаго въ тотъ же шаръ.

---

## КНИГА XV.

### Книга пятая „О тѣлахъ“:

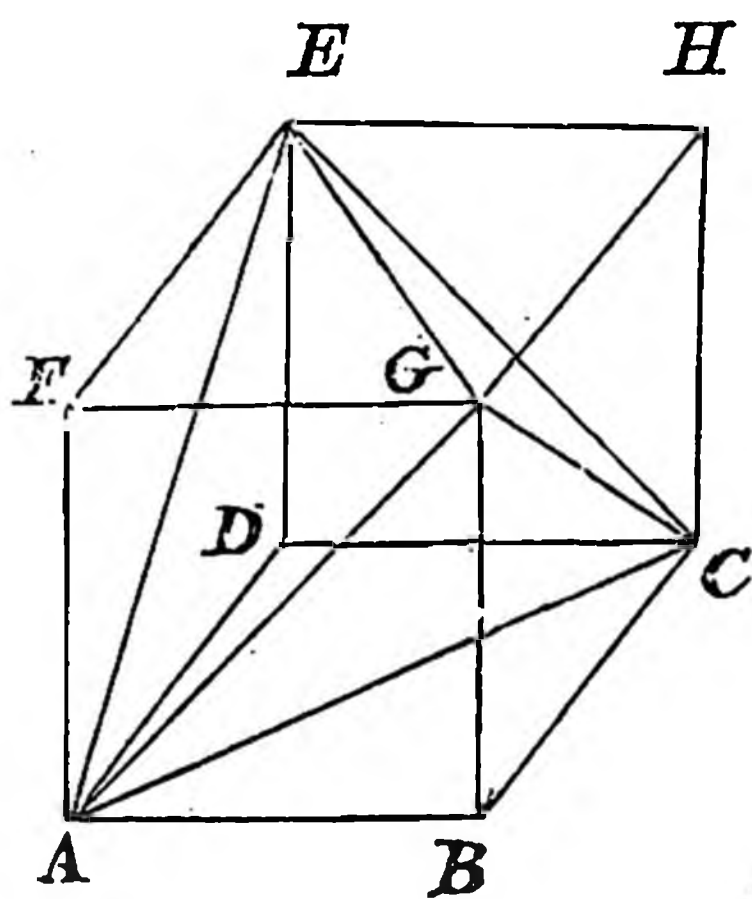
*По мнѣнію нѣкоторыхъ приписываемая Гипсиклу Александрійскому.*

#### Книга вторая „О пяти тѣлахъ.“

#### Предложенія.

*Предложеніе 1.* Въ данный кубъ  $АН$  вписать тетраедръ (фиг. 546).

Фиг. 546.



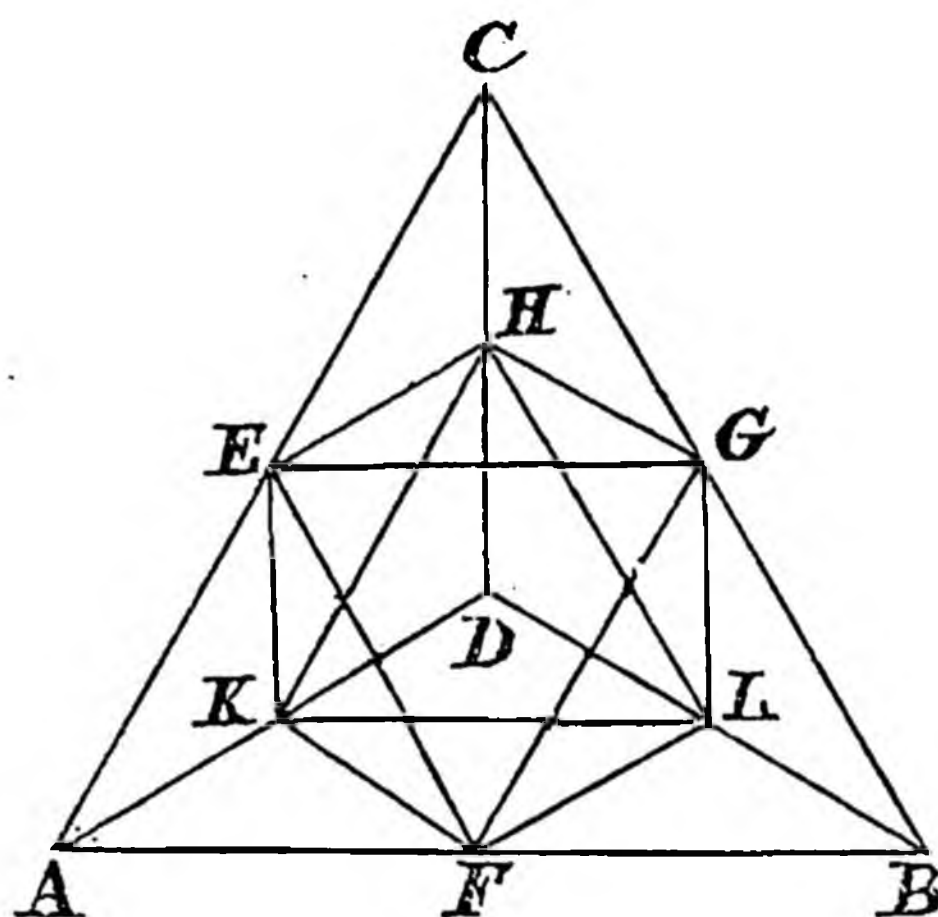
*Доказат.* Проведемъ во всѣхъ шести квадратахъ діагонали  $AC$ ,  $AE$ ,  $CE$ ,  $AG$ ,  $EG$ ,  $GC$ , то очевидно треугольники  $AEC$ ,  $AGE$ ,  $AGC$ ,  $CGE$  равносторонніе. Слѣдовательно (кн. 11, опред. 26)  $AECG$  есть тетраедръ, вписанный въ кубъ, такъ какъ его вершины суть вершины куба.

*Предложеніе 2.* Въ данный тетраедръ  $ABCD$  вписать октаедръ (фиг. 547).

*Доказат.* Раздѣлимъ ребра тетраедра пополамъ въ точкахъ  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $K$ ,  $L$  и соединимъ эти точки между собою двѣнадцатью прямыми  $HK$ ,  $HL$ ,  $EF$ ,  $FG$  и т. д., которыя всѣ равны между собою (кн. 1, пред. 4).

А потому всѣ восемь треугольниковъ, основанія которыхъ  $FG$ ,  $GH$ ,  $HK$ ,  $KF$ , а вершины  $E$ ,  $L$ , равносторонніе. Слѣдовательно (кн. 11, опред. 27)

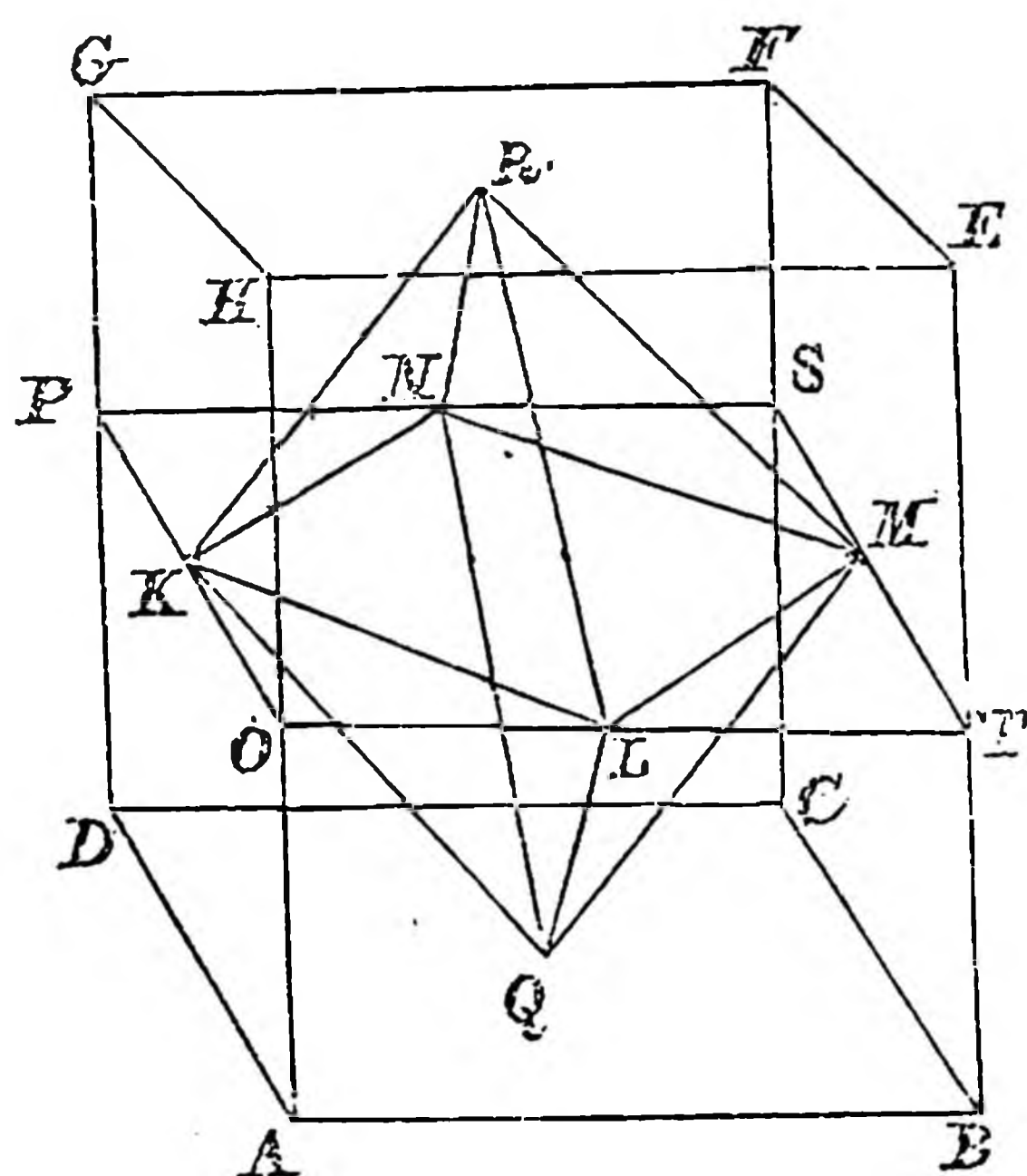
Фиг. 547.



тѣло  $EL$  есть октаедръ, вписанный въ тетраедръ, такъ какъ его вершины лежатъ на серединахъ реберъ тетраедра.

*Предложеніе 3.* Въ данный кубъ  $AF$  вписать октаедръ (фиг. 548).

Фиг. 548.



*Доказат.* Возьмемъ (кн. 4, пред. 8) середины квадратовъ  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $Q$ ,  $R$  и соединимъ эти точки двѣнадцатью прямыми  $KL$ ,  $LM$ ,  $BM$ ,  $QM$  и т. д., то тѣло  $RQ$ , будетъ требуемый октаедръ.

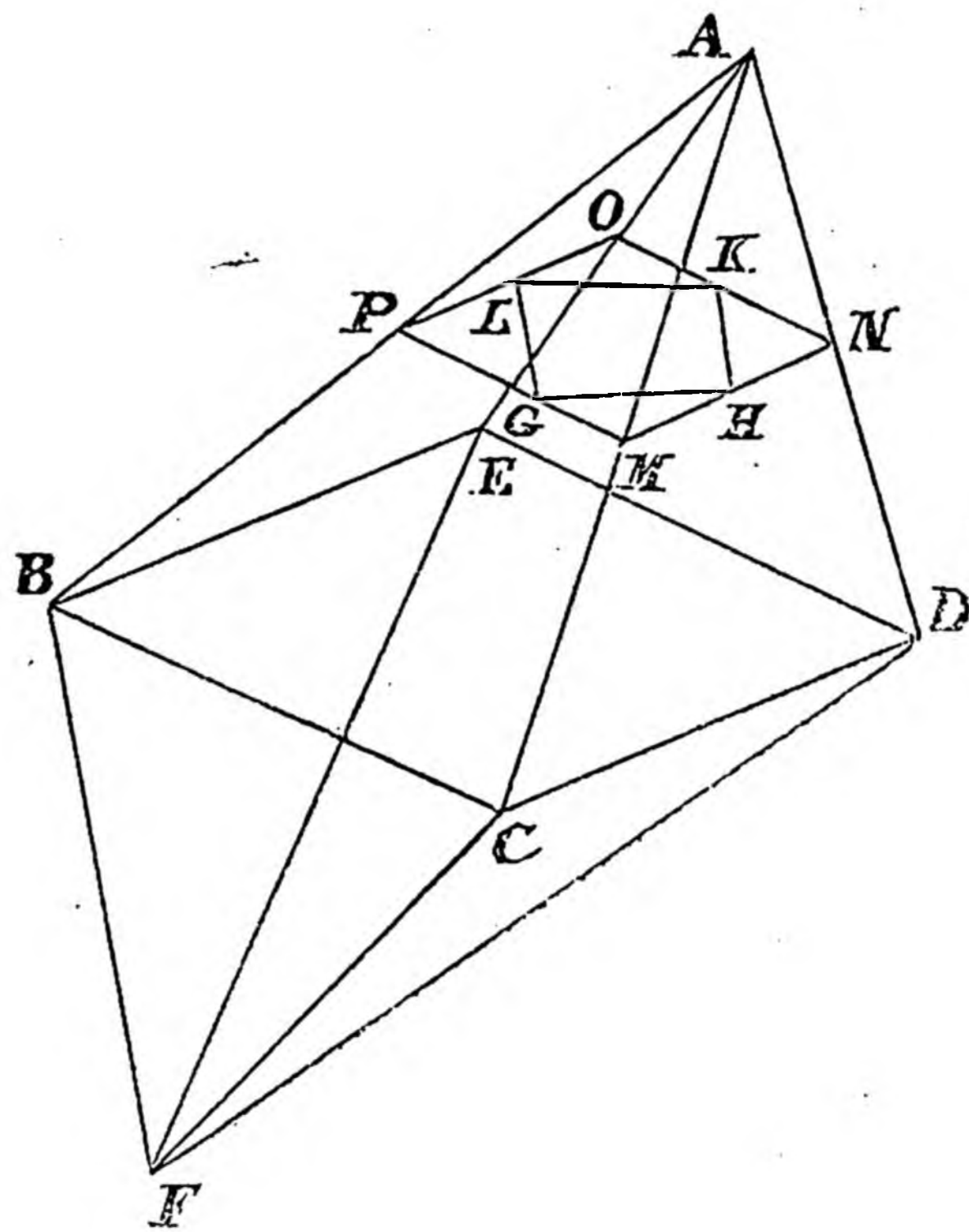
Если мы проведемъ чрезъ точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  прямыя  $PO$ ,  $OT$ ,  $TS$ ,  $SP$ , параллельныя сторонамъ основанія  $AC$ ; то эти прямыя равны между собою и пересѣкаются, такъ какъ (кн. 4, пред. 8)  $OP$ ,  $ST$  одну и ту же прямую  $DG$ , а  $OT$ ,  $ST$  одну и ту же прямую  $BE$  дѣлятъ пополамъ. Слѣдовательно (кн. 11, пред. 10)  $\angle KOL$ ,  $\angle MTL$  суть прямые углы. Но  $KO$ ,  $OL$ ,  $LT$ ,  $TM$  суть половины равныхъ между собою прямыхъ  $PO$ ,  $OT$ ,  $TS$ , а потому онѣ также равны. Слѣдовательно (кн. 1, пред. 4)  $KL=LM$ . По той же причинѣ  $LK$ ,  $KN$ ,  $NM$  и остальные прямыя также равны между



собою. Следовательно всѣ восемь треугольниковъ, основанія которыхъ  $KL$ ,  $LM$ ,  $MN$ ,  $NK$  и коихъ вершины  $R$ ,  $Q$  равносторонни. А потому (кн. 11, опред. 27) тѣло  $RQ$  есть октаедръ, вписанный въ кубъ, такъ какъ его вершины встрѣчаютъ середины сторонъ площадей куба.

*Предложеніе 4.* Въ данный октаедръ  $AF$  вписать кубъ (фиг. 549).

Фиг. 549.



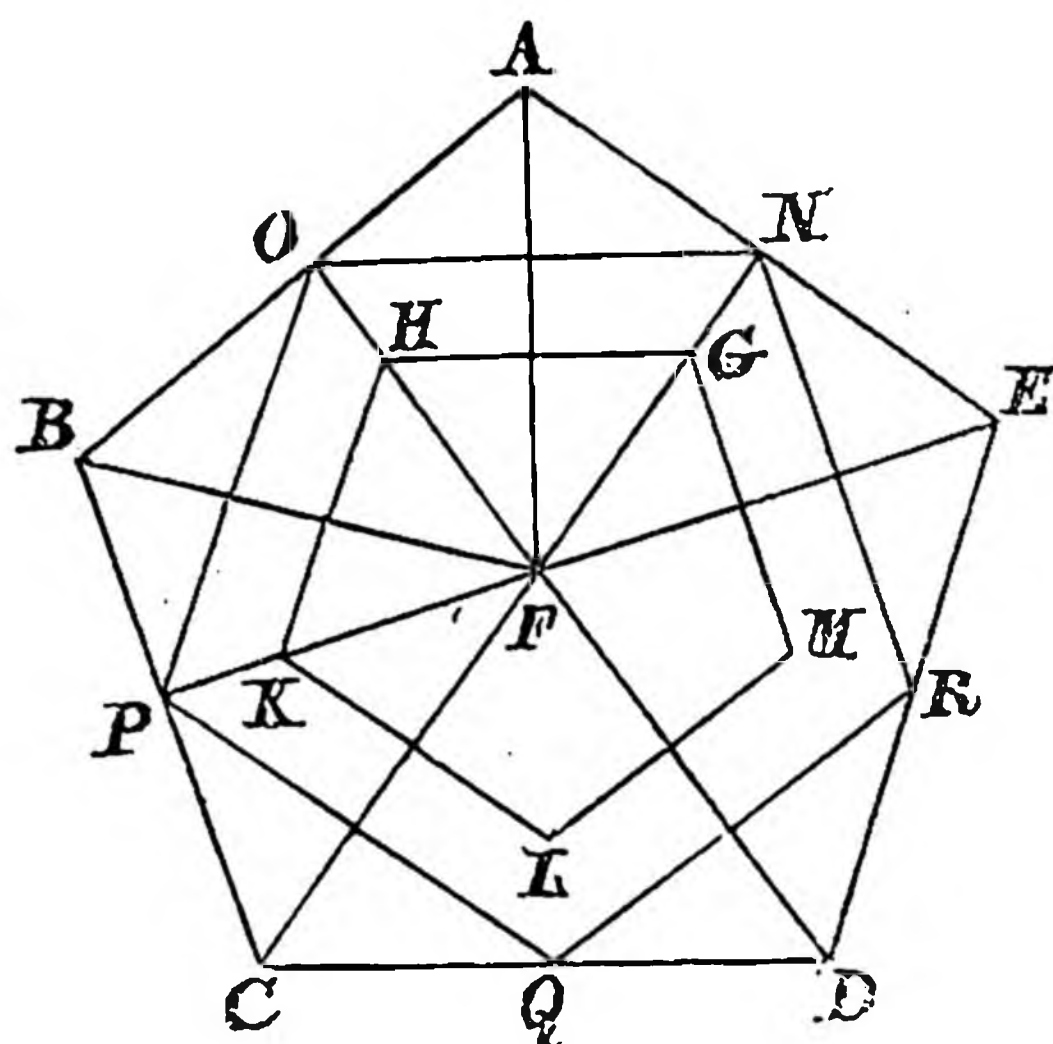
*Доказат.* Пусть  $ABCDE$  будетъ одна изъ шести четырехстороннихъ пирамидъ октаедра. Раздѣлимъ пополамъ ребра этой пирамиды въ точкахъ  $M$ ,  $N$ ,  $O$ ,  $P$  и проведемъ прямыя  $MN$ ,  $NO$ ,  $OP$ ,  $PM$ , которыя (кн. 1, пред. 4) равны другъ другу и (кн. 6, пред. 2) параллельны сторонамъ квадрата (кн. 13, пред. 14)  $BCDE$ , следовательно (кн. 11, пред. 10) онѣ заключаютъ прямые углы. Изъ этого слѣдуетъ, что  $MNOP$  квадратъ. Раздѣлимъ пополамъ стороны этого квадрата въ точкахъ  $G$ ,  $H$ ,  $K$ ,  $L$  и проведемъ  $GH$ ,  $HK$ ,  $KL$ ,  $LG$ , которыя (кн. 1, пред. 4) равны другъ другу, и такъ какъ онѣ образуютъ (кн. 1, пред. 32) съ  $MN$ ,  $NO$ ,  $OP$ ,  $PM$  половины прямыхъ угловъ, то (кн. 1, пред. 13) онѣ заключаютъ прямые углы. Изъ этого слѣдуетъ, что  $GHKL$  квадратъ. Подобнымъ же образомъ, какъ съ пирамидой  $ABCDE$ , поступимъ и съ остальными пятью пирамидами октаедра, мы получимъ еще пять квадратовъ, равныхъ квадрату  $GHKL$ , и которыя вмѣстѣ съ нимъ составляютъ кубъ, вписанный въ октаедръ, такъ какъ его вершины касаются площадей октаедра.

*Предложеніе 5.* Въ данный икосаедръ вписать додекаедръ (фиг. 550).

*Доказат.* Пусть  $ABCDEF$  будетъ одна изъ двѣнадцати пятистороннихъ пирамидъ икосаедра. Возьмемъ (кн. 4, пред. 5) центры  $G$ ,  $H$ ,  $K$ ,  $L$ ,  $M$ , круговъ описанныхъ около треугольниковъ и соединимъ эти точки

прямыми, то  $GHKLM$  будетъ пятисторонняя фигура съ равными сторонами и равными углами.

Фиг. 550.



Въ самомъ дѣлѣ, если мы проведемъ  $FG$ ,  $FH$ ,  $FK$  и т. д. и продолжимъ ихъ, то онѣ раздѣлятъ пополамъ (кн. 3, пред. 4) углы при  $F$ , слѣдовательно (кн. 1, пред. 4) и основанія въ точкахъ  $N$ ,  $O$ ,  $P$ , и т. д. Проведя прямая  $NO$ ,  $OP$ , то онѣ (кн. 1, пред. 4) равны другъ другу. Но (кн. 1, пред. 4)  $FN=FO=FP$  и (кн. 1, пред. 26 и кн. 3, пред. 4)  $FG=FH=FK$ , слѣдовательно (кн. 6, пред. 2)  $GH$ ,  $HK$  параллельны  $NO$ ,  $OP$ ; слѣдовательно (кн. 6, пред. 4):

$$NO : GH = OP : HK$$

а потому, такъ какъ  $NO=OP$ , то  $GH=HK$ . По той же причинѣ  $HK=KL$  и т. д. слѣдовательно фигура  $GHKLM$  равносторонняя, но она и равноугольная, потому что (кн. 11, пред. 10)  $\angle HGK = \angle NOP$ ,  $\angle HKL = \angle OPQ$  и т. д., и (кн. 1, пред. 13)  $\angle NOP = \angle OPQ$  и т. д.

Эта фигура находится въ одной плоскости. Такъ какъ перпендикуляръ, опущенный изъ точки  $F$  на плоскость фигуры  $ABCDE$ , встрѣчаетъ ея средину, и всѣ прямая проведенныя изъ этого центра къ  $N$ ,  $O$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  составляютъ (кн. 11, пред. 4) прямые углы съ упомянутымъ перпендикуляромъ. Проведемъ чрезъ точку  $G$  прямую параллельную прямой проведенной чрезъ точку  $N$ , а изъ точки, въ которой она встрѣчаетъ перпендикуляръ, проведемъ прямая къ  $H$ ,  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ; то этотъ перпендикуляръ разсѣкается параллельными прямыми въ отношеніи:

$$FN : FG = FO : FH$$

и т. д. слѣдовательно (кн. 6, пред. 2) прямая проведенная чрезъ  $G$ ,  $H$  и т. д. параллельны прямымъ проведеннымъ чрезъ  $A$ ,  $B$  и т. д., и онѣ дѣлаютъ съ перпендикуляромъ прямые углы, а слѣдовательно (кн. 11, пред. 5) онѣ лежатъ въ одной плоскости.

Если также поступимъ съ остальными одинадцатью пирамидами икосаедра, какъ мы поступили съ пирамидой  $ABCDEF$ , то мы получимъ еще одинадцать пятистороннихъ фигуръ съ равными сторонами, которыя равны фигурѣ  $GHKLM$ , и которыя вмѣстѣ съ ней ограничиваютъ додекаедръ, вписанный въ икосаедръ, потому что его вершины касаются граней икосаедра.

*Предложеніе 6.* Найти число реберъ и вершинъ въ пяти тѣлахъ.

1. *Найти число реберъ?*

Умножимъ число граней, ограничивающихъ тѣло, на число сторонъ этой грани и произведеніе раздѣлимъ на два.

Такъ напр., икосаедръ ограниченъ двадцатью треугольниками, а каждый треугольникъ ограниченъ тремя сторонами, это даетъ шестьдесятъ реберъ; но каждыя двѣ грани даютъ одно и то же ребро тѣла, следовательно икосаедръ имѣетъ только тридцать реберъ.

2. *Найти число вершинъ?*

Умножимъ число граней ограничивающихъ тѣло на число плоскихъ угловъ каждой грани и произведеніе раздѣлимъ на число угловъ, составляющихъ одну вершину.

Такъ напр. икосаедръ ограниченъ двадцатью треугольниками, изъ коихъ каждый имѣетъ три угла, это даетъ шестьдесятъ плоскихъ угловъ; но пять изъ нихъ образуютъ одну вершину тѣла, следовательно икосаедръ имѣетъ двѣнадцать вершинъ.

*Предложеніе 7. Задача.* Найти наклоненія плоскостей въ пяти тѣлахъ.

*Рѣшеніе.* Согласно нашему великому учителю *Исидору* эти наклоненія опредѣляются слѣдующимъ образомъ:

1. Въ кубѣ, плоскости его ограничивающія пересѣкаются подъ прямыми углами, что само по себѣ ясно.

2. Для тетраедра, опишемъ круги, изъ оконечностей одной изъ сторонъ одного изъ треугольниковъ, ограничивающихъ тетраедръ, радіусомъ равнымъ высотѣ треугольника, то прямая линія, проведенная отъ точекъ пересѣченія этихъ круговъ къ оконечностямъ упомянутой стороны, заключаютъ искомый уголъ наклоненія.

3. Для октаедра, на сторонѣ одного изъ ограничивающихъ треугольниковъ построимъ квадратъ, проведемъ въ немъ діагональ, изъ оконечностей этой діагонали опишемъ круги радіусомъ равнымъ высотѣ треугольника, то прямая соединяющая точки пересѣченія обоихъ круговъ съ концами прямой будутъ заключать уголъ, который дополняетъ искомый уголъ наклоненія до двухъ прямыхъ угловъ.

4. Для икосаедра, опишемъ на одной изъ сторонъ, ограничивающихъ его треугольниковъ, пятистороннюю фигуру съ равными сторонами, прове-



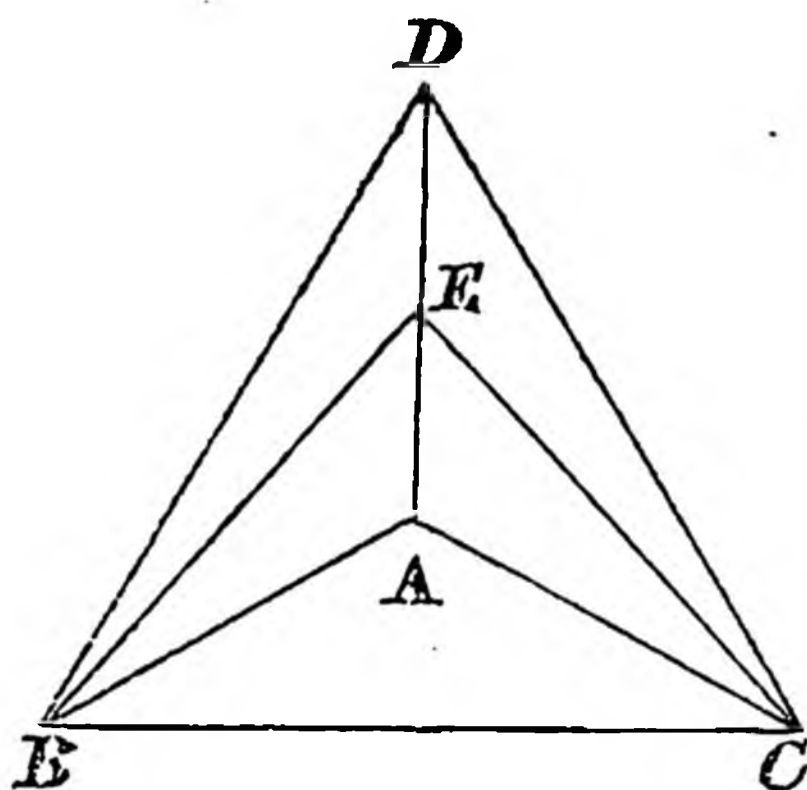
емъ въ ней діагональ, и изъ ея концовъ опишемъ круги, радіусами равными высотѣ треугольника, то прямыя проведенныя изъ точекъ пересѣченія этихъ круговъ къ концамъ прямой составятъ уголъ, дополняющій истинный уголъ наклоненія до двухъ прямыхъ.

5. Для додекаедра, проведемъ въ одной изъ пятистороннихъ фигуръ диагональ, изъ ея концовъ опишемъ круги, радіусомъ равнымъ перпендикуляру, опущенному изъ середины діагонали на параллельную ей сторону фигуры; то прямыя проведенныя изъ точекъ пересѣченія обоихъ круговъ къ конечностямъ проведенной прямой, составятъ уголъ, дополняющій истинный уголъ наклоненія до двухъ прямыхъ.

Вышеизложеннымъ образомъ этотъ, въ высшей степени замѣчательный, способъ рѣшилъ задачу, такъ какъ рѣшеніе каждой части задачи казалась ему очевидна. Но чтобы сдѣлать яснѣе вышеприведенныя правила я ихъ изложу каждое отдѣльно одно послѣ другаго.

*Доказат.* 1. Пусть  $ABCD$  будетъ тетраедръ, коего основаніе  $ABC$ , вершина  $D$ . Раздѣлимъ пополамъ одно изъ реберъ  $AD$  въ точкѣ  $E$  и проведемъ  $BE$ ,  $EC$  (фиг. 551).

Фиг. 551.



Такъ какъ  $AB=BD$ ,  $AE=ED$  и  $BE$  общая; то (кн. 1, пред. 8)  $\angle BED=\angle BEA=d$ , а потому  $BE$ ,  $EC$  перпендикулярны къ  $AD$ . Такъ какъ  $AC=2AE$ , то:

$$\square AC=4\square AE$$

Но (кн. 1, пред. 47):

$$\square AC=\square AE+\square EC$$

Слѣдовательно:

$$\square AC:\square EC=4:3$$

по  $EC=EB$  а потому:

$$\square BC<\square BE+\square EC$$

Слѣдовательно (кн. 2, пред. 13)  $BEC$  есть острый уголъ, а потому кн. 11, опред. 6) это есть уголъ наклоненія плоскостей тетраедра.

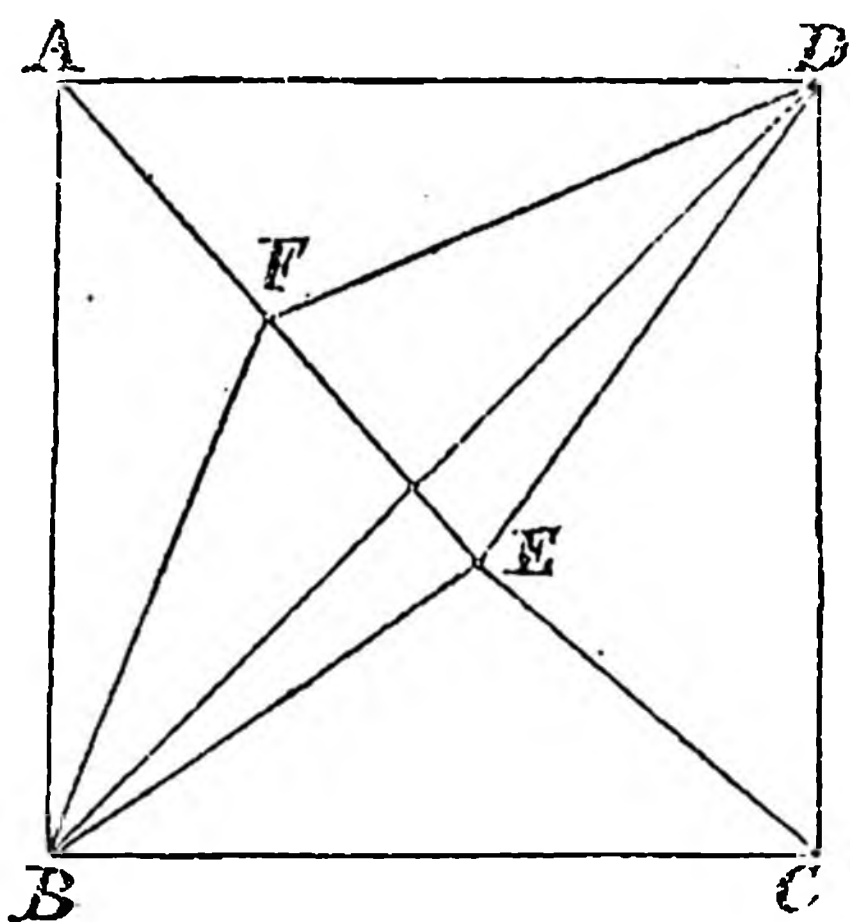
Этотъ уголъ наклоненія  $BEC$  данъ, такъ какъ даны сторона  $BC$  треу-



гольника и перпендикуляры  $EB$ ,  $EC$ . Если мы теперь опишемъ круги изъ концевъ стороны  $BC$ , радіусомъ равнымъ перпендикуляру  $BE$ , и пусть эти перпендикуляры пересѣкутся въ точкѣ  $E$ , то прямыя проведенныя изъ точки пересѣченія  $E$  къ каждому изъ концевъ  $B$ ,  $C$  будутъ заключать уголъ наклоненія плоскостей. Что упомянутые круги пересѣкаются въ точкѣ  $E$  очевидно. Такъ какъ каждая изъ  $BE$ ,  $EC > \frac{1}{2} BC$ . Но круги описанныя радіусомъ равнымъ  $\frac{1}{2} BC$ , изъ концевъ прямой, касались бы; описанные же радіусомъ  $< \frac{1}{2} BC$  не касались бы, и не пересѣкались. Но такъ какъ  $BE > \frac{1}{2} BC$ , то круги необходимо должны пересѣчься.

2. Пусть половина октаедра будетъ пирамида, коей площадь основанія  $ABCD$ , а вершина  $E$  (фиг. 552). Пусть одно изъ реберъ  $AE$  раздѣ-

Фиг. 552.



лено пополамъ въ  $F$ , проведемъ  $BF$ ,  $FD$ , которыя равны и перпендикулярны къ  $AE$ . Проведемъ  $BD$ . Такъ какъ  $ABCD$  квадратъ, коего діагональ  $BD$ , то:

$$\square BD = 2\square DA$$

Но по предъидущему:

$$\square DA : \square DF = 4 : 3$$

слѣдовательно:

$$\square BD : \square DF = 8 : 3$$

но  $DF = FB$ , а потому:

$$\square BD > \square BF + \square FD$$

слѣдовательно (кн. 2, пред. 12)  $BFD$  тупой уголъ, а потому (кн. 11, опред. 6) это есть дополненіе угла наклоненія плоскостей октаедра до двухъ прямыхъ угловъ.

Уголъ этотъ  $BFD$  данъ, такъ какъ даны сторона треугольника  $AD$ , а потому и  $\square AD$ , также его діагональ  $BD$  и перпендикуляры  $BF$ ,  $FD$ . Построимъ на сторонѣ  $AD$  квадратъ, проведемъ діагональ  $BD$ , и опишемъ изъ ея концевъ круги перпендикуляромъ  $BF$ , которые пересѣкутся въ  $F$ , то прямыя проведенныя изъ  $F$  къ  $B$  и  $D$  будутъ заключать уголъ  $BFD$ ,

дополняющій искомый уголъ наклоненія до двухъ прямыхъ угловъ. Здѣсь также очевидно, что упомянутые круги пересѣкутся въ точкѣ  $F$ , такъ какъ  $BF > \frac{1}{2} BD$ . Но на основаніи предъидущаго доказательства:

$$\square BD : \square DF = 8 : 3$$

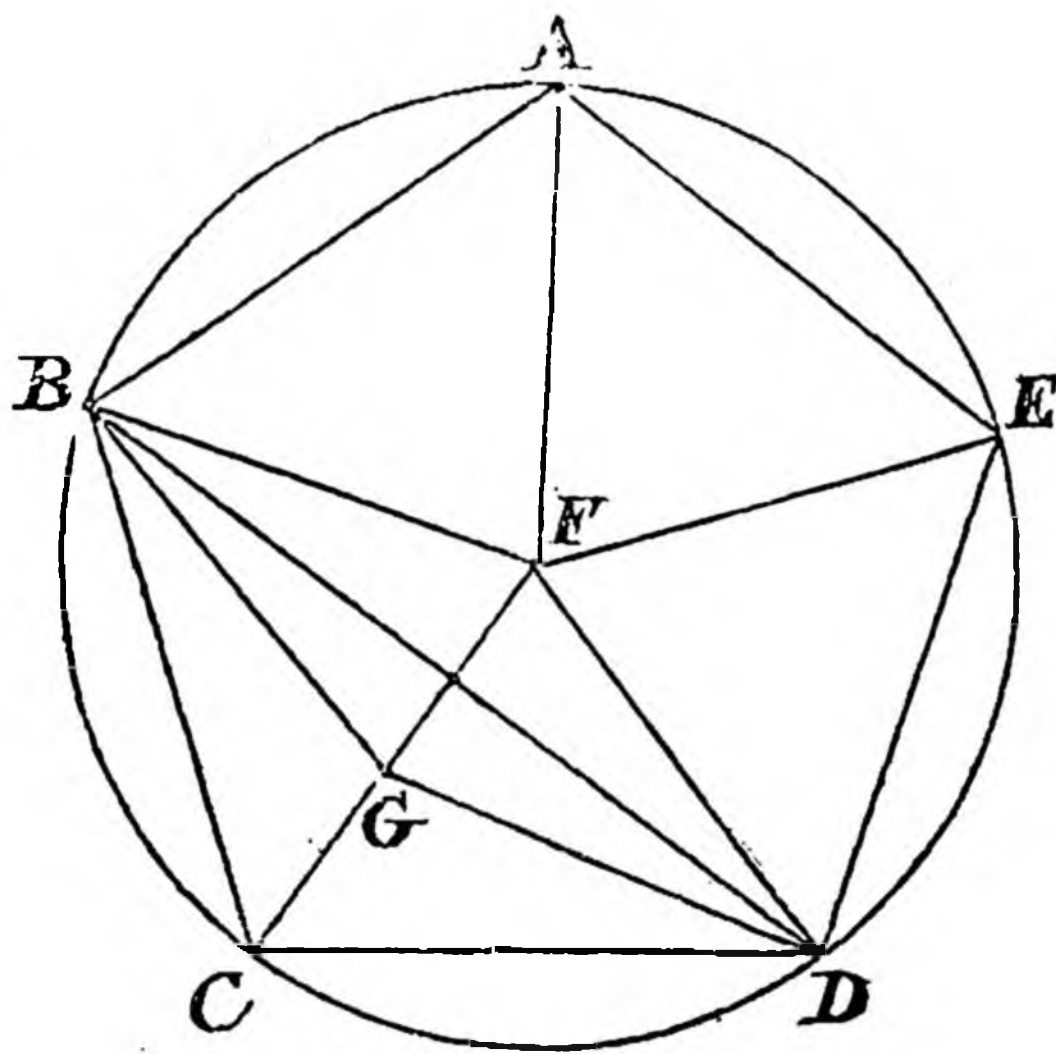
и (кн. 6, пред. 20):

$$\square BD = 4 \square \frac{1}{2} BD$$

слѣдовательно  $BF > \frac{1}{2} BD$ .

3. Пусть часть икосаедра будетъ пирамида, коей основаніе пятисторонняя фигура  $ABCDE$  съ равными сторонами, а вершина  $F$  (фиг. 553).

Фиг. 553.



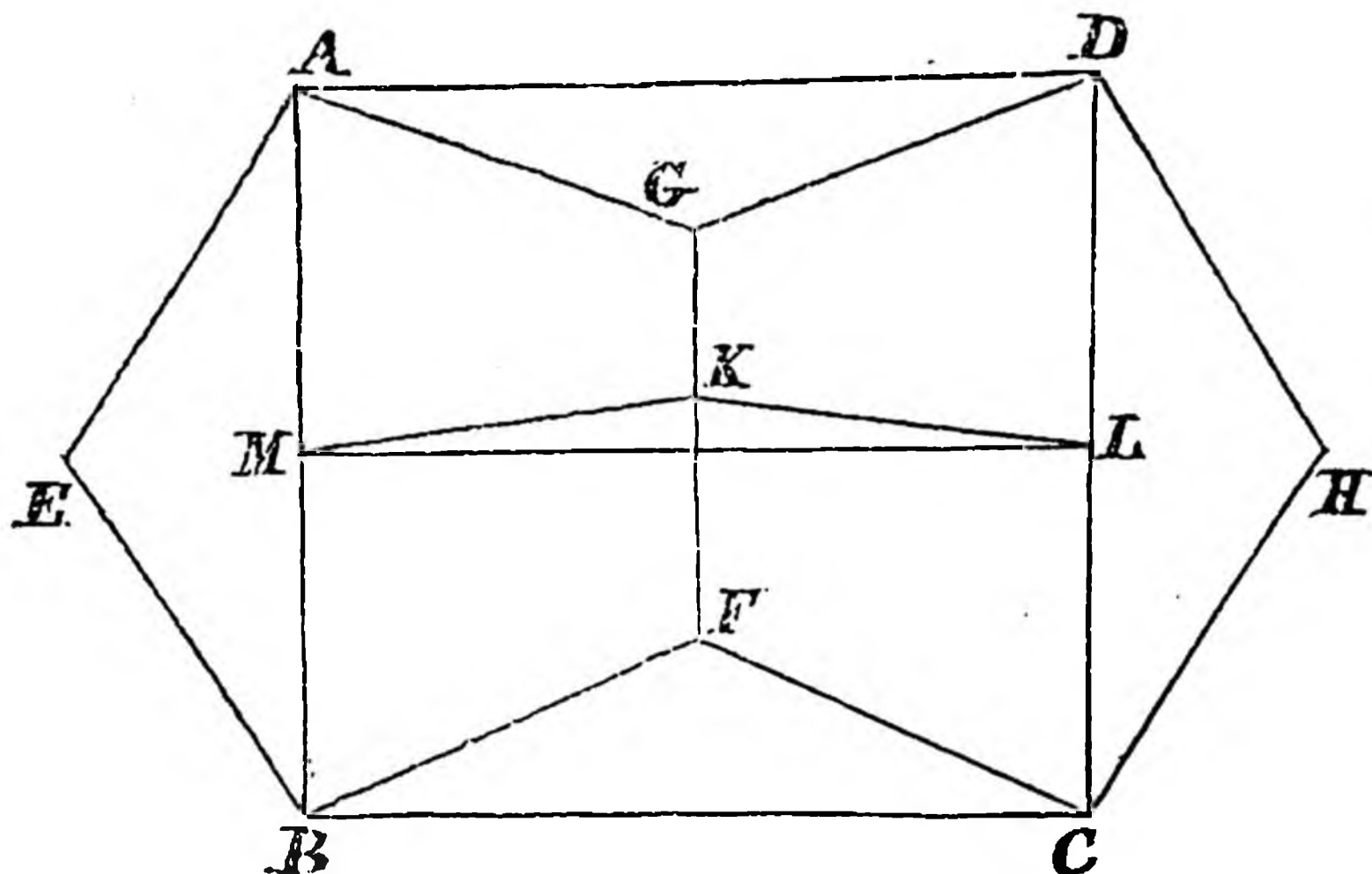
Раздѣлимъ одно изъ реберъ  $CF$  пополамъ, въ точкѣ  $G$ , и проведемъ  $BG$ ,  $GD$ ; эти послѣднія прямая равны и перпендикулярны къ  $CF$ . Проведемъ діагональ  $BD$ , противолежащую тупому углу  $BCD$ , то  $BG > BC$ , а также  $GD > CD$ , слѣдовательно  $\angle BGD > \angle BCD$ . А потому необходимо  $BGD$  тупой уголъ, слѣдовательно (кн. 11, опред. 6) этотъ уголъ дополняетъ до двухъ прямыхъ угловъ уголъ наклоненія плоскостей икосаедра.

Этотъ уголъ  $BGD$  данъ, такъ какъ даны, сторона  $BC$  пятисторонней фигуры, а потому даны діагональ  $BD$  и перпендикуляръ  $BG$ . Если мы теперь построимъ на сторонѣ  $BC$  пятистороннею фигуру, съ равными сторонами, проведемъ діагональ  $BD$ , и изъ ея конечностей опишемъ круги радіусомъ равнымъ  $BG$ ; круги эти пересѣкутся въ точкѣ  $G$ , такъ какъ и здѣсь  $BG > \frac{1}{2} BD$ . Прямая проведенная изъ  $G$  къ  $B$  и  $D$  будутъ заключать уголъ  $BGD$ , дополняющій искомый уголъ наклоненія до двухъ прямыхъ угловъ.

4. Пусть  $ABCD$  будетъ квадратъ куба, коимъ описанъ (кн. 13, пред. 17) додекаедръ и пусть  $AEBFG$ ,  $GDHCF$  двѣ грани додекаедра (фиг. 554). Раздѣлимъ пополамъ  $FG$  въ точкѣ  $K$ , и въ точкѣ  $K$  прямой  $FG$  возставимъ перпендикуляры  $KM$ ,  $KL$ , лежащіе въ обѣихъ упомянутыхъ плоскостяхъ, проведемъ  $ML$ . Такъ какъ при построеніи ико-

соединяет (кн. 13, пред. 17) было доказано, что перпендикуляръ, опущенный изъ точки  $K$  на плоскость квадрата  $ABCD$ , равенъ половинѣ стороны

Фиг. 554.



пятисторонней фигуры, а потому онъ  $< \frac{1}{2} ML$ ; изъ этого слѣдуетъ, что уголъ  $MKL$  тупой. Мы также доказали, въ приведенномъ предложеніи, что  $KL$  квадратитъ надъ квадратами построенными на половинѣ стороны куба и стороны пятисторонней фигуры. Слѣдовательно  $KL > \frac{1}{2} ML$ , а потому (кн. 11, опред. 6) уголъ  $MKL$  есть дополнение искомаго угла наклоненія до двухъ прямыхъ.

Этотъ уголъ  $MKL$  данъ. Такъ какъ сторона квадрата  $AD$  соединяетъ концы двухъ сторонъ пятисторонней фигуры, а если пятисторонняя фигура дана, то и  $ML$  также дана; также даны  $MK$ ,  $KL$ , такъ какъ онѣ суть перпендикуляры, опущенные изъ середины діагонали  $AB$ , на сторону  $FG$  ей параллельную. Если мы опишемъ круги изъ концовъ прямой  $ML$ , радиусомъ  $MK$ , то эти круги пересѣкутся въ точкѣ  $K$ , такъ какъ  $KM > \frac{1}{2} ML$ . Прямая проведенная изъ точки пересѣченія  $K$  къ упомянутымъ концамъ будутъ заключать уголъ  $MKL$ , дополняющій искомый уголъ наклоненія до двухъ прямыхъ угловъ.

*Примѣч. 1.* Послѣ построенія правильныхъ многоугольниковъ древніе геометры должны были заняться построеніемъ правильныхъ многогранниковъ, изъ нихъ, насколько намъ извѣстно, былъ первый Платонъ, который показалъ, что есть только пять правильныхъ многогранниковъ и что каждый изъ нихъ можетъ быть вписанъ въ шаръ. Доказательство это приведено въ текстѣ (кн. 13, пред. 18, замѣч.) Евклида, но можно доказать это свойство въ болѣе общей формѣ:

*Теорема.* Существуетъ только пять выпуклыхъ многогранниковъ, коихъ грани имѣютъ одно и тоже число сторонъ  $n$  и коихъ многогранные углы имѣютъ одно и тоже число реберъ  $m$ .

*Доказат.* Въ самомъ дѣлѣ, каждое ребро принадлежитъ двумъ гранямъ, слѣдовательно, соединяя двѣ вершины, найдемъ:

$$2A = nF = mS \quad (1)$$

гдѣ  $A$  есть число реберъ,  $F$  число граней, а  $S$  число вершинъ многогранника. Но мы въ

прибавленіи VIII покажемъ, что между  $A$ ,  $F$  и  $S$  существуетъ слѣдующая зависимость:

$$A + 2 = F + S \quad (2)$$

исключая  $A$  и  $S$  изъ уравненій (1) и (2) найдемъ:

$$F = \frac{4m}{2(m+n) - mn} \quad (3)$$

Если  $n=3$ , то уравненіе (3) сдѣлается:

$$F = \frac{4m}{6-m}$$

Изъ этой послѣдней формулы видно, что  $m$  можетъ получить только три значенія  $m=3$ ,  $m=4$  и  $m=5$ , этимъ значеніямъ соотвѣтствуютъ три значенія для  $F$ , именно:

$$F=4, F=8, F=20$$

Для  $n=4$ , и  $n=5$ , мы имѣемъ:

$$F = \frac{2m}{4-m} \quad \text{и} \quad F = \frac{4m}{10-3m}$$

Въ обоихъ этихъ случаяхъ числу  $m$  можно дать только одно значеніе  $m=3$ , что даетъ:

$$F=6 \quad \text{и} \quad F=12$$

Если  $n=6$ , то:

$$F = \frac{m}{3-m}$$

откуда видно, что при  $n=6$ , число  $m$  не можетъ имѣть никакого значенія, а темъ болѣе для  $n>6$ .

Изъ этого слѣдуетъ, что существуетъ только пять многогранниковъ, имѣющихъ грани съ одинаковымъ числомъ сторонъ и многогранные углы съ одинаковымъ числомъ реберъ.



## ПРИБАВЛЕНІЯ.

---

### VIII. О многогранникахъ.

1. Послѣ сдѣланнаго замѣчанія къ 10 опредѣленію, XI книги, относительно равенства и подобія многогранниковъ, я здѣсь изложу подробно общія ихъ свойства, условія ихъ равенства и подобія.

2. Многогранникъ называется *выпуклымъ* если онъ весь находится по одну сторону каждой его грани, продолженной неопредѣленно. Въ противномъ случаѣ онъ называется *вогнутымъ*.

3. Самый простой многогранникъ есть *тетраедръ*—*четырёхсторонникъ*. Онъ ограниченъ четырьмя плоскостями, каждая его сторона есть треугольникъ. Слѣдовательно тетраедръ имѣетъ четыре *грани*, четыре *трегранные* угла и шесть *реберъ*.

#### Условія равенства тетраэдровъ.

4. Два тетраедра равны когда имѣютъ по одному равному двугранному углу, заключенному между равными, каждая каждой и подобно расположенными гранями.

*Доказат.* Это предложеніе доказывается наложеніемъ одного тетраедра на другой.

5. Два тетраедра равны когда имѣютъ по одной равной грани прилежащей тремъ равнымъ, каждый каждому, двуграннымъ угламъ.

*Доказат.* Также доказывается наложеніемъ.

6. Два тетраедра равны когда имѣютъ по три равныя, каждая каждой грани и подобно расположенныя.

*Доказат.* Доказывается наложеніемъ, замѣтивъ, что трегранные углы равны вслѣдствіе равенства граней.

7. Наконецъ, два тетраедра равны когда имѣютъ по шести равныхъ реберъ каждое каждому.

*Доказат.* Вслѣдствіе равенства реберъ и грани равны, а за тѣмъ и всѣ трегранные углы равны.

Каждая изъ этихъ четырехъ теоремъ заключаетъ шесть условій необходимыхъ и достаточныхъ для равенства тетраэдровъ.

*Первая.* Двѣ равныя грани, т. е. двѣ пары равныхъ треугольниковъ заключаютъ шесть условій, но эти треугольники заключаютъ равный двугранный уголъ, слѣдовательно имѣютъ одну общую сторону, слѣдовательно всего пять условій, да еще двугранные углы равны—это шестое условіе.

*Вторая.* Одна грань одного равна одной грани другого, т. е. пара равныхъ треугольниковъ—это даетъ три условія, и эти треугольники каждый прилежитъ къ тремъ равнымъ, каждый каждому, двуграннымъ угламъ—еще три условія, слѣдовательно всего шесть.

*Третья.* Три грани одного тетраэдра равны тремъ гранямъ другого, т. е. имѣютъ три пары равныхъ треугольниковъ, слѣдовательно девять условій, но изъ нихъ три повторяются, слѣдовательно всего опять шесть.

*Четвертая.* Шесть условій, именно, столько сколько есть реберъ. Мы увидимъ дальше, что для равенства многогранниковъ всегда необходимо и достаточно условій числомъ столько, сколько реберъ въ многогранникѣ.

8. *Предлож.* Два многогранника равны, когда они состоятъ изъ одинаковаго числа равныхъ, каждый каждому и подобно расположенныхъ тетраэдровъ.

*Доказат.* Замѣтимъ сначала, что всякій выпуклый многогранникъ можетъ быть разложенъ на тетраэдры имѣющіе общую вершину.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ внутри многогранника точку  $O$  и соединимъ эту точку прямыми со всѣми вершинами многогранника. Такъ какъ многогранникъ выпуклый, то каждая изъ этихъ прямыхъ будемъ имѣть съ многогранникомъ только одну общую точку—это вершину, въ которую проведена прямая. слѣдовательно прямые исходящія изъ точки  $O$  и оканчивающіяся въ вершинахъ какой нибудь грани образуютъ пирамиду, имѣющую эту грань основаніемъ и вершину въ точкѣ  $O$ . Пусть многогранникъ разложенъ на пирамиды, коихъ вершины лежатъ въ точкѣ  $O$ , а основанія суть грани многогранники, но каждая изъ пирамидъ разлагается на тетраэдры, слѣдовательно и т. д.

Замѣтимъ теперь, что всякій вогнутый многогранникъ можно разбить плоскостями, извѣстнымъ образомъ выбранными, на выпуклые многогранники, слѣдовательно каждый многогранникъ можетъ быть разложенъ на тетраэдры.

Пусть теперь, два многогранника  $P$  и  $P'$  будутъ составлены изъ одинаковаго числа равныхъ, каждый каждому, и одинаково расположенныхъ тетраэдровъ. Я говорю, что эти два многогранника равны.

Нанесемъ многогранникъ  $P'$  на  $P$  такъ чтобы первый тетраедръ  $A'$  совмѣстился съ равнымъ ему тетраедромъ  $A$ . Пусть  $B'$  будетъ тетраедръ, имѣющій общую грань съ тетраедромъ  $A'$  и пусть  $B$  будетъ соотвѣтственный  $B'$ . Эти два тетраедра равны, имѣютъ общую грань и лежатъ по одну и ту же сторону этой грани, слѣдовательно должны совмѣститься. Точно также должны совмѣститься и слѣдующіе тетраедры.

#### Подобіе многогранниковъ.

9. Пусть будетъ тетраедръ  $SABC$ , коего ребра суть  $a, b, c, d, e, f$ . Начиная съ вершины  $S$  на ребрахъ  $SA, SB, SC$  отложимъ  $SA'=md, SB'=me, SC'=mf$ , чрезъ точки  $A', B', C'$  проведемъ плоскость  $A'B'C'$ . Такимъ образомъ получимъ тетраедръ  $S'A'B'C'$ , коего ребра будутъ  $ma, mb, mc, md, me, mf$ .

10. Говорятъ, что два тетраедра *подобны*, когда ребра перваго изъ нихъ пропорціональны ребрамъ втораго и подобно расположены.

11. Два многогранника подобны когда они составлены изъ одного и того же числа тетраедровъ подобныхъ, каждый каждому, и подобно расположенныхъ.

12. Изъ этихъ двухъ опредѣленій слѣдуетъ, что:

1) Два тетраедра имѣютъ грани подобныя, каждая каждой, и подобно расположенныя, двугранные и трехгранные углы равны.

2) Два тетраедра подобные порознь третьему подобны и между собою.

3) Два многогранника подобные порознь третьему подобны и между собою.

13. *Предлож.* Два тетраедра подобны, когда имѣютъ по одной подобной грани и равные двугранные углы, прилежащіе этой грани, каждый каждому, и подобно расположенныя.

*Доказат.* Доказать это такъ легко, что можно оставить читателю.

14. *Предлож.* Два тетраедра подобны, когда имѣютъ пять равныхъ двугранныхъ угловъ, каждый каждому, и подобно расположенныхъ.

*Доказат.* Тоже замѣчаніе, что и выше.

15. *Предлож.* Два подобные многогранника имѣютъ сходственные грани подобныя, двугранные и многогранные углы равны каждый каждому.

*Доказат.* Разсмотримъ сначала выпуклый многогранникъ  $P$ . Разобьемъ этотъ многогранникъ на тетраедры, имѣющіе общую вершину въ точкѣ  $O$ , взятой внутри многогранника  $P$ .

Возьмемъ, какую нибудь точку  $O'$  и построимъ систему тетраедровъ, имѣющихъ общую вершину въ точкѣ  $O'$ , подобныхъ и подобно расположенныхъ тетраедрамъ составляющимъ многогранникъ  $P$ . Такимъ образомъ мы построимъ многогранникъ  $P'$  подобный  $P$ . *Сходственными вершинами въ*



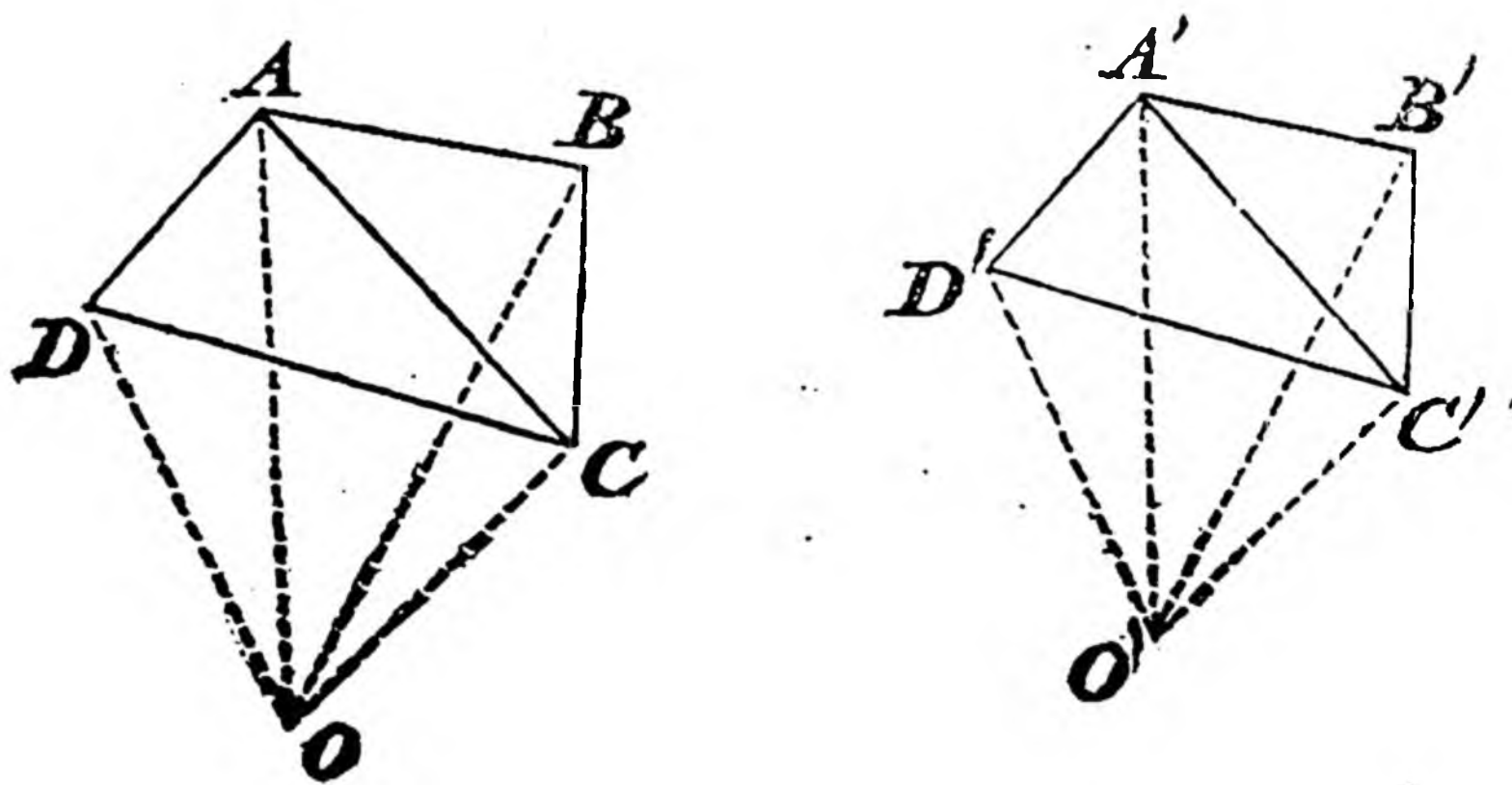
этихъ многогранникахъ мы назовемъ тѣ, которыя будутъ сходственными въ соотвѣтственныхъ тетрадрахъ. *Сходственными ребрами* точно также мы назовемъ сходственные въ соотвѣтственныхъ тетрадрахъ.

Во первыхъ очевидно, что поверхности многогранниковъ  $P$  и  $P'$  составлены изъ одного числа треугольниковъ подобныхъ, каждый каждому, и расположенныхъ одинаково.

Во вторыхъ, если два или болѣе треугольника многогранника  $P$  лежатъ въ одной плоскости и составляютъ одну грань его, то сходственные имъ треугольники въ  $P'$  будутъ также лежать въ одной плоскости и составятъ одну грань  $P'$ , слѣдовательно многогранники  $P$  и  $P'$  будутъ составлены изъ одного числа граней подобныхъ каждая каждой.

Въ самомъ дѣлѣ, двугранный уголъ, коего ребро есть  $AC$ , а грани  $BAC$  и  $OAC$  равенъ двугранному углу  $B'A'C'O'$ , въ силу подобія тетраэдровъ  $BACO$  и  $B'A'C'O'$ . Точно также двугранный уголъ  $OACD$  равенъ своему соотвѣтственному  $O'A'C'D'$ . Слѣдовательно, если два треугольника  $BAC$  и  $CAD$  находятся въ одной плоскости, то двугранные углы  $B'A'C'O'$  и  $O'A'C'D'$ , будучи смежными, ихъ грани будутъ также находится въ одной плоскости (фиг. 555).

Фиг. 555.



Точно также можно показать, что если два треугольника  $BAC$  и  $DAC$  не находятся въ одной плоскости, то двугранный уголъ  $BACD$  будетъ равенъ двугранному углу  $B'A'C'D'$ . Слѣдовательно въ многогранникахъ  $P$  и  $P'$  соотвѣтственные двугранные углы равны.

Если теперь мы возьмемъ въ  $P$  и  $P'$  два соотвѣтственные многогранные угла, то изъ предыдущаго видно, что ихъ грани и двугранные углы равны, а слѣдовательно взятые многогранные углы равны.

Итакъ предложеніе вполне доказано для выпуклыхъ многогранниковъ. Остается показать что оно справедливо и для многогранниковъ съ вогнутыми углами.

Многогранникъ не выпуклый всегда можно разложить на известное число выпуклыхъ многогранниковъ. Пусть будутъ два такихъ многогранника  $P$  и  $Q$  имѣющіе общую грань  $A$ . Пусть соотвѣтственные имъ подоб-



ные въ другомъ многогранникѣ будутъ  $P'$  и  $Q'$ . Многогранникъ, составленный изъ  $P$  и  $Q$  будетъ подобенъ многограннику составленному изъ  $P'$  и  $Q'$  если эти послѣдніе имѣютъ общую грань  $A'$ , соотвѣтственную грани  $A$ , и если отношенія подобія между  $P, P'$  и  $Q, Q'$  будутъ равны.

Откуда видимъ, что предложеніе справедливо и для многогранниковъ съ вогнутыми углами.

#### Выпуклые многогранники.

16. *Предложеніе.* Если многогранная поверхность, ограничена ломанною линіею, коей стороны лежатъ, или не лежатъ, въ одной плоскости, то число граней увеличенное числомъ вершинъ равно числу реберъ увеличенному на единицу.

*Доказат.* Пусть  $F$  будетъ число граней,  $S$  число вершинъ,  $A$  число реберъ, я говорю, что мы имѣемъ:

$$F + S = A + 1 \quad (1)$$

Эта формула справедлива, если  $F=1$ , т. е. если многогранная фигура обращается просто въ плоскій многоугольникъ, тогда  $F=1$ ,  $S=A$ , такъ какъ число сторонъ всегда равно числу угловъ въ многоугольникѣ.

Если мы предположимъ, что теорема справедлива для фигуры съ  $F$  гранями будетъ справедлива и для фигуры съ  $F+1$  гранями, то очевидно она будетъ справедлива для всѣхъ многогранныхъ фигуръ.

Пусть  $ABCD...$  будетъ ломанная линія ограничивающая многогранную фигуру. Построимъ на ребрѣ  $AB$  новую грань, имѣющую  $n$  реберъ и  $n$  угловъ. Если эта грань имѣетъ  $m$  общихъ реберъ съ ломанною линіею  $ABCD...$ , то она будетъ имѣть  $m+1$  общихъ вершинъ съ этой линіею, полагая что новый многоугольникъ не замыкаетъ многогранную фигуру, а оставляетъ одно отверстіе. Поэтому числа  $F$ ,  $S$ ,  $A$  сдѣлаются въ новой поверхности:

$$F' = F + 1, S' = S + n - (m + 1), A' = A + n - m$$

но по положенію мы имѣемъ:

$$F + S = A + 1$$

подставляя въ эту формулу вмѣсто  $F$ ,  $S$ ,  $A$  ихъ величины, полученныя изъ предыдущихъ формулъ, найдемъ:

$$F' + S' = A' + 1$$

17. *Предложеніе.* Во всякомъ выпукломъ многогранникѣ число граней

$F$  увеличенное числомъ вершинъ  $S$  равно числу реберъ  $A$ , увеличенному двумя, т. е.:

$$F+S=A+2 \quad (1)$$

*Доказат.* Если уничтожимъ одну грань въ многогранникѣ, то получимъ многогранную незамкнутую фигуру, въ которой число граней будетъ  $F-1$ , число вершинъ будетъ  $S$  и число реберъ будетъ  $A$ , слѣдовательно (прибав. VIII, пред. 16) будемъ имѣть:

$$F-1+S=A+1$$

откуда:

$$F+S=A+2$$

Это теорема Эйлера.

18. *Предложеніе.* Во всякомъ выпукломъ многогранникѣ: 1-е, число граней съ нечетнымъ числомъ реберъ всегда есть число четное, 2-е число вершинъ, въ которыхъ сходится нечетное число реберъ, есть всегда четное.

*Доказат.* Пусть  $f_3, f_4, f_5, \dots$  будутъ грани треугольныя, четырехугольныя и т. д.,  $s_3, s_4, s_5, \dots$  углы трехгранные, четырехгранные и т. д., такъ, что если  $F$  есть число граней въ многогранникѣ,  $S$  число вершинъ,  $A$  число реберъ, то:

$$F=f_3+f_4+f_5+f_6+\dots \quad (2)$$

$$S=s_3+s_4+s_5+s_6+\dots$$

Каждое ребро принадлежитъ двумъ гранямъ, а концами лежитъ въ двухъ вершинахъ, слѣдовательно, если посчитаемъ, или число реберъ всѣхъ граней, или число реберъ всѣхъ многогранныхъ угловъ, всегда получимъ двойное число реберъ, т. е.  $2A$ :

$$2A=3f_3+4f_4+5f_5+6f_6+7f_7+\dots \quad (3)$$

$$2A=3s_3+4s_4+5s_5+6s_6+7s_7+\dots$$

Изъ этихъ уравненій легко видѣть, что:

$$f_3+f_5+f_7+\dots \quad (4)$$

$$s_3+s_5+s_7+\dots$$

должны быть четныя числа.

19. *Предложение.* Во всякомъ выпукломъ многогранникѣ числа  $F$ ,  $S$ ,  $A$  удовлетворяютъ слѣдующимъ условіямъ:

$$\begin{aligned} S &\leq 2(F-2) \quad , \quad A \leq 3(F-2) \\ S &\geq \frac{1}{2}(F+2) \quad , \quad A \geq \frac{3}{2}F \end{aligned} \quad (5)$$

Величины  $F$ ,  $S$ ,  $2A$  написанныя выше даютъ:

$$2A - 3F = f_4 + 2f_5 + 3f_6 + \dots$$

$$2A - 3S = s_4 + 2s_5 + 3s_6 + \dots$$

Изъ этихъ уравненій имѣемъ:

$$A \geq \frac{3}{2}F, \quad A \geq \frac{3}{2}S$$

Послѣднѣе неравенство, въ силу теоремы Эйлера, будетъ:

$$A \geq \frac{3}{2}(A+2-F)$$

откуда:

$$A \leq 3(F-2)$$

Подставляя вмѣсто  $A$  его величину  $F+S-2$ , найдемъ два другія условія.

20. *Предложение.* Во всякомъ выпукломъ многогранникѣ число треугольныхъ граней, увеличенное числомъ трехгранныхъ угловъ, даетъ сумму, которая не можетъ быть меньше 8.

*Доказат.* Вслѣдствіе выраженій  $F$ ,  $S$  и  $A$ , (2), (3) уравненіе Эйлера:

$$F + S = A + 2$$

сдѣлается:

$$2(f_3 + f_4 + f_5 + \dots) + 2(s_3 + s_4 + s_5 + \dots) = 4 + 3f_3 + 4f_4 + \dots$$

$$2(f_3 + f_4 + f_5 + \dots) + 2(s_3 + s_4 + s_5 + \dots) = 4 + 3s_3 + 4s_4 + \dots$$

или

$$2(s_3 + s_4 + s_5 + \dots) - (f_3 + 2f_4 + 3f_5 + 4f_6 + \dots) = 4 \quad (6)$$

$$2(f_3 + f_4 + f_5 + \dots) - (s_3 + 2s_4 + 3s_5 + \dots) = 4 \quad (7)$$

складывая эти уравненія получимъ:

$$(f_3 + s_3) - 2(f_5 + s_5) - 3(f_6 + s_6) - \dots = 8 \quad (9)$$

откуда:

$$f_3 + s_3 \geq 8 \quad (10)$$

*Слѣдствіе 1.* Всякій выпуклый многогранникъ имѣетъ треугольныя грани или трехгранные углы.

*Слѣдствіе 2.* Уравненіе (9) показываетъ, что во всякомъ выпукломъ многогранникѣ сумма треугольныхъ граней и трехгранныхъ угловъ равна 8 сложенному съ суммою пятиугольныхъ граней и пятигранныхъ угловъ, съ двойною суммою шестиугольныхъ граней и шестигранныхъ угловъ и т. д.

21. *Предложеніе.* 1-е. Всякій выпуклый многогранникъ имѣетъ или треугольныя грани, или четырехугольныя, или пятиугольныя. 2-е. Всякій выпуклый многогранникъ имѣетъ или трехгранные, или четырехгранные, или пятигранные углы.

*Доказат.* Если изъ уравненій (6) и (7) послѣдовательно исключимъ  $s_3$  и  $f_3$ , то найдемъ:

$$3f_3 + 2f_4 + f_5 - f_6 - 2f_7 - \dots - 2s_4 - 4s_5 - \dots = 12 \quad (11)$$

$$3s_3 + 2s_4 + s_5 - s_6 - 2s_7 - \dots - 2f_4 - 4f_5 - \dots = 12 \quad (12)$$

эти уравненія требуютъ чтобы  $3f_3 + 2f_4 + f_5$  и  $3s_3 + 2s_4 + s_5$  были числа равныя 12 или больше, слѣдовательно и т. д.

Изъ уравненія (11) вытекаютъ слѣдствія:

*Слѣдствіе 1.* Если выпуклый многогранникъ составленъ только изъ треугольниковъ или изъ треугольниковъ и шестиугольниковъ, то число треугольниковъ или равно или больше 4.

*Слѣдствіе 2.* Если выпуклый многогранникъ составленъ только изъ четырехугольниковъ или изъ четырехугольниковъ и шестиугольниковъ, то число четырехугольниковъ равно или больше 6.

*Слѣдствіе 3.* Если выпуклый многогранникъ составленъ только изъ пятиугольниковъ или изъ пятиугольниковъ и шестиугольниковъ, то число пятиугольниковъ или равно, или больше 12.

Уравненіе (12) приводитъ къ такимъ же слѣдствіямъ относительно угловъ.

*Слѣдствіе 4.* Если  $f_3 = 0$ ,  $f_4 = 0$ ,  $f_6 = 0, \dots$ ,  $s_4 = 0$ ,  $s_5 = 0, \dots$ , то уравненіе (11) свѣдется  $f_5 = 12$ , т. е.:

Если выпуклый многогранникъ имѣетъ только трехгранные углы, а гранями пятиугольники и шестиугольники, то число пятиугольниковъ будетъ равно 12.

Уравненіе (12) приводитъ къ подобному слѣдствію относительно многогранныхъ угловъ.



22. *Предложение.* Сумма плоских угловъ во всѣхъ граняхъ выпуклаго многогранника равна  $4d$  взятымъ столько разъ сколько вершинъ безъ двухъ.

*Доказат.* Означимъ чрезъ  $\Sigma$  эту сумму, то мы будемъ имѣть:

$$\Sigma = 2df_3(3-2) + 2df_4(4-2) + 2df_5(5-2) + \dots$$

или

$$\Sigma = 2d \{ 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 - 2(f_3 + f_4 + f_5 + \dots) \}$$

откуда [прибав. VШ, пред. 18, (2) и (3)]:

$$\Sigma = 4dA - 4dF = 4d(A - F)$$

но  $A - F = S - 2$ , слѣдовательно:

$$\Sigma = 4d(S - 2). \quad (13)$$

23. *Предложение.* Во всякомъ выпукломъ многогранникѣ сумма многогранныхъ угловъ равна избытку суммы двугранныхъ угловъ надъ столько разъ взятыми двумя прямыми двугранными углами, сколько многогранникъ имѣетъ граней безъ двухъ.

*Доказат.* Извѣстно, что каждый трехгранный уголъ многогранника равенъ избытку полу-суммы своихъ двугранныхъ угловъ надъ однимъ прямымъ двуграннымъ угломъ. Точно также каждый четырехгранный уголъ равенъ избытку полу-суммы своихъ двугранныхъ угловъ надъ двумя прямыми двугранными углами и т. д. Но каждый двугранный уголъ многогранника всегда принадлежитъ двумъ многограннымъ угламъ, слѣдовательно, если чрезъ  $D$  означимъ прямой двугранный уголъ, то сумма всѣхъ угловъ многогранника будетъ равна избытку суммы двугранныхъ угловъ надъ количествомъ:

$$S_3D(3-2) + S_4D(4-2) + S_5D(5-2) + \dots = 2D(A - S)$$

Но  $A - S = F - 2$ , слѣдовательно предыдущее выраженіе будетъ:

$$2D(F - 2) \quad (14)$$

24. *Предложение.* Если выпуклая не замкнутая поверхность многогранника имѣетъ одно отверстіе, ограниченное  $m$  ребрами, не лежащими въ одной плоскости, то эту поверхность можно замкнуть многогранною поверхностью имѣющую наибольше  $m - 2$  граней, и такимъ образомъ получимъ многогранникъ выпуклый замкнутый со всѣхъ сторонъ.

*Доказат.* Пусть  $ABCDEF$  будетъ ломанная ограничивающая выпук-

лую поверхность. Всегда можно провести такую плоскость, которая проходит по крайней мѣрѣ чрезъ три вершины контура  $ABCDEF$  и притомъ такъ что всѣ остальные вершины лежатъ по одну сторону этой плоскости.

Пусть, на примѣръ, будетъ полученная такимъ образомъ грань  $AEC$ . Чрезъ вершины  $A$  и  $C$  проведемъ плоскость, которая бы оставляла съ одной стороны всѣ вершины поверхности и положимъ, что эта плоскость обращается около  $AC$  до тѣхъ поръ пока не встрѣтитъ новую вершину, на примѣръ,  $B$ , то  $ACB$  будетъ новая грань.

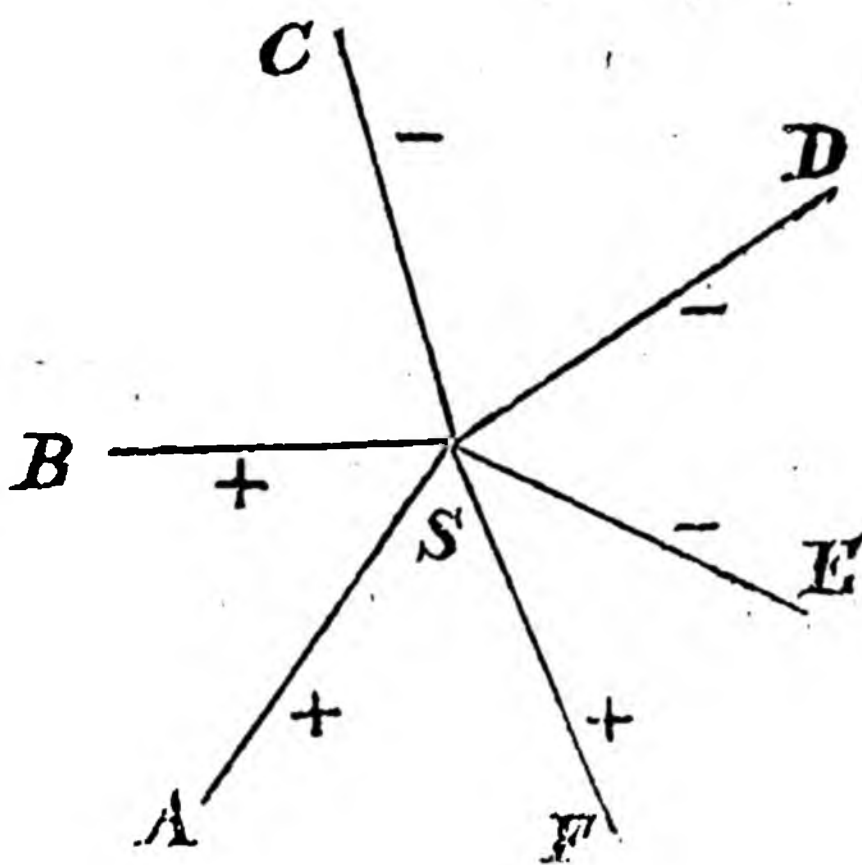
Продолжая, такимъ образомъ, мы построимъ рядъ граней, которыя закроютъ отверстіе  $ABCDEF$ . Число этихъ граней будетъ наибольшее, когда онѣ будутъ треугольныя и будутъ имѣть общую вершину  $A$ . Но въ этомъ случаѣ это число будетъ  $m-2$ .

Построенный многогранникъ будетъ, очевидно, выпуклый. Въ самомъ дѣлѣ, если, на примѣръ, плоскость  $EDC$  пересѣкаетъ данную поверхность, то сторона  $CB$ , продолженная должна встрѣтить также поверхность, которая, въ такомъ случаѣ, не будетъ выпуклая, что противорѣчитъ положенію.

25. *Предложеніе.* Если въ выпукломъ многогранномъ углѣ, коего всѣ грани, исключая одной, постоянны, мы будемъ измѣнять одинъ изъ двугранныхъ угловъ, противолежащихъ этой грани, то грань будетъ уменьшаться съ уменьшеніемъ угла и увеличиваться съ увеличеніемъ угла.

*Доказат.* Положимъ, на примѣръ, что въ выпукломъ многогранномъ углѣ  $S$ , мы будемъ измѣнять двугранный уголъ  $SD$ , противоположный грани  $ASB$ , положимъ еще другіе двугранные углы  $SC$ ,  $SE$ ,  $SF$  неизмѣняются и что грани  $BSC$ ,  $CSD$ , ...,  $FSA$  также не измѣняются (фиг. 556).

Фиг. 556.



Если проведемъ плоскости  $ASD$  и  $BSD$ , то многогранный уголъ  $S$  раздѣлится на два многогранные угла  $SAFD$ ,  $SBCD$  и одинъ трехгранный  $SABD$ . Но изъ положенія мы видимъ, что первые два угла постоянны, слѣдовательно измѣненіе двугрannаго угла  $SD$ , въ данномъ многогранномъ углѣ, равно измѣненію двугрannаго угла  $SD$  въ трехгранномъ углѣ  $SABD$ . Но въ трехгранномъ углѣ  $SABD$ , если двѣ грани  $ASD$  и  $BSD$  постоянны,

то третья  $ASB$  будетъ увеличиваться или уменьшаться, смотря потому будетъ-ли увеличиваться или уменьшаться противоположный ей двугранный уголъ. Слѣдовательно и т. д.

Если будемъ измѣнять не одинъ двугранный уголъ  $SD$ , а нѣсколько противоположныхъ грани  $ASB$ , то полагая что всѣ остальные грани не измѣняются мы будемъ имѣть слѣдующее предложеніе:

Если въ выпукломъ многогранномъ углѣ, коего всѣ грани, за исключеніемъ одной, постоянны, мы будемъ измѣнять въ одномъ и томъ же направленіи, нѣкоторые двугранные углы противоположныя измѣняющейся грани и при томъ такъ, что многогранный уголъ остается выпуклымъ, то измѣняющаяся грань будетъ увеличиваться или уменьшаться, смотря потому будутъ-ли двугранные углы увеличиваться или уменьшаться.

26. *Предложеніе.* Если будемъ измѣнять, какимъ бы то нибыло образомъ, двугранные углы въ многогранномъ выпукломъ углѣ, коего грани неизмѣняются и если на тѣхъ ребрахъ двугранныхъ угловъ, которые увеличиваются поставимъ знакъ  $+$ , а на тѣхъ, которыхъ двугранные углы уменьшаются поставимъ знакъ  $-$ , и сосчитаемъ вокругъ многограннаго угла перемѣны знаковъ, то найдемъ не менѣе четырехъ перемѣнъ.

*Доказат.* Необходимо, чтобы многогранный уголъ имѣлъ болѣе трехъ граней, такъ какъ неизмѣняемость граней, въ трегранномъ углѣ, влечетъ за собою неизмѣняемость двугранныхъ угловъ. Кромѣ этого, предполагается, что многогранный уголъ, будучи до измѣненія двугранныхъ угловъ выпуклымъ, остается выпуклымъ и послѣ измѣненія этихъ угловъ.

Во первыхъ нельзя положить, что всѣ двугранные углы увеличиваются или уменьшаются, такъ какъ въ силу предъидущаго предложенія по крайней мѣрѣ одна изъ граней измѣнилась бы.

Во вторыхъ, невозможно, чтобы на ребрахъ многограннаго угла за однимъ рядомъ знаковъ  $+$  слѣдовалъ бы одинъ рядъ знаковъ  $-$ . Въ самомъ дѣлѣ, положимъ что въ многогранномъ углѣ на ребрахъ  $SB, SA, SF$  стоятъ знаки  $+$ , а на остальныхъ стоятъ все знаки  $-$ . Если проведемъ діагональную плоскость въ многогранномъ углѣ такъ, чтобы съ одной ея стороны на ребрахъ были знаки  $+$ , а съ другой были знаки  $-$ , то изъ предъидущаго предложенія будетъ слѣдовать, что плоскій уголъ  $BSE$  въ одно и тоже время и увеличивается и уменьшается, что нелѣпо.

Въ третьихъ, изъ того что сказано выше слѣдуетъ, что на ребрахъ многограннаго угла будетъ всегда болѣе двухъ перемѣнъ знаковъ.

Итакъ какъ начиная отъ одного ребра и пройдя по всѣмъ, необходимо возвратиться къ первому, то слѣдуетъ, что число перемѣнъ знаковъ будетъ всегда четное, слѣдовательно по крайней мѣрѣ ихъ есть четыре.



## Равенство и подобіе выпуклыхъ многогранниковъ.

27. *Предложеніе.* Два выпуклые многогранника  $P$  и  $P_1$  равны, когда имѣютъ всѣ грани равныя, каждая каждой, и одинаково расположенныя.

*Доказат.* Чтобы доказать это предложеніе надобно показать, что каждый многогранный уголъ одного многогранника имѣетъ равный ему многогранный уголъ въ другомъ многогранникѣ. Еслибы этого небыло, то это происходило бы отъ того, что многогранные углы въ  $P$  или всѣ, или отчасти неравны многограннымъ угламъ въ  $P_1$ . Этотъ послѣдній случай сводится къ первому.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть  $SABCDE$  будетъ многогранный уголъ въ  $P$ , который имѣетъ равный себѣ многогранный уголъ въ  $P_1$ . Если мы удалимъ этотъ уголъ  $S$  и происшедшее отъ того отверстіе  $ABCDE$  закроемъ (приб. VIII, пред. 24) многогранною выпуклою поверхностью, то многогранникъ  $P$  замѣнится другимъ  $Q$ , имѣющимъ меньше граней, меньше вершинъ и меньше реберъ чѣмъ въ  $P$ . Точно такимъ же образомъ мы можемъ въ  $P_1$  удалить многогранный уголъ  $S_1$ , равный углу  $S$  и образовать многогранникъ  $Q_1$ , коего всѣ грани равны гранямъ  $Q$ . Продолжая подобнымъ образомъ мы получимъ наконецъ многогранники  $T$  и  $T_1$ , коихъ всѣ грани равны каждая каждой, но многогранные углы неравны. Слѣдовательно мы можемъ разсматривать только тотъ случай, въ которомъ всѣ грани многогранниковъ  $P$  и  $P_1$  равны каждая каждой, а многогранные углы неравны.

Покажемъ теперь, что это невозможно.

Допустимъ, что при равенствѣ всѣхъ граней многогранниковъ  $P$  и  $P_1$  всѣ многогранные углы многогранника  $P$  неравны многограннымъ угламъ многогранника  $P_1$ . Будемъ разсматривать этотъ послѣдній многогранникъ какъ преобразованіе многогранника  $P$  и въ этой гипотезѣ поставимъ знакъ  $+$  на тѣхъ ребрахъ, коихъ двугранные углы увеличились, а знакъ  $-$  поставимъ на тѣхъ, коихъ двугранные углы уменьшились. Такъ какъ по предложенію 26 число переменъ знаковъ или равно или больше четырехъ, то означая число переменъ знаковъ на всѣхъ многогранныхъ углахъ многогранника  $P_1$ , чрезъ  $N$ , мы будемъ имѣть:

$$N \geq 4S$$

если  $S$  есть число вершинъ въ многогранникѣ  $P_1$ .

Два послѣдовательныя ребра многограннаго угла въ многогранникѣ принадлежатъ всегда одной грани и принадлежатъ только этой, слѣдовательно число  $N$  должно быть равно всему числу переменъ знаковъ встрѣчаемыхъ, обходя послѣдовательно каждый периметръ граней многогранника  $P_1$ .



Но для треугольныхъ граней такихъ переменъ знаковъ можетъ быть не болѣе 2.

Для четырехугольной грани переменъ знаковъ не можетъ быть болѣе 4.

И вообще, если число сторонъ грани будетъ четное  $2n$ , то число переменъ знаковъ на периметрѣ этой грани не можетъ быть болѣе  $2n$ , если же число сторонъ грани будетъ нечетное:  $2n+1$ , то число переменъ знаковъ не превзойдетъ  $2n$ .

Если чрезъ  $f_3, f_4, f_5, \dots$  означимъ число треугольныхъ, четырехугольныхъ и т. д. граней, то мы найдемъ:

$$N \leq 2f_3 + 4f_4 + 4f_5 + 6f_6 + 6f_7 + \dots \quad (1)$$

но мы имѣемъ [прибав. VIII, пред. 18, (31)]:

$$2A = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots$$

$$F = f_3 + f_4 + f_5 + \dots$$

откуда:

$$4A - 4F = 2f_3 + 4f_4 + 6f_5 + \dots$$

но мы имѣемъ:

$$S + F = A + 2$$

слѣдовательно:

$$4S = 8 + 2f_3 + 4f_4 + 6f_5 + \dots$$

откуда вслѣдствіе неравенства (11) найдемъ:

$$N \leq 4S - 8$$

но мы нашли выше, что:

$$N \geq 4S$$

слѣдовательно число  $N$  меньше числа  $4S - 8$  и больше  $4S$  — что невозможно. Слѣдовательно невозможно чтобы многогранники  $P$  и  $P_1$ , имѣя всѣ грани равныя каждая каждой, имѣли не равныя многогранные углы.

Итакъ многогранники  $P$  и  $P_1$ , имѣющіе равныя грани каждая каждой, имѣютъ и многогранные углы равные каждый каждому, и слѣдовательно будутъ равны.

Изъ этого еще слѣдуетъ, что если два выпуклые многогранника имѣютъ одинаковое число граней подобныхъ и подобно расположенныхъ, то они подобны.

28. *Предложеніе.* Найти число необходимыхъ условій для опредѣленія выпуклаго многогранника?

*Доказат.* Такъ какъ выпуклый многоугольникъ діагоналями, проведенными чрезъ одну изъ его вершинъ, дѣлится на  $n-2$  треугольниковъ, если  $n$  есть число его сторонъ; а для опредѣленія треугольника необходимо *три* условія, то число всѣхъ условій будетъ  $2n-3$ . Въ самомъ дѣлѣ, для перваго треугольника необходимо 3 условія, а для  $n-3$  остальныхъ, очевидно, необходимо только по 2, слѣдовательно мы будемъ имѣть  $3+2(n-3)=2n-3$ . Очевидно, что для подобія выпуклыхъ многоугольниковъ необходимо  $2n-4$  условій.

Замѣтивъ это, возьмемъ одну изъ граней многогранника за основаніе. Пусть эта грань будетъ имѣть  $n$  сторонъ, то для ея опредѣленія необходимо  $2n-3$  условій. Такъ какъ всѣхъ вершинъ въ многогранникѣ есть  $S$ , то число вершинъ внѣ взятаго основанія будетъ  $S-n$ . Для опредѣленія точки въ пространствѣ необходимы *три* условія, слѣдовательно мы будемъ имѣть  $2n-3+3(S-n)=3S-n-3$  условій.

Такъ какъ плоскость опредѣляется тремя точками, а точка тремя условіями, то для всѣхъ вершинъ многогранника, лежащихъ въ одной плоскости необходимо только *два* условія, слѣдовательно число  $3(S-n)$  необходимо уменьшить числомъ:

$$(n_1-3)+(n_2-3)+(n_3-3)+\dots$$

гдѣ  $n_1, n_2, n_3, \dots$  суть числа означающія число сторонъ каждой грани изъ числа  $F-1$  граней лежащихъ внѣ взятаго основанія. слѣдовательно число условій будетъ:

$$3(F+S-2)-(n+n_1+n_2+n_3+\dots)$$

но:

$$n+n_1+n_2+\dots=2A, \quad S+F-2=A$$

слѣдовательно число условій будетъ  $A$ , т. е. равно числу реберъ.

Замѣтимъ при этомъ, что эти условія не могутъ быть выбранныя случайно между ребрами и углами, составляющими элементы многогранника, такъ какъ число уравненій хотя и будетъ равно числу неизвѣстныхъ, но эти уравненія могутъ быть такого свойства, что задача сдѣлается неопредѣленною. Для примѣра возьмемъ не треугольную призму и положимъ, что даны ея ребра, очевидно, что основаніе призмы, имѣя однѣ и тѣже ребра можетъ имѣть самыя разнообразныя формы и кромѣ того параллельныя ребра призмы могутъ быть произвольно наклонены къ основанію.

Такъ какъ для равенства двухъ многогранниковъ необходимо  $A$  условій, то очевидно для ихъ подобія необходимо  $A-1$  условій.

## IX. Измѣреніе объемовъ и поверхностей тѣлъ.

1. *Объемомъ* тѣла называютъ отношеніе двухъ тѣлъ, изъ коихъ одно принято за единицу.

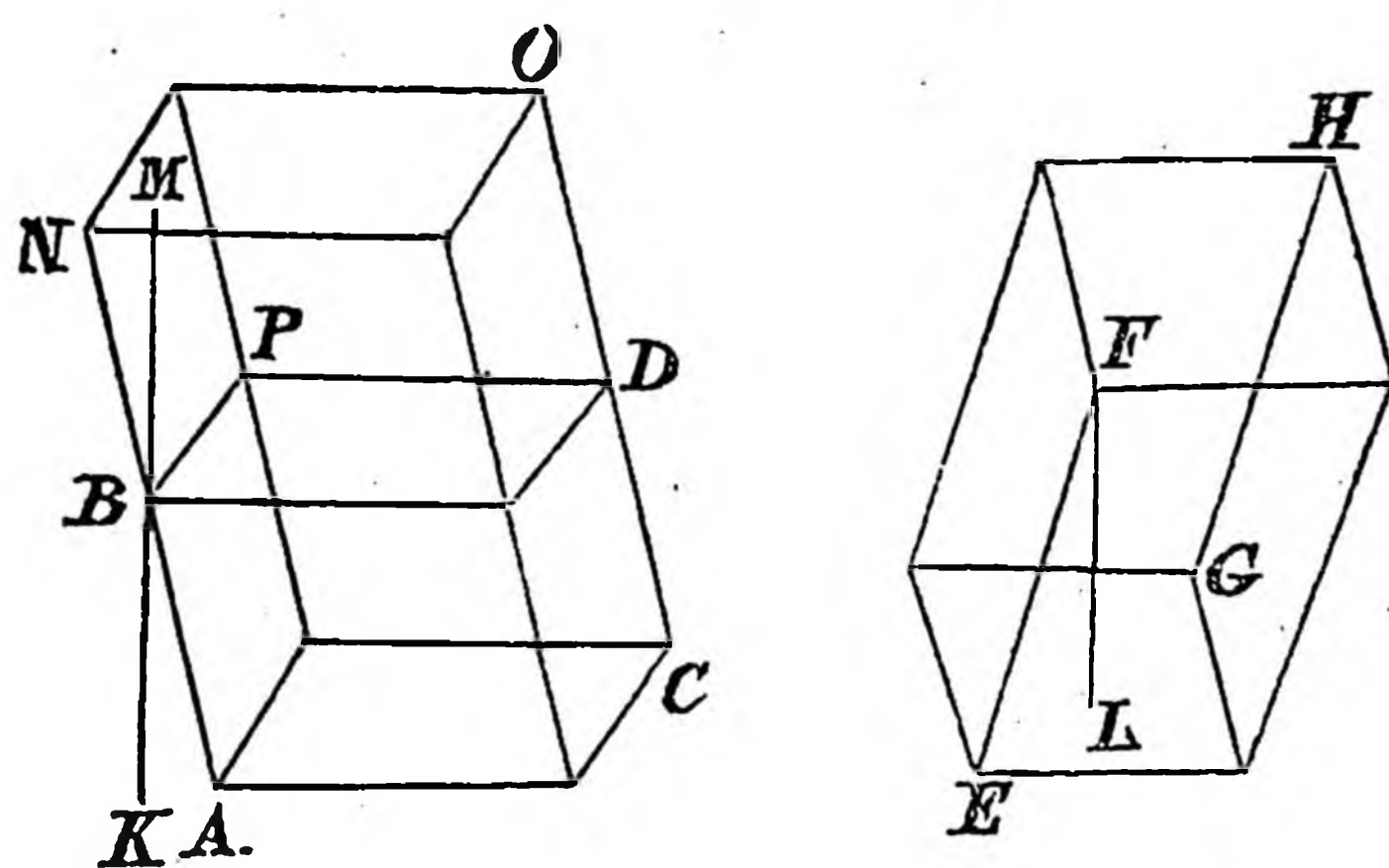
Обыкновенно за единицу тѣла принимается кубъ, коего сторона есть единица длины.

2. *Объемъ параллелепипеда.* Евклидъ доказалъ (кн. 11, пред. 32), что два параллелепипеда, имѣющіе равныя высоты относятся между собою какъ площади ихъ основаній, а для измѣренія объема параллелепипеда надобно доказать, что:

*Предложеніе 1.* Два параллелепипеда, имѣющіе равныя основанія относятся между собою какъ ихъ высоты (фиг. 557).

*Доказат.* Возьмемъ два параллелепипеда  $ABCD$  и  $EFGH$ , коихъ основанія  $AC$  и  $EG$  равны и коихъ высоты суть  $BK$  и  $FL$ .

Фиг. 557.



Продолжимъ высоту  $BK$  такъ чтобы ея продолженіе  $BM$  было равно высотѣ  $LF$ . Чрезъ точку  $M$  проведемъ плоскость перпендикулярную къ  $MB$ . Продолжимъ ребра параллелепипеда  $ABCD$  до встрѣчи съ проведенною плоскостью, что образуетъ два параллелепипеда  $ANCO$  и  $BNDO$ .

Такъ какъ плоскость  $BD$  параллельна сторонамъ  $AC$  и  $NO$ , то параллелепипедъ  $ABCD$  относится къ параллелепипеду  $BNDO$  какъ па-

раллелограмъ  $AP$  къ параллелограму  $PN$  (кн. 11, пред. 25), или какъ  $AB:BN$  (кн. 6, пред. 1), или наконецъ какъ  $BK:BM$  (кн. 6, пред. 17):

$$ABCD:BNDO=BK:BM.$$

Но параллелепипеды  $BNDO$  и  $EFGH$  имѣющіе равныя основанія и равныя высоты равны (кн. 11, пред. 31), слѣдовательно:

$$ABCD:EFGH=BK:FL$$

*Предложеніе 2.* Два параллелепипеда, имѣющіе разные основанія и разные высоты относятся между собою какъ произведенія основаній на высоты.

*Доказат.* Пусть основанія параллелепипедовъ  $P$  и  $P_1$  будутъ  $A$  и  $A_1$ , а высоты  $h$  и  $h_1$ . Возьмемъ третій параллелепипедъ  $Q$  коего основаніе есть  $A_1$ , а высота  $h$ .

Такъ какъ параллелепипеды  $P$  и  $Q$  имѣютъ равныя высоты, и разные основанія, а параллелепипеды  $Q$  и  $P_1$  имѣютъ равныя основанія, и разные высоты, то мы имѣемъ:

$$\frac{P}{Q} = \frac{A}{A_1}, \quad \frac{Q}{P_1} = \frac{h}{h_1}.$$

перемножая эти равенства найдемъ:

$$\frac{P}{P_1} = \frac{A.h}{A_1.h_1}$$

Если параллелепипедъ  $P_1$  примемъ за единицу, то  $A_1$  будетъ единица площади, а  $h_1$  единица длины, слѣдовательно мы будемъ имѣть:

$$P=A.h$$

т. е. объемъ параллелепипеда  $P$  будетъ равенъ произведенію основанія его  $A$  на высоту  $h$ .

Если параллелепипедъ будетъ прямоугольный, то основаніе будетъ прямоугольникъ и если его стороны будутъ  $a$  и  $b$ , то  $A=ab$ , откуда:

$$P=a.b.h$$

т. е. объемъ прямоугольнаго параллелепипеда  $P$ , коего стороны суть  $a$ ,  $b$ ,  $h$ , будетъ произведеніе сторонъ, встрѣчающихся въ вершинѣ одного изъ его угловъ.

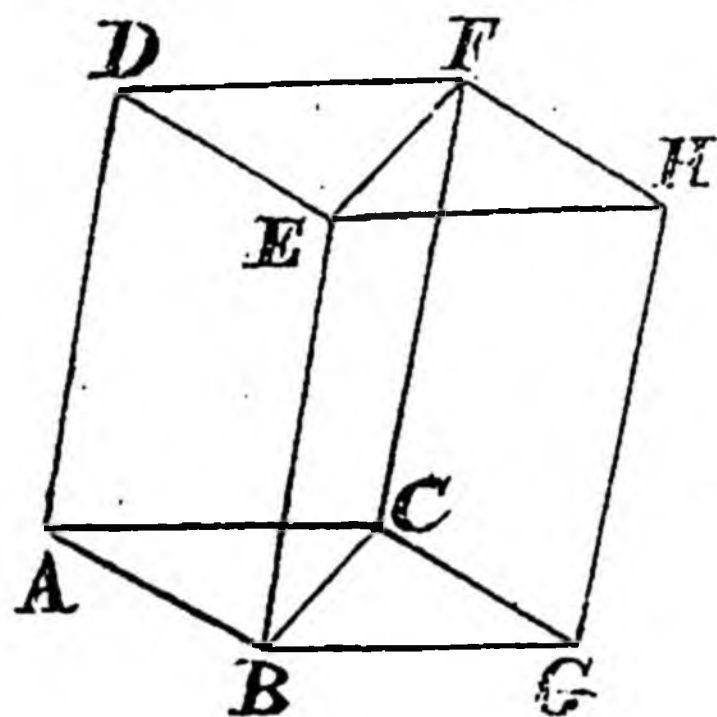
Если  $a=b=h$ , то параллелепипедъ есть кубъ и объемъ его:

$$P=a^3$$



2. *Объем призмы.* Рассмотрим сначала треугольную призму  $AF$ , имѣющую основаніемъ  $\triangle ABC$ . Дополнивъ треугольникъ до параллелограмма, и призму до параллелепипеда, который съ призмой будетъ имѣть одну высоту, но двойное основаніе.

Фиг. 558.



Данная призма будетъ составлять половину параллелепипеда (кн. 11, пред. 28).

Но объемъ параллелепипеда будетъ равенъ основанію  $AG$  помноженному на высоту  $h$ , т. е.:

$$P = AG \cdot h$$

раздѣляя обѣ части на два получимъ:

$$\frac{P}{2} = \frac{AG}{2} \cdot h$$

но  $\frac{P}{2} = \text{приз.}$ , и  $\frac{AG}{2} = \triangle ABC$ , слѣдовательно:

$$\text{об. приз.} = \triangle ABC \cdot h$$

т. е. произведенію площади основанія на высоту.

Такъ какъ всякая призма разбивается на треугольныя, то легко видѣть, что объемъ всякой призмы равенъ произведенію основанія на высоту:

$$\text{об. приз.} = \text{основ.} \times \text{выс.}$$

3. *Объем пирамиды.* Всякая пирамида составляетъ треть призмы, имѣющей съ ней равное основаніе и равную высоту (кн. 12, пред. 7, слѣд.); а такъ какъ объемъ призмы равенъ основанію на высоту, то объемъ пирамиды равенъ основанію помноженному на треть высоты. Если основаніе пирамиды есть  $A$ , а высота  $h$ , то:

$$\text{об. пирам.} = \frac{1}{3} Ah = A \cdot \frac{h}{3}$$

4. *Поверхность призмы.* Боковыя поверхности призмы суть параллеле-

лограмы, которые всѣ имѣютъ основаніемъ ребро призмы, слѣдовательно боковая поверхность призмы получится помножая, общее основаніе на сумму высотъ всѣхъ параллелограмовъ, которая есть ничто иное какъ периметръ многоугольника, полученнаго, пересѣкая призму плоскостью перпендикулярною къ ребру, эта плоскость будетъ перпендикулярна и ко всѣмъ ребрамъ (кн. 11, пред. 8), слѣдовательно стороны многоугольника будутъ перпендикулярны къ ребрамъ.

Если призма прямая, то боковая поверхность ея получится, помножая периметръ ея основанія на ребро. Если периметръ основанія есть  $P$ , и ребро  $h$ , то:

$$\text{Бок. повер.} = P.h$$

5. *Боковая поверхность пирамиды.* Боковая поверхность пирамиды получится, взявъ полусумму произведеній каждой стороны многоугольника основанія на соотвѣтственные перпендикуляры, опущенные изъ вершины пирамиды на стороны многоугольника основанія.

Въ самомъ дѣлѣ, боковая поверхность пирамиды состоитъ изъ треугольниковъ, имѣющихъ общую вершину съ пирамидой, а основаніями стороны многоугольника основанія. Если стороны многоугольника будутъ  $a_1, a_2, a_3, \dots$  и  $h_1, h_2, h_3, \dots$  высоты треугольниковъ, то:

$$\text{пов. пир.} = \frac{1}{2} (a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 + \dots)$$

Если пирамида будетъ правильная, т. е. такая, которая имѣетъ основаніемъ правильный многоугольникъ, а вершина находится на перпендикулярѣ возставленномъ изъ центра многоугольника къ его плоскости, то легко видѣть, что бока такой пирамиды суть равнобедренные треугольники равные между собою и имѣющіе высоту прямую, соединяющую вершину пирамиды съ серединою какой нибудь стороны многоугольника основанія. Общая высота всѣхъ треугольниковъ называется *апоеемою* пирамиды. слѣдовательно боковая поверхность правильной пирамиды равна периметру основанія помноженному на половину апоемеы.

Если периметръ основанія назовемъ чрезъ  $P$ , а апоемеу чрезъ  $h$ , то будемъ имѣть:

$$\text{пов. пир.} = P \cdot \frac{h}{2} = \frac{Ph}{2}$$

6. *Объемъ какого нибудь многогранника.* Чтобы получить объемъ многогранника берутъ внутри его произвольно точку и соединяютъ ее съ вершинами многогранника, такимъ образомъ получится извѣстное число пирамидъ, объемы которыхъ складываются.

Но въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ, объемъ многогранника можетъ быть вычисленъ проще. Это бываетъ въ слѣдующихъ случаяхъ:

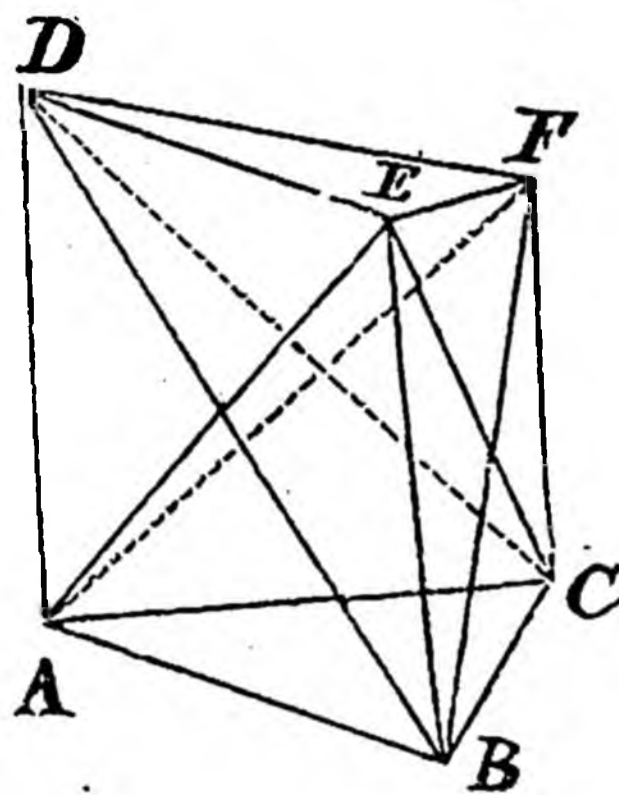
7. Объем треугольной призмы усеченной не параллельно основанию. Пусть  $ABCDEF$  будет треугольная призма усеченная не параллельно основанию  $ABC$ . Проведем плоскости  $EAC$  и  $EDC$ , эти плоскости раздѣлят данную призму на три пирамиды  $EABC$ ,  $EACD$  и  $ECDF$  (фиг. 559).

Первую пирамиду  $EABC$  можно рассматривать, какъ имѣющую основаніемъ  $ABC$ , а вершину въ точкѣ  $E$ .

Вторая пирамида  $EACD$  равна пирамидѣ  $BACD$  (кн. 12, пред. 5), потому что эти двѣ пирамиды имѣютъ одно основаніе  $ACD$ , а вершину на прямой  $BE$ , параллельной основанию, слѣдовательно пирамиду  $BACD$  можно рассматривать, какъ имѣющую основаніемъ  $ABC$ , а вершину въ точкѣ  $D$ .

Третья пирамида  $ECDF$  равна  $ABCF$ , потому, что эти двѣ пирамиды имѣютъ равныя основанія  $CFE$  и  $CFB$  (кн. 1, пред. 37), а вершины на прямой  $AD$ , параллельной плоскости  $BCFE$ , въ которой лежатъ оба основанія, слѣдовательно пирамида  $ABCF$  можетъ быть рассматриваема, какъ имѣющая основаніемъ  $ABC$ , а вершину въ точкѣ  $F$ .

Фиг. 559.



Если означимъ чрезъ  $h_1, h_2, h_3$  перпендикуляры, опущенные изъ вершинъ  $D, E, F$  пирамидъ на ихъ общее основаніе  $\triangle ABC$ , то мы будемъ имѣть:

$$\text{об. приз.} = \triangle ABC \cdot \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}$$

потому что  $h_1, h_2, h_3$  будутъ высоты пирамидъ  $ABCD, ABCE$  и  $ABCF$ , а площадь ихъ основанія есть  $\triangle ABC$ .

Если данная усѣченная призма будетъ прямоугольная, то высоты  $h_1, h_2, h_3$  будутъ ребра  $AD, BE, CF$ .

8. Объем пирамиды усеченной параллельно основанию.

*Предложеніе 3.* Если пирамида пересѣчена плоскостью параллельною основанію, то сѣченіе будетъ многоугольникъ подобный многоугольнику основанія и площади этихъ многоугольниковъ относятся между собою какъ квадраты ихъ разстояній отъ вершины пирамиды.

*Доказан.* Пусть данная пирамида будет  $ABCDE$  и пусть  $AM$  будет перпендикуляръ, опущенный изъ вершины  $A$  на основаніи  $BCDE$ . Чрезъ точку  $L$ , взятую на этомъ перпендикулярѣ, проведемъ плоскость параллельную плоскости основанія, сѣченіе этой плоскости съ пирамидой будетъ многоугольникъ  $FGHK$  (фиг. 560).

Соединимъ точки  $L$  съ  $G$  и  $M$  съ  $C$ . Прямая  $FG$  и  $BC$  будутъ параллельны, такъ какъ онѣ суть пересѣченіе двухъ параллельныхъ плоскостей третьейю плоскостью  $ABC$  (кн. 11, пред. 16), по той же причинѣ параллельны и прямая  $GH$  и  $CD$ , слѣдовательно  $\angle FGH = \angle BCD$  (кн. 11, пред. 10). По той же причинѣ и всѣ углы многоугольника  $FGHK$  равны соотвѣтственнымъ угламъ многоугольника  $BCDE$ . Такъ какъ  $BC \parallel FG$ , то треугольники  $ABC$  и  $AFG$  равноугольны, и слѣдовательно:

$$BC:FG=AC:AG$$

но и треугольники  $ACD$  и  $AGH$  также равноугольны, слѣдовательно:

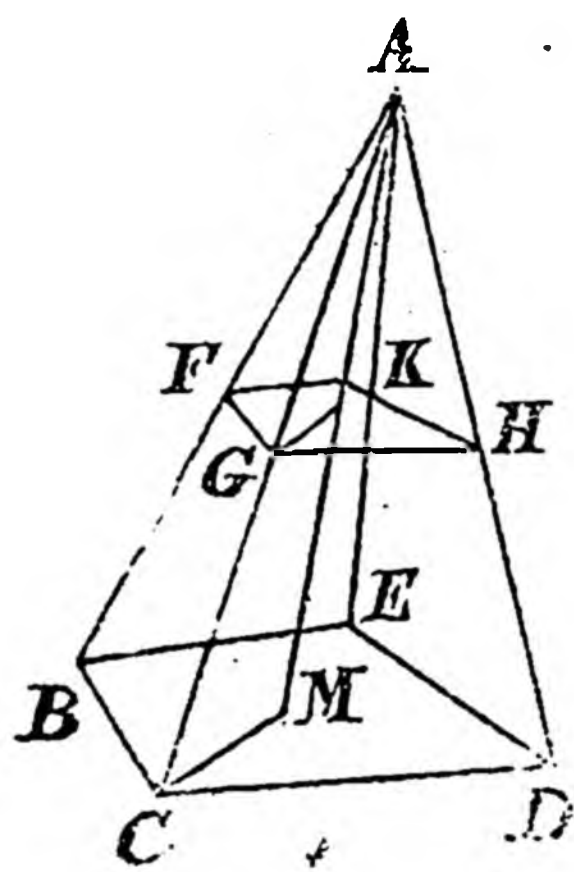
$$CD:GH=AC:AG$$

откуда:

$$BC:FG=CD:GH$$

Точно также легко показать, что всѣ стороны многоугольника  $FGHK$  пропорціональны сторонамъ многоугольника  $BCDE$ , слѣдовательно многоу-

Фиг. 560.



гольники  $FGHK$  и  $BCDE$ , будучи равноугольны и имѣя пропорціональныя стороны, будутъ подобны (кн. 6, опред. 1). Но площади подобныхъ многоугольниковъ относятся какъ квадраты сходственныхъ сторонъ (кн. 6, пред. 22), слѣдовательно мы имѣемъ:

$$\text{многог. } BCDE : \text{многог. } FGHK = BC^2 : FG^2$$

Изъ подобія треугольниковъ  $ABC$  и  $AFG$ ,  $ACM$  и  $AGL$  мы имѣемъ:

$$BC:FG=AC:AG=AM:AL$$



откуда:

$$BC^2 : FG^2 = AC^2 : AG^2 = AM^2 : AL^2$$

слѣдовательно:

$$\text{мнор. } BCDE : \text{мнор. } FGHK = AM^2 : AL^2$$

*Слѣствие.* Изъ этой теоремы слѣдуетъ, что если двѣ пирамиды имѣютъ равныя основанія и равныя высоты, то ихъ сѣченія параллельныя основаніямъ и равноотстоящія отъ вершинъ будутъ равны. Въ самомъ дѣлѣ, пусть основанія мнор.  $BCDEF$  и мнор.  $B'C'D'E'F'$  двухъ пирамидъ будутъ равны, пусть ихъ высота будетъ  $H$ . Если пересѣчемъ обѣ эти пирамиды плоскостями параллельными основаніямъ на разстояніи  $h$  отъ ихъ вершинъ, то мы будемъ имѣть:

$$\text{мнор. } BCDEF : \text{мнор. } bcdef = H^2 : h^2$$

и

$$\text{мнор. } B'C'D'E'F' : \text{мнор. } b'c'd'e'f' = H^2 : h^2$$

откуда:

$$\text{мнор. } BCDEF : \text{мнор. } B'C'D'E'F' = \text{мнор. } bcdef : \text{мнор. } b'c'd'e'f'$$

Но  $\text{мнор. } BCDEF = \text{мнор. } B'C'D'E'F'$ , слѣдовательно и многоугольники сѣченій также равны:

$$\text{мнор. } bcdef = \text{мнор. } b'c'd'e'f'$$

*Предложеніе 4.* Объемъ пирамиды, усѣченной плоскостью параллельно основанію, равенъ тремъ пирамидамъ, имѣющимъ высоту равную высотѣ усѣченной пирамиды, а основаніями: одна нижнее основаніе усѣченной пирамиды, другая верхнее основаніе той же пирамиды, а третья будетъ имѣть основаніемъ средне-пропорціональную площадь между нижнимъ и верхнимъ основаніями усѣченной пирамиды.

*Доказат.* Разсмотримъ сначала треугольную пирамиду  $ABCD$ , пересѣченную плоскостью параллельною основанію (фиг. 561). Пусть это сѣченіе будетъ  $\triangle EFG$ . Проведемъ плоскости  $FBD$  и  $FED$ , плоскости эти раздѣляютъ усѣченную пирамиду  $BCDEFG$  на три пирамиды:  $FBCD$ ,  $FEGD$ ,  $FEDB$ .

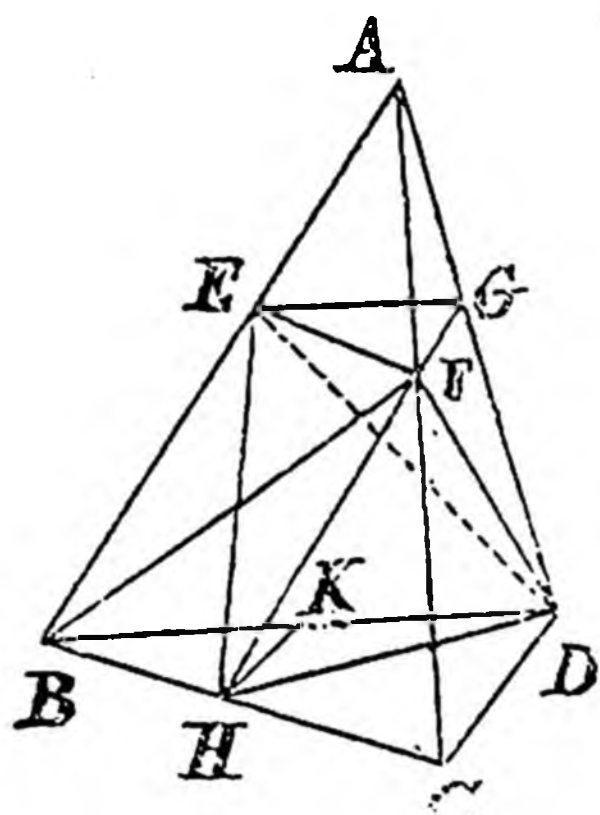
Первая пирамида  $FBCD$  имѣетъ основаніемъ нижнее основаніе усѣченной пирамиды, а вершину въ точкѣ  $F$ , слѣдовательно ея высота будетъ равна высотѣ усѣченной пирамиды.

Вторая пирамида  $FEGD$  имѣетъ основаніемъ верхнее основаніе усѣченной пирамиды, а вершину въ точкѣ  $D$ , слѣдовательно имѣемъ ту же высоту что и первая пирамида.

Наконецъ третья пирамида  $FEDB$ , равна пирамидѣ  $HBED$ , кото-

рой вершина  $H$  была получена, проведя въ плоскости  $ABC$  прямую  $FH \parallel EB$ , слѣдовательно пирамиды  $FEDB$  и  $HVED$  равны, имѣя одно основаніе

Фиг. 561.



$EBD$ , а вершины лежатъ на прямой  $FH$  параллельной основанію  $EBD$ .

Пирамиду  $HVED$  можно разсматривать, какъ имѣющую основаніемъ  $BHD$ , а вершину въ точкѣ  $E$ , и слѣдовательно ея высота будетъ равна высотѣ двухъ первыхъ пирамидъ. Взявъ  $BK=EG$  проведемъ  $HK$ . Такъ какъ треугольники  $BKD$  и  $BHD$  имѣютъ одну высоту, то (кн. 6, пред. 1):

$$\triangle BCD : \triangle BHD = BC : BH$$

по той же причинѣ:

$$\triangle BHD : \triangle BHK = BD : BK$$

Но  $BK=EG$ , а  $BH=EF$ , такъ какъ  $BHFE$  есть параллелограмъ. Кромѣ этого треугольники  $BKD$  и  $EGF$  подобны, то:

$$BC : EF = BD : EG$$

слѣдовательно:

$$\triangle BCD : \triangle BHD = BD : EG$$

$$\triangle BHD : \triangle BHK = BD : EG$$

но  $\triangle BHK = \triangle EFG$  (кн. 1, пред. 4), слѣдовательно:

$$\triangle BCD : \triangle BHD = \triangle BHD : \triangle EFG$$

откуда видимъ, что основаніе  $\triangle BHD$  третьей пирамиды есть средне-пропорціональная величина между верхнимъ и нижнимъ основаніями усѣченной пирамиды.

Если положимъ  $\triangle BCD = A$ ,  $\triangle EFG = A_1$ , то  $\triangle BHD = \sqrt{A \cdot A_1}$ . Слѣдовательно, означая чрезъ  $h$ , разстояніе между верхнимъ и нижнимъ основаніями усѣченной пирамиды, мы будемъ имѣть:

$$\text{об. усѣч. пирам.} = \frac{h}{3} (A + \sqrt{A A_1} + A_1) \quad (a)$$

Возьмемъ теперь многоугольную пирамиду и построимъ треугольникъ, коего площадь была бы равна площади многоугольника основанія данной пирамиды. На основаніи построеннаго треугольника построимъ треугольную пирамиду, коей высота была бы равна высотѣ данной пирамиды. Пересѣчемъ обѣ пирамиды плоскостями параллельными основаніямъ, на равномъ разстояніи отъ вершинъ. Такимъ образомъ получимъ двѣ усѣченныя пирамиды одну многоугольную, а другую, построенную, треугольную. Такъ какъ нижнія основанія этихъ пирамидъ равны, то равны и верхнія (прабав. IX, пред. 3, слѣд.). Но цѣлыя пирамиды равны и малыя равны, слѣдовательно равны и усѣченныя. Откуда объемъ усѣченной многоугольной пирамиды будетъ выраженъ также формулою (а).

Туже теорему можно доказать еще слѣдующимъ образомъ:

Пусть площадь нижняго основанія пирамиды будетъ  $A$ , а верхняя  $A_1$ . Пусть  $H$  будетъ высота цѣлой пирамиды, а  $h$  высота малой, то будемъ имѣть:

$$\text{об. больш. пирам.} = A \cdot \frac{H}{3}$$

$$\text{об. мал. пирам.} = A_1 \cdot \frac{h}{3}$$

Вычитая малую изъ большей, получимъ объемъ усѣченной пирамиды:

$$\text{об. усѣч. пирам.} = \frac{AH}{3} - \frac{A_1 h}{3}$$

Замѣчая, что мы имѣемъ:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{H^2}{h^2} \quad \text{и} \quad \frac{A+A_1}{A_1} = \frac{H^2+h^2}{h^2}$$

найдемъ:

$$\text{об. усѣч. пирам.} = \frac{1}{3} \frac{A_1}{h^2} (H^3 - h^3) = \frac{1}{3} \frac{A_1}{h^2} (H^2 + Hh + h^2) (H - h)$$

откуда:

$$\text{об. усѣч. пирам.} = \frac{1}{3} A_1 \left( \frac{H^2 + h^2}{h^2} + \frac{H}{h} \right) (H - h)$$

или соображаясь съ предъидущимъ:

$$\text{об. усѣч. пирам.} = \frac{1}{3} A_1 \left( \frac{A+A_1}{A_1} + \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A_1}} \right) (H - h)$$

или

$$\text{об. усѣч. пирам.} = \frac{1}{3} (A + \sqrt{AA_1} + A_1) (H - h)$$

гдѣ  $H - h$ , есть высота усѣченной пирамиды.

9. *Боковая поверхность пирамиды усѣченной параллельно основанію*  
Поверхность такой пирамиды, очевидно, составлена изъ трапецій, складывая которыя, получится искомая поверхность. Если пересѣчемъ усѣченную пирамиду плоскостью параллельною основаніямъ и равно отстоящею отъ обѣихъ, то легко видѣть, что каждая сторона полученнаго сѣченія, есть полусумма сторонъ нижняго и верхняго основаній.

Если пирамида правильная, то всѣ трапеціи равны между собою и имѣютъ одну высоту, которая есть апогея усѣченной пирамиды, слѣдовательно боковая поверхность ея равна произведенію периметра сѣченія, равноотстоящаго отъ обѣихъ основаній, на апогею.

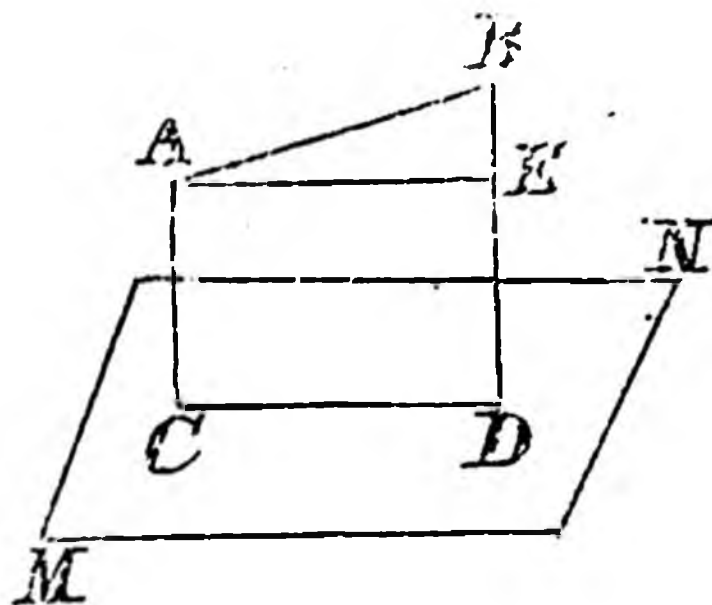
#### Цилиндръ и конусъ.

10. *Проекція. Проекціей* точки на прямой или на плоскости называютъ основаніе перпендикуляра опущеннаго изъ точки на прямую или на плоскость.

*Проекціей прямой*, на прямой или на плоскости, называютъ прямую соединяющую проэкціи оконечностей данной прямой. Очевидно, что проэкція прямой, на плоскости параллельной прямой, равна и параллельна данной прямой. Во всѣхъ другихъ случаяхъ проэкція всегда меньше, проецируемой.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ оконечностей  $A$  и  $B$  прямой  $AB$  опустимъ перпендикуляры  $AC$  и  $BD$  на плоскость  $MN$  (фиг. 562). Чрезъ точку  $A$  проведемъ прямую  $AE = CD$ , которая будетъ находится въ плоскости  $CDB$  (кн. II, пред. 7). Проекція  $CD$  прямой  $AB$  равна прямой  $AE$ , такъ какъ  $ACDE$  есть параллелограмъ, а  $AE$  меньше  $AB$ , потому что  $AB$  есть гипотенуза, а  $AE$  катетъ прямоугольнаго треугольника  $AEB$ .

Фиг. 562.



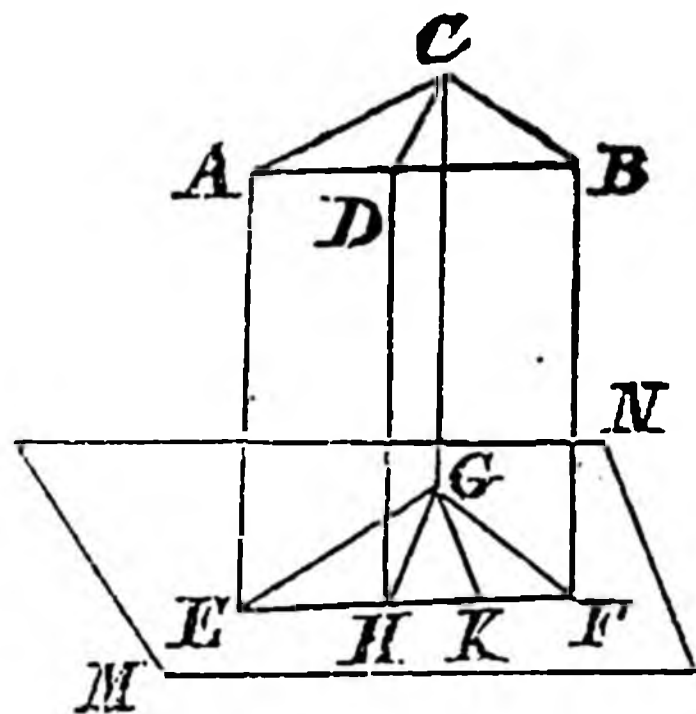
*Проекція кривой* на плоскости есть кривая, проходящая чрезъ проэкціи всѣхъ точекъ проецируемой кривой.



Проекція многоугольника на плоскости есть многоугольник образованный проекціей периметра, проектируемаго многоугольника.

Очевидно проекція многоугольника, на плоскости параллельной плоскости многоугольника, равна данному многоугольнику. Во всѣхъ другихъ случаяхъ она меньше. Для этого рассмотримъ треугольникъ  $ABC$ , коего основаніе есть  $AB$ , а высота  $CD$ , и пусть  $EFG$  будетъ его проекція на плоскости  $MN$ . Пусть  $EF$  будетъ проекція основанія  $AB$ , а  $GH$  проекція высоты  $CD$ . Пусть наконецъ  $GK$  будетъ высота треугольника  $EFG$  (фиг. 563).

Фиг. 563.



Такъ какъ плоскость треугольника  $ABC$  не параллельна плоскости  $MN$ , то  $AB$  и  $CD$  не могутъ быть обѣ параллельны плоскости  $MN$  (кн. 11, пред. 10), а слѣдовательно ихъ проекціи  $EF$  и  $GH$  обѣ или по крайней мѣрѣ одна будутъ меньше  $AB$  и  $CD$ . Но  $GK$  не можетъ быть больше  $GH$ , такъ какъ  $\angle GKE = d$ . Изъ этого видимъ, что основаніе и высота треугольника  $EFG$  или меньше, основанія и высоты треугольника  $ABC$  или одна изъ нихъ не больше, а другая меньше. А изъ этого слѣдуетъ, что:

$$\triangle ABC > \triangle EFG$$

Если это предложеніе вѣрно для треугольника, то очевидно, оно имѣетъ мѣсто и для многоугольника, такъ какъ каждый многоугольникъ есть сумма треугольниковъ, изъ коихъ каждый больше своей проекціи.

Изъ предъидущаго слѣдуетъ, что грань многогранника всегда меньше суммы остальныхъ его граней, такъ какъ, очевидно, что проекція этихъ граней на плоскости первой грани не меньше этой грани.

11. Многогранная поверхность или кривая поверхность называется *выпуклыми*, если пересѣченіе ея съ какою нибудь плоскостью, есть *выпуклый* многоугольникъ или *выпуклая* кривая.

Разсмотримъ два выпуклыхъ многогранника изъ коихъ одинъ весь находится внутри другаго. Продолжимъ стороны внутренняго многогранника до встрѣчи съ поверхностью внѣшняго, то рассуждая какъ мы рассуждали относительно выпуклыхъ многоугольниковъ (прибав. VII, пред. 15)

найдемъ, что поверхность внутренняго многогранника меньше поверхности внѣшняго.

Это предложеніе остается справедливымъ какое бы ни было число и величина сторонъ многогранниковъ, такъ какъ кривую поверхность можно разсматривать какъ предѣлъ вписанной въ кривую многогранной поверхности, число сторонъ которой неопредѣленно возрастаетъ, а величина ихъ неопредѣленно убываетъ. Слѣдовательно предъидущее предложеніе остается справедливымъ и тогда когда объ многогранныя поверхности или одна изъ нихъ суть поверхности кривыя *выпуклыя*.

## 12. Поверхность и объемъ цилиндра.

Если многоугольникъ основанія призмы вписанъ въ кругъ основанія цилиндра, то говорятъ, что призма *вписана* въ цилиндръ, если же многоугольникъ основанія призмы описанъ около круга основанія цилиндра, то говорятъ, что призма *описана* около цилиндра; если при этомъ ребра вписанной призмы суть генератрисы цилиндра, а грани описанной призмы касаются цилиндра по его генератрисамъ. Какъ вписанная такъ и описанная призмы суть прямыя.

Возьмемъ цилиндръ, коего радіусъ основанія есть  $R$ , впишемъ и опишемъ, для простоты, правильныя около него призмы съ одинаковымъ числомъ сторонъ, коихъ число можетъ увеличиваться, а величина уменьшатся неопредѣленно. Такъ какъ описанная призма заключаетъ внутри себя цилиндръ, а цилиндръ заключаетъ вписанную призму, то (прибав. IX, 11) поверхность и объемъ цилиндра всегда заключается между поверхностями и объемами описанной и вписанной призмъ. Такъ какъ съ неопредѣленнымъ возрастаніемъ сторонъ описанной и вписанной призмъ стремятся сдѣлаться равными, то мы будемъ разсматривать цилиндръ какъ предѣлъ къ которому стремятся поверхности и объемы вписанныхъ и описанныхъ правильныхъ призмъ, коихъ число сторонъ неопредѣленно возрастаетъ.

Если означимъ чрезъ  $P_1$  периметръ описанной призмы, чрезъ  $P_2$  периметръ основанія вписанной призмы, чрезъ  $\Pi_1$  площадь многоугольника основанія описанной призмы, чрезъ  $\Pi_2$  площадь многоугольника основанія вписанной призмы. Чрезъ  $Ок.$  означимъ окружность основанія цилиндра, а чрезъ  $Кр.$  площадь того же круга, то мы будемъ имѣть:

$$P_1 = Ок. + \varepsilon_1, \quad P_2 = Ок. - \varepsilon_2$$

$$\Pi_1 = Кр. + e_1, \quad \Pi_2 = Кр. - e_2$$

гдѣ  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, e_1, e_2$  будутъ количества убывающія неопредѣленно по мѣрѣ возрастанія числа сторонъ призмъ. Если чрезъ  $h$  означимъ высоту цилиндра, то это будетъ и высота обѣихъ призмъ.

Слѣдовательно (см. прибав. IX, 4):

$$\text{бок. повер. опис. приз.} = P_1 h = (\text{Ок.} + \varepsilon_1) h$$

$$\text{бок. повер. впис. приз.} = P_2 h = (\text{Ок.} - \varepsilon_1) h$$

а

$$\text{об. приз. опис.} = \Pi_1 h = (\text{Кр.} + e_1) h$$

$$\text{об. приз. впис.} = \Pi_2 h = (\text{Кр.} - e_2) h$$

Разность между боковыми поверхностями описанной и вписанной призмъ, есть:

$$\text{бок. пов. оп. пр.} - \text{бок. пов. вп. пр.} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) h$$

а разность между объемами тѣхъ же призмъ есть:

$$\text{об. оп. пр.} - \text{об. вп. пр.} = (e_1 + e_2) h$$

эти разности съ неопредѣленнымъ возрастаніемъ числа сторонъ неопредѣленно убываютъ и могутъ быть сдѣланы менѣ всякой данной величины. Такъ какъ цилиндръ есть предѣлъ описанной и вписанной призмъ, то, прилагая разсужденія кн. X, пред. 1 и кн. XII, пред. 2, мы найдемъ, что:

*Боковая поверхность цилиндра равна произведенію окружности основанія цилиндра на его высоту, а объемъ цилиндра равенъ произведенію площади основанія цилиндра на его высоту.*

Но  $\text{Ок.} = 2\pi R$ ,  $\text{Кр.} = \pi R^2$ , слѣдовательно:

$$\text{бок. пов. цил.} = 2\pi R h$$

$$\text{об. цил.} = \pi R^2 h$$

Если къ боковой поверхности цилиндра прибавимъ площади верхняго и нижняго основаній цилиндра, сумма которыхъ есть  $2\pi R^2$ , то получимъ полную поверхность цилиндра.

$$\text{пол. пов. цил.} = 2\pi R (h + R)$$

А это выраженіе есть боковая поверхность цилиндра, имѣющаго тоже основаніе, и высоту  $h + R$ .

13. *Поверхность и объемъ конуса.* Если около круга основанія конуса опишемъ правильный многоугольникъ и впишемъ такой же многоугольникъ съ тѣмъ же числомъ сторонъ и вершины описаннаго и вписан-



наго многоугольниковъ соединимъ съ вершиною конуса, то получимъ правильныя пирамиды описанную и вписанную въ конусъ. Очевидно, что ребра вписанной пирамиды суть генератрисы конуса, а грань описанной пирамиды касается конуса также по генератрисѣ.

Такъ какъ описанная и вписанная пирамиды правильныя, то ихъ грани суть равные равнобедренные треугольники. Высота граней, описанной пирамиды, очевидно, есть апогема пирамиды, а генератриса конуса, которую означимъ чрезъ  $h$ . Означимъ апогею вписанной пирамиды чрезъ  $h_1$ , то мы будемъ имѣть, если означимъ высоту конуса и обѣихъ пирамидъ чрезъ  $H$ :

$$\text{бок. пов. оп. пир.} = P_1 \frac{h}{2} = (\text{Ок.} + \epsilon_1) \frac{h}{2}$$

$$\text{бок. пов. вп. пир.} = P_2 \frac{h}{2} = (\text{Ок.} - \epsilon_2) \frac{h_1}{2}$$

$$\text{об. опис. пир.} = \Pi_1 \frac{H}{3} = (\text{Кр.} + e_1) \frac{H}{3}$$

$$\text{об. впис. пир.} = \Pi_2 \frac{H}{3} = (\text{Кр.} - e_2) \frac{H}{3}$$

Такъ какъ поверхность и объемъ конуса меньше поверхности и объема описанной пирамиды и больше вписанной, а разности между поверхностями и объемами пирамидъ, съ увеличеніемъ числа сторонъ уменьшаются неопредѣленно, что видно изъ предъидущихъ выраженій, то поверхность и объемъ конуса есть предѣлъ поверхностей и объемовъ пирамидъ описанныхъ и вписанныхъ, когда число сторонъ пирамидъ неопредѣленно увеличивается.

Но поверхность и объемъ описанной пирамиды суть:

$$\text{бок. пов. опис. пир.} = (\text{Ок.} + \epsilon_1) \frac{h}{2}$$

$$\text{об. опис. пир.} = (\text{Кр.} + e_1) \frac{H}{3}$$

примѣняя къ этимъ уравненіямъ основную теорему предѣловъ (прибав. VII, пред. 19), найдемъ:

$$\text{нов. конус.} = \text{Ок.} \frac{h}{2} = 2\pi R \frac{h}{2} = \pi R h$$

$$\text{об. конус.} = \text{Кр.} \frac{H}{3} = \pi R^2 \frac{H}{3}$$

гдѣ  $R$  есть радіусъ круга основанія.



Если необходимо имѣть полную поверхность конуса, то къ боковой его поверхности надобно прибавить площадь круга основанія  $\pi R^2$ , что даетъ:

$$\text{пол. пов. кон.} = \pi R h + \pi R^2 = \pi R(R + h)$$

изъ этого выраженія видимъ, что полная поверхность конуса, коего апогема есть  $h$ , равна боковой поверхности конуса, имѣющаго тоже основаніе, а апогеемъ  $R + h$ .

Легко также видѣть, что  $R$ ,  $h$ ,  $H$  связаны уравненіемъ:

$$h^2 = R^2 + H^2.$$

#### 14. Поверхность и объемъ конуса усѣченнаго параллельно основанію.

Опишемъ около конуса правильную пирамиду, и будемъ увеличивать число сторонъ пирамиды, то поверхность и объемъ усѣченного конуса будетъ предѣлъ къ которому стремятся поверхность и объемъ усѣченной пирамиды, заключенной между тѣми же плоскостями, что и усѣченный конусъ. Разсуждая какъ выше, мы найдемъ, что боковая поверхность усѣченного конуса равна произведенію полусуммы окружностей верхняго и нижняго основаній усѣченного конуса, на его же сторону или генератрису. Если радіусъ нижняго основанія есть  $R$ , и верхняго  $r$ , сторона  $p$ , то:

$$\text{пов. усѣч. конус.} = \pi(R + r)p \quad (a)$$

а полную поверхность получимъ прибавляя площади круговъ верхняго и нижняго основаній  $\pi R^2$  и  $\pi r^2$ , слѣдовательно:

$$\text{пол. пов. усѣч. конус.} = \pi(R + r)p + \pi R^2 + \pi r^2$$

Если чрезъ  $q$  означимъ высоту усѣченного конуса, то:

$$\text{об. усѣч. конус.} = \frac{1}{3} \pi(R^2 + Rr + r^2)q \quad (b)$$

Выраженія (a) и (b) можно получить слѣдующимъ образомъ: означимъ апогею цѣлаго конуса чрезъ  $h$ , а отсѣченнаго чрезъ  $h_1$ , то мы будемъ имѣть:

$$\text{пов. бол. конус.} = \pi R h$$

$$\text{пов. отсѣч. конус.} = \pi r h_1$$

откуда поверхность усѣченного конуса будетъ:

$$\text{пов. бол. кон.} - \text{пов. отсѣч. кон.} = \text{пов. усѣч. кон.} = \pi(Rh - rh_1)$$

Но:

$$h : h_1 = R : r$$

а отсюда:

$$\frac{R-r}{R} = \frac{h-h_1}{h}$$

подставляя въ выраженіе  $Rh - rh_1$  вмѣсто  $h_1 = \frac{rh}{R}$ , найдемъ:

$$\text{пов. усѣч. кон.} = \pi(R^2 - r^2) \frac{h}{R} = \pi(R+r) \frac{(R-r)h}{R}$$

откуда:

$$\text{пов. усѣч. кон.} = \pi(R+r)(h-h_1) = \pi(R+r)p$$

Если чрезъ  $H$  означимъ высоту большого конуса, и чрезъ  $H_1$  отсѣченнаго, то:

$$\text{об. больш. кон.} = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

$$\text{об. отсѣч. кон.} = \frac{1}{3} \pi r^2 H_1$$

слѣдовательно:

$$\text{об. усѣч. кон.} = \text{об. больш. кон.} - \text{об. отсѣч. кон.} = \frac{1}{3} \pi (R^2 H - r^2 H_1)$$

замѣчая, что:

$$R : r = H : H_1 \quad (c)$$

и подставляя вмѣсто  $H_1 = \frac{rH}{R}$  въ предыдущее выраженіе, найдемъ:

$$\text{об. усѣч. кон.} = \frac{1}{3} \pi H \frac{(R^3 - r^3)}{R} = \frac{1}{3} \pi (R^2 + Rr + r^2) \frac{(R-r)H}{R}$$

Но изъ пропорціи слѣдуетъ, что:

$$\frac{R-r}{R} = \frac{H-H_1}{H} = \frac{q}{H}$$

Слѣдовательно:

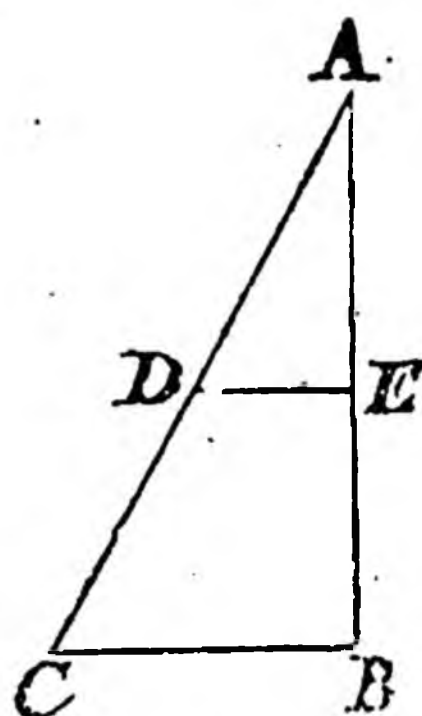
$$\text{об. усѣч. кон.} = \frac{1}{3} \pi q (R^2 + Rr + r^2)$$

Замѣтимъ еще, что поверхности цѣлаго и усѣченнаго конусовъ можно выразить слѣдующимъ образомъ:

Пусть  $ABC$  будетъ прямоугольный треугольникъ,  $D$  точка на срединѣ гипотенузы  $AC$ ,  $DE$  перпендикуляръ къ  $AB$  (фиг. 564).

Въ конусѣ образованномъ вращеніемъ треугольника  $ABC$  около  $AB$ , окружность описанная точкою  $D$  будетъ равна половинѣ окружности, опи-

Фиг. 564.

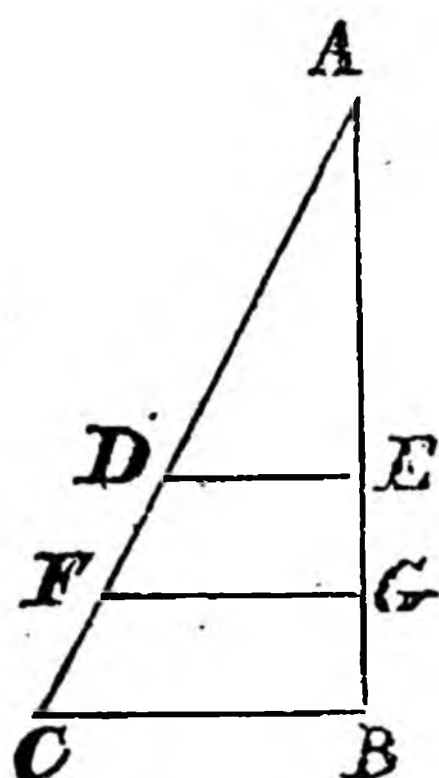


санной точкою  $C$ , такъ какъ  $DE = \frac{1}{2} CB$  (кн. 6, пред. 2). Если  $CB = R$ , то  $DE = \frac{1}{2} R$ , но:

$$\text{пов. кон.} = 2\pi R \cdot \frac{AC}{2} = 2\pi \frac{R}{2} AC = 2\pi \cdot DE \cdot AC$$

Точно также пусть  $ABC$  будетъ прямоугольный треугольникъ,  $D$  какая нибудь точка его гипотенузы,  $F$  точка лежащая на срединѣ прямой  $DC$ ,  $DE$  и  $FG$  прямые перпендикулярны къ  $AB$  (фиг. 565).

Фиг. 565.



Въ усѣченномъ конусѣ, образованномъ вращеніемъ трапеціи  $CDEB$  около  $AB$ , окружность описанная точкою  $F$  равна полусуммѣ окружностей описанныхъ точками  $D$  и  $C$ , такъ какъ  $FG = \frac{CB + DE}{2}$ .

Но мы имѣемъ:

$$\text{пов. усѣч. кон.} = \pi(R + r)r = \pi(R + r) \cdot CD$$

а.  $R + r = 2FG$ , слѣдовательно:

$$\text{пов. усѣч. кон.} = 2\pi FG \cdot CD$$

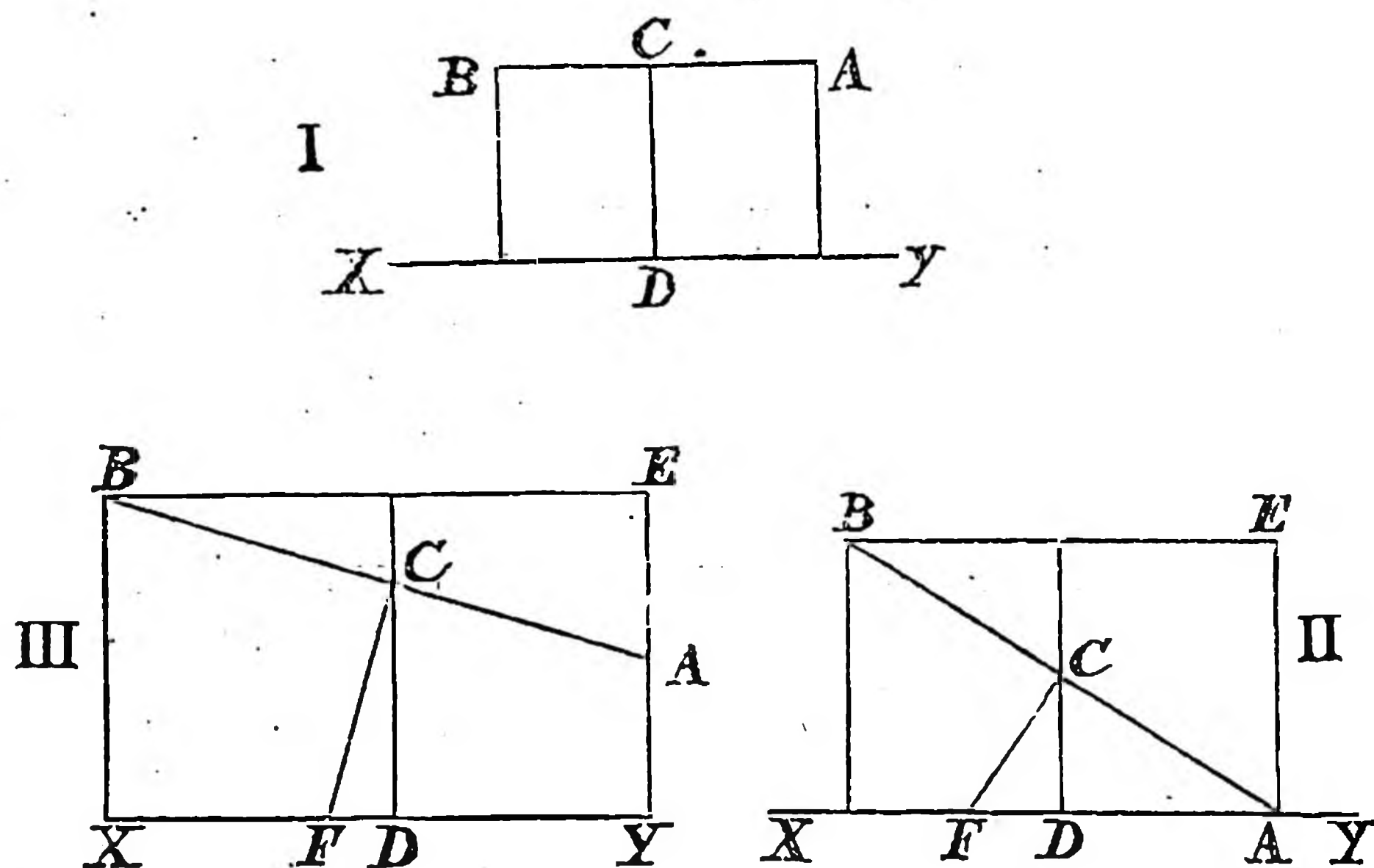
Шаръ.

15. Предварительныя теоремы. Чтобы найти мѣру поверхности шара необходимо изложить слѣдующія предварительныя теоремы:

1) Если конечная прямая  $AB$ , лежащая въ одной плоскости съ не-

опредѣленною прямою  $XU$  и вся по одну ея сторону (фиг. 566), вращается около  $XU$ , то поверхность описанная прямою  $AB$  будетъ или цилиндръ, если  $AB \parallel XU$  (фиг. I), или конусъ, если  $AB$  не  $\parallel XU$  и упирается однимъ концемъ въ  $XU$  (фиг. II), или наконецъ, усѣченный конусъ, если прямая  $AB$  не  $\parallel XU$  и не встрѣчаетъ ее (фиг. III).

Фиг. 566.



Во всѣхъ этихъ случаяхъ, поверхность описанная прямою  $AB$ , будетъ равна:

$$2\pi \cdot CD \cdot AB$$

гдѣ  $CD$  есть перпендикуляръ опущенный изъ середины  $C$  прямой  $AB$  на  $XU$  (прибав. IX, 14).

Предъидущую мѣру поверхности, описанную прямою  $AB$ , можно выразить слѣдующимъ образомъ:

Черезъ точку  $B$ , во всѣхъ фигурахъ, проведемъ  $BE \parallel BA$ , изъ точекъ  $A$  и  $B$  проведемъ прямыя перпендикулярныя къ  $XU$ , а изъ  $C$  проведемъ перпендикуляръ къ  $AB$  до встрѣчи съ  $XU$  и  $CD$  перпендикуляръ къ  $XU$ . Такимъ образомъ получимъ два равноугольные треугольника  $ABE$  и  $FCD$ , слѣдовательно мы будемъ имѣть (кн. 6, пред. 16):

$$CD \cdot AB = FC \cdot BE$$

откуда:

$$2\pi CD \cdot AB = 2\pi FC \cdot BE$$

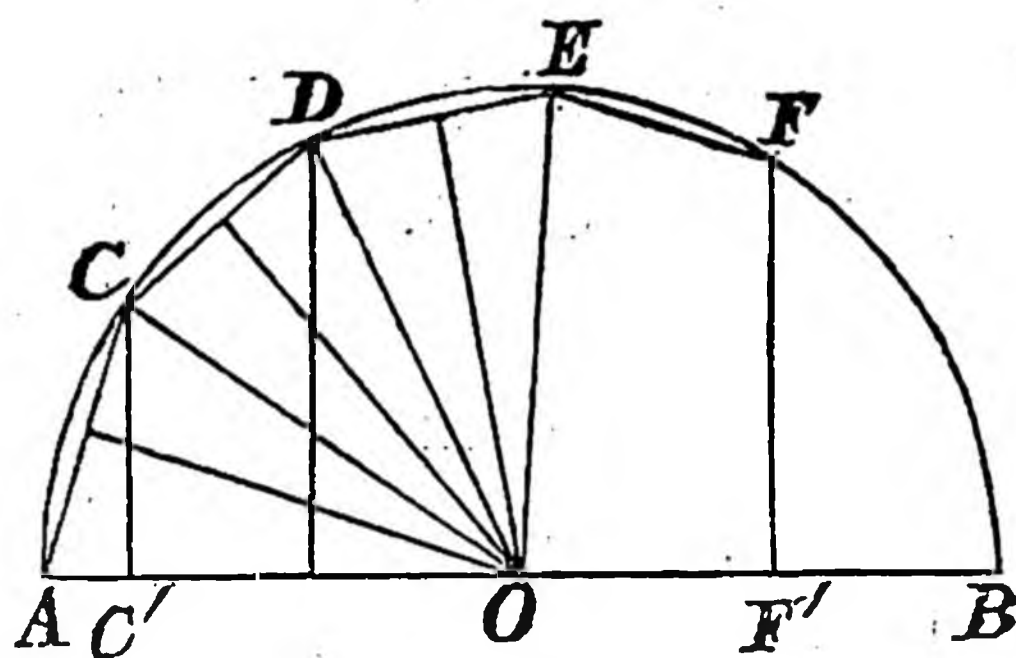
Но  $2\pi FC$  есть длина окружности, описанной радіусомъ  $FC$ , а  $BE$  есть проэкція прямой  $AB$  на  $XU$ . Слѣдовательно поверхность, описанная прямою  $AB$ , вращаясь около  $XU$ , будетъ равна произведенію окружности круга, имѣющаго радіусомъ часть перпендикуляра, возставленнаго къ  $AB$  изъ ея середины  $C$ , до встрѣчи съ  $XU$ , на проэкцію прямой  $AB$  на  $XU$ .



16. *Поверхность шара.* Впишемъ въ полукругъ правильный многоугольникъ  $ACDEF....B$  и будетъ вращать полукругъ съ описаннымъ многоугольникомъ около діаметра  $AB$ , то поверхность описанная многоугольникомъ будетъ равна суммѣ поверхностей описанныхъ ея сторонами (фиг. 567). Итакъ какъ перпендикуляры, возставленные изъ срединъ сторонъ многоугольника, встрѣчаютъ всѣ прямую вращенія  $AB$  въ центрѣ круга и всѣ равны, то описанная поверхность получится помножая окружность круга, коего радіусъ равенъ вышеупомянутому перпендикуляру, на проэкцію сторонъ многоугольника на діаметръ круга:

$$\text{пов. опис. } ACDEF... = 2\pi h. AB$$

Фиг. 567.



Это мѣра всей поверхности, а мѣра поверхности описанной частью полигона, на примѣръ  $CDEF$  будетъ:

$$\text{пов. опис. } CDEF = 2\pi h. C'F'$$

гдѣ  $C'F'$  есть проэкція кривой  $CDEF$  на діаметръ  $AB$ .

Такъ какъ шаръ есть предѣлъ вписаннаго многогранника, коего число сторонъ неопредѣленно возрастаетъ, а величина неопредѣленно убываетъ, то, означая радіусъ шара чрезъ  $R$  и прилагая основную теорему предѣловъ, найдемъ:

$$\text{пов. опис. дуг. } ACDEF = 2\pi R. AF'$$

$$\text{пов. опис. дуг. } CDEF = 2\pi R. C'F'$$

Первое выраженіе есть поверхность шароваго сегмента, а второе поверхность шароваго пояса. Слѣдовательно *поверхность пояса равна поверхности цилиндра, коего основаніе есть большой кругъ шара, а высота есть высота пояса.* Тоже можно сказать и о сегментѣ.

Изъ этихъ обѣихъ выраженій получится поверхность шара, если сдѣлать  $AF' = AB$  или  $C'F' = AB = 2R$ :

$$\text{пов. шара} = 4\pi R^2$$

Такъ какъ площадь круга, коего радіусъ есть  $R$ , равна  $\pi R^2$ , то, очевидно, что поверхность шара равна четыремъ площадямъ *большаго* круга шара. Если выраженіе  $4\pi R^2$  написать въ формѣ  $\pi(2R)^2$ , то изъ него видно, что поверхность шара равна площади круга, коего радіусъ есть діаметръ шара.

Выраженіе сегмента:

$$\text{пов. сег.} = 2\pi R \cdot AF'$$

можно преобразовать слѣдующимъ образомъ:

Если соединимъ точку  $A$  съ  $F$  хордою  $AF$ , то (кн. 6, пред. 8)  $AF^2 = 2R \cdot AF'$ , слѣдовательно:

$$\text{пов. сегм.} = \pi AF'^2$$

т. е. поверхность сегмента равна площади круга, коего радіусъ есть хорда стягивающая дугу, описавшую сегментъ.

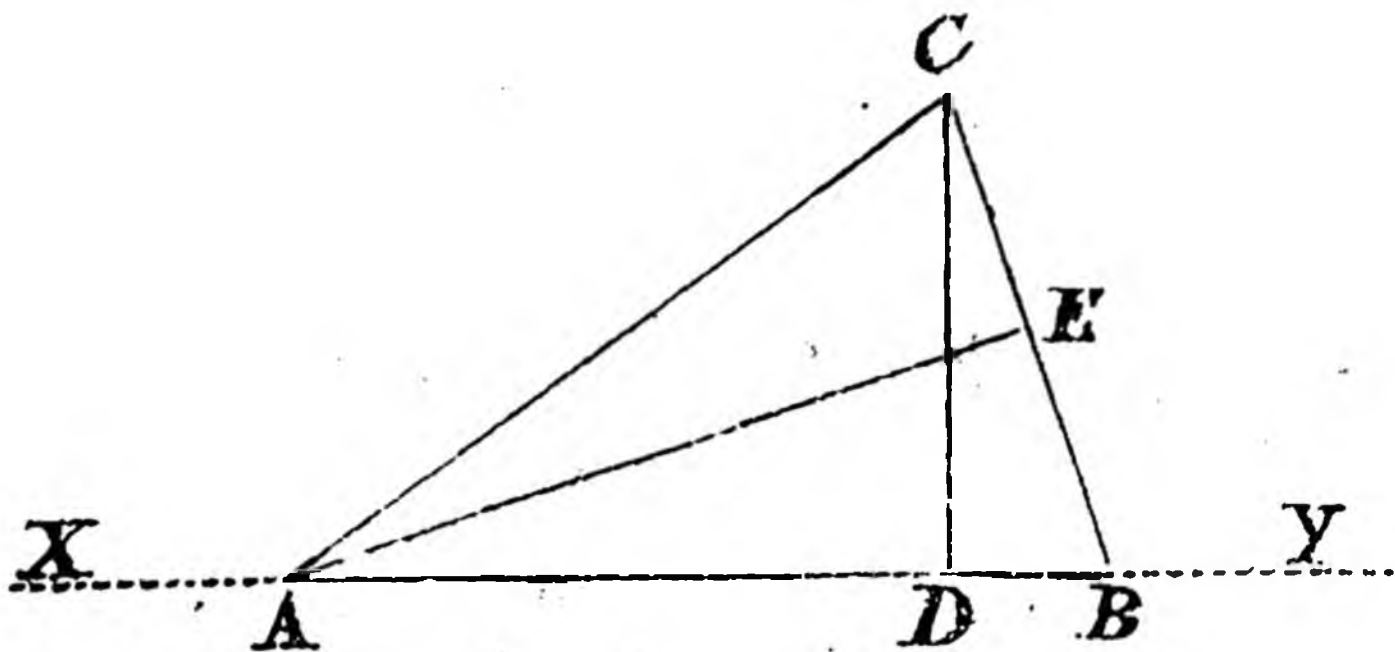
Объемъ шара.

#### 17. Предварительныя теоремы.

*Предложеніе.* Если треугольникъ  $ABC$  сдѣлаетъ полный оборотъ около прямой  $XU$ , проходящей чрезъ его вершину  $A$ , то объемъ описанный имъ будетъ равенъ произведенію поверхности, описанной стороною  $BC$ , противолежащей вершинѣ  $A$ , на перпендикуляръ, спущенный изъ той же вершины на сторону  $BC$ .

1) Пусть ось вращенія  $XU$  совпадаетъ съ основаніемъ  $AB$  треугольника  $ABC$  (фиг. 568).

Фиг. 568.



Изъ вершины  $C$  опустимъ перпендикуляръ  $CD$  на  $AB$ , а изъ вершины  $A$  перпендикуляръ  $AE$  на  $BC$ .

Очевидно, что объемъ описанный треугольникомъ  $ABC$  будетъ равенъ суммѣ двухъ конусовъ, описанныхъ треугольниками  $ACD$  и  $BCE$ , слѣдовательно:

$$\begin{aligned} \text{об. опис. } ACB &= \frac{1}{3} \pi CD^2 \cdot AD + \frac{1}{3} \pi CD^2 \cdot DB = \\ &= \frac{1}{3} \pi CD^2 (AD + DB) = \frac{1}{3} \pi CD^2 \cdot AB = \frac{1}{3} \pi CD \cdot CD \cdot AB \end{aligned}$$

Но изъ подобія треугольниковъ  $CDB$  и  $AEB$  мы имѣемъ (кн. 6, пред. 16):

$$CD \cdot AB = BC \cdot AE$$

слѣдовательно:

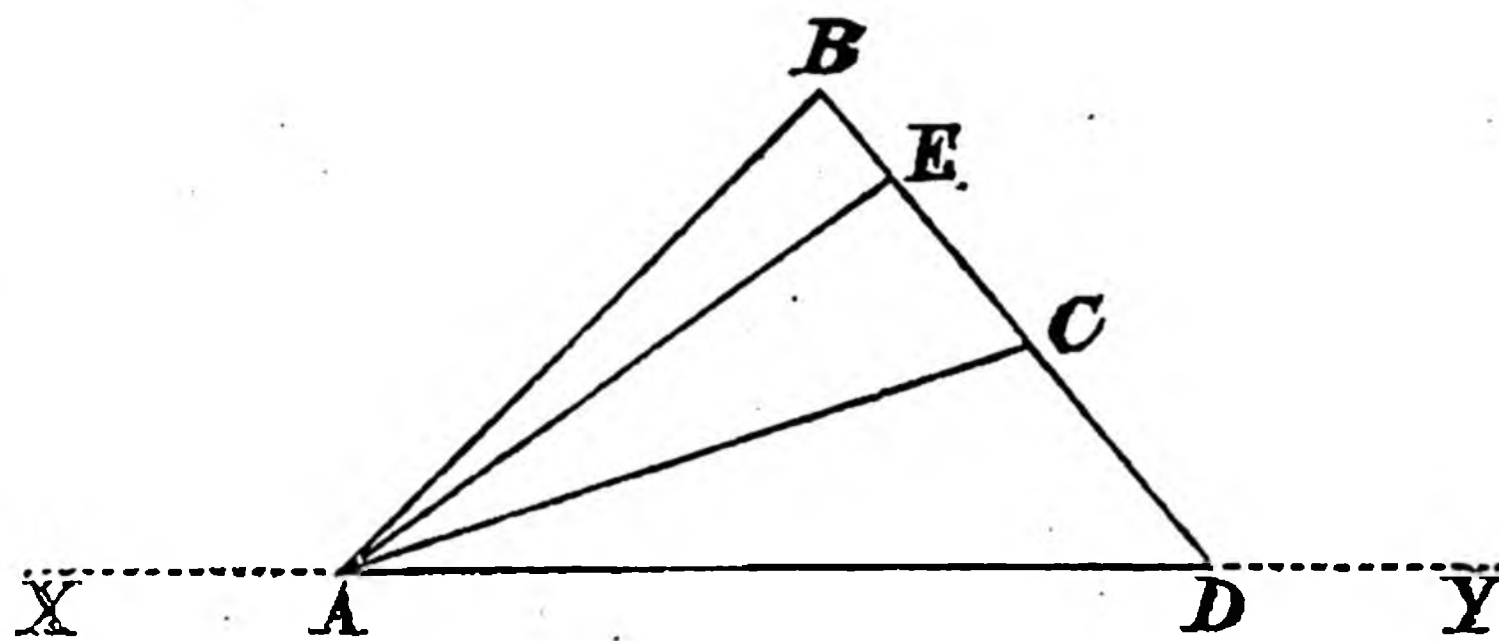
$$\text{об. опис. } ACB = \frac{1}{3} \pi CD \cdot CD \cdot AB = \frac{1}{3} \pi CD \cdot BC \cdot AE$$

но  $\pi CD \cdot BC$  есть поверхность описанная стороною  $BC$ , слѣдовательно:

$$\text{об. опис. } ACB = \text{пов. опис. } BC \cdot \frac{1}{3} AE$$

2) Ось  $XU$  не совпадаетъ съ основаніемъ треугольника  $ABC$  и сторона  $BC$  не параллельна оси  $XU$  (фиг. 569).

Фиг. 569.



Продолжимъ сторону  $BC$  до встрѣчи съ осью  $XU$  въ точкѣ  $D$ , а изъ точки  $A$  опустимъ перпендикуляръ  $AE$  на  $BC$ .

Очевидно, что объемъ описанный треугольникомъ  $ABC$  равенъ разности объемовъ, описанныхъ треугольниками  $ABD$  и  $ACD$ , слѣдовательно:

$$\text{об. опис. } ABC = \text{об. опис. } ABD - \text{об. опис. } ACD$$

соображаясь съ предъидущимъ найдемъ, что:

$$\text{об. опис. } ABC = \text{пов. опис. } BD \cdot \frac{1}{3} AE - \text{пов. опис. } CD \cdot \frac{1}{3} AE$$

откуда:

$$\text{об. опис. } ABC = (\text{пов. опис. } BD - \text{пов. опис. } CD) \cdot \frac{1}{3} AE$$

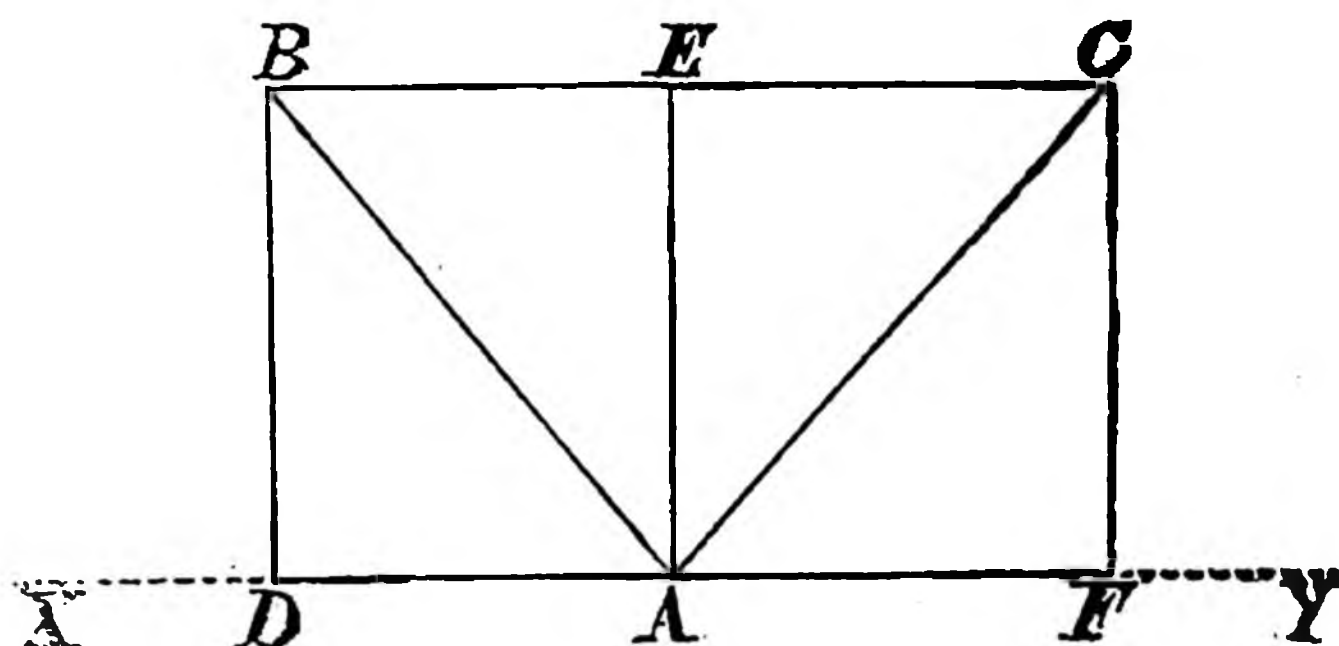
или

$$\text{об. опис. } ABC = \text{пов. опис. } BC \cdot \frac{1}{3} AE.$$

3) Сторона  $BC \parallel XU$  (фиг. 570).

Проведемъ  $BD$ ,  $AE$ ,  $CF$  перпендикулярно къ  $XU$ , то объемъ описанный  $BAC$  около  $XU$  будетъ равенъ объему цилиндра описаннаго сторо-

Фиг. 570.



ною  $BC$  безъ двухъ равныхъ конусовъ описанныхъ треугольниками  $DBA$  и  $FCA$ .

$$\text{об. опис. } BAC = \text{об. цил. опис. } BC - 2 \text{ об. кон. опис. } ACF$$

Соображаясь съ предыдущимъ, найдемъ:

$$\text{об. опис. } BAC = \pi AE^2 BC - 2\pi AE^2 \cdot \frac{1}{3} AF$$

Но  $AF = \frac{1}{2} BC$ , слѣдовательно:

$$\text{об. опис. } BAC = \pi AE^2 BC - \pi AE^2 \cdot \frac{1}{3} BC$$

откуда:

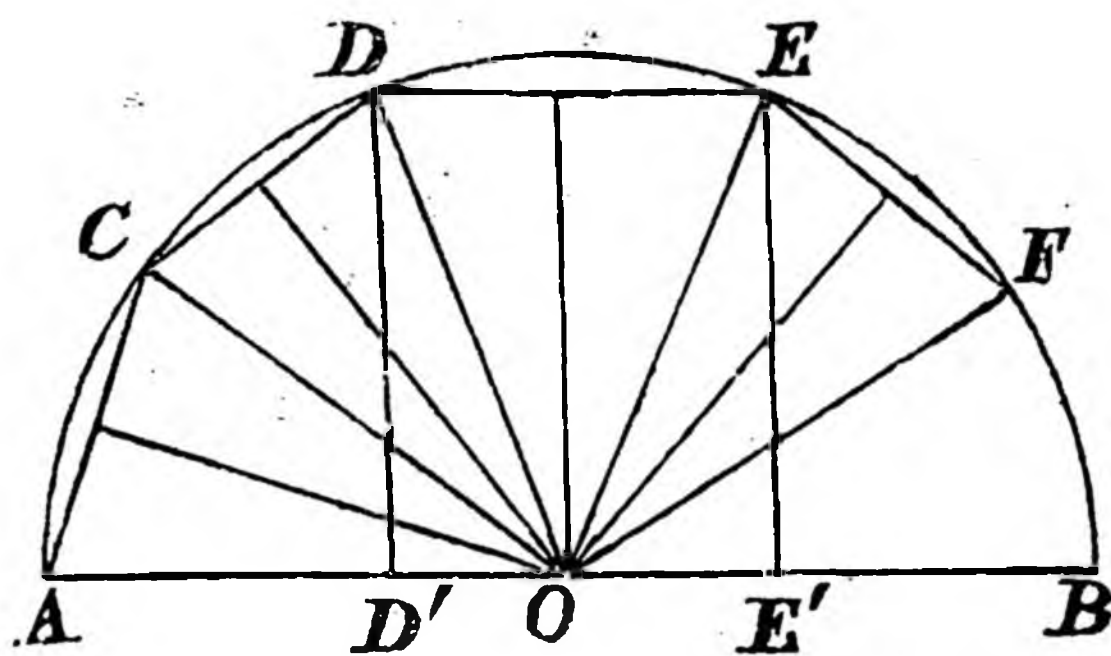
$$\text{об. опис. } BAC = \frac{2}{3} \pi AE^2 BC = \frac{2}{3} \pi AE BC AE$$

Но  $2\pi AE BC$  есть поверхность описанная стороною  $BC$ , слѣдовательно:

$$\text{об. опис. } BAC = \text{пов. опис. } BC \cdot \frac{1}{3} AE$$

18. Объемъ шара. Впишемъ въ полукругъ  $ACB$  правильный многоугольникъ, котораго число сторонъ можетъ возрастать, а величина убывать неопредѣленно. Пусть такой многоугольникъ будетъ  $ACDEFB$  (фиг. 571).

Фиг. 571.



Объемъ описанный многоугольникомъ  $ACDEFB$  будетъ равенъ суммѣ объемовъ описанныхъ треугольниками  $ACO$ ,  $CDO$ ,  $DEO$ ,  $EFO$ ,  $FBO$ . Объемъ описанный каждымъ изъ этихъ треугольниковъ равенъ поверхности, описанной



стороною многоугольника умноженной на треть апоемеы, но всѣ апоемеы равны, слѣдовательно:

$$\text{об. опис. } ACDEFB = \text{пов. опис. } ACDEFB \cdot \frac{1}{3} OL \quad (\alpha)$$

Такъ какъ предѣлъ тѣла описаннаго многоугольникомъ  $ACDEFB$  есть объемъ шара, предѣлъ поверхности описанной тѣмъ же многоугольникомъ есть поверхность шара, а предѣлъ апоемеы  $OL$  есть радіусъ  $R$  шара, то прилагая основную теорему предѣловъ къ уравненію  $(\alpha)$  найдемъ:

$$\text{об. шар.} = \text{пов. шар.} \cdot \frac{1}{3} R$$

но  $\text{пов. шар.} = 4\pi R^2$ , слѣдовательно:

$$\text{об. шар.} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Это выраженіе можно написать такъ:

$$\text{об. шар.} = \frac{8}{6} \pi R^3 = \frac{\pi(2R)^3}{6}$$

назвавъ чрезъ  $D$  діаметръ шара мы будемъ имѣть  $D=2R$ , откуда:

$$\text{об. шар.} = \frac{\pi D^3}{6}$$

19. Объемъ шароваго сектора и сегмента. Объемъ тѣла описаннаго частью полигона, на примѣръ  $ACDEO$ , равенъ суммѣ тѣлъ описанныхъ треугольниками  $ACO$ ,  $CDO$ ,  $DEO$  (фиг. 571). Слѣдовательно:

$$\text{об. тѣл. опис. } ACDEO = \text{об. опис. } ACO + \text{об. опис. } CDO + \text{об. опис. } DEO$$

соображаясь съ выше найденнымъ мы получимъ:

$$\begin{aligned} \text{об. тѣл. опис. } ACDEO &= \text{пов. опис. } AC \cdot \frac{1}{3} LO + \text{пов. опис. } CD \cdot \frac{1}{3} LO + \\ &+ \text{пов. опис. } DE \cdot \frac{1}{3} LO \end{aligned}$$

или

$$\text{об. тѣл. опис. } ACDEO = \text{пов. опис. } ACDE \cdot \frac{1}{3} LO$$

Если теперь перейдемъ къ предѣлу, то найдемъ, что объемъ шароваго сектора будетъ равенъ поверхности шароваго сегмента описаннаго дугою  $ACDE$  умноженной на одну треть радіуса шара:

об. шар. сек.  $ACDEO$  = пов. шар. сег. опис.  $ACDE$ .  $\frac{1}{3} R$

но:

$$\text{пов. шар. сег. оп. } ACDE = 2\pi R \cdot AE'$$

слѣдовательно:

$$\text{об. шар. сек. } ACDEO = \frac{2}{3} \pi R^2 \cdot AE'$$

Изъ этого выраженія получится объемъ шара, если  $AE' = 2R$ .

*Объемъ шароваго сегмента.* Объемъ шароваго сегмента, описаннаго частью круга  $ACD$  равенъ, очевидно, объему шароваго сектора, описаннаго частью круга  $ACDO$  безъ объема конуса, описаннаго треугольникомъ  $D'DO$  (фиг. 571). Слѣдовательно:

$$\text{об. шар. сег. опис. } ACD = \text{об. шар. сек. оп. } ACDO - \text{об. конус. } D'DO$$

или, соображаясь съ найденнымъ выше, мы найдемъ:

$$\text{об. шар. сег. опис. } ACD = \frac{2}{3} \pi R^2 \cdot AD' - \frac{1}{3} \pi DD'^2 \cdot D'O$$

Если высоту  $AD'$  сегмента назовемъ чрезъ  $H$  и замѣтимъ (кн. 6, пред. 8), что:

$$DD'^2 = (2R - H)H$$

то найдемъ, что:

$$\text{об. шар. сег. опис. } ACD = \pi H^2 \left( R - \frac{H}{3} \right)$$

Объемъ шара можно найти еще слѣдующимъ образомъ: представимъ, что около шара описанъ многогранникъ, коего число граней могло бы увеличиваться неопредѣленно, а величина уменьшаться неопредѣленно. Если вершины угловъ каждой такой грани, описаннаго многогранника, соединимъ съ центромъ шара, то получимъ пирамиды, коихъ вершины находятся въ центрѣ шара, а основанія будутъ касаться шара.

Всѣ эти пирамиды имѣютъ одну высоту—радіусъ шара, слѣдовательно, если чрезъ  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$  сзначимъ ихъ основанія, то объемы всѣхъ этихъ пирамидъ будутъ:

$$\omega_1 \frac{R}{3}, \quad \omega_2 \frac{R}{3}, \quad \dots, \quad \omega_n \frac{R}{3}$$

Если сложимъ эти объемы, то получимъ объемъ описаннаго около шара многогранника:

$$\text{об. мног.} = (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n) \frac{R}{3}$$

Слѣдовательно объемъ многогранника будетъ равенъ поверхности  $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n$  многогранника умноженной на треть радіуса.

Если къ предъидущему уравненію приложимъ основную теорему предѣловъ, то найдемъ, что:

$$\text{пред. об. мног.} = \text{пред.} (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n) \cdot \frac{R}{3}$$

но предѣлъ объема многогранника есть объемъ шара, а пред.  $(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n) = 4\pi R^2$ , т. е. поверхность шара, слѣдовательно:

$$\text{об. шар.} = 4\pi R^2 \cdot \frac{R}{3} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Разсуждая подобнымъ образомъ, относительно шароваго сектора, мы найдемъ, что объемъ его равенъ шаровой поверхности его на треть радіуса шара, но шаровая поверхность сектора, есть поверхность сегмента, которая равна площади большаго круга шара умноженной на высоту сегмента, которая пусть, наприимѣръ, будетъ  $H$ , слѣдовательно объемъ сектора будетъ:

$$\text{об. шар. сек.} = 2\pi R \cdot H \cdot \frac{R}{3}$$

или

$$\text{об. шар. сек.} = \frac{2}{3} \pi R^2 \cdot H$$

Откуда, если  $H=2R$ , то найдемъ объемъ шара.

20. *Объемъ шароваго пояса.* Поясомъ называется часть шара заключенная между двумя параллельными плоскостями. Очевидно, что объемъ пояса есть разность объемовъ двухъ сегментовъ.

Если высоту большаго изъ нихъ назовемъ чрезъ  $H$ , а меньшаго чрезъ  $h$ , то объемы ихъ будутъ:

$$\text{об. сег. 1-го} = \pi H^2 \left( R - \frac{H}{3} \right)$$

$$\text{об. сег. 2-го} = \pi h^2 \left( R - \frac{h}{3} \right)$$

вычитая получимъ объемъ шароваго пояса:

$$\text{об. шар. пояс.} = \pi R (H^2 - h^2) - \frac{\pi}{3} (H^3 - h^3)$$

Если высоту шароваго пояса назовемъ чрезъ  $q$ , а радіусы оснований чрезъ  $r_1$  и  $r_2$ , то мы будемъ имѣть:

$$H - h = q, \quad r_1^2 = H(2R - H), \quad r_2^2 = h(2R - h) \quad (1)$$

Предъидущее выраженіе для объема пояса можно написать въ слѣдующей формѣ:

$$\text{об. шар. пояс.} = \pi R(H+h)q - \frac{\pi}{3}(H^2 + Hh + h^2)q \quad (2)$$

Изъ выраженій (1) мы имѣемъ:

$$H^2 + h^2 = 2R(H+h) - (r_1^2 + r_2^2)$$

подставляя во (2), послѣ нѣсколькихъ преобразованій, найдемъ:

$$\text{об. шар. пояс.} = \frac{\pi r_1^2 q + \pi r_2^2 q}{2} + \frac{\pi q^3}{6}$$

Формула замѣчательная по смыслу: объемъ шароваго пояса равенъ суммѣ объемовъ двухъ цилиндровъ изъ коихъ одинъ имѣетъ основаніемъ нижнее основаніе пояса, а другой верхнее, а высоту оба имѣютъ равную половинѣ высоты пояса, съ объемомъ шара коего діаметръ есть высота пояса.

---



## З А Д А Ч И.

### Книга I.

Отъ 1 до 15.

1. На данной прямой построить равнобедренный треугольникъ, коего бы стороны были равны другой данной прямой?

2. Если въ пред. 2, книги 1, діаметръ меньшаго круга будетъ равенъ радіусу большаго, то показать гдѣ будетъ находится данная точка и гдѣ вершина построеннаго треугольника.

3. Если двѣ прямыя, пересѣкаясь подъ прямымъ угломъ, дѣлятъ одна другую пополамъ, то каждая точка одной изъ нихъ находится въ равномъ разстояніи отъ концовъ другой.

4. Если углы  $ABC$  и  $ACB$  при основаніи равнобедреннаго треугольника дѣлятся прямыми  $BD$  и  $CD$  пополамъ, то треугольникъ  $DBC$  будетъ равнобедренный.

5. Если въ равнобедренномъ треугольникѣ  $BAC$ , каждый изъ угловъ при основаніи вдвое больше третьяго угла  $A$ , то прямая  $BD$ , равнодѣлящая уголъ  $B$ , встрѣчаетъ сторону  $AC$  въ точкѣ  $D$ , такъ что  $BD=AD$ .

6. Если въ пред. 5, кн. 1, прямыя  $FC$  и  $BG$  встрѣчаются въ точкѣ  $H$ , то  $FH=GH$ .

7. Если въ пред. 5, кн. 1, прямыя  $FC$  и  $BG$  встрѣчаются въ точкѣ  $H$ , то прямая  $AH$  дѣлитъ уголъ  $BAC$  пополамъ.

8. Если стороны  $AB$  и  $AD$  четырехугольника  $ABCD$  равны, и діагональ  $AC$  дѣлитъ уголъ  $BAD$  пополамъ, то стороны  $CB$  и  $CD$  будутъ также равны и діагональ  $AC$  будетъ дѣлить уголъ  $BCD$  пополамъ.

9. Два треугольника  $ACB$  и  $ADB$  построены на одномъ основаніи  $AB$  и при томъ такъ, что  $AC=BD$  и  $AD=BC$ , а  $AD$  и  $BC$  пересѣкаются въ точкѣ  $O$ , показать, что треугольникъ  $AOB$  будетъ равнобедренный.

10. Противоположные углы въ ромбѣ равны.

11. Діагонали ромба дѣлятъ углы его пополамъ.

12. Если два равнобедренные треугольника построены на одномъ основаніи, то прямая, проходящая чрезъ ихъ вершины, пересѣкаетъ основаніе подъ прямымъ угломъ.

13. На данной прямой найти точку, которая бы находилась въ равномъ разстояніи отъ двухъ данныхъ точекъ?

14. Чрезъ данныя двѣ точки, лежащія съ противоположныхъ сторонъ данной прямой, провести двѣ прямыя, которыя бы пересѣкаясь на данной прямой, составляли уголъ, равнодѣлящая котораго есть данная прямая?

15. Если каждый из двух смежных углов разделить пополам, то равнодѣлящія будутъ перпендикулярны между собою.

16. Если четыре прямыя, пересѣкаясь въ одной точкѣ, образуютъ равные противоположные углы, то онѣ попарно составляютъ двѣ прямыя.

Отъ 16 до 26.

17. Въ треугольникѣ  $ABC$  уголъ  $A$  раздѣленъ пополамъ и равнодѣлящая встрѣчаетъ сторону  $BC$  въ точкѣ  $D$ , показать, что  $BA > BD$ , а  $CA > CD$ .

18. Въ пред. 17, кн. 1, соединяя точку  $A$  съ какою нибудь точкою прямой  $BC$ , показать, что  $\angle ABC + \angle ACB < 2d$ .

19. Въ четырехугольникѣ  $ABCD$  сторона  $AD$  наибольшая, а  $BC$  наименьшая, показать, что  $\angle ABC > \angle ADC$  и  $\angle BCD > \angle BAD$ .

20. Если чрезъ вершину  $A$  одного изъ угловъ квадрата проведемъ прямую, которая встрѣчаетъ одну изъ противоположныхъ сторонъ, а будучи продолжена встрѣчаетъ другую въ точкѣ  $F$ , то прямая  $AF$  больше діагонали квадрата.

21. Перпендикуляръ есть кратчайшая прямая, которая можетъ быть проведена между данною точкою и данною прямою. Изъ остальныхъ прямыхъ та, которая ближе къ перпендикуляру будетъ меньше той, которая дальше отъ перпендикуляра, и только двѣ равныя прямыя могутъ быть проведены чрезъ данную точку къ данной прямой одна съ одной стороны перпендикуляра, а другая съ другою.

22. Сумма разстояній какой нибудь точки отъ вершинъ угловъ треугольника больше половины суммы сторонъ треугольника.

23. Сумма всѣхъ сторонъ четырехугольника больше суммы его діагоналей.

24. Сумма двухъ сторонъ треугольника больше дважды взятой прямой, соединяющей вершину треугольника съ серединою его основанія.

25. Если сумма двухъ угловъ въ треугольникѣ равна третьему углу, то треугольникъ можетъ быть раздѣленъ на два равнобедренные треугольника.

26. Если въ треугольникѣ уголъ  $C$  равенъ суммѣ угловъ  $A$  и  $B$ , то сторона  $AB$  будетъ равна дважды взятой прямой, соединяющей вершину  $C$  съ серединою  $AB$ .

27. По данной сторонѣ, углу прилежащему ей и суммѣ остальныхъ сторонъ построить треугольникъ?

28. Перпендикуляры опущенные изъ какой нибудь точки прямой, равнодѣлящей уголъ, на стороны этого угла, равны.

29. На данной прямой найти точку, изъ которой, опущенные перпендикуляры на двѣ другія данныя прямыя, были бы равны?

30. Чрезъ данную точку провести прямую такъ, чтобы перпендикуляры, опущенные изъ двухъ данныхъ точекъ, на прямую съ противоположныхъ ея сторонъ, были равны?

31. Въ треугольникѣ  $ABC$  проведена прямая, равнодѣлящая уголъ  $A$ ; изъ точки  $B$  опущенъ перпендикуляръ на равнодѣлящую и встрѣчаетъ ее въ точкѣ  $D$ , прямая  $BD$  встрѣчаетъ сторону  $AC$  или ея продолженіе въ точкѣ  $E$ , показать что  $BD = DE$ .

32. Чрезъ данную точку  $P$  провести прямую, которая бы, встрѣчала въ точкахъ  $E$  и  $F$  стороны даннаго угла  $BAC$ , такъ чтобы  $AE = AF$ ?

33. Показать что два прямоугольные треугольника, имѣющіе равные гипотенузы и по одному равному катету, равны.

Отъ 27 до 31.

34. Всякая прямая параллельная основанію равнобедреннаго треугольника составляетъ съ его сторонами равные углы.

35. Если двѣ прямыя  $A$  и  $B$  параллельны другимъ двумъ прямымъ  $C$  и  $D$ , каждая каждой, то уголъ составляемый прямыми  $A$  и  $B$  равенъ углу составляемому прямыми  $C$  и  $D$ .

36. Двѣ параллельныя прямыя пересѣчены третьей, чрезъ середину отръзка третьей, заключеннаго между параллельными, проведена какая нибудь прямая, показать, что она въ этой точкѣ дѣлится пополамъ.

37. Если чрезъ точку равноотстоящую отъ двухъ параллельныхъ прямыхъ, проведемъ двѣ, какія нибудь прямыя, то онѣ отсѣкаютъ отъ параллельныхъ прямыхъ равные отръзки.

38. Если равнодѣлящая внѣшній уголъ треугольника параллельна основанію, то треугольникъ будетъ равнобедренный.

39. На данной прямой  $CD$  найти такую точку  $B$ , которую если соединимъ съ данною точкою  $A$ , то уголъ  $ABC$  между данною прямою  $CD$  и  $AB$  былъ бы равенъ данному углу?

40. Если въ треугольникѣ проведемъ равнодѣлящую одинъ изъ угловъ и чрезъ точку встрѣчи ея съ противоположной стороною проведемъ параллельныя остальнымъ сторонамъ, то отръзки этихъ прямыхъ, заключенныя между точкою ихъ пересѣченія и сторонами треугольника, будутъ равны.

41. Сторона  $BC$  треугольника  $ABC$  продолжена до какой нибудь точки  $D$ , уголъ  $ACB$  раздѣленъ пополамъ прямою, которая встрѣчаетъ сторону  $AB$  въ точкѣ  $E$ . Чрезъ точку  $E$  проведена прямая параллельно сторонѣ  $BC$  и встрѣчаетъ сторону  $AC$  въ точкѣ  $F$ , а равнодѣлящую внѣшній уголъ  $ACD$  въ точкѣ  $G$ . Показать, что  $EF=FG$ .

42. На гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника  $ABC$  найти такую точку  $D$  чтобы прямая  $DB$  была равна перпендикуляру опущенному изъ  $D$  на  $AC$ ?

43. Найти въ равнобедренномъ треугольникѣ  $ABC$  на равныхъ сторонахъ  $AB$  и  $AC$ , такія точки  $D$  и  $E$ , чтобы  $BD=DE=EC$ ?

44. Въ равнобедренномъ треугольникѣ  $ABC$  проведена, какая нибудь прямая перпендикулярно къ его основанію  $BC$ , эта прямая встрѣчаетъ сторону  $AB$  въ точкѣ  $D$ , и продолженіе стороны  $AC$  въ точкѣ  $E$ , показать, что треугольникъ  $AED$  равнобедренный.

На 32.

45. Изъ вершинъ угловъ при основаніи равнобедреннаго треугольника опущенны перпендикуляры на противолежащія стороны, показать, что углы составляемые ими съ основаніемъ равны каждый, половинѣ угла противолежащаго основанію.

46. На сторонахъ какого нибудь треугольника  $ABC$  построены равносторонніе треугольники  $BCD$ ,  $CAE$ ,  $ABF$  всѣ внѣшніе, показать, что прямыя  $AD$ ,  $BE$  и  $CF$  равны.

47. Найти величину угловъ правильнаго восьмиугольника?

48. Чрезъ двѣ данныя точки провести двѣ прямыя такъ, чтобы онѣ съ данною прямою образовали равносторонній треугольникъ?

49. Равнодѣлящіе углы при основаніи въ равнобедренномъ треугольникѣ встрѣчаются подъ угломъ равнымъ внѣшнему углу треугольника при основаніи.

50. Если одна изъ равныхъ сторонъ  $AB$  въ равнобедренномъ треугольникѣ  $ABC$  продолжена до точки  $D$  такъ, что  $AD=AB$  и проведена прямая  $CD$ , показать что  $\angle BCD=d$ .



51. Въ треугольнике  $ABC$  внѣшніе углы  $B$  и  $C$  раздѣлены пополамъ прямыми  $BD$  и  $CD$ , пересѣкающимися въ точкѣ  $D$ , показать, что  $\angle BDC + \frac{1}{2} \angle BAC = d$ .

52. Показать, что, какойнибудь уголъ въ треугольникѣ будетъ тупой, прямой или острый, смотря потому будетъ ли онъ больше, равенъ или меньше суммы остальныхъ двухъ угловъ.

53. Построить равнобедренный треугольникъ, коего уголъ, противолежащій основанію, былъ бы равенъ четырежды взятому углу при основаніи?

54. Въ треугольникѣ  $ABC$  сторона  $BC$  раздѣлена пополамъ въ точкѣ  $E$ , и сторона  $AB$  въ точкѣ  $G$ ;  $AE$  продолжена до точки  $F$  такъ, что  $EF = AE$  и  $CG$  продолжена до точки  $H$  такъ что  $CG = GH$ , показать, что  $FB$  и  $HB$  составляютъ одну прямую линію.

55. Построить равнобедренный треугольникъ, въ которомъ одна треть каждаго изъ угловъ при основаніи была равна половинѣ угла въ его вершинѣ?

56. На данныхъ прямыхъ  $AB$  и  $AC$  найти двѣ такія точки  $P$  и  $Q$ , чтобы сумма  $AP + PQ$  была равна данной прямой и чтобы уголъ  $APQ$  былъ равенъ данному углу?

57. Черезъ вершины угловъ при основаніи равнобедреннаго треугольника, проведены двѣ прямая, составляющія, каждая, съ основаніемъ углы равные одной трети каждаго угла при основаніи съ противоположной стороны вершины и продолжены эти прямая до встрѣчи съ продолженіями сторонъ, показать, что три, образованные такимъ образомъ треугольника, всѣ равнобедренны.

58. Проведены двѣ прямая  $AEB$  и  $CED$ , пересѣкающіяся въ точкѣ  $E$ ; проведены прямая  $AC$  и  $DB$ , образующія два треугольника  $ACE$  и  $BED$ , углы  $ACE$  и  $DBE$  раздѣлены прямыми  $CF$  и  $BF$ , встрѣчающимися въ точкѣ  $F$ , пополамъ, показать что  $\angle CFB = \frac{1}{2} (\angle EAC + \angle EDB)$ .

59. Прямая соединяющая вершину прямого угла съ серединой гипотенузы равна половинѣ гипотенузы.

60. Изъ вершины угла  $A$  треугольника  $ABC$  опущенъ перпендикуляръ на противоположную сторону или на ея продолженіе и встрѣчаетъ ее въ точкѣ  $D$ , изъ вершины угла  $B$  точно также опущенъ перпендикуляръ на противоположную сторону или на ея продолженіе и встрѣчаетъ ее въ точкѣ  $E$ , показать что прямая, соединяющія точки  $D$  и  $E$  съ серединою стороны  $AB$ , равны.

61. Изъ вершинъ угловъ при основаніи въ треугольникѣ опущены перпендикуляры на противоположныя стороны, продолженныя если необходимо; показать что прямая, соединяющая точки пересѣченія, дѣлится пополамъ перпендикуляромъ опущеннымъ на нее изъ середины основанія.

62. Если въ пред. 1, кн. 1, точки  $C$  и  $H$  будутъ пересѣченія круговъ, если продолжимъ  $AB$  до встрѣчи съ кругомъ въ точкѣ  $K$ , то треугольникъ  $CHK$  будетъ равно-сторонній.

63. Равнодѣлящія углы при основаніи равнобедреннаго треугольника встрѣчаютъ стороны въ точкахъ  $D$  и  $E$ , показать что прямая  $DE$  параллельна основанію.

64. Даны двѣ прямая  $AB$  и  $AC$ , на первой изъ нихъ дана точка  $P$ , требуется черезъ точку  $P$  провести прямую, которая бы встрѣчала  $AC$  въ точкѣ  $Q$ , такъ чтобы  $\angle APQ = 3 \angle AQP$ ?

65. По данной гипотенузѣ и суммѣ катетовъ построить прямоугольный треугольникъ?

66. По данной гипотенузѣ и разности катетовъ построить прямоугольный треугольникъ?

67. По данной гипотенузѣ и перпендикуляру, опущенному изъ вершины прямого угла на гипотенузу построить прямоугольный треугольникъ?



68. По данному периметру и одному углу построить прямоугольный треугольник?
69. Разделить на три равныя части прямой угол?
70. Разделить на три равныя части данную прямую?
71. Изъ данной точки  $A$  провести двѣ перпендикулярныя прямыя, которыя бы, встрѣчали данныя параллельныя прямыя,  $BC$  въ точкѣ  $P$ , а  $DE$  въ точкѣ  $Q$ , такъ чтобы  $AP=AQ$ ?
72. Построить треугольникъ, котораго бы периметръ былъ данъ и котораго бы углы были равны угламъ даннаго треугольника?

Отъ 33 до 34.

73. Если въ четырехъугольникѣ двѣ противоположныя стороны параллельны, и другія двѣ равны, но не параллельны, то сумма двухъ какихъ нибудь, изъ его противоположныхъ угловъ, равна двумъ прямымъ.
74. Если прямая линія соединяя концы двухъ равныхъ, но не параллельныхъ линій, составляетъ съ каждою изъ нихъ равные углы съ одной ея стороны, то другая прямая, соединяющая другіе концы равныхъ прямыхъ, будетъ параллельна первой.
75. Показать что невозможно провести чрезъ вершины угловъ при основаніи въ треугольникѣ, прямая до встрѣчи съ противоположными сторонами, которыя бы взаимно дѣлились пополамъ.
76. Если противоположныя стороны въ четырехъугольникѣ равны, то онъ есть параллелограмъ.
77. Если противоположные углы въ четырехъугольникѣ равны, то онъ есть параллелограмъ,
78. Діагонали параллелограма взаимно дѣлятся пополамъ.
79. Если діагонали въ четырехъугольникѣ взаимно дѣлятся пополамъ, то онъ есть параллелограмъ.
80. Если прямая, соединяющая противоположные углы параллелограма дѣлитъ эти углы пополамъ, то всѣ стороны въ параллелограмѣ равны.
81. Чрезъ данную точку провести такъ прямую, чтобы отрѣзокъ ея заключенный между двумя параллельными линіями былъ данной величины?
82. Прямая, равнодѣлящая углы при какой нибудь изъ сторонъ параллелограма, перпендикулярна.
83. Прямая, равнодѣлящая противоположные углы параллелограма или параллельна или совпадаютъ.
84. Если въ параллелограмѣ діагонали равны, то и всѣ его углы равны.
85. Найти такую точку, чтобы перпендикуляры опущенные изъ нея на двѣ данныя прямыя были равны двумъ даннымъ прямымъ? Сколько есть такихъ точекъ?
86. Провести прямую, которая бы была равна данной прямой, параллельна другой прямой и заключалась между двумя данными прямыми?
87. На сторонахъ  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  параллелограма  $ABCD$  построены равносторонніе треугольники, такъ что вершины треугольниковъ, построенныхъ на  $AB$  и  $CD$  лежатъ внѣ параллелограма, а треугольника построеннаго на  $BC$ , внутри параллелограма, показать что разстояніе вершинъ перваго и третьяго отъ втораго равны діагоналямъ параллелограма.
88. Если уголъ въ параллелограмѣ будетъ увеличиваться, а величина сторонъ оста-

ваться безъ измѣненія, то діагональ параллелограмма, проходящая чрезъ вершину увеличивающагося угла будетъ уменьшаться.

89. Три точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  лежатъ на одной прямой линіи и при томъ такъ, что  $AB=BC$ , показать, что сумма перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точекъ  $A$  и  $C$ , на какую нибудь прямую, не проходящую между точками  $A$  и  $C$ , будетъ равна удвоенному перпендикуляру, опущенному изъ точки  $B$  на ту же прямую.

90. Если изъ вершинъ угловъ параллелограмма опустимъ перпендикуляры на какую нибудь прямую, проходящую внѣ параллелограмма, то сумма перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ двухъ противоположныхъ угловъ будетъ равна суммѣ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ остальныхъ двухъ противоположныхъ угловъ.

91. Если въ шестисторонней фигурѣ противоположныя стороны равны и параллельны, то три прямая, соединяющія вершины противоположныхъ угловъ, будутъ пересѣкаться въ одной точкѣ.

92. Между двумя данными прямыми  $AB$  и  $AC$  дана точка  $E$ , требуется провести чрезъ эту точку такъ прямую, чтобы ея отрѣзокъ, заключенный между прямыми  $AB$  и  $AC$  въ точкѣ  $E$  дѣлился пополамъ?

93. Въ данный ромбъ вписать другой ромбъ, такъ чтобы одна изъ вершинъ угловъ вписаннаго ромба дѣлила сторону ромба пополамъ?

94. Стороны  $AB$  и  $CD$  параллелограмма  $ABCD$  въ точкахъ  $E$  и  $F$  раздѣлены пополамъ, показать, что прямая  $BE$  и  $BF$  дѣлятъ діагональ  $AC$  на три равныя части.

Отъ 35 до 45.

95. Въ четырехугольникѣ  $ABCD$  стороны  $BC$  и  $AD$  параллельны, показать, что если чрезъ средину стороны  $DC$  проведемъ прямую параллельно сторонѣ  $AB$ , то образуется параллелограмъ, коего площадь будетъ равна площади данной фигуры  $ABCD$ .

96. Въ четырехугольникѣ  $ABCD$  сторона  $BC \parallel AD$ , точка  $E$  есть середина стороны  $DC$ , показать, что треугольникъ  $AEB$  равенъ половинѣ четырехугольника  $ABCD$ .

97. Показать что всякая прямая, проходящая чрезъ точку пересѣченія діагоналей, дѣлится этой точкой и сторонами параллелограмма пополамъ.

98. Чрезъ данную внутри параллелограмма точку провести прямую такъ, чтобы она раздѣлила параллелограмъ пополамъ?

99. Построить ромбъ равный данному параллелограму?

100. Если два треугольника имѣютъ по двѣ равныя стороны, каждая каждой, и если сумма угловъ, заключенныхъ между равными сторонами треугольниковъ, равна  $2d$ , то площади треугольниковъ равны.

101. Прямая, встрѣчающая стороны  $AD$  и  $BC$  въ точкахъ  $E$  и  $F$ , параллелограмма  $ABCD$ , дѣлитъ его пополамъ, показать, что треугольники  $EBF$  и  $CED$  равны.

102. Показать, что четыре треугольника, на которые дѣлится параллелограмъ его діагоналями, равномѣрны.

103. Двѣ прямая  $AB$  и  $CD$  пересѣкаются въ точкѣ  $E$ ,  $\triangle AEC = \triangle BED$ , показать что  $BC \parallel AD$ ?

104. Въ параллелограмѣ  $ABCD$  чрезъ точку  $P$  на діагонали  $BT$  проведены прямая  $PA$  и  $PC$ , показать что  $\triangle PAB = \triangle PCB$ ?

105. Если построимъ треугольникъ, имѣющій двѣ стороны равныя діагоналямъ, какого нибудь, четырехугольника, и уголъ, заключенный между этими сторонами, равенъ одному изъ угловъ между діагоналями, то площадь построеннаго треугольника будетъ равна площади четырехугольника.

106. Прямая, соединяющая середины двухъ сторонъ, какого нибудь, треугольника, параллельна третьей его сторонѣ.

107. Прямая, соединяющая середины смежныхъ сторонъ, какого нибудь четырехугольника, образуютъ параллелограмъ.

108. Точки  $D$  и  $E$  суть середины сторонъ  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$ , прямая  $CD$  и  $BE$  пересекаются въ точкѣ  $F$ , показать, что треугольникъ  $BFC$  равенъ четырехугольнику  $ADFE$ .

109. Прямая, дѣлящая двѣ какія нибудь стороны треугольника, равна половинѣ третьей стороны.

110. На основаніи  $AC$  треугольника  $ABC$  взята, какая нибудь, точка  $D$ ;  $AD$ ,  $DC$ ,  $AB$ ,  $BC$  въ точкахъ  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  раздѣлены пополамъ, показать, что  $EG$  равна и параллельна  $FH$ .

111. Даны середины сторонъ треугольника, построить треугольникъ?

112. Если соединимъ середины двухъ сторонъ, какого нибудь треугольника, то отдѣленный треугольникъ будетъ равенъ четверти цѣлаго.

113. Стороны  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  въ точкахъ  $E$  и  $F$  раздѣлены пополамъ; изъ вершины  $A$  опущенъ перпендикуляръ на сторону  $BC$  и встрѣчаетъ ее въ точкѣ  $D$ , показать что  $\angle FDE = \angle BAC$  и что четырехугольникъ  $AFDE$  равенъ половинѣ треугольника  $ABC$ .

114. Два равномѣрные треугольника построены на одномъ основаніи съ противоположныхъ сторонъ, показать, что основаніе или его продолженіе дѣлитъ пополамъ прямую, соединяющую вершины треугольниковъ.

115. Три совершенно равные параллелограмма помѣщены на одной прямой равными сторонами такъ что составляютъ одинъ параллелограмъ; концы основанія первого изъ нихъ соединены съ концами противоположной стороны третьяго, показать, что параллелограмъ образованный такимъ образомъ отдѣляетъ отъ втораго часть равную половинѣ каждаго изъ нихъ.

116.  $ABCD$  есть параллелограмъ; изъ точки  $D$  проведена, какая нибудь прямая  $DFG$ , встрѣчающая  $BC$  въ точкѣ  $F$ , а продолженіе  $AB$  въ точкѣ  $G$ ; проведены прямая  $AF$  и  $CG$ , показать, что  $\triangle ABF = \triangle CFG$ .

117. Данъ треугольникъ  $ABC$ , построить треугольникъ, котораго бы площадь была равна площади даннаго треугольника и котораго бы основаніемъ была данная прямая  $AD$ , совпадающая съ  $AB$ ?

118. Данъ треугольникъ  $ABC$ , построить треугольникъ, котораго бы площадь была равна площади даннаго треугольника, и который бы имѣлъ вершину въ данной точкѣ на прямой  $BC$ , и основаніе на сторонѣ  $AB$ ?

119. Данъ четырехугольникъ  $ABCD$ , построить другой равный по площади съ даннымъ, имѣющій  $AB$  одной стороной, а другою стороной была бы прямая, проведенная чрезъ данную точку на  $CD$ , параллельно  $AB$ ?

120. Данъ четырехугольникъ  $ABCD$ , построить треугольникъ, котораго бы основаніе было на прямой  $AB$ , вершина въ данной точкѣ  $P$  на  $CD$  и котораго бы площадь была равна площади даннаго четырехугольника?

121. Данъ треугольникъ  $ABC$ , построить треугольникъ, коего бы площадь была равна площади даннаго треугольника, коего основаніе было на прямой  $AB$ , а вершина въ данной точкѣ прямой параллельной  $AB$ ?

122. Данный треугольникъ раздѣлить пополамъ прямою проведенною чрезъ данную точку на одной изъ сторонъ?



123. Раздѣлить пополамъ, данный четырехугольникъ, прямою проходящею чрезъ данную вершину угла четырехугольника?

124. Если чрезъ точку  $O$ , находящуюся внутри параллелограмма  $ABCD$  проведены двѣ прямыя параллельно сторонамъ, и если параллелограммы  $OB$  и  $OD$  равны, то точка  $O$  находится на діагонали  $AC$ .

Отъ 46 до 48.

125. На сторонахъ  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  построены квадраты  $ACDE$  и  $BCFH$ , показать, что прямая  $AF$  и  $BD$  равны.

126. Квадратъ построенный на сторонѣ треугольника, противолежащей острому углу, меньше суммы квадратовъ построенныхъ на сторонахъ составляющихъ острый уголъ.

127. Квадратъ, построенный на сторонѣ треугольника, противолежащей тупому углу, больше суммы квадратовъ построенныхъ на сторонахъ, составляющихъ тупой уголъ.

128. Если квадратъ, построенный на сторонѣ треугольника меньше суммы квадратовъ построенныхъ на остальныхъ сторонахъ, то уголъ, составленный этими сторонами будетъ острый; а если больше, то тупой.

129. Въ прямоугольномъ треугольникѣ проведена прямая параллельно гипотенузѣ, точки пересѣченія этой прямой съ катетами соединены съ вершинами, противолежащихъ угловъ, показать, что сумма квадратовъ, построенныхъ на этихъ прямыхъ, равна суммѣ квадратовъ построенныхъ на гипотенузѣ и на проведенной прямой параллельно гипотенузѣ.

130. Если, какую нибудь точку  $P$  соединимъ съ вершинами  $A, B, C, D$  прямоугольника, то сумма квадратовъ, построенныхъ на  $PA$  и  $PC$  равна суммѣ квадратовъ, построенныхъ на  $PB$  и  $PD$ .

131. Если въ прямоугольномъ треугольникѣ квадратъ построенный на одномъ изъ катетовъ равенъ трижды взятому квадрату построенному на другомъ катетѣ, и если изъ вершины прямого угла проведены двѣ прямыя одна къ срединѣ гипотенузы, а другая перпендикулярно гипотенузѣ, то эти прямыя дѣлятъ прямой уголъ на три равныя части.

132. Если въ треугольникѣ уголъ  $A$  прямой, а прямыя  $BE$  и  $CF$  соединяютъ вершины  $B$  и  $C$  съ серединами  $E$  и  $F$  катетовъ, то четыре раза взятая сумма квадратовъ построенныхъ на  $BE$  и  $CF$  равна пять разъ взятому квадрату построенному на  $BC$ .

133. На гипотенузѣ  $BC$  и катетахъ  $CA$  и  $AB$  построены квадраты  $BDEC$ ,  $AF$  и  $AG$ , показать, что сумма квадратовъ построенныхъ на  $DG$  и  $EF$  равна пять разъ взятому квадрату, построенному на гипотенузѣ  $BC$ .

#### Смѣшанныя задачи и теоремы на всѣ предложенія I-й книги.

134. Внутри треугольника  $ABC$  взята точка  $P$ , показать, что:

$$AP + BP + CP < AB + BC + CA$$

135. Изъ центровъ  $A$  и  $B$  двухъ круговъ проведены параллельные радіусы  $AP$  и  $BQ$ ; прямая  $PQ$  встрѣчаетъ круги еще въ точкахъ  $R$  и  $S$ , показать, что  $AR \parallel BS$ .

136. Если возьмемъ внутри параллелограмма, какую нибудь точку и соединимъ ее съ концами противоположныхъ сторонъ, то полученные, такимъ образомъ, треугольники будутъ составлять половину параллелограмма.

137. Если четырехугольникъ одною діагональю дѣлится пополамъ, то вторая діагональ дѣлится первою пополамъ.

138. Четырехугольникъ, который обѣими діагоналями дѣлится пополамъ, есть параллелограмъ.



139. Если въ 5 пред. 1 кн. равныя стороны треугольника продолжить въ вершинѣ, а не ниже основанія, то 15 пред. 1 кн. можно доказать, основываясь на предложеніяхъ не дальше 5-го.

140. Дана точка  $A$  внѣ данной прямой и точка  $B$  на прямой, найти третью точку  $P$  на прямой, такую, чтобы сумма  $AP+PB$  была данной длины?

141. Если изъ какойнибудь точки на сторонѣ равнобедреннаго треугольника проведемъ прямую, которая бы, встрѣчая продолженіе другой равной стороны, дѣлилась основаніемъ пополамъ, то сумма прямыхъ, заключенныхъ между вершиною и точками встрѣчи, проведенной прямой, съ равными сторонами треугольника, равна суммѣ обѣихъ равныхъ сторонъ.

142. Изъ всѣхъ параллелограмовъ, которые можно составить изъ діагоналей данной длины наибольшій есть ромбъ.

143. Показать на основаніи предложеній 18 и 32, кн. 1, что, если гипотенузу  $BC$  прямоугольнаго треугольника  $ABC$  въ точкѣ  $D$  раздѣлимъ пополамъ, то  $AD=BD=CD$ .

144. Если двѣ равныя прямыя пересѣкаются подъ прямымъ угломъ, то четырехугольникъ, составленный, соединяя ихъ концы, равенъ половинѣ квадрата, построеннаго на одной изъ этихъ прямыхъ.

145. Вписать въ треугольникъ параллелограмъ такъ, чтобы его діагонали пересѣкались въ данной точкѣ внутри треугольника?

146. Построить треугольникъ по данному основанію, разности сторонъ и разности угловъ при основаніи?

147.  $AB$  и  $AC$  суть двѣ данныя прямыя линіи, требуется на  $AD$  найти такую точку  $P$ , что если опустимъ перпендикуляръ  $PQ$  на  $AC$ , то чтобы сумма  $AP+AQ$  была равна данной прямой линіи.

148. Разстояніе вершины треугольника отъ середины основанія, равна, больше или меньше половины основанія; смотря потому будетъ ли въ треугольникѣ въ вершинѣ уголъ прямой, острый или тупой.

149. Если на сторонахъ квадрата возьмемъ точки всѣ въ равномъ разстояніи отъ вершинъ угловъ и соединимъ эти точки прямыми, то полученный четырехугольникъ будетъ также квадратъ.

150. На данной прямой, какъ на основаніи, построить треугольникъ по данной разности сторонъ и точкѣ чрезъ которую должна проходить одна изъ сторонъ?

151. Въ треугольникѣ  $ABC$ ,  $AB>AC$ , уголъ  $A$  раздѣленъ пополамъ прямою, которая встрѣчаетъ  $BC$  въ точкѣ  $D$ , показать, что  $BD>CD$ ?

152. Если въ треугольникѣ одинъ изъ угловъ равенъ утроенному другому углу, то треугольникъ можно раздѣлить на два равнобедренные треугольника.

153. Въ равнобедренномъ треугольникѣ  $ABC$  одна изъ равныхъ сторонъ, напри-  
мѣръ  $AB$ , въ точкѣ  $D$  раздѣлена пополамъ и продолжена ниже основанія до точки  $E$  такъ, что  $AB=BE$ , точки  $D$  и  $E$  соединены съ точкою  $C$  прямыми  $EC$  и  $ED$ , показать, что  $EC=2ED$ .

154. Найти геометрическое мѣсто точки, которой бы разстояніе отъ одной данной точки было равно двойному ея разстоянію отъ другой данной точки?

155. Прямая  $AB$  въ точкѣ  $C$  раздѣлена пополамъ, на  $AC$  и  $CB$  какъ на діагоналяхъ построены параллелограмы  $ADCE$  и  $CFBG$ , на смежныхъ сторонахъ  $CD$  и  $CF$ ,  $CE$  и  $CG$  построены параллелограмы  $CDLF$  и  $CGME$ , показать что діагонали  $LC$  и  $CM$  этихъ послѣднихъ параллелограмовъ составляютъ одну прямую линію.

156.  $ABCD$  есть прямоугольникъ, коего углы  $A$  и  $C$  суть противоположные,  $E$  ка-

кая нибудь точка на сторонѣ  $BC$ ,  $F$  также какая нибудь точка на сторонѣ  $CD$ , показать, что дважды взятая площадь треугольника  $AEF$  вмѣстѣ съ прямоугольникомъ  $BE.DF$  составляетъ площадь всего прямоугольника  $ABCD$ .

157. Два треугольника  $ABC$  и  $DBC$  построены на одномъ основаніи  $BC$ , сторона  $AB=AC$ , кругъ, проходящій чрезъ точки  $C$  и  $D$ , имѣетъ центръ  $E$  на  $AC$  или на ея продолженіи; кругъ, проходящій чрезъ точки  $B$  и  $D$ , имѣетъ центръ  $F$  на  $BA$  или на ея продолженіи, показать, что въ четырехугольникѣ  $AEDF$  сумма двухъ его сторонъ равна суммѣ другихъ двухъ сторонъ.

158. Даны двѣ прямыя  $AB$  и  $AC$ , требуется найти на  $AB$  такую точку  $P$ , чтобы перпендикуляръ, опущенный изъ нея на  $AC$  былъ меньше прямой  $AP$  на данную длину.

159. Показать, что противоположныя стороны равноугольнаго шестиугольника параллельны и что сумма двухъ какихъ нибудь смежныхъ сторонъ, равна суммѣ сторонъ, которымъ эти послѣднія параллельны?

160. На сторонѣ  $BC$ , какъ на гипотенузѣ, квадрата  $BDEC$ , построимъ, какой нибудь, прямоугольный треугольникъ  $ABC$ , изъ вершинъ  $D$  и  $E$  квадрата опущены на  $AC$  и  $AB$  перпендикуляры  $DM$  и  $EN$ , показать, что  $AM=AB$  и  $AN=AC$ .

161. Даны двѣ прямыя  $AB$  и  $AC$  и дана точка  $P$ , требуется чрезъ точку  $P$  провести прямую такъ, чтобы треугольникъ, составленный ею съ прямыми  $AB$  и  $AC$  былъ наименьшій?

162. Въ треугольникѣ уголъ  $C$  прямой; требуется провести прямую, параллельно данной прямой, такъ, чтобы части ея заключенныя между сторонами прямого угла  $C$  и гипотенузою  $AB$  были равны?

163. Въ равнобедренномъ треугольникѣ  $ABC$  уголъ при вершинѣ  $B$  равенъ четырежды взятому углу при основаніи, сторона  $AB$  продолжена до точки  $D$  такъ, что  $BD=2AB$ , точка  $D$  соединена съ точкою  $C$ , показать, что треугольники  $ACD$  и  $ABC$  равноугольны.

164. Чрезъ точку  $K$  внутри параллелограмма  $ABCD$  проведены прямыя параллельно сторонамъ, показать, что разность параллелограммовъ, коихъ  $KA$  и  $KC$  суть діагонали, равна дважды взятому треугольнику  $BKD$ .

165. Построить прямоугольникъ, по данному катету и разности между гипотенузою и другимъ катетомъ?

166. Въ треугольникѣ  $ABC$  проведены прямыя  $AD$  и  $BE$ , дѣлящія стороны  $BC$  и  $AC$  въ точкахъ  $D$  и  $E$  пополамъ, эти прямыя пересѣкаются въ точкѣ  $G$ , показать, что  $AG=2DG$ .

167. Въ прямоугольномъ треугольникѣ  $BAC$  прямой уголъ раздѣленъ прямою  $AE$  пополамъ, изъ середины  $D$  гипотенузы  $BC$  возставленъ перпендикуляръ, который встрѣчается съ равнодѣлящею  $AE$  въ точкѣ  $E$ , показать что  $AD=DE$ .

168. На діагонали  $AC$  квадрата  $ABCD$  построимъ ромбъ  $AEEC$ , коего площадь равна площади квадрата, и коего вершина острого угла находится въ точкѣ  $A$ , показать, что если проведемъ  $AF$ , то уголъ  $BAC$  раздѣлится на три равныя части.

169. Даны двѣ перпендикулярныя прямыя  $AB$  и  $AC$ ,  $D$  какая нибудь точка на прямой  $AB$ ,  $E$  какая нибудь точка на  $AC$ , на  $DE$ , какъ на діагонали, построимъ половину квадрата, коего вершина есть  $G$ , показать, что геометрическое мѣсто точекъ, построенныхъ подобно точкѣ  $G$ , есть равнодѣлящая уголъ  $BAC$ .

170. Показать, что площадь квадрата есть наибольшая изъ всѣхъ параллелограммовъ, имѣющихъ одинъ периметръ.

171. Вписать, въ данный квадратъ, квадратъ данной величины?

172. Въ треугольникѣ  $ABC$ ,  $AD = \frac{1}{3} AB$  и  $AE = \frac{1}{3} AC$ ;  $CD$  и  $BE$  пересѣкаются въ точкѣ  $F$ , показать, что  $\triangle BFC = \frac{1}{2} \triangle BAC$  и что четырехугольникѣ  $ADEF = \triangle CFE = \triangle BDF$ .

173. Въ треугольникѣ  $ACB$  уголъ  $C$  прямой; уголъ  $A$  раздѣленъ пополамъ прямою, которая встрѣчаетъ  $BC$  въ точкѣ  $D$  и уголъ  $B$  раздѣленъ пополамъ прямою, которая встрѣчаетъ  $AC$  въ точкѣ  $E$ ;  $AD$  и  $BE$  пересѣкаются въ точкѣ  $O$ , показать, что треугольникъ  $AOB$  равенъ половинѣ четырехугольника  $ABDE$ .

174. Показать, что равносторонній треугольникъ не можетъ быть раздѣленъ прямою на такія двѣ части которыя бы совмѣщались.

175. Параллелограммы  $ABCD$  и  $ACED$  построены на равныхъ основаніяхъ  $BC$  и  $CE$  и между одними параллельными  $AD$  и  $BE$ , прямая  $BD$  и  $AE$  пересѣкаются въ точкѣ  $F$ , показать, что  $BF = 2DF$ .

176. На сторонахъ  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  построены параллелограммы  $AFGC$  и  $CBKH$ ;  $FG$  и  $KH$  пересѣкаются въ точкѣ  $L$ , которая соединена съ  $C$ , чрезъ  $A$  и  $B$  проведены прямая  $AD$  и  $BE$  параллельно  $CL$  и встрѣчаютъ  $FG$  и  $KH$  въ точкахъ  $D$  и  $E$ , показать, что  $ADEB$  есть параллелограмъ, который равенъ суммѣ параллелограмовъ  $FC$  и  $CK$ .

177. Если въ четырехугольникѣ двѣ стороны параллельны, то прямая, проведенная параллельно этимъ сторонамъ, чрезъ пересѣченіе діагоналей дѣлится въ этой точкѣ пополамъ.

178. Два треугольника построены на одномъ основаніи и между одними параллельными линіями, показать, что ихъ стороны отсѣкаютъ равныя части отъ всякой прямой, проведенной параллельно основанію.

179. Если въ прямоугольномъ треугольникѣ  $ABC$  уголъ  $A$  прямой, сторона  $AC = 2AB$ , то  $\angle B > 2\angle C$ .

180. Раздѣлить параллелограмъ прямыми, проходящими чрезъ одну изъ вершинъ его, на три равныя части?

181. Треугольникъ  $АНК$  есть разносторонній;  $ABCD$  ромбъ, коего сторона равна сторонѣ треугольника, а стороны  $BC$  и  $CD$  проходятъ чрезъ точки  $H$  и  $K$ , показать, что уголъ  $A$  ромба есть  $\frac{10}{9}d$ .

182. Чрезъ данную точку на сторонѣ треугольника провести двѣ прямая такъ, чтобы онѣ раздѣлили треугольникъ на три равныя части?

183. Если въ пред. 35, кн. 1, проведемъ по діагонали въ каждомъ параллелограмѣ изъ концевъ основанія, точку пересѣченія этихъ діагоналей соединимъ съ точкою пересѣченія сторонъ или ихъ продолженій, то проведенная прямая раздѣлитъ основаніе пополамъ.

184. Если на двухъ сторонахъ треугольника построимъ, какіе нибудь параллелограммы, то сумма ихъ площадей будетъ равна площади параллелограма, коего основаніе есть третья сторона, а другія стороны равны и параллельны прямой соединяющей вершину треугольника съ точкою пересѣченія сторонъ двухъ первыхъ параллелограмовъ.

## Книга II.

### Отъ 1 до 11.

185. Прямая линія раздѣлена на двѣ части, показать, что если дважды взятый прямоугольникъ построенный на частяхъ равенъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на тѣхъ же частяхъ, то прямая раздѣлена на двѣ равныя части.

186. Раздѣлить прямую на такія двѣ части, чтобы площадь прямоугольника, построеннаго на этихъ частяхъ была наибольшая?



187. Построить прямоугольник, коего бы площадь была равна разности площадей двух данных квадратов?

188. Разделить прямую на такіа двѣ части, чтобы сумма квадратов построенных на этихъ частяхъ была наименьшая?

189. Показать, что квадратъ построенный на суммѣ двухъ прямыхъ съ квадратомъ построеннымъ на разности тѣхъ же прямыхъ равенъ дважды взятой суммѣ квадратовъ построенныхъ на каждой прямой.

190. Разделить данную прямую на такіа двѣ части, чтобы сумма квадратовъ, построенныхъ на нихъ, была равна данному квадрату?

191. Разделить данную прямую на такіа двѣ части, чтобы квадратъ, построенный на одной изъ нихъ, былъ равенъ дважды взятому квадрату построенному на другой?

192. Если въ пред. 11, кн. 2,  $CH$  продолжить такъ, чтобы  $CH$  встрѣтила  $BF$  въ точкѣ  $L$ , то прямая  $CL$  и  $BF$  перпендикулярны.

193. Въ томъ же предложеніи, если прямая  $BE$  и  $CH$  встрѣчаются въ точкѣ  $O$ , то  $AO$  и  $CL$  перпендикулярны.

194. Показать, что если прямая разделена на части, какъ въ пред. 11, кн. 2, то прямоугольникъ, построенный на суммѣ и разности частей, равенъ прямоугольнику построенному на частяхъ.

Отъ 12 до 14.

195. Квадратъ построенный на основаніи равнобедреннаго треугольника равенъ дважды взятому прямоугольнику построенному на одной изъ равныхъ сторонъ и на суммѣ той же стороны съ отрѣзкомъ заключеннымъ между вершиною угла противолежащаго основанію, и основаніемъ перпендикуляра опущеннаго изъ конца другой равной стороны на первую.

196. Во всякомъ треугольникѣ сумма квадратовъ, построенныхъ на двухъ сторонахъ равна дважды взятому квадрату построенному на половинѣ третьей стороны съ дважды взятымъ квадратомъ построеннымъ на прямой, соединяющей вершину противолежащую третьей сторонѣ съ серединою этой стороны.

197. Въ треугольникѣ  $ABC$  сторона  $AB=AC$ , если  $AB$  продолжимъ ниже основанія до точки  $D$ , такъ чтобы  $AB=BD$ , то квадратъ построенный на  $CD$  будетъ равенъ суммѣ квадрата на  $AB$  съ дважды взятымъ квадратомъ на  $BC$ .

198. Сумма квадратовъ построенныхъ на сторонахъ параллелограмма равна суммѣ квадратовъ построенныхъ на діагоналяхъ.

199. Данное основаніе треугольника дѣлится центромъ даннаго круга пополамъ, если вершина треугольника лежитъ на окружности, то сумма квадратовъ построенныхъ на сторонахъ треугольника будетъ величина постоянная.

200. Во всякомъ четырехугольникѣ сумма квадратовъ построенныхъ на діагоналяхъ равна дважды взятой суммѣ квадратовъ построенныхъ на прямыхъ соединяющихъ середины противоположныхъ сторонъ.

201. Если изъ точки пересѣченія діаметровъ параллелограмма, какъ изъ центра описать кругъ, то сумма квадратовъ построенныхъ на прямыхъ, соединяющихъ, какую нибудь точку окружности съ вершинами параллелограмма есть величина постоянная.

202. Сумма квадратовъ, построенныхъ на сторонахъ четырехугольника, больше суммы квадратовъ, построенныхъ на діагоналяхъ, на четырежды взятый квадратъ, построенный на прямой, соединяющей середины діагоналей.

203. На діаметръ  $AB$  круга взяты двѣ точки  $C$  и  $D$  равноотстоящія отъ центра,



изъ какой нибудь точки  $E$  окружности проведены прямая  $ED$  и  $EC$ , показать, что сумма квадратовъ на  $EC$  и  $ED$  равна суммѣ квадратовъ на  $AC$  и  $AD$ .

204. На основаніи  $BC$  треугольника ввѣта точка  $D$  такъ, что сумма квадратовъ на  $AB$  и  $BD$  равна суммѣ квадратовъ на  $AC$  и  $CD$ , показать, что середина прямой  $AD$  равно отстоитъ отъ  $B$  и  $C$ .

205. Квадратъ, построенный на какой нибудь прямой, соединяющей вершину равнобедреннаго треугольника съ основаніемъ, больше квадрата построеннаго на сторонѣ, на прямоугольникъ изъ отрѣзковъ основанія.

206. На гипотенузѣ  $BC$  прямоугольнаго треугольника  $ABC$  построенъ квадратъ  $BDEC$ , показать, что сумма квадратовъ на  $DA$  и  $AC$  равна суммѣ квадратовъ на  $EA$  и  $AB$ .

207. Въ треугольникѣ  $ABC$ , уголъ  $C$  прямой, изъ точки  $D$  на  $AC$  проведенъ перпендикуляръ  $DE$  къ  $AB$ , показать, что прямоугольникъ  $AB.AE=AC.AD$ .

208. Если чрезъ вершину одного изъ угловъ равносторонняго треугольника проведемъ прямую, которая бы пересѣкла продолженіе противоположной стороны и при томъ такъ, что прямоугольникъ, построенный на сторонѣ съ ея продолженіемъ и на продолженіи, былъ бы равенъ квадрату построенному на сторонѣ треугольника, то квадратъ, построенный на проведенной чрезъ вершину угла прямой, будетъ равенъ удвоенному квадрату построенному на сторонѣ треугольника.

209. Въ треугольникѣ  $ABC$ , углы  $B$  и  $C$  острые, если  $E$  и  $F$  суть точки въ которыхъ перпендикуляры, опущенные изъ противоположныхъ угловъ на стороны  $AC$  и  $AB$  ихъ пересѣкаютъ, то квадратъ на  $BC$  равенъ суммѣ прямоугольниковъ  $AB.BF$  и  $AC.CF$ .

210. Раздѣлить данную прямую на такія двѣ части, чтобы прямоугольникъ, построенный на нихъ былъ равенъ квадрату, построенному на данной прямой, которая меньше половины прямой, которую требуется раздѣлить?

#### Смѣшанныя задачи и теоремы на всѣ предложенія II-й книги.

211. Продолжить одну изъ сторонъ даннаго треугольника такъ, чтобы прямоугольникъ построенный на сторонѣ и ея продолженіи, былъ равенъ разности квадратовъ, построенныхъ на другихъ сторонахъ?

212. Продолжить данную прямую такъ, чтобы сумма квадратовъ на данной прямой и на ея продолженіи была равна дважды взятому прямоугольнику, построенному на прямой съ продолженіемъ и на продолженіи?

213. Продолжить данную прямую такъ, чтобы сумма квадратовъ, построенныхъ на данной прямой и на данной прямой съ продолженіемъ, была равна дважды взятому прямоугольнику, построенному на прямой съ продолженіемъ и на продолженіи?

214. Продолжить данную прямую такъ, чтобы прямоугольникъ, построенный на данной прямой съ продолженіемъ и на продолженіи, былъ равенъ квадрату построенному на данной прямой?

215. Построить равнобедренный тупоугольный треугольникъ такой, чтобы квадратъ, построенный на наибольшей сторонѣ, былъ равенъ трижды взятому квадрату, построенному на одной изъ равныхъ сторонъ?

216. Найти тупой уголъ треугольника, когда квадратъ, построенный на сторонѣ, противолѣжащей тупому углу больше суммы квадратовъ изъ сторонъ, заключающихъ тупой уголъ, на прямоугольникъ, построенный на сторонахъ?

217. Построить прямоугольникъ равный данному квадрату, когда сумма смежныхъ сторонъ прямоугольника данной величины.

218. Построить прямоугольникъ равный данному квадрату, когда разность смежныхъ сторонъ прямоугольника равна данной величинѣ?

219. Наименьшій квадратъ, вписанный въ данный квадратъ будетъ тотъ, который равенъ половинѣ даннаго квадрата?

220. Раздѣлить данную прямую на двѣ части такъ, чтобы сумма квадратовъ построенныхъ на цѣлой прямой и на отрѣзкѣ, была равна удвоенному квадрату на другомъ отрѣзкѣ?

221. Два прямоугольника имѣютъ равныя площади и равные периметры, показать, что онѣ равны во всѣхъ своихъ частяхъ.

222.  $ABCD$  есть прямоугольникъ, точка  $P$  такъ взята, что  $PA+PC=PB+PD$ , показать, что геометрическое мѣсто точки  $P$  есть двѣ прямыя, проведенныя чрезъ центръ прямоугольника параллельно его сторонамъ.

### Книга III.

Отъ 1 до 15.

223. Изъ данной точки какъ изъ центра описать кругъ, который бы проходилъ чрезъ концы діаметра даннаго круга?

224. Показать, что перпендикуляры, возставленные изъ срединъ сторонъ четырехъ угольника, вписаннаго въ кругъ, пересѣкаются въ постоянной точкѣ?

225. Если два круга пересѣкаются, то, двѣ какія нибудь, параллельныя, проведенныя чрезъ точки пересѣченія круговъ, равны.

226. Два круга, коихъ центры суть  $A$  и  $B$ , пересѣкаются въ точкѣ  $C$ , чрезъ  $C$  проведены двѣ хорды  $DCE$  и  $FCG$  одинаково наклоненныя къ  $AB$  и оканчивающіяся на кругахъ, показать, что  $DE=FG$ .

227. Чрезъ одну изъ точекъ пересѣченія, двухъ данныхъ круговъ, провести наибольшую прямую, заключенную кругами?

228. Если изъ какой нибудь точки на діаметрѣ круга проведемъ прямую, къ конечностямъ параллельной діаметру хорды, то сумма квадратовъ, построенныхъ на этихъ прямыхъ, равна суммѣ квадратовъ, построенныхъ на отрѣзкахъ діаметра.

229. Даны внѣ круга  $PQR$  двѣ точки  $A$  и  $B$ ; найти такую точку на окружности круга, чтобы сумма квадратовъ, построенныхъ на  $AP$  и  $BP$  была наименьшая?

230. Если два какіе нибудь круга касаются, то конечности двухъ, какихъ нибудь параллельныхъ діаметровъ и точки касанія круговъ лежатъ на одной прямой линіи.

231. Въ какомъ нибудь кругѣ на его радіусѣ, какъ на діаметрѣ, описать другой кругъ и проведены двѣ хорды большаго круга, одна перпендикулярно общему діаметру круга чрезъ центръ меньшаго круга, а другая чрезъ точку пересѣченія первой хорды съ малымъ кругомъ перпендикулярно къ первой хордѣ, показать, что отрѣзки одной хорды равны отрѣзкамъ другой, каждый каждому.

232. Чрезъ данную точку внутри круга провести наименьшую хорду?

233. Если  $O$  есть центръ какого нибудь круга, а  $P$  какая нибудь точка на окружности,  $PN$  перпендикуляръ изъ точки  $P$  на данный діаметръ, то прямая, равнодѣлящая уголъ  $OPN$  всегда проходитъ чрезъ одинъ или другой конецъ діаметра перпендикулярно къ данному діаметру.

234. Три круга касаются внѣшне въ точкахъ  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , изъ точки  $A$  прямыя  $AB$  и  $AC$  продолжены до встрѣчи съ кругомъ  $BC$  въ точкахъ  $D$  и  $E$ , показать, что  $DE$  есть діаметръ круга  $BC$  и что этотъ діаметръ параллеленъ прямой, соединяющей центры двухъ другихъ круговъ?

235. На сторонахъ, какого нибудь четырехугольника, какъ на діаметрахъ, описаны круги, показать, что общая хорда двухъ смежныхъ круговъ параллельна общей хордѣ двухъ другихъ круговъ.

236. Описать кругъ, который бы касался даннаго круга, имѣлъ бы свой центръ на данной прямой и проходилъ бы чрезъ данную точку на данной прямой?

*Отъ 16 до 19.*

237. Показать, что изъ данной точки внѣ круга можно провести двѣ касательныхъ къ кругу и что онѣ равны?

238. Провести касательную къ данному кругу, которая бы была параллельна данной прямой?

239. Провести касательную къ данному кругу, которая бы была перпендикулярна къ данной прямой?

240. На продолженіи діаметра, даннаго круга, найти точку, изъ которой касательная, проведенная къ кругу, была бы данной длины?

241. Даны два концентрическіе круга, показать, что всѣ хорды внѣшняго круга, касающіяся внутренняго, равны?

242. Чрезъ данную точку провести прямую такъ, чтобы часть ея, отсѣкаемая даннымъ кругомъ, была данной длины не больше діаметра круга?

243. Изъ концовъ діаметра, какого нибудь круга проведены двѣ касательныя, которыя отсѣкаютъ отъ третьей касательной часть  $AB$ , если  $O$  есть центръ круга, то уголъ  $AOB=d$ .

244. Даннымъ радіусомъ описать кругъ, который бы касался даннаго круга и данной прямой?

245. Описать кругъ, касающійся даннаго круга и данной прямой, показать, что точки касанія находятся всегда на одной прямой, съ постоянною точкою на окружности даннаго круга.

246. Провести касательную къ двумъ даннымъ кругамъ?

247. Провести касательную къ данному кругу такъ, чтобы ея часть, отсѣченная другимъ даннымъ кругомъ, была данной длины?

248. Провести прямую, отъ которой, два данные круга, отсѣкали бы данные длины?

249. Показать, что въ описанномъ около круга четырехугольникѣ, сумма двухъ сторонъ равна суммѣ двухъ другихъ.

250. Показать, что исключая ромба, ни какой параллелограмъ не можетъ быть описанъ около круга.

251. Прямая  $ABD$  и  $ACE$  касаются круга въ точкахъ  $B$  и  $C$ , если точки  $D$  и  $E$  такъ взяты, что  $BD=CE$ , то прямая  $DE$  касается круга?

252. Если четырехугольникъ описанъ около круга, то сумма угловъ при центрѣ, образуемыхъ прямыми, соединяющими съ центромъ концы противоположныхъ сторонъ, равна двумъ прямымъ угламъ.

253. Два радіуса круга проведены подъ прямымъ угломъ, будучи продолжены встрѣчаютъ прямую, которая касается круга, показать, что касательныя, проведенныя изъ точекъ пересѣченія, продолженныхъ радіусовъ съ касательною, будутъ параллельны.

254. Прямая линія касается двухъ круговъ, показать, что радіусы круговъ, проведенные въ точки касанія, параллельны, что также параллельны хорды, соединяющія точки касанія съ точками пересѣченія круговъ съ прямою проходящею чрезъ центры.



255. Если два круга могут быть так описаны, что касаются между собою и каждый трех сторон четырехугольника, то разность сумм противоположных сторон равна двойной общей касательной, заключенной между сторонами четырехугольника.

256. Диаметр полукруга есть  $AB$ , а центр  $C$ , показать, что центр  $O$  вписанного в полукруг круга находится в равномъ разстояніи отъ центра  $C$  и отъ касательной къ полукругу параллельной диаметру  $AB$ .

257. Если изъ точки внѣ круга проведены двѣ касательныя, то уголъ между ними вдвое больше угла заключеннаго хордою, соединяющею точки касанія и диаметромъ, проходящимъ чрезъ одну изъ точекъ касанія.

258. Четырехугольникъ образованъ диаметромъ круга, касательными изъ концовъ этого диаметра и третьею касательною, показать, что площадь такого четырехугольника равна половинѣ площади прямоугольника, построеннаго на диаметрѣ и на противоположной сторонѣ четырехугольника.

259. Если въ четырехугольникѣ, описаннаго около круга, двѣ стороны параллельны, то прямая, проведенная чрезъ центръ круга, параллельно параллельнымъ сторонамъ четырехугольника и оканчивающихся на другихъ двухъ сторонахъ, будетъ равна четвертой части всего периметра четырехугольника.

260. Описать рядъ круговъ, касающихся данной прямой въ данной ея точкѣ, показать, что касательныя, проведенныя въ точкахъ пересѣченія круговъ съ прямою параллельною данной прямой, всѣ касаются одного круга.

261. Изъ всѣхъ прямыхъ, которыя можно провести изъ двухъ данныхъ точекъ къ выпуклой части даннаго круга, наименьшая сумма двухъ будетъ въ той точкѣ окружности, въ которой прямая, проведенная изъ данныхъ точекъ, составляютъ равные углы съ касательною въ этой точкѣ.

262. Центръ даннаго круга есть  $C$ ,  $CA$  одинъ изъ его радіусовъ,  $B$  точка на радіусѣ перпендикулярномъ къ  $CA$ , соединимъ  $A$  съ  $B$  и продолжимъ прямую  $AB$  до встрѣчи съ окружностью еще въ точкѣ  $D$  и пусть касательная въ точкѣ  $D$  пересѣкаетъ  $BC$  въ точкѣ  $E$ , показать, что  $BDE$  есть равнобедренный треугольникъ.

263. Диаметръ  $AB$  круга продолженъ до точки  $P$  такъ, что  $AP$  равна радіусу круга, чрезъ точку  $A$  проведена касательная  $AED$ , изъ точки  $P$ , проведена касательная  $PEC$ , касающаяся круга въ точкѣ  $C$  и пересѣкающая первую касательную въ точкѣ  $E$ , соединимъ  $B$  съ  $C$  и продолжимъ  $BC$  до встрѣчи съ  $AE$  въ точкѣ  $D$ , показать, что треугольникъ  $DEC$  равносторонній.

Отъ 20 до 22.

264. Проведены двѣ касательныя  $AB$  и  $AC$  къ кругу и на окружности круга внутри треугольника  $ABC$  взята, какая нибудь точка  $D$ , показать, что сумма угловъ  $ABD$  и  $ACD$  есть величина постоянная.

265. На окружностяхъ сегментовъ, описанныхъ на одной прямой  $AB$ , взяты двѣ, какія нибудь точки  $P$  и  $Q$ , углы  $PAQ$  и  $PBQ$ , прямыми  $AR$  и  $BR$ , пересѣкающимися въ точкѣ  $R$ , раздѣлены пополамъ, показать, что уголъ  $ARB$  есть величина постоянная.

266. На прямой  $AB$  описаны два сегмента одного круга, а окружности одного изъ сегментовъ взята, какая нибудь точка  $P$ , проведены прямыя  $AP$  и  $BP$ , пересѣкающія окружность другого сегмента въ точкахъ  $D$  и  $C$ , проведены прямыя  $AC$  и  $BD$ , пересѣкающіяся въ точкѣ  $Q$ , показать, что уголъ  $AQB$  есть величина постоянная.

267. Пусть  $APB$  будетъ постоянная хорда, проходящая чрезъ точку  $P$  пересѣченія двухъ круговъ  $AQP$  и  $PBR$ , пусть  $QPB$  будетъ какая нибудь другая хорда, проходящая



через точку  $P$ , показать, что прямая  $AQ$  и  $RB$ , будучи продолжены, пересекаясь, образуют постоянный угол.

268. В треугольнике  $AOB$  на сторонах  $OB$  и  $OA$  взяты точки  $C$  и  $D$  такъ, что  $\angle ODC = \angle OBA$ , показать, что около четырехугольника  $ABCD$  можно описать кругъ.

269. В четырехугольникъ  $ABCD$ , вписанномъ въ кругъ, стороны  $AB$  и  $CD$ , будучи продолжены встрѣчаются въ точкѣ  $O$ , показать, что треугольники  $AOC$  и  $BOD$  равноугольны.

270. Показать, что изъ всѣхъ параллелограмовъ только прямоугольникъ можетъ быть вписанъ въ кругъ.

271. Треугольникъ вписанъ въ кругъ, показать, что сумма угловъ, въ трехъ внѣшнихъ треугольнику сегментахъ, равна  $4d$ .

272. Четырехугольникъ вписанъ въ кругъ, показать, что сумма угловъ, въ четырехъ сегментахъ внѣшнихъ четырехугольнику, равна  $6d$ .

273. Раздѣлить кругъ на такія двѣ части, чтобы уголъ содержащійся въ одномъ сегментѣ, былъ равенъ дважды взятому углу въ другомъ сегментѣ?

274. Раздѣлить кругъ на такія двѣ части, чтобы уголъ, содержащійся въ одномъ сегментѣ, былъ равенъ пять разъ взятому углу въ другомъ сегментѣ?

275. Если уголъ составленный, какой нибудь стороною четырехугольника и продолженіемъ его смежной стороны, равенъ противолежащему углу четырехугольника, то каждая изъ сторонъ четырехугольника стягиваетъ, въ вершинахъ противоположныхъ, углы, равные углы.

276. Если двѣ, какія нибудь смежныя стороны шестиугольника, вписаннаго въ кругъ, параллельны противоположнымъ сторонамъ, то и остальные стороны параллельны.

277. Взяты четыре точки  $A, B, C, D$  на окружности круга, прямая  $AB$  и  $CD$ , будучи продолжены, пересекаются въ точкѣ  $P$ , а прямая  $AD$  и  $BC$  въ точкѣ  $Q$ , показать, что прямая равнодѣлящая углы  $APC$  и  $AQC$  перпендикулярна между собою.

278. Если въ четырехугольникѣ, вписанномъ въ кругъ, проведемъ такую прямую, которая бы образовала съ парю противоположныхъ сторонъ равные углы, то она образуетъ равные углы и съ другою парю противоположныхъ сторонъ.

279. Около четырехугольника можетъ быть одинъ кругъ описанъ, а другой въ него вписанъ, показать, что прямая, соединяющія противоположныя точки касанія вписаннаго круга, перпендикулярна между собою.

Отъ 23 до 30.

280. Прямая, соединяющія концы двухъ равныхъ хордъ, обращенныхъ въ одну сторону, параллельна.

281. Прямая, соединяющія концы двухъ параллельныхъ хордъ, равна.

282. Общая хорда двухъ круговъ есть  $AB$ , чрезъ какую нибудь точку  $C$  на одной изъ окружностей проведены прямая  $CAD$  и  $CBE$ , оканчивающіяся на другой окружности въ точкахъ  $D$  и  $E$ , показать, что длина дуги  $DE$  неизмѣняется.

283. Чрезъ точку  $C$  на окружности круга проведены прямая  $ACB$  и  $DCE$ , встрѣчающія окружности еще въ точкахъ  $B$  и  $E$ , показать, что равнодѣлящая углы  $ACE$  и  $DCB$  пересекаетъ окружности въ точкахъ равноотстоящихъ отъ  $B$  и  $E$ .

284. Равнодѣлящая углы внутренней и противоположной внѣшней, четырехугольника вписаннаго въ кругъ, пересекаются на окружности.

285.  $AB$  есть діаметръ круга,  $D$  данная точка на окружности, провести хорду  $DE$  такъ, чтобы дуга между хордою и діаметромъ была равна три раза взятой другой.

286. Изъ концовъ  $A$  и  $B$  основанія треугольника  $ABC$  проведены прямая, встрѣчающія противоположныя стороны въ точкахъ  $P$  и  $Q$  подъ даннымъ угломъ, показать, что

прямая  $FQ$  будетъ величина постоянная во всѣхъ треугольникахъ, имѣющихъ основаніемъ  $AB$  и тотъ же уголъ  $C$ .

287. Если два равные круга пересѣкаются и если чрезъ одну изъ точекъ пересѣченія проведемъ прямую, встрѣчающую оба круга, то прямая, соединяющая эти точки встрѣчи, съ другою общою точкою обоимъ кругамъ, будутъ равны.

288.  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  суть три хорды круга,  $\angle AOB = \angle BOC$ , хорда  $OA$  ближе къ центру нежели хорда  $OB$ . Изъ точки  $B$  опущенъ перпендикуляръ на  $OA$  и встрѣчаетъ  $OA$  въ точкѣ  $P$ , а перпендикуляръ на  $OC$ , будучи продолженъ, встрѣчаетъ  $OA$  въ точкѣ  $Q$ , показать, что  $AP = CQ$ .

289.  $AB$  есть данный отрѣзокъ прямой, чрезъ точку  $A$  проведены двѣ прямыя одинаково наклоненныя къ  $AB$ , какой нибудь кругъ, проходящій чрезъ  $A$  и  $B$  пересѣкаетъ эти прямыя въ точкахъ  $L$  и  $M$ . Показать, что если  $AB$  находится между  $AL$  и  $AM$ , то сумма  $AL + AM$  есть величина постоянная, а если  $AB$  не находится между  $AL$  и  $AM$ , то разность  $AL - AM$  есть величина постоянная.

290.  $AOB$  и  $COD$  суть два перпендикулярные діаметра,  $E$  точка на дугѣ  $AC$ , а  $EFG$  есть хорда, пересѣкающая  $COD$  въ точкѣ  $F$  и проведенная въ такомъ направленіи, что  $EF$  равна радіусу круга. Показать, что дуга  $BG$  равна три раза взятой дугѣ  $AE$ .

291. Всѣ прямыя, равнодѣлящія углы противолежащія основанію всѣхъ треугольниковъ, построенныхъ на одномъ основаніи и по одну его сторону и коихъ углы противолежащія основанію равны, пересѣкаются въ одной точкѣ.

292. Если два круга касаются внутренно, то каждая хорда большого круга, касающаяся меньшаго, въ точкѣ касанія дѣлится на два отрѣзка, которыя въ точкѣ касанія круга стягиваютъ равные углы.

### На 31.

293. Построены прямоугольные треугольники на одной гипотенузѣ, показать, что вершины прямыхъ угловъ лежатъ на окружности круга, описаннаго на данной гипотенузѣ, какъ на діаметрѣ.

294. Круги касающіеся на равныхъ сторонахъ равнобедреннаго треугольника, какъ на діаметрахъ, пересѣкаются въ срединѣ основанія.

295. Наибольшій прямоугольникъ, какой можно вписать въ кругъ есть квадратъ.

296. Гипотенуза  $AB$ , прямоугольнаго треугольника  $ABC$ , въ точкѣ  $D$  раздѣлена пополамъ, изъ точки  $D$  возставленъ перпендикуляръ  $FDE$  къ  $AB$  и на немъ взяты точки  $F$  и  $E$  такъ, что  $AD = DF = DE$ , точки  $F$  и  $E$  соединимъ съ точкою  $C$ , показать, что прямыя  $CF$  и  $CE$  суть равнодѣлящія углы  $ACB$  и его дополненіе.

297. На сторонѣ  $AB$ , какого нибудь треугольника  $ABC$ , какъ на діаметрѣ описанъ кругъ,  $EF$  есть діаметръ этого круга параллельный сторонѣ  $BC$ , показать, что прямыя  $EB$  и  $FB$  суть равнодѣлящія углы внутренній и внѣшній при  $B$ .

298. Если прямыя  $AD$  и  $CE$  перпендикулярны къ сторонамъ  $BC$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  и проведена прямая  $DE$ , показать, что  $\angle ADE = \angle ACE$ .

299. Если два круга  $ABC$  и  $ABD$  пересѣкаются въ точкахъ  $A$  и  $B$  и проведены два діаметра  $AC$  и  $AD$ , показать, что прямая  $CD$  проходитъ чрезъ точку  $B$ .

300. Если  $O$  есть центръ круга,  $OA$  радіусъ на которомъ, какъ на діаметрѣ, описанъ кругъ, то окружность этого круга будетъ дѣлить всѣ хорды большого круга, проходящія чрезъ точку  $A$ .

301. Описать кругъ, касающійся данной прямой въ данной точкѣ, такъ, чтобы касательныя проведенныя къ кругу изъ двухъ данныхъ точекъ на прямой были параллельны?

302. Описать кругъ даннымъ радіусомъ, такъ чтобы онъ касался данной прямой и

чтобы двѣ касательныя, проведенныя, изъ двухъ данныхъ, на данной прямой точекъ, были параллельны?

303. Если изъ вершинъ угловъ при основаніи какого нибудь треугольника, опустимъ перпендикуляры на противоположныя стороны или на ихъ продолженіе, если необходимо, то прямая, соединяющая точки ихъ встрѣчи, будетъ дѣлиться пополамъ перпендикуляромъ, опущеннымъ на нее изъ середины основанія.

304. Прямая  $AD$  есть діаметръ круга,  $B$  и  $C$  точки на окружности по одну сторону  $AD$ , перпендикуляръ, опущенный изъ точки  $D$  на продолженіе  $BC$  пересѣкаетъ ее въ точкѣ  $E$ , показать, что:

$$\square AD = \square AB + \square BC + \square CD + 2BC \cdot CE$$

305. Прямая  $AB$  есть діаметръ полукруга,  $P$  точка на окружности,  $PM$  перпендикуляръ на  $AB$ ; на  $AM$  и  $BM$  описаны, какъ на діаметрахъ, полукруги,  $AP$  и  $BP$  пересѣкаютъ эти полукруги въ точкахъ  $Q$  и  $R$ , показать, что  $QR$  будетъ общая къ нимъ касательная.

306. Даны двѣ прямыя  $AB$  и  $AC$  и даны на нихъ точки  $B$  и  $C$ . Изъ точки  $B$  опущенъ перпендикуляръ  $BD$  на  $AC$ , а изъ точки  $D$  опущенъ перпендикуляръ  $DE$  на  $AB$ ; точно также изъ точки  $C$ , опущенъ перпендикуляръ  $CF$  на  $AB$ , а изъ точки  $F$  опущенъ перпендикуляръ  $FG$  на  $AC$ , показать, что  $EG \parallel BC$ .

307. Два круга пересѣкаются въ точкахъ  $A$  и  $B$ , изъ коихъ проведенны хорды къ точкѣ  $C$ , на одной изъ окружностей, будучи продолжены, если необходимо, пересѣкаютъ другую окружность въ точкахъ  $D$  и  $E$ , показать, что прямая  $DE$  перпендикулярна къ діаметру, проходящему чрезъ точку  $C$ , перваго круга.

308. Если на гипотенузѣ и катетахъ, прямоугольнаго треугольника, будутъ построены квадраты, то прямая соединяющая точку пересѣченія діагоналей квадрата гипотенузы будетъ перпендикулярна къ прямой, соединяющей точки пересѣченія діагоналей квадратовъ на катетахъ.

309. Центръ даннаго круга есть  $C$ ,  $AC$  прямая меньше радіуса круга, найти на окружности такую точку, чтобы уголъ, имѣющій вершину въ этой точкѣ, а стороны стягивали  $AC$ , былъ бы наибольшій?

310. Діаметръ полукруга есть  $AB$ ,  $D$  и  $E$ , какія нибудь, на немъ точки. Проведемъ хорды  $AD$  и  $BE$ , которыя пересѣкутся, будучи продолжены въ точкѣ  $F$ , и хорды  $AE$  и  $BD$ , которыя пересѣкутся въ точкѣ  $G$ , показать, что прямая  $FG$  перпендикулярна къ  $AB$ .

311. Два равные круга касаются внѣшне, чрезъ точку касанія проведенны по хордѣ въ каждомъ кругѣ перпендикулярно одна другой, показать, что прямая, соединяющая концы встрѣчи этихъ хордъ съ окружностями параллельна прямой, соединяющей центры круговъ.

312. На меньшей діагонали ромба, какъ на діаметрѣ, описанъ кругъ, который пересѣкаетъ стороны, точки пересѣченія соединены на крестъ съ концами этой діагонали, показать, что образованной такимъ образомъ параллелограмъ есть ромбъ, коего углы равны угламъ даннаго ромба.

313. Если двѣ хорды круга пересѣкаются внутри или внѣ подъ прямымъ угломъ, то сумма квадратовъ на ихъ отрѣзкахъ равна квадрату діаметра.

Отъ 32 до 34.

314. На окружности круга, коего центръ есть  $C$ , дана точка  $B$ ,  $PA$  есть касательная въ какой нибудь точкѣ  $P$ , которая пересѣкаетъ продолженіе прямой  $BC$  въ точкѣ  $A$



и проведемъ перпендикуляръ  $PD$  къ  $BC$ , показать, что прямая  $PB$  есть равнодѣлящая уголъ  $APD$ .

315. Если два круга касаются, то всякая прямая, проходящая чрезъ точку касанія отрѣзываетъ отъ круговъ подобные сегменты.

316.  $AB$  есть хорда круга, и  $AD$  касательная въ точкѣ  $A$ .  $DPQ$  есть какая нибудь прямая параллельная  $AB$ , пересѣкающая кругъ въ точкахъ  $P$  и  $Q$ , показать, что треугольники  $PAD$  и  $QAB$  равноугольны.

317. Два круга  $ABDH$  и  $ABG$  пересѣкаются въ точкахъ  $A$  и  $B$ , изъ точки  $B$  проведена касательная къ одному изъ нихъ, а изъ точки  $A$ , какая нибудь хорда, пересѣкающая круги еще въ точкахъ  $G$  и  $H$ , показать, что  $BG \parallel DH$ .

318. Два круга пересѣкаются въ точкахъ  $A$  и  $B$ . Изъ точки  $A$  проведены касательныя  $AC$  и  $AD$  къ обоимъ кругамъ, касательная къ первому кругу пересѣкаетъ второй въ точкѣ  $C$ , и касательная ко второму кругу пересѣкаетъ первый въ точкѣ  $D$ . Если проведемъ прямыя  $CB$  и  $BD$ , то общая хорда  $AB$ , или ея продолженіе, дѣлитъ уголъ  $CBD$  пополамъ.

319. Два круга пересѣкаются въ точкахъ  $A$  и  $B$ , чрезъ какую нибудь точку  $P$  на окружности одного изъ круговъ проведены хорды  $PA$  и  $PB$ , которыя пересѣкаютъ другой кругъ еще въ точкахъ  $C$  и  $D$ , показать, что прямая  $CD$  параллельна касательной въ точкѣ  $P$ .

320. Если изъ какой нибудь точки на окружности круга, проведемъ хорду и касательную, то перпендикуляры, опущенные на нихъ изъ середины дуги, заключенной между ними, равны.

321.  $AB$  какая нибудь хорда круга, и  $P$ , какая нибудь точка на окружности,  $PM$  перпендикуляръ къ  $AB$ , продолженный до встрѣчи съ окружностью въ точкѣ  $Q$ ,  $AN$  перпендикуляръ къ касательной въ точкѣ  $P$ , показать, что треугольники  $NAM$  и  $PAQ$  равноугольны.

322. Два діаметра  $AOB$  и  $COD$  въ кругѣ перпендикулярны,  $P$  точка на окружности, касательная въ точкѣ  $P$  пересѣкаетъ продолженіе діаметра  $COD$  въ точкѣ  $Q$ , прямыя  $AP$  и  $BP$  пересѣкаютъ ту же прямую въ точкахъ  $R$  и  $S$ , показать, что  $RQ = SQ$ .

323. По данному основанію, противолежащему углу и точкѣ на основаніи, въ которую падаетъ перпендикуляръ, опущенный изъ вершины на основаніи, построить треугольникъ?

324. По данному основанію, противолежащему основанію углу и по высотѣ, построить треугольникъ?

325. По данному основанію, противолежащему основанію углу и по длинѣ прямой, проведенной изъ вершины къ срединѣ основанія построить треугольникъ?

326. Показать, что изъ всѣхъ треугольниковъ, имѣющихъ одно основаніе и равные углы, противолежащіе основанію, наибольшій будетъ равнобедренный.

327. Изъ данной точки  $A$  внѣ круга, коего центръ есть  $O$ , провести прямую такъ, чтобы она, пересѣкая окружность въ точкахъ  $B$  и  $C$ , образовала наибольшій треугольникъ  $BOC$ ?

328. Двѣ прямыя, составляющія постоянный уголъ, проходятъ чрезъ двѣ данныя точки, показать, что равнодѣлящая между ними уголъ всегда проходитъ чрезъ одну или другую изъ двухъ постоянныхъ точекъ?

329. По данному углу, противолежащей сторонѣ и по суммѣ двухъ остальныхъ сторонъ, построить треугольникъ?

Отъ 35 до 37.

330. Если два круга пересѣкаются, то касательныя, проведенныя изъ какой нибудь точки, на продолженіи общей хорды къ обоимъ кругамъ, равны.



331. Два круга пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , показать, что общая имъ касательная дѣлится пополамъ хордою  $AB$ .

332. Если изъ вершинъ  $A$  и  $C$  треугольника  $ABC$ , опустимъ перпендикуляры  $AD$  и  $CE$  на стороны  $BC$  и  $AB$ , то прямоугольникъ,  $BC.BD=BA.BE$ .

333. Если изъ какой нибудь точки общей хорды двухъ пересекающихся круговъ проведемъ двѣ сѣкущія, одна къ одному, другая къ другому кругу, то четыре точки ихъ пересѣченія съ кругами лежатъ на окружности одного круга.

334. Изъ данной точки, какъ изъ центра описать кругъ, который бы пересѣкалъ данную прямую въ такихъ двухъ точкахъ, что прямоугольникъ построенный на ихъ разстояніяхъ отъ данной на прямой точки, былъ равенъ данному квадрату?

335. Два круга  $ABCD$  и  $EBCF$  имѣютъ общими касательными  $AE$  и  $DF$  и пересекаются въ точкахъ  $B$  и  $C$ , общая хорда  $BC$  продолжена до встрѣчи съ касательными въ точкахъ  $G$  и  $H$ , показать, что:

$$\square GH = \square AE + \square BC$$

336. Данъ рядъ пересекающихся круговъ, такого свойства, что касательныя, проведенныя къ нимъ изъ постоянной точки равны, показать, что хорды каждый разъ пересекающихся круговъ, проходятъ чрезъ эту точку.

337. Въ прямоугольномъ треугольникѣ  $ABC$ , изъ какой нибудь точки  $D$  на гипотенузѣ  $BC$  опущенъ перпендикуляръ на  $AC$  и пересѣкаетъ ее въ точкѣ  $E$ , а будучи продолженъ пересѣкаетъ продолженіе стороны  $BA$  въ точкѣ  $F$ , показать, что:

$$\square DE = BD.DC - AE.EC$$

и что:

$$\square DF = BD.DC + AF.FB$$

338. Требуется найти, на касательной къ кругу въ концѣ діаметра, такую точку, что если ее соединимъ съ другимъ концемъ діаметра, то прямоугольникъ построенный на части внѣ круга и на части въ кругѣ, будетъ равенъ данному квадрату, который не больше квадрата діаметра круга.

#### Смѣшанныя задачи и теоремы на всѣ предложенія III-й книги.

339. Описать кругъ, который бы проходилъ чрезъ данную точку и касался данной прямой въ данной на ней точкѣ?

340. Описать кругъ, который бы проходилъ чрезъ данную точку и касался бы даннаго круга въ данной на немъ точкѣ?

341. Описать кругъ, который бы касался даннаго круга въ данной на немъ точкѣ и касался бы данной прямой?

342.  $AD$  и  $BE$  суть перпендикуляры, опущенные изъ вершинъ  $A$  и  $B$  угловъ треугольника на противолежащія стороны,  $BF$  есть перпендикуляръ къ  $ED$  или къ продолженію  $ED$ , показать, что  $\angle FBD = \angle EBA$ .

343. Если въ треугольникѣ  $ABC$  изъ вершинъ  $B$  и  $C$  опущены перпендикуляры  $BE$  и  $CF$  на противоположныя стороны и  $K$  есть середина третьей стороны, то  $\angle FEK = \angle EFK = \angle A$ .

344.  $AB$  есть діаметръ круга,  $AC$  и  $AD$  двѣ хорды, пересекающія касательную въ точкѣ  $B$ , въ точкахъ  $E$  и  $F$ , показать, что  $\angle FCE = \angle FDE$ .

345. Показать, что четыре прямые, равнодѣлящія углы четырехугольника, образуютъ четырехугольникъ, который можетъ быть вписанъ въ кругъ.

346. Найти кратчайшее разстояніе между двумя кругами, которыя не пересѣкаются?

347. Два круга пересѣкаются въ точкѣ  $A$ , требуется провести чрезъ эту точку прямую такъ, чтобы ея часть, заключенная между обоима кругами была равна данной прямой?

348. Если многоугольникъ съ четнымъ числомъ сторонъ вписанъ въ кругъ, то сумма угловъ чрезъ одинъ вмѣстѣ съ двумя прямыми углами равна прямому углу, взятому столько разъ сколько сторонъ въ многоугольникѣ.

349. Чрезъ данную точку на окружности круга провести хорду, которая бы встрѣчая данную хорду дѣлилась пополамъ?

350. Если равносторонній многоугольникъ описанъ около круга, то онъ необходимо будетъ и равноугольной, если число сторонъ будетъ нечетное, но не иначе.

351.  $AB$  есть діаметръ круга, коего центръ есть  $C$ ,  $DCE$  есть секторъ, имѣющій постоянную дугу; проведемъ  $AE$  и  $BD$ , пересѣкающіяся въ точкѣ  $P$ , показать, что уголъ  $APB$  есть величина постоянная.

352. Неопредѣленное число треугольниковъ, построенно на основаніи  $BC$ , съ равными противолежащими основанію углами, изъ точекъ  $B$  и  $C$  опущены перпендикуляры, пересѣкающіеся въ точкѣ  $D$ , на противоположныя стороны, найти геометрическое мѣсто точекъ  $D$  и показать, что равнодѣлящія уголъ  $BDC$  проходятъ чрезъ одну точку.

353. Пусть  $O$  и  $C$  будутъ двѣ постоянныя точки на окружности круга, и  $OA$ , какая нибудь хорда. Если соединимъ  $A$  съ  $C$  и продолжимъ  $AC$  до  $B$  такъ чтобы  $OB=OA$ , то геометрическое мѣсто точки  $B$  есть окружность равная данной.

354. Изъ какой нибудь точки  $P$ , на діагонали  $BD$  параллелограмма  $ABCD$ , проведены прямые  $PE$ ,  $PF$ ,  $PG$ ,  $PH$  перпендикулярно къ сторонамъ  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$ , показать, что  $EF \parallel GH$ .

355. Чрезъ данную точку на данной хордѣ въ кругѣ проведены другія хорды, показать, что прямые, соединяющія средину данной хорды съ серединами другихъ хордъ, образуютъ съ ними одинъ и тотъ-же уголъ.

356. Прямая  $ABC$  въ какой нибудь точкѣ  $B$  раздѣлена на двѣ части,  $ADB$  и  $CDB$  суть два подобные сегмента круговъ, имѣющихъ общую хорду  $BD$ , прямые  $CD$  и  $AD$  продолжены до встрѣчи съ окружностями въ точкахъ  $F$  и  $E$  и наконецъ проведены прямые  $AF$ ,  $CE$ ,  $BF$ ,  $BE$ , показать, что треугольники  $ABF$  и  $CBE$  равноугольные и равнобедренные.

357. Если около двухъ данныхъ точекъ, какъ около центровъ, будемъ описывать круги, которые бы касались внѣшне, то общая касательная къ каждой парѣ такихъ круговъ будетъ касаться круга, котораго діаметръ есть прямая, соединяющая двѣ данныя точки.

358. Изъ данной точки  $A$  требуется провести двѣ прямые линіи такъ, чтобы онѣ, составляя данный уголъ отдѣляли бы отъ данной прямой отрезокъ данной длины?

359. На данной прямой найти такую точку изъ которой касательныя проведенныя къ двумъ даннымъ кругамъ были равны?

360. Въ кругѣ даны двѣ не пересѣкающіяся хорды, данной длины, одна постоянная, другая, измѣняетъ положеніе, соединимъ противоположныя концы такихъ хордъ прямыми, которыя пересѣкутся внутри круга, показать, что геометрическое мѣсто точки пересѣченія будетъ окружность, проходящая чрезъ концы постоянной хорды.

361.  $A$  и  $B$  суть центры двухъ круговъ, которые касаются внутренне въ  $C$  и касаются одинъ внутренне, а другой внѣшне третьяго круга, коего центръ находится въ  $D$ , въ точкахъ  $E$  и  $F$ , показать, что  $\angle ADB = 2\angle ECF$ .

362.  $C$  есть центр круга,  $CP$  перпендикуляръ на хорду  $APB$ , показать, что сумма  $PC + AP > CP$ , если  $CP = AP$ .

363.  $AB, BC, CD$  суть три послѣдовательныя стороны, вписаннаго въ кругъ многоугольника, дуги  $AB, BC, CD$  въ точкахъ  $L, M, N$  раздѣлены пополамъ, прямая  $LM$  пересѣкаетъ  $BA$  и  $BC$  въ точкахъ  $P$  и  $Q$ , показать, что  $BPQ$  есть треугольникъ равнобедренный и что  $\angle ABC + \angle BCD = 2\angle LMN$ .

364. На окружности даннаго круга найти такую точку изъ которой если проведемъ прямую къ концамъ данной хорды, то разность между ними была бы равна данной прямой, которая не больше данной хорды.

365. Построить треугольникъ по данному периметру, разности отрезковъ основанія, на которые дѣлится основаніе перпендикуляромъ опущеннымъ на него изъ вершины и разности угловъ при основаніи.

366. На прямой  $AB$ , какъ на хордѣ, по одну ея сторону описаны два сегмента круговъ, взята, на окружности одного изъ сегментовъ, какая нибудь точка  $P$ , прямая  $BP$  пересѣкаетъ окружность другаго сегмента въ точкѣ  $Q$ , показать, что уголъ  $PAQ$  равенъ углу между касательными къ окружностямъ сегментовъ въ точкѣ  $A$ .

367. Данная прямая  $AKL$  пересѣкаетъ данный кругъ въ точкахъ  $K$  и  $L$ ;  $APQ$  и  $ARS$  суть другія двѣ прямыя, составляющія равные углы съ прямою  $AKL$ , и пересѣкающія кругъ въ точкахъ  $P$  и  $Q$ ,  $R$  и  $S$ , показать, что какое бы ни было положеніе прямыхъ  $APQ$  и  $ARS$ , прямая, соединяющая середины прямыхъ  $PQ$  и  $RS$ , остается всегда параллельна сама себѣ.

368. Если около четырехугольника можетъ быть описанъ другой четырехугольникъ такъ, что двѣ смежныя его стороны одинаково наклонены къ той сторонѣ перваго четырехугольника, которая ихъ пересѣкаетъ обѣ, то около перваго четырехугольника можно описать кругъ.

369. Два круга касаются внутренне, въ точкѣ  $A$ , требуется чрезъ точку  $A$  провести такъ прямую, чтобы ея часть, заключенная между обоими кругами была равна данной прямой, которая не больше разности между діаметрами круговъ.

370.  $ABCD$  есть параллелограмъ;  $AE$  перпендикулярна къ  $AB$  и  $CE$  перпендикулярна къ  $CB$ , показать, что  $ED$ , будучи продолжена, пересѣчетъ  $AC$  подъ прямымъ угломъ.

371. Изъ вершинъ угловъ треугольника опущены перпендикуляры на противоположныя стороны, показать, что прямоугольники изъ отрезковъ перпендикуляровъ, на которые, каждый изъ нихъ дѣлится точкою ихъ пересѣченія, равны.

372. Два угла треугольника при основаніи раздѣлены прямыми пополамъ, изъ вершины опущены на нихъ перпендикуляры, показать, что прямая, проведенная чрезъ точки пересѣченія перпендикуляровъ съ равнодѣлящими, будетъ параллельна основанію треугольника и дѣлитъ пополамъ его стороны.

373. Въ данный кругъ вписать прямоугольникъ равный данной прямолинейной фигурѣ?

374. Въ остроугольномъ треугольникѣ  $ABC$  опущены перпендикуляры  $AD, BE$ ; на  $AC$  и  $BC$ , какъ на діаметрахъ описаны круги, пересѣкающіе  $BE$  и  $AD$  въ точкахъ  $F, G, H$  и  $K$ , показать, что точки  $F, G, H, K$  лежатъ на окружности круга.

375. Въ кругѣ проведены два перпендикулярные діаметра, изъ ихъ концовъ проведены четыре параллельныя прямыя, показать, что онѣ дѣлятъ окружность на четыре равныя части.

376. Точка  $E$  есть середина полукруга  $AEB$ ,  $CDE$  какая нибудь хорда, пересѣкающая діаметръ въ точкѣ  $D$ , а кругъ въ точкѣ  $C$ , показать, что квадратъ на  $CE$  равенъ дважды взятому четырехугольнику  $AEBС$ .



377.  $AB$  есть данная хорда по величинѣ и по положенію, а  $AC$  движущаяся хорда круга, въ каждомъ положеніи хорды  $AC$  строятъ параллелограмъ, коего смежныя стороны суть  $AB$  и  $AC$ , опредѣлить наибольшую діагональ, параллелограмма, проходящую чрезъ точку  $A$ ?

378. Если два равные круга будутъ помѣщены на такомъ разстояніи, что касательная, проведенная изъ центра одного изъ нихъ, къ другому, равна діаметру ихъ, то ихъ общая касательная равна радіусу круговъ.

379. На окружности даннаго круга найти точку, изъ которой, если проведемъ двѣ касательныя къ равному кругу, коего положеніе дано, то хорда, соединяющая точки касанія была бы равна хордѣ перваго круга, полученной, соединивъ точки пересѣченія касательныхъ съ кругомъ? Опредѣлить предѣлы возможности задачи?

380. Діаметръ круга есть  $AB$ , а  $AF$  есть какая нибудь хорда,  $C$  какая нибудь точка на  $AB$ , чрезъ  $C$  проведена прямая перпендикулярная къ  $AB$ , пересѣкающая продолженіе  $AF$ , если необходимо, въ точкѣ  $G$ , а окружность въ точкѣ  $D$ , показать, что  $FA \cdot AG = BA \cdot AC = \square AD$ ?

381. Построить треугольникъ по данному основанію, противолежащему основанію углу и по данной длинѣ прямой, равнодѣлящей данный противолежащій основанію уголъ?

382. На окружности даннаго круга даны три точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , найти такую точку  $P$ , что прямыя  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$ , пересѣкая окружность въ точкахъ  $D$ ,  $E$ ,  $F$ , отдѣляютъ дуги  $DE$  и  $EF$  данной длины каждая?

383. На окружности даннаго круга найти точку, сумма разстояній которой отъ двухъ данныхъ перпендикулярныхъ прямыхъ, не пересѣкающихся кругъ, была бы наибольшая или наименьшая?

384. На сторонахъ треугольника описаны сегменты внутренне, круговъ вмѣщающіе каждый, избытокъ двухъ прямыхъ угловъ надъ угломъ противолежащимъ сторонѣ, показать, что радіусы трехъ круговъ равны и что ихъ хорды пересѣчены перпендикулярно къ противоположнымъ сторонамъ треугольника.

#### Книга IV.

Отъ 1 до 4.

385. Показать, что въ пред. 3, кн. 4, прямая, которая касается круга въ точкахъ  $A$  и  $B$ , пересѣкаются.

386. Показать, что въ пред. 4, кн. 4, прямая равнодѣлящая углы  $B$  и  $C$ , пересѣкаются,

387. Показать, что въ пред. 4, кн. 4, прямая  $DA$  дѣлитъ уголъ  $A$  пополамъ.

388. Если кругъ вписанный въ треугольникъ  $ABC$  касается сторонъ  $AB$  и  $AC$  въ точкахъ  $D$  и  $E$  и если будетъ проведена прямая линія изъ  $A$  къ центру круга, пересѣкая окружность въ точкѣ  $G$ , то точка  $G$  будетъ центръ круга вписаннаго въ треугольникъ  $ADE$ .

389. Показать, что прямыя соединяющія центры круговъ, вписанныхъ внѣшне въ треугольникъ, проходятъ чрезъ вершины угловъ треугольника.

390. Кругъ касается стороны  $BC$  треугольника  $ABC$  и продолженій сторонъ  $AB$  и  $AC$ , показать, что разстояніе точекъ касанія, стороны  $BC$  съ этимъ кругомъ и съ кругомъ вписаннымъ, равно разности сторонъ  $AB$  и  $AC$ .

391. Въ треугольникъ  $ABC$  вписанъ кругъ, касательными къ кругу отъ каждаго угла треугольника  $ABC$  отсѣченъ треугольникъ, показать, что сумма сторонъ этихъ трехъ треугольниковъ равна суммѣ сторонъ треугольника  $ABC$ .



392.  $D$  есть центр круга вписаннаго въ треугольникъ  $ABC$ , прямая  $AD$ , будучи продолжена до встрѣчи въ  $O$  съ прямою, проведенную чрезъ точку  $B$ , перпендикулярно къ  $BD$ , показать, что точка  $O$  есть центр круга, который касается стороны  $BC$  и продолжений сторонъ  $AB$  и  $AC$ .

393. Описаны три круга, изъ коихъ каждый касается одной стороны треугольника и продолжений остальныхъ сторонъ. Если  $D$ ,  $E$ ,  $F$  суть точки касанія сторонъ  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$ , то  $AE=BD$ ,  $BF=CE$  и  $CD=AF$ .

394. Описать кругъ, который бы касался даннаго круга и двухъ прямыхъ, которыя сами касаются даннаго круга?

395. Если три точки касанія круга вписаннаго въ треугольникъ соединимъ прямыми линиями, то получится треугольникъ всегда остроугольный.

396. Сумма двухъ противоположныхъ сторонъ четырехугольника равна суммѣ двухъ остальныхъ его сторонъ и каждый его уголъ меньше двухъ прямыхъ, показать, что въ такой четырехугольникъ можно вписать кругъ.

397. Два круга  $HPL$  и  $KPM$  касаются внѣшне, имѣютъ общія касательныя  $HK$  и  $LM$ , соединимъ  $H$  съ  $L$  и  $K$  съ  $M$ , показать, что въ четырехугольникъ  $HKLM$  можно вписать кругъ.

398. Вершины угловъ треугольника соединены съ центрами круговъ, вписанныхъ внѣшне въ треугольникъ, и притомъ соединены съ тѣми центрами круга, которые касаются сторонъ, противоположныхъ вершинамъ треугольника, показать, что эти три прямыя пересекаются въ центрѣ вписаннаго въ треугольникъ круга.

399. Дано положеніе двухъ сторонъ треугольника, периметръ котораго есть величина постоянная, показать, что третья сторона касается нѣкотораго круга.

400. Дано основаніе треугольника, противолежащій уголъ и радіусъ вписаннаго круга, построить треугольникъ?

Отъ 5 до 9.

401. Въ пред. 5, кн. 4, показать, что перпендикуляръ, опущенный изъ точки  $F$  на  $BC$  дѣлитъ  $BC$  пополамъ.

402. Проведена прямая  $DE$  параллельно основанію  $BC$  въ треугольникѣ  $ABC$ , показать, что круги описанные около треугольниковъ  $ABC$  и  $ADE$  имѣютъ общую касательную.

403. Если круги, вписанный и описанный около треугольника, будутъ концентрическіе, то треугольникъ будетъ равносторонній.

404. Показать, что если прямая, соединяющая центры круговъ вписаннаго и описаннаго въ треугольникъ, проходитъ чрезъ вершину треугольника, то треугольникъ будетъ равнобедренный.

405. Общая хорда двухъ круговъ продолжена до точки  $P$ , прямая  $PA$  касается одного изъ круговъ въ точкѣ  $A$ ,  $PBC$  есть какая нибудь хорда другаго круга: показать, что кругъ, проходящей чрезъ точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  касается круга, къ которому прямая  $PA$  есть касательная.

406. Четырехугольникъ  $ABCD$  вписанъ въ кругъ, стороны  $AD$  и  $BC$  продолжены до встрѣчи въ точкѣ  $E$ , показать, что касательная въ точкѣ  $E$  къ кругу, описанному около треугольника  $ECD$ , параллельна сторонѣ  $AB$ .

407. Описать кругъ, который бы касался данной прямой и проходилъ бы чрезъ двѣ данныя точки?

408. Описать кругъ, который бы проходя чрезъ двѣ данныя точки, отсѣкалъ бы отъ данной прямой хорду данной длины?

409. Описать кругъ, котораго бы центръ находился на данной прямой и который бы отсѣкалъ отъ двухъ данныхъ прямыхъ равныя хорды, данной длины?

410. Два треугольника имѣютъ равныя основанія и равные противолежащіе основанію углы, показать, что радіусы круговъ, описанныхъ около такихъ треугольниковъ, равны.

411. Описать кругъ, который бы проходилъ чрезъ двѣ данныя точки, и къ которому бы, проведенная касательная изъ третьей, данной точки, была данной длины?

412.  $C$  есть центръ круга,  $CA$  и  $CB$ , два перпендикулярные радіуса, чрезъ точку  $B$  проведена, какая нибудь хорда  $BP$ , пересѣкающая радіусъ  $CA$  въ точкѣ  $N$ ; около треугольника  $ANP$  описать кругъ, показать, что прямая  $BA$  будетъ касательная къ этому кругу.

413. Прямая  $AB$  и  $CD$  параллельны, прямая соединяющія ихъ концы, пересѣкаются въ точкѣ  $E$ , показать, что круги, описанныя около треугольниковъ  $ABE$  и  $CDE$ , касаются.

414. Найти центръ круга отсѣкающаго три равныя хорды отъ сторонъ треугольника?

415. Если  $O$  есть центръ круга вписаннаго въ треугольникъ  $ABC$ , и прямая  $AO$  будетъ продолжена до встрѣчи съ окружностью въ точкѣ  $F$ , то  $FB=FO=FC$ .

416. Противоположныя стороны вписаннаго въ кругъ четырехугольника пересѣкаются въ точкахъ  $P$  и  $Q$ , около треугольниковъ, такъ образованныхъ внѣ четырехугольника, описаны круги, пересѣкающіеся еще въ точкѣ  $R$ , показать, что точки  $P, R, Q$  лежатъ на одной прямой линіи.

417.  $ACDB$  есть полукругъ, коего діаметръ есть  $AB$ ;  $AD$  и  $BC$  двѣ хорды, пересѣкающіяся въ точкѣ  $E$ , показать, что кругъ, описанный около треугольника  $CDE$ , пересѣкаетъ данный полукругъ подъ прямымъ угломъ.

418. Діагонали, даннаго четырехугольника  $ABCD$  пересѣкаются въ точкѣ  $O$ , показать, что центры круговъ, описанныхъ около треугольниковъ  $OAB, OBC, OCD, ODA$ , будутъ находится въ вершинахъ параллелограмма.

419. Около треугольника  $ABC$  описать кругъ, касательная къ нему въ точкѣ  $C$  пересѣкаетъ продолженіе стороны  $AB$  въ  $D$ , кругъ, коего центръ находится въ  $D$ , а радіусъ  $DC$ , пересѣкаетъ  $AB$  въ  $E$ , показать, что  $EC$  есть равнодѣлящая уголъ  $ACB$ .

420. Дано положеніе двухъ прямыхъ  $AB$  и  $AC$ ,  $BC$  есть прямая данной длины, точки  $D$  и  $E$  суть середины  $AB$  и  $AC$ , прямая  $DF$  и  $EF$  проведены перпендикулярно къ  $AB$  и  $AC$ , показать, что  $AF$  будетъ величина постоянная для всѣхъ положеній  $BC$ .

421. Около равнобедреннаго треугольника  $ABC$ , въ которомъ  $AB=AC$ , описать кругъ, чрезъ точку  $A$  проведена прямая, пересѣкающая основаніе  $BC$  въ  $D$ , а кругъ въ  $E$ , показать, что кругъ, проходящій чрезъ точки  $B, D, E$ , касается стороны  $AB$ .

422.  $AC$  есть хорда даннаго круга,  $B$  и  $D$  суть двѣ данныя точки на хордѣ, обѣ внѣ или внутри круга. Если будетъ описать кругъ, проходящій чрезъ точки  $B$  и  $D$  и касающійся даннаго круга, то  $AB$  и  $CD$  стягиваютъ равные углы, имѣющіе вершины въ точкѣ касанія.

423. Внутри круга даны двѣ точки  $A$  и  $B$ , найти на окружности такую точку  $P$ , что если проведемъ прямая  $PAH$  и  $PBK$ , которыя встрѣчаютъ окружность въ точкахъ  $H$  и  $K$ , то чтобы хорда  $HK$  была наибольшая?

424. Центръ даннаго круга находится въ равномъ разстояніи отъ двухъ данныхъ прямыхъ; описать кругъ, который бы касался данныхъ прямыхъ и, пересѣкая данный кругъ, отсѣкалъ бы отъ него сегментъ, вмѣщающій данный уголъ?

425. Центръ круга, описаннаго около треугольника  $ABC$  есть  $O$ ;  $D, E, F$  суть основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ вершинъ  $A, B, C$  на противоположныя стороны, показать, что  $OA, OB, OC$  перпендикулярны къ  $EF, FD, DE$ .

426. Если изъ какой нибудь точки на окружности круга проведемъ прямая къ вершинамъ угловъ, вписаннаго въ кругъ квадрата, то сумма четырехъ квадратовъ на этихъ прямыхъ равна удвоенному квадрату на діаметръ.

427. Показать, что исключая квадрата, ни одинъ прямоугольникъ не можетъ быть описанъ около круга.

428. Описать кругъ около даннаго прямоугольника?

429. Если чрезъ концы двухъ діаметровъ круга проведемъ касательныя, то образуемый касательными четырехугольникъ будетъ ромбъ.

#### На 10.

430. Показать, что уголъ  $ACD$ , въ фигурѣ кн. 4, пред. 10, равенъ трижды взятому углу въ вершинѣ треугольника.

431. Показать, что въ фигурѣ кн. 4, пред. 10, есть два треугольника, имѣющіе тоже свойство и что есть также равнобедренный треугольникъ, коего равные углы равны каждый одной трети третьяго угла.

432. Показать, что основаніе треугольника, въ фигурѣ кн. 4, пред. 10, равно сторонѣ правильнаго пятиугольника, вписаннаго въ меньшій кругъ фигуры.

433. На данной прямой, какъ на основаніи, построить равнобедренный треугольникъ, коего третій уголъ равенъ тройному углу при основаніи.

434. Если положимъ, что въ кн. 4, пред. 10, два круга пересѣкаются еще въ точкѣ  $E$ , то  $DE=DC$ .

435. Если  $A$  есть вершина, а  $BD$  основаніе построеннаго треугольника въ кн. 4, пред. 10, а  $D$  одна изъ двухъ точекъ пересѣченія двухъ построенныхъ круговъ и  $E$  другая точка и  $AE$ , будучи продолжена, пересѣкаетъ  $BD$  въ точкѣ  $G$ , то  $GAB$  будетъ равнобедренный треугольникъ того же свойства.

436. Если въ фигурѣ кн. 4, пред. 10, двѣ равныя хорды меньшаго круга будутъ продолжены до встрѣчи съ большимъ и если точки пересѣченія будутъ соединены, то образуется треугольникъ, имѣющій свойство требуемое предложеніемъ.

437. Положимъ, что въ фигурѣ кн. 4, пред. 10, круги пересѣкаются еще въ точкѣ  $E$ , соединимъ  $A$  съ  $E$  и  $C$  съ  $E$  и продолжимъ прямая  $AE$  и  $BD$  до встрѣчи въ точкѣ  $G$ , то фигура  $CDGE$  будетъ параллелограмъ.

438. Показать, что меньшій кругъ, въ фигурѣ кн. 4, пред. 10, равенъ кругу описанному около требуемаго треугольника.

439. Если, въ фигурѣ кн. 4, пред. 10,  $AF$  есть діаметръ меньшаго круга, то  $DF$  будетъ радіусъ круга описаннаго около треугольника  $BCD$ .

#### Отъ 11 до 16.

440. Прямая, соединяющія вершины, чрезъ одну, правильнаго пятиугольника, пересѣкаются въ вершинахъ другаго правильнаго пятиугольника.

441.  $ABCDE$  есть правильный пятиугольникъ, проведемъ прямая  $AC$  и  $BE$  и пусть  $BE$  пересѣкаетъ  $AC$  въ точкѣ  $F$ , показать что  $AC=AB+BF$ .

442. Показать, что каждый изъ треугольниковъ, образованныхъ, соединяя концы смежныхъ сторонъ правильнаго пятиугольника, меньше одной трети и больше четверти площади цѣлаго пятиугольника.

443. Построить правильный шестиугольникъ въ кругѣ по данному правильному треугольнику, построенному въ томъ же кругѣ и изъ построеніи показать, что сторона,



построеннаго шестиугольника равна радиусу круга и что площадь шестиугольника равна удвоенной площади треугольника.

444. Въ данный кругъ вписать треугольникъ, коего бы углы относились между собою какъ числа 2, 5, 8?

445. Если  $ABCDEF$  есть правильный шестиугольникъ, то, соединяя  $A$  съ  $C$ ,  $B$  съ  $D$ ,  $C$  съ  $E$ ,  $D$  съ  $F$ ,  $E$  съ  $A$  и  $F$  съ  $B$ , получимъ другой шестиугольникъ, коего площадь равна одной трети площади перваго.

446. Всякая равносторонняя фигура вписанная въ кругъ есть вмѣстѣ и равноугольная.

#### Смѣшанныя задачи и теоремы на всѣ предложенія IV-й книги.

Отъ 1 до 16.

447. Изъ вершинъ угловъ треугольника  $ABC$  опущены перпендикуляры на противоположныя стороны и встрѣчаютъ ихъ въ точкахъ  $D$ ,  $E$ ,  $F$ , показать, что  $DE$  и  $DF$  одинаково наклонены въ  $AD$ .

448. Точки касанія, вписаннаго въ кругъ треугольника, соединены прямыми линиями, изъ вершинъ, такимъ образомъ, полученнаго треугольника, опущены перпендикуляры на противоположныя стороны, показать, что стороны треугольника, коего вершины суть основанія этихъ перпендикуляровъ, параллельны сторонамъ первоначальнаго треугольника.

449. Построить треугольникъ по данному углу и радиусамъ круговъ вписаннаго и описаннаго?

450. На данномъ основаніи построены треугольники, имѣющіе равные углы, противоположащіе основанію, показать, что центры круговъ вписанныхъ такъ, что они касаются одной стороны треугольника внѣшне, а другой и основанія касаются продолженій, лежатъ на окружности круга описаннаго около треугольниковъ.

451. Изъ вершинъ угловъ треугольника  $ABC$  опущены перпендикуляры на противоположныя стороны, встрѣчаютъ окружность, описаннаго около треугольника круга, въ точкахъ  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ; если  $L$  будетъ точка встрѣчи перпендикуляровъ, то  $LD$ ,  $LE$ ,  $LF$  дѣлятся пополамъ сторонами треугольника.

452. Если  $ABCDE$  есть правильный пятиугольникъ, и діагонали  $AC$  и  $BD$  пересѣкаются въ точкѣ  $O$ , то  $AO=DO$  и  $AC.CO=\square BC$ .

453. Прямая  $PQ$ , данной длины движется, упираясь своими концами на двѣ данныя прямыя  $CP$  и  $CQ$ , изъ точекъ  $P$  и  $Q$ , возставлены перпендикуляры къ  $CP$  и  $CQ$ , пересѣкающіеся въ точкѣ  $R$ ; перпендикуляры, опущенные изъ точекъ  $P$  и  $Q$  на  $CQ$  и  $CP$  пересѣкаются въ точкѣ  $S$ , показать, что геометрическія мѣста точекъ  $R$  и  $S$  суть окружности, имѣющія общій центръ въ точкѣ  $C$ .

454. На данной гипотенузѣ построены прямоугольные треугольники, показать, что геометрическое мѣсто центровъ, вписанныхъ въ треугольники круговъ, есть четверть окружности, коей данная гипотенуза есть хорда.

455. На данной прямой  $AB$  построить какой нибудь треугольникъ  $ACB$ , стороны  $AC$  и  $BC$ , построеннаго треугольника, раздѣлены пополамъ, изъ точекъ дѣленія возставлены перпендикуляры, пересѣкающіеся въ точкѣ  $D$ , найти геометрическое мѣсто точки  $D$ ?

456. По данному основанію, одному углу при основаніи, по разстоянію между центромъ вписаннаго круга и центромъ круга, касающагося внѣшне основанія и продолженій другихъ сторонъ, построить треугольникъ?



457. Построить кругъ, который бы касался данной прямой въ данной точкѣ и дѣлилъ бы пополамъ окружность даннаго круга?

458. Построить кругъ, который бы проходилъ чрезъ данную точку и пересѣкалъ пополамъ окружности двухъ данныхъ круговъ?

459. Внутри даннаго круга построить три равные круга, которые бы касались между собою и даннаго круга?

460. Если радіусъ круга раздѣленъ, какъ въ кн. 2, пред. 11, то большій отрѣзокъ будетъ стороною правильнаго десятиугольника, вписаннаго въ кругъ?

461. Если радіусъ круга будетъ раздѣленъ, какъ кн. 2, пред. 11, то квадратъ, построенный на большемъ отрѣзкѣ, вмѣстѣ съ квадратомъ, построеннымъ на радіусѣ, будетъ равенъ квадрату построенному на сторонѣ правильнаго пятиугольника, вписаннаго въ кругъ.

462. Изъ вершины треугольника провести къ основанію его прямую такъ, чтобы квадратъ построенный на ней былъ равенъ прямоугольнику, построенному изъ отрѣзковъ основанія?

463. Проведены четыре прямыя въ одной плоскости, образующія четыре треугольника, показать, что круги, описанные около этихъ треугольниковъ, всѣ проходятъ чрезъ одну общую точку?

464. Перпендикуляры, опущенные изъ вершинъ угловъ  $A$  и  $B$  треугольника  $ABC$  на противоположныя стороны пересѣкаются въ точки  $D$ , круги, описанные около  $ADC$  и  $DBC$ , пересѣкаютъ  $AB$  или продолженіе  $AB$  въ точкахъ  $E$  и  $F$ , показать, что  $AE=BF$ ?

465. Четыре круга, проходящіе, каждый, чрезъ три центра круговъ, вписанныхъ въ треугольникъ равны.

466. Четыре круга описаны такъ, что каждый изъ нихъ касается внутренно трехъ сторонъ четырехугольника, показать, что центры этихъ круговъ лежатъ всѣ четыре на окружности одного круга?

467. Около треугольника  $ABC$  описанъ кругъ и изъ какой нибудь точки  $P$  окружности этого круга опущены перпендикуляры на  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ , которые встрѣчаютъ еще окружность въ точкахъ  $D$ ,  $E$ ,  $F$ , показать, что треугольники  $ABC$  и  $DEF$  равны во всѣхъ своихъ частяхъ и что прямыя  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  параллельны?

468. Изъ какой нибудь точки на окружности даннаго круга описанъ другой кругъ, пересѣкающій первый въ точкахъ  $A$  и  $B$ , изъ точки  $B$  въ описанномъ кругѣ проведена хорда  $BD$ , равная его радіусу, прямая  $AD$  пересѣкаетъ, данный кругъ въ точкѣ  $Q$ , показать, что прямая  $QD$  равна радіусу даннаго круга?

469. Въ даннаго квадрата взята такая точка, что если соединимъ ее съ вершинами угловъ квадрата, то уголъ между внѣшними прямыми дѣлится на три равныя части внутренними, показать, что геометрическое мѣсто такихъ точекъ есть кругъ описанный около квадрата?

470. Два круга вписаны въ треугольники, образованные перпендикуляромъ опущеннымъ изъ вершины угла треугольника на противолежащую сторону; тоже самое сдѣлано относительно остальныхъ такихъ же перпендикуляровъ, показать, что сумма діаметровъ шести круговъ вмѣстѣ съ суммою сторонъ даннаго треугольника равна суммѣ этихъ перпендикуляровъ?

471. Описаны, въ одной плоскости три концентрическіе круга, провести прямую такъ, чтобы отрѣзокъ ея между внутреннею и внѣшнею окружностями дѣлился пополамъ въ одной изъ точекъ средней окружности въ которыхъ онъ ее встрѣчаетъ?

## Книга VI.

Отъ 1 до 2.

472. Показать, что одинъ изъ треугольниковъ кн. 4, пред. 10 есть среднепропорціо-  
нальный между двумя остальными?

473. Черезъ какую нибудь точку  $D$ , основанія треугольника  $ABC$ , проведены  $DE$  и  $DF$  параллельно сторонамъ  $AB$  и  $AC$  и встрѣчаютъ эти стороны въ точкахъ  $E$  и  $F$ , по-  
казать, что треугольникъ  $AEF$  есть среднепропорціо-нальный между треугольниками  $FBD$   
и  $EDC$ ?

474. Изъ какой нибудь точки, взятой внутри равносторонняго треугольника, опу-  
щены перпендикуляры на его стороны, показать, что сумма этихъ перпендикуляровъ есть  
величина постоянная?

475. Найти внутри треугольника такую точку, которую, если соединимъ съ верши-  
нами угловъ треугольника, то онъ раздѣлится на три равные треугольника?

476. Изъ какой нибудь точки  $E$ , общаго основанія треугольниковъ  $ACB$  и  $ADB$ ,  
проведены параллельныя прямымъ  $AC$  и  $AD$ , встрѣчающія  $BC$  и  $BD$  въ точкахъ  $F$  и  $G$ ,  
показать, что  $FG \parallel CD$ ?

477. Изъ какой нибудь точки основанія треугольника проведены параллельныя его  
сторонамъ, показать, что точка пересѣченія діагоналей, такъ образованнаго параллелограма,  
лежитъ на извѣстной прямой.

478. Въ треугольникѣ  $ABC$  проведена прямая  $AD$  перпендикулярно къ прямой  $BD$ ,  
дѣлящей уголъ  $B$  пополамъ, показать, что прямая, проведенная чрезъ  $D$  параллельно  $BC$   
раздѣлитъ  $AC$  пополамъ.

479. Въ треугольникѣ  $ABC$  проведена, какая нибудь, прямая параллельно сторонѣ  
 $BC$ , встрѣчающая  $AB$  въ точкѣ  $D$ , а  $AC$  въ точкѣ  $E$ ; соединимъ  $B$  съ  $E$  и  $C$  съ  $D$  эти  
прямые встрѣтятся въ точкѣ  $F$ , показать, что треугольникъ  $ADF = \triangle AEF$ ?

480. Въ треугольникѣ  $ABC$ , проведена какая нибудь прямая параллельно  $BC$ , встрѣ-  
чающая  $AB$  и  $AC$  въ точкахъ  $D$  и  $E$ , прямые  $BE$  и  $CD$  пересѣкаются въ точкѣ  $F$ , по-  
казать, что  $AF$ , будучи продолжена, раздѣлитъ  $BC$  пополамъ.

481. Если двѣ стороны, какого нибудь четырехугольника параллельны, то всякая пря-  
мая, проведенная параллельно имъ, раздѣлитъ другія стороны или ихъ продолженія на части  
пропорціо-нальныя.

482. Изъ данной точки  $P$ , на сторонѣ  $AB$ , или на ея продолженіи, въ треугольникѣ  
 $ABC$ , провести къ сторонѣ  $AC$  или ея продолженію, такъ прямую, чтобы она стороною  $BC$   
дѣлилась пополамъ?

На 3.

483. Сторона  $BC$  треугольника  $ABC$  въ точкѣ  $D$  раздѣлена пополамъ, углы  $ADB$  и  
 $ADC$  прямыми  $DE$  и  $DF$  раздѣлены пополамъ,  $DE$  и  $DF$  встрѣчаютъ  $AB$  и  $AC$  въ  
точкахъ  $E$  и  $F$ , показать, что  $EF \parallel BC$ ?

484.  $AB$  есть діаметръ, какого нибудь круга,  $CD$  какая нибудь хорда перпендику-  
лярная къ  $AB$  и,  $E$  какая нибудь точка на  $CD$ ; прямые  $AE$  и  $BE$ , будучи продолжены,  
встрѣчаютъ окружность въ точкахъ  $F$  и  $G$ , показать, что въ четырехугольникѣ  $CFDG$ , ка-  
кія нибудь двѣ смежныя стороны пропорціо-нальны двумъ остальнымъ.

485. Приложить пред. 3, кн. 6, къ рѣшенію задачи: раздѣлитъ данную прямую на  
три равныя части?

486. На окружности круга, коего діаметръ есть  $AB$ , взята какая нибудь точка  $P$ , проведены прямыя  $PC$  и  $PD$  равно наклоненныя къ  $AP$ , но съ противоположныхъ ея сторонъ и пересѣкающія  $AB$  въ точкахъ  $C$  и  $D$ , показать, что  $AC:BC=AD:BD$ .

487. На какой нибудь прямой  $AB$ , взята какая нибудь точка  $D$ , найти такую точку  $P$ , на продолженіи  $AB$ , чтобы:

$$PA:PB=DA:DB$$

488. Изъ точки  $A$  проведены прямыя, составляющія углы  $BAC, CAD, DAE$  каждый, изъ коихъ равенъ  $\frac{1}{2}d$ , эти прямыя пересѣчены прямою  $BCDE$ , которая образуетъ равнобедренный треугольникъ  $BAE$ , показать, что  $BC$  или  $DE$  есть средне-пропорціональная между  $BE$  и  $CD$ .

489. Въ треугольникѣ  $ABC$  уголъ  $A$  прямою  $AD$  раздѣленъ пополамъ, эта прямая встрѣчаетъ основаніе въ точкѣ  $D$ , а точка  $O$  есть середина  $BC$ , показать, что  $OD:OB=AC-AB:AC+AB$ .

490. Прямыя  $AD$  и  $AE$  суть равнодѣлящія внутренній и внѣшній углы  $A$  треугольника  $ABC$ , онѣ встрѣчаютъ основаніе  $BC$  въ точкахъ  $D$  и  $E$ ,  $O$  есть середина  $BC$ , показать, что:

$$OD:OB=OB:OE$$

491. Три точки  $D, E, F$  на сторонахъ треугольника  $ABC$ , будучи соединены, образуютъ второй треугольникъ  $DEF$ , котораго двѣ какія нибудь стороны со стороною даннаго треугольника, на которой онѣ пересѣкаются, образуютъ равные углы, показать, что  $AD, BE, CF$  перпендикулярны къ  $BC, CA, AB$ .

Отъ 4 до 6.

492. Если два треугольника построены на одномъ основаніи и между двумя параллельными линіями, то всякая прямая параллельная основанію отсѣкаетъ отъ обѣихъ треугольниковъ равныя площади.

493. Прямыя  $AB$  и  $CD$ , данной величины, параллельны,  $E$  есть середина прямой  $CD$ ,  $AC$  и  $BE$  встрѣчаются въ точкѣ  $F$ , а  $AE$  и  $BD$  въ точкѣ  $G$ , показать, что  $FG \parallel AB$ .

494.  $A, B, C$  суть три данныя точки на одной прямой линіи, чрезъ точку  $C$  проведена какая нибудь прямая, показать, что перпендикуляры опущенные на нее изъ точекъ  $A$  и  $B$ , находятся между собою въ постоянномъ отношеніи.

495. Если перпендикуляры, опущенные изъ двухъ данныхъ точекъ, на прямую, проходящую между этими точками, находятся между собою въ постоянномъ отношеніи, то прямая должна проходить чрезъ постоянную точку.

496. Найти такую прямую перпендикулярную на которую, опущенные изъ трехъ данныхъ точекъ, находятся между собою въ данномъ отношеніи?

497. Чрезъ данную точку провести прямую такъ, чтобы части ея, заключенныя между данною точкою и перпендикулярами опущенными на прямую находились въ данномъ отношеніи между собою?

498. Касательная къ кругу въ точкѣ  $A$  пересѣкаетъ двѣ параллельныя касательныя въ точкахъ  $B$  и  $C$ , которыхъ точки касанія суть  $D$  и  $E$ , прямыя  $BE$  и  $CD$  пересѣкаются въ точкѣ  $F$ , показать, что  $AF$  параллельна касательнымъ  $BD$  и  $CE$ .

499.  $P$  и  $Q$  суть двѣ данныя точки,  $AB$  и  $CD$  двѣ данныя параллельныя прямыя, проведена какая нибудь, прямая чрезъ точку  $P$ , встрѣчающая  $AB$  въ точкѣ  $M$ , чрезъ точку  $Q$  проведена также какая нибудь прямая, встрѣчающая  $CD$  въ точкѣ  $N$ , показать,



что отношение  $PM:QN$  есть величина постоянная и что прямая, проходящая через точки  $M$  и  $N$  проходят через постоянную точку.

500. Показать что одна диагональ въ четырехугольникѣ, въ которомъ двѣ стороны параллельны, и одна изъ нихъ въ двое болѣе другой, пересѣкаетъ другую въ точкѣ, лежащей на одной трети диагонали?

501. Въ точкахъ  $A$  и  $B$  на окружности круга коего центръ есть  $C$  проведены касательныя, пересѣкающіяся въ точкѣ  $F$ , изъ точки  $A$  опущенъ перпендикуляръ  $AN$  къ  $CB$ , показать, что  $BF:BC=BN:NA$ .

502. На сторонахъ  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $D$  и  $E$  и притомъ такъ что  $BD=CE$ ,  $DE$  и  $BC$  продолжены до пересѣченія въ точкѣ  $F$ , показать, что  $AB:AC=EF:DF$ .

503. Если чрезъ вершину и концы основанія треугольника, проведемъ два круга, пересѣкающіеся на основаніи или на его продолженіи, то діаметры этихъ круговъ будутъ пропорціональны сторонамъ треугольника.

504. Найти такую точку изъ которой бы перпендикуляры, опущенные на стороны треугольника были въ данномъ отношеніи?

505. На смежныхъ сторонахъ прямоугольника построены два подобные треугольника и изъ ихъ вершинъ опущены перпендикуляры на  $AB$  и  $AC$ , пересѣкающіеся въ точкѣ  $P$ . Если  $AB$  и  $AC$  будутъ сходственными сторонами, то точка  $P$ , во всѣхъ случаяхъ, будетъ находится на одной изъ діагоналей прямоугольника.

506. Показать, что въ фигурѣ кн. 1, пред. 43,  $EG$  и  $FH$ , будучи продолжены, пересѣкутся на продолженіи  $AC$ .

507.  $APB$  и  $CQD$  суть двѣ прямыя параллельныя линіи и  $AP:PB=DQ:QC$ , показать, что прямыя  $PQ$ ,  $AC$ ,  $BD$ , продолженныя, если необходимо, встрѣчаются въ одной точкѣ и что прямыя  $PQ$ ,  $AD$ ,  $BC$  также продолженныя, если необходимо, встрѣчаются въ одной точкѣ.

508. Если въ треугольникѣ  $ACB$  сторону  $AC$  продолжимъ до точки  $D$ , такъ чтобы  $CD=AC$  и проведемъ прямую  $BD$  и если проведемъ, какую нибудь прямую, параллельно  $AB$ , встрѣчающую стороны  $AC$  и  $CB$  и изъ точекъ встрѣчи проведемъ параллельныя  $DB$ , то эти прямыя пересѣкутъ  $AB$  въ точкахъ равноотстоящихъ отъ концовъ  $A$  и  $B$ .

509. Если опишемъ кругъ, касающійся внѣшнѣ двухъ данныхъ круговъ, то прямая проходящая чрезъ точки касанія пересѣкаетъ прямую, соединяющую центры данныхъ круговъ, въ постоянной точкѣ.

510. Точка  $D$  есть середина стороны  $BC$  треугольника  $ABC$ , а  $P$  есть какая нибудь точка на  $AD$ , чрезъ точку  $P$  проведены прямыя  $BPE$  и  $CPE$ , встрѣчающія другія стороны треугольника въ точкахъ  $E$  и  $F$ , показать, что  $EF \parallel BC$ .

511. Діаметръ круга есть  $AB$ ,  $E$  есть середина радіуса  $OB$ , на  $AE$  и  $EB$ , какъ на діаметрахъ описаны круги,  $PQL$  есть общая касательная, пересѣкающая данный кругъ въ  $P$  и  $Q$ , и продолженіе прямой  $AB$  въ точкѣ  $L$ , показать, что  $BL$  есть радіусъ меньшаго круга.

512.  $ABCDE$  есть правильный пятиугольникъ,  $AD$  и  $BE$  пересѣкаются въ точкѣ  $O$ , показать, что сторона пятиугольника есть средне-пропорціональная между  $AO$  и  $AD$ .

513.  $ABCD$  есть параллелограмъ,  $P$  и  $Q$  суть точки на прямой параллельной  $AB$ ,  $PA$  и  $QB$  встрѣчаются въ  $R$ , а  $PD$  и  $QC$  встрѣчаются въ  $S$ , показать, что  $RS \parallel AD$ .

514. Даны двѣ точки  $A$  и  $B$ ,  $AC$  и  $BD$  суть перпендикуляры къ данной прямой  $CD$ ,  $AD$  и  $BC$  пересѣкаются въ  $E$ ,  $EF$  есть перпендикуляръ къ  $CD$ , показать, что  $AF$  и  $BF$  составляютъ равные углы съ  $CD$ .



515. Изъ вершинъ параллелограма  $ABCD$  опущены перпендикуляры на діагонали и пересѣкаютъ ихъ въ точкахъ  $E, F, G, H$ , показать, что  $EFGH$  есть параллелограмъ подобный параллелограму  $ABCD$ .

516. Если два круга пересѣкаются въ данной точкѣ, а центры ихъ лежатъ на двухъ данныхъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ данную точку, то, какая бы нибыла величина круговъ, ихъ общія касательныя пересѣкаются на одной изъ двухъ постоянныхъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ данную точку.

Отъ 7 до 18.

517. Если два круга, касаясь между собою касаются данной прямой, то часть прямой, заключенная между точками касанія будетъ средне-пропорціоная между діаметрами круговъ.

518. Раздѣлить данную дугу круга на двѣ части, коихъ бы хорды находились между собою въ данномъ отношеніи.

519. Въ данномъ треугольникѣ провести прямую параллельно одной изъ его сторонъ такъ, чтобы она была средне-пропорціоная между отрѣзками основанія.

520. Въ треугольникѣ  $ABC$  изъ вершины  $A$  опущенъ перпендикуляръ на  $BC$  и встрѣчаетъ  $BC$  въ точкѣ  $D$  между  $B$  и  $C$ , показать, что если  $AD$  есть средне-пропорціоная между  $BD$  и  $BC$ , то уголъ  $BAC$  есть прямой.

521. Въ треугольникѣ  $ABC$  изъ вершины  $A$  опущенъ перпендикуляръ на противоположную сторону  $BC$  и встрѣчаетъ ее въ точкѣ  $D$  между  $B$  и  $C$ , показать, что если  $BA$  есть средне-пропорціоная между  $BD$  и  $BC$ , то уголъ  $\angle BAC = d$ .

522. Центръ круга есть  $C$ ,  $A$  есть точка внутри круга, прямая  $CA$  продолжена до  $B$  такъ, что радіусъ круга есть средне-пропорціоная между  $CA$  и  $CB$ , показать, что если  $P$  будетъ, какая нибудь точка на окружности, то  $\angle CPA = \angle CBP$ .

523. Дана точка  $O$  на данной прямой  $OA$ , данный кругъ движется такъ, что постоянно касается прямой  $OA$ , изъ точки  $O$  проведена касательная  $OP$  къ кругу, на продолженіи  $OP$  взята точка  $Q$  такъ, что  $PQ$  есть третья пропорціоная къ  $OP$  и къ радіусу круга, показать, что при движеніи круга по прямой  $OA$ , точка  $Q$  движется также по прямой.

524. Двѣ данныя параллельныя линіи касаются круга,  $SPF$  есть третья касательная, пересѣкающая первыя двѣ въ  $S$  и  $F$ , а кругъ въ  $P$ , показать, что прямоугольникъ  $SP \cdot PF$  есть величина постоянная для всѣхъ положеній точки  $P$ .

525. Въ данномъ треугольникѣ  $ABC$  уголъ  $C = d$ , изъ  $A$  возставленъ перпендикуляръ къ  $AB$ , встрѣчающій продолженіе  $BC$  въ  $E$ , изъ  $B$  возставленъ также перпендикуляръ, встрѣчающій продолженіе  $AC$  въ  $D$ , показать, что  $\triangle ECD = \triangle ACB$ .

526. Найти на сторонѣ треугольника точку изъ которой, если проведемъ двѣ прямыя: одну къ противоположной вершинѣ, а другую параллельно основанію, то чтобы треугольники образуемые ею со сторонами треугольника и съ основаніемъ были равны?

527. Въ треугольникѣ  $ABC$  проведена равнодѣлящая уголъ  $ABC$ , она встрѣчаетъ прямыя, проведенныя чрезъ  $A$  и  $C$  параллельно  $BC$  и  $AB$ , въ точкахъ  $E$  и  $F$ , показать, что  $\triangle CBE = \triangle ABF$ .

528. Показать что діагонали, вписаннаго въ кругъ четырехугольника, дѣлятъ четырехугольникъ на четыре треугольника, подобные по два и вывести теорему 35, кн. 3.

529.  $AB$  и  $CD$  суть двѣ хорды круга, проходящаго чрезъ точку  $O$ ,  $EF$  какая нибудь хорда параллельная  $OB$ , прямыя  $CE$  и  $DF$  пересѣкаютъ  $AB$  въ  $G$  и  $H$ , прямыя  $DE$  и  $CF$  пересѣкаютъ  $AB$  въ  $K$  и  $L$ , показать, что  $OG \cdot OH = OK \cdot OL$ .

530.  $ABCD$  есть четырехугольникъ вписанный въ кругъ, прямыя  $CE$  и  $DE$ , равнодѣлящія углы  $ACB$  и  $ADB$ , пересѣкаютъ  $BD$  и  $AC$  въ  $F$  и  $G$ , показать, что  $EF : EG = ED : EC$ .

531. Изъ вершины треугольника проведены двѣ прямыя, изъ коихъ одна пересѣкаетъ основаніе треугольника въ какой нибудь точкѣ, а другая пересѣкаетъ окружность, описаннаго около треугольника круга, такъ что отдѣляемый ею сегментъ круга содержитъ уголъ равный углу, который первая прямая составляетъ съ основаніемъ, показать, что прямоугольникъ, заключенный между сторонами треугольника равенъ прямоугольнику, заключенному между проведенными прямыми.

532. Прямая, равнодѣлящая уголъ  $C$  треугольника  $ACB$ , встрѣчаетъ основаніе въ точкѣ  $D$  и продолжена до точки  $E$  такъ, что  $CD \cdot CE = AC \cdot CB$ , показать, что если основаніе и уголъ  $C$  будутъ даны, то положеніе точки  $E$  будетъ постоянное.

533. Въ прямоугольный треугольникъ  $ABC$  вписанъ квадратъ, одна изъ сторонъ  $DE$  квадрата совпадаетъ съ гипотенузою  $AB$  треугольника, показать, что площадь квадрата равна площади прямоугольника  $AD \cdot BE$ .

534. Въ параллелограммъ  $ABCD$  изъ  $B$  проведена прямая линія, пересѣкающая діагональ  $AC$  въ  $F$ , сторону  $DC$  въ  $G$ , и продолженіе стороны  $AD$  въ  $E$ , показать, что  $\square BF = EF \cdot FG$ .

535. Если чрезъ вершину равнобедреннаго треугольника проведемъ прямую до встрѣчи съ основаніемъ и съ окружностью круга, описаннаго около треугольника, то прямоугольникъ заключенный между цѣлою прямою и ея частью отъ вершины до основанія, равенъ квадрату построенному на одной изъ равныхъ сторонъ треугольника.

536. Изъ точки  $A$  проведены двѣ касательныя къ кругу, коего центръ есть  $E$ , точки касанія соединены прямою, которая пересѣкаетъ  $EA$  въ  $H$ , на  $HA$ , какъ на діаметрѣ описанъ кругъ, показать, что касательныя, проведенныя изъ точки  $E$  къ этому кругу, пересѣкутъ его на окружности даннаго круга.

Отъ 19 до пред. с.

537. Построенъ равнобедренный треугольникъ, въ коемъ каждый изъ угловъ при основаніи равенъ удвоенному третьему углу, если углы при основаніи раздѣлимъ пополамъ и проведемъ равнодѣлящія до встрѣчи съ противоположными сторонами, то соединяя точки встрѣчи ихъ прямою треугольникъ раздѣлится на двѣ части, которыя относятся между собою, какъ основаніе къ сторонѣ треугольника.

538. Всякій правильный многоугольникъ, вписанный въ кругъ есть средне-пропорціональный между вписаннымъ и описаннымъ правильными многоугольниками съ половиннымъ числомъ сторонъ.

539. Показать, что въ пред. 24, кн. 6,  $EG \parallel KH$ .

540. Раздѣлить треугольникъ на двѣ равныя части прямою перпендикулярною одной изъ его сторонъ?

541. Чрезъ точку  $P$ , на діагонали  $AC$  параллелограмма  $ABCD$ , проведена прямая, встрѣчающая  $BC$  въ точкѣ  $E$ , а  $AD$  въ точкѣ  $F$ ; чрезъ ту же точку  $P$  проведена еще другая прямая, встрѣчающая  $AB$  въ точкѣ  $G$ , и  $CD$  въ точкѣ  $H$ , показать, что  $GF \parallel EH$ .

542. Чрезъ данную точку провести хорду въ данномъ кругѣ такъ, чтобы она въ этой точкѣ дѣлилась въ данномъ отношеніи?

543. Чрезъ данную точку внутри круга провести прямую такъ, чтобы она въ этой точкѣ дѣлилась пополамъ?

544. Показать, что въ пред. 11, кн. 2, есть еще четыре прямыя, исключая данной, которыя раздѣлены въ томъ же отношеніи.

545. Построить треугольникъ по данному основанію, противолежащему углу и по данному прямоугольнику, заключенному между остальными сторонами?



546. Около равносторонняго треугольника описанъ кругъ и изъ какой нибудь точки на окружности проведены прямыя къ вершинамъ треугольника, показать, что одна изъ этихъ прямыхъ равна суммѣ двухъ другихъ.

547. Изъ концовъ  $B$  и  $C$  основанія  $BC$  равнобедреннаго треугольника  $ABC$  проведены прямыя перпендикулярно къ  $AB$  и  $AC$ , пересѣкающіяся въ точкѣ  $D$ , показать, что  $BC \cdot AD = 2AB \cdot DB$ .

448. Въ равнобедренномъ треугольникѣ  $ABC$  сторона  $AB = AC$ , точка  $F$  есть середина  $BC$ , на какую нибудь прямую, проходящую чрезъ точку  $A$  опущены перпендикуляры  $FG$  и  $CE$ , показать, что  $BC \cdot EF = FC \cdot EG + FA \cdot FG$ .

#### Смѣшанныя задачи и теоремы на всѣ предложенія VI-й книги.

Отъ 1 до пред. с.

549.  $AB$  есть діаметръ круга,  $P$  какая нибудь точка на его окружности, проведены прямыя  $AP$  и  $BP$  и если необходимо, то онѣ и продолжены, изъ какой нибудь точки  $C$  на  $AB$  проведена прямая перпендикулярно къ  $AB$ , пересѣкающая  $AP$  въ точкѣ  $D$ , а  $BP$  въ точкѣ  $E$  и окружность круга въ точкѣ  $F$ , показать, что  $CD$  есть третья пропорціональная къ  $CE$  и  $CF$ .

550. Три точки  $A, B, C$  лежатъ на одной прямой линіи, въ точкѣ  $D$  отрѣзки  $AB$  и  $BC$  стягиваютъ равные углы, показать, что геометрическое мѣсто точки  $D$  есть окружность круга.

551. Если изъ вершины квадрата проведемъ прямую, отрѣзывающую четвертую часть діагонали, то эта прямая отрѣжетъ отъ стороны квадрата одну третью часть. Слѣдовательно, если проведемъ чрезъ всѣ вершины подобныя прямыя, то образуется квадратъ, составляющій двѣ пятыхъ части даннаго квадрата.

552. Стороны  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$ , продолжены до какихъ нибудь точекъ  $D$  и  $E$ , такъ чтобы  $DE \parallel BC$ . Прямая  $DE$  въ точкѣ  $F$  раздѣлена такъ что  $DF : FE = BD : CF$ , показать, что геометрическое мѣсто точки  $F$  есть прямая линія.

553. Точки  $A, B, C$  лежатъ по порядку на одной прямой, найти на той же прямой точку  $P$  такую, чтобы  $PA : PB = PB : PC$ ?

554. Даны двѣ точки  $A$  и  $B$  на окружности даннаго круга и точка  $P$  движущаяся на той же окружности, на прямой  $PB$  взята точка  $D$  такъ что  $PD : PA$  есть постоянная величина, на  $PA$  взята точка  $E$  такъ что  $PE : PB$  равна той же величинѣ, т. е.  $PD : PA = PE : PB = k$ , показать, что прямая  $DE$  во всѣхъ положеніяхъ касается постояннаго круга.

555. Въ равнобедренномъ треугольникѣ  $ABC$  уголъ  $A$  равенъ четырежды взятому одному изъ остальныхъ угловъ, показать, что если въ точкахъ  $D$  и  $E$  прямая  $BC$  раздѣлена на три равныя части, то треугольникъ  $ADE$  будетъ равносторонній.

556. Изъ вершинъ противоположныхъ угловъ прямоугольника опущены перпендикуляры на діагональ, показать, что эти перпендикуляры раздѣляютъ діагональ на равныя части, если квадратъ одной стороны прямоугольника равенъ удвоенному квадрату другой?

557. Прямая  $AB$  раздѣлена въ точкѣ  $C$  на какія нибудь двѣ части; на цѣлой  $AB$ , и на ея частяхъ  $AC$  и  $BC$  построены равносторонніе треугольники  $ADB, ACE, BCF$ , изъ коихъ два послѣдніе съ одной стороны прямой, а первый съ противоположной стороны;  $G, H, K$  суть центры круговъ вписанныхъ въ эти треугольники, показать, что  $\angle AGH = \angle ADC, \angle BGK = \angle BDC$  и что  $GH = GK$ .

558. На катетахъ прямоугольнаго треугольника построены квадраты, показать, что если соединимъ вершины острыхъ угловъ треугольника съ противолежащими вершинами квадратовъ, то эти прямыя отрѣжутъ отъ катетовъ треугольника равныя отрѣзки, каждый изъ коихъ есть средне-пропорціональный между остальными отрѣзками.

559. Даны двѣ прямыя и положеніе точки между ними, чрезъ данную точку провести двѣ прямыя, которыя бы, оканчиваясь на данныхъ прямыхъ, находились въ данномъ отношеніи и составляли данный уголъ?

560. Изъ точки  $A$ , на окружности круга  $ABC$ , какъ изъ центра описатьъ кругъ  $PBC$ , пересекающій первый кругъ въ точкахъ  $B$  и  $C$ , проведена, какая нибудь, хорда  $AD$  перваго круга, встрѣчающая общую хорду  $BC$  въ точкѣ  $E$ , а окружность другаго круга въ точкѣ  $O$ , показать, что  $\angle EPO = \angle DPO$ , какое бы ни было положеніе точки  $P$ .

561. Треугольники  $ABC$  и  $ABF$  построены на одномъ основаніи и при томъ такъ, что  $\triangle ABC : \triangle ABF = 2:1$ , продолженія сторонъ  $AF$  и  $BF$  встрѣчаютъ стороны  $AB$  и  $BC$  въ точкахъ  $D$  и  $E$ , отъ точки  $F$  на  $FB$  отложена  $GF = FE$ , въ точкѣ  $O$  отрѣзокъ  $GB$  раздѣленъ пополамъ, показать, что  $BO : BE = DF : DA$ .

562. Точка  $A$  есть центръ круга; другой кругъ, проходящій чрезъ  $A$ , пересекаетъ первый въ точкахъ  $B$  и  $C$ ,  $AD$  есть хорда послѣдняго круга, встрѣчающая  $BC$  въ точкѣ  $E$ , изъ точки  $D$  проведены касательныя  $DF$  и  $DG$  къ первому кругу, показать, что точки  $G$ ,  $E$ ,  $F$  лежатъ на одной прямой линіи.

563. На сторонахъ  $AB$  и  $AC$  треугольника взяты точки  $D$  и  $E$ ,  $AB$  и  $AC$  продолжены до точекъ  $F$  и  $G$ , такъ, что  $BF = AD$  и  $CG = AE$ , проведены прямыя  $BG$  и  $CF$ , встрѣчающіяся въ точкѣ  $H$ , показать, что  $\triangle FHG = \triangle BHC + \triangle ADE$ .

564. Если, въ какомъ нибудь треугольникѣ  $ABC$ , взято  $BD = \frac{1}{4} BC$  и  $CE = \frac{1}{4} AC$ , то прямая линія, проведенная чрезъ  $C$  и чрезъ пересѣченіе прямыхъ  $BE$  и  $AD$ , дѣлитъ сторону  $AB$  на двѣ части, которыя относятся между собою какъ 9:1.

565. Вписана въ кругъ, какая нибудь прямолинейная фигура, показать, что если раздѣлимъ пополамъ дуги и чрезъ точки дѣленія проведемъ касательныя къ кругу, то образуется описанная прямолинейная фигура подобная вписанной.

566. Найти средне-пропорціональную площадь между площадями двухъ прямоугольныхъ подобныхъ треугольниковъ, имѣющихъ общій катетъ?

567. На сторонахъ  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $D$  и  $E$  такъ, что  $CD$  и  $CE$  составляютъ первая одну третью  $AC$ , а вторая одну третью  $BC$ , проведены двѣ прямыя  $BD$  и  $AE$ , пересекающіяся въ точкѣ  $O$ , показать, что  $EO = \frac{1}{4} AE$  и  $DO = \frac{1}{4} BD$ .

568. Діаметры двухъ, касающихся внѣшне въ точкѣ  $C$ , круговъ суть  $CA$  и  $CB$ , хорда  $AD$ , перваго круга, будучи продолжена касается втораго круга въ  $E$ , а хорда  $BF$ , втораго круга, будучи продолжена, касается перваго круга въ точкѣ  $G$ , показать, что  $AD \cdot BF = 4DE \cdot FG$ .

569. Два круга пересекаются въ точкѣ  $A$ , проведена прямая  $BAC$ , пересекающая круги въ точкахъ  $B$  и  $C$ , изъ точекъ  $B$  и  $C$ , какъ изъ центровъ описаны два круга, каждый изъ коихъ пересекаетъ одинъ изъ первыхъ подъ прямымъ угломъ, показать, что эти круги и кругъ, коего діаметръ есть  $BC$ , пересекаются въ одной точкѣ.

570.  $ABCDEF$  есть правильный шестиугольникъ, показать, что  $BF$  дѣлитъ  $AD$  въ отношеніи 1:3.

571. Въ треугольникахъ  $ABC$  и  $DEF$  углы  $A$  и  $D$  равны и  $AB = DF$ , показать, что  $\triangle ABC : \triangle DEF = AC : DE$ .

572. Если  $M$  и  $N$  суть точки, въ которыхъ круги вписанный внутри и вписанный



внѣ въ треугольникъ  $ABC$ , касаются стороны  $AC$ , то если продолжимъ  $BM$  до встрѣчи съ кругомъ вписаннымъ внѣ еще въ точкѣ  $P$ , то  $NP$  будетъ діаметръ.

573. Въ треугольникѣ  $ABC$  уголъ  $A$  прямой,  $D$  есть основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ точки  $A$  на  $BC$ ,  $DM$ ,  $DN$  суть перпендикуляры, опущенные изъ  $D$  на  $AB$  и  $AC$ , показать, что  $\angle BMC = \angle BNC$ .

574. Если изъ точки дѣлящей пополамъ данную дугу круга, проведемъ двѣ прямыя, пересѣкающія хорду данной дуги и окружность круга въ четырехъ точкахъ, то эти точки лежатъ на окружности одного круга.

575. Вписанный внутренне въ треугольникъ  $ABC$  кругъ касается стороны  $AB$  въ точкѣ  $D$ , а вписанный внѣ касается той же стороны въ точкѣ  $E$ , показать, что прямоугольникъ изъ радіусовъ круговъ  $= AD \cdot DB = AE \cdot EB$ .

576. Показать, что геометрическое мѣсто середины прямой, проведенной параллельно основанію треугольника, есть прямая линія.

577. Вписанъ въ треугольникъ параллелограмъ, коего одна сторона лежитъ на основаніи треугольника, а смежныя ей стороны параллельны данному направленію, показать, что геометрическое мѣсто пересѣченія діагоналей такихъ параллелограмовъ есть прямая проходящая чрезъ середину основанія треугольника.

578. На прямой  $AB$ , какъ на гипотенузѣ, построимъ прямоугольный треугольникъ, изъ  $A$  и  $B$  проведены прямыя, дѣлящія противоположныя стороны пополамъ показать, что геометрическое мѣсто пересѣченія этихъ прямыхъ есть кругъ.

579. Изъ данной точки, внѣ двухъ данныхъ не пересѣкающихся круговъ, провести прямую такъ, чтобы части этой прямой, заключающіяся въ кругахъ были пропорціональны радіусамъ круговъ?

580. Въ данный треугольникъ вписать ромбъ такъ, чтобы одна изъ его вершинъ находилась въ данной на основаніи точкѣ, и одна сторона лежала на основаніи?

581. Въ треугольникѣ  $ABC$  уголъ  $C$  прямой,  $ABDE$  есть квадратъ, построенный на гипотенузѣ  $AB$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  суть точки пересѣченія діагоналей квадрата и діагоналей съ катетами, показать что  $\angle DCE + \angle GFH = d$ ?

#### Смѣшанныя задачи и теоремы на всѣ предложенія первыхъ шести книгъ.

582. Дана постоянная точка  $O$  и прямая, чрезъ точку  $O$  проведена, какая нибудь прямая, пересѣкающая данную прямую въ точкѣ  $P$ , на прямой  $OP$  отложенъ отрѣзокъ  $OQ$  такъ, что прямоугольникъ  $OP \cdot OQ$  есть величина постоянная, показать, что геометрическое мѣсто точки  $Q$  есть окружность круга.

583. Дана постоянная точка  $O$  на окружности круга, чрезъ точку  $O$  проведена, какая нибудь прямая, пересѣкающая окружность въ точкѣ  $P$ , на прямой  $OP$  взята точка  $Q$  такъ, что прямоугольникъ  $OP \cdot OQ$  есть величина постоянная, показать, что геометрическое мѣсто точки  $Q$  есть прямая линія.

584. Противоположныя стороны вписаннаго въ кругъ четырехугольника, будучи продолжены, пересѣкаются въ точкахъ  $P$  и  $Q$ , показать, что квадратъ построенный на  $PQ$  равенъ суммѣ квадратовъ построенныхъ на проведенныхъ къ кругу касательныхъ изъ точекъ  $P$  и  $Q$ .

585. Вписанъ въ кругъ четырехугольникъ  $ABCD$ , противоположныя стороны  $AB$  и  $DC$  пересѣкаются въ точкѣ  $F$ , а  $BC$  и  $AD$  въ точкѣ  $E$ , показать, что кругъ описанный на  $EF$ , какъ на діаметрѣ, пересѣкаетъ данный кругъ  $ABCD$  подъ прямымъ угломъ.

586. Изъ вершины прямоугольнаго треугольника опущенъ на гипотенузу перпендикуляръ, изъ основанія перпендикуляра опущены перпендикуляры на катеты, показать, что

прямоугольный треугольник, коего катетами суть эти послѣдніе перпендикуляры, не можетъ быть больше одной четверти даннаго треугольника.

587. Если соединимъ конечности двухъ пересѣкающихся прямыхъ такъ, чтобы образовалось два противоположныхъ вершинами треугольника, то фигура образованная, соединяя точки, дѣлящія данныя прямыя пополамъ, будетъ параллелограмъ, коего площадь равна полуразности площадей треугольниковъ.

588.  $AB$  и  $AC$  суть двѣ касательныя къ кругу въ точкахъ  $B$  и  $C$ ,  $R$  есть какая нибудь точка, на прямой, соединяющей середины касательныхъ  $AB$  и  $AC$ , показать, что отрѣзокъ  $AR$  равенъ касательной, проведенной къ кругу изъ точки  $R$ .

589.  $AB$  и  $AC$  суть касательныя къ кругу,  $PQ$  есть хорда круга, которая, если необходимо должна быть продолжена, пересѣкаетъ прямую, соединяющую середины касательныхъ  $AB$  и  $AC$ , въ точкѣ  $R$ , показать, что  $\angle RAP = \angle AQR$ .

590. Если въ какомъ нибудь четырехугольникѣ проведемъ діагонали, то образуется каждыи двумя смежными сторонами и одною изъ діагоналей четыре треугольника, показать, что четыре круга, проходящіе чрезъ середины сторонъ каждаго изъ сказанныхъ треугольниковъ, пересѣкаются въ одной точкѣ.

591. Изъ какой нибудь точки опущены перпендикуляры на три равнодѣлящія углы равносторонняго треугольника, показать, что одинъ изъ нихъ равенъ суммѣ двухъ другихъ.

592. Два круга пересѣкаются въ точкахъ  $A$  и  $B$ , изъ точки  $B$  возставленъ перпендикуляръ  $CB$  къ  $AB$ , встрѣчающій круги въ точкахъ  $C$  и  $D$ , чрезъ точку  $A$ , проведена равнодѣлящая уголъ внутренній или внѣшній между  $AC$  и  $AD$ , эта равнодѣлящая встрѣчаетъ окружности въ  $E$  и  $F$ , показать, что касательныя въ точкахъ  $E$  и  $F$  пересѣкаются на продолженіи прямой  $AB$ .

593. Раздѣлить треугольникъ двумя прямыми на три части, которыя бы, будучи расположены въ извѣстномъ порядкѣ, образовали параллелограмъ съ углами данной величины.

594.  $ABCD$  есть параллелограмъ а  $P$ , какая нибудь точка, показать, что треугольникъ  $PAC$  равенъ разности треугольниковъ  $PAB$  и  $PAD$ , если точка  $P$  находится внутри угла  $PAD$  или внутри противоположнаго ему угла; и равенъ суммѣ треугольниковъ  $PAB$  и  $PAD$ , если  $P$  находится въ какомъ нибудь другомъ положеніи.

595. Два круга пересѣкаются, проведена прямая  $ABCDE$ , которая пересѣкаетъ одинъ кругъ въ точкахъ  $A$  и  $D$ , а другой въ точкахъ  $B$  и  $E$ , а ихъ общую хорду пересѣкаетъ въ точкѣ  $C$ , показать, что  $\square BD : \square AE = BC \cdot CD : AC \cdot CE$ .

## Книга XI.

Отъ 1 до 12.

596. Показать, что равныя прямыя, проведенныя изъ данной точки до встрѣчи съ данною плоскостью одинаково наклонены къ плоскости.

597. Если двѣ прямыя находящіяся въ одной плоскости одинаково наклонены къ другой плоскости, то онѣ одинаково наклонены и къ общему сѣченію обѣихъ плоскостей.

598. Изъ точки  $A$  опущенъ перпендикуляръ на плоскость и встрѣчаетъ ее въ точкѣ  $B$ , изъ  $B$  опущенъ перпендикуляръ на прямую находящуюся въ плоскости и встрѣчаетъ прямую въ точкѣ  $C$ , показать, что  $AC$  есть перпендикуляръ къ упомянутой прямой.

599. Въ треугольникѣ  $ABC$  перпендикуляры изъ вершинъ  $A$  и  $B$  на стороны  $BC$  и  $AC$  встрѣчаются въ точкѣ  $D$ , изъ  $D$  возставленъ перпендикуляръ къ площади треуголь-

ника,  $E$  есть какая нибудь на немъ точка, показать, что прямая, соединяющая  $E$  съ одною изъ вершинъ треугольника, перпендикулярна къ прямой, проведенной чрезъ эту вершину параллельно противоположной сторонѣ треугольника.

600. Чрезъ двѣ данныя точки внѣ данной плоскости проведены двѣ прямыя пересѣкающіяся на плоскости, найти когда ихъ сумма будетъ наименьшая?

601. Три прямыя линіи, не лежащія въ одной плоскости, пересѣкаются въ одной точкѣ, одна плоскость пересѣкаетъ ихъ въ равномъ разстояніи отъ точки общаго ихъ пересѣченія, показать, что перпендикуляръ, опущенный изъ этой точки на плоскость, встрѣчаетъ ее въ центрѣ круга, описаннаго около треугольника, образованнаго тремя точками прямыхъ встрѣчающихъ плоскость треугольника.

602. Показать построеніе прямой одинаково наклоненной къ тремъ прямымъ, пересѣкающимся въ одной точкѣ?

603. Изъ точки  $E$  опустить перпендикуляры  $EC$  и  $ED$  на двѣ плоскости  $CAB$  и  $DAB$ , пересѣкающіяся по прямой  $AB$ , изъ  $D$  опустимъ перпендикуляръ  $DF$  на плоскость  $CAB$ , встрѣчающій ее въ точкѣ  $F$ , показать, что прямая  $CF$ , продолженная, если необходимо, перпендикулярна къ  $AB$ .

604. Изъ точки опущены перпендикуляры на плоскость и на прямую въ этой плоскости, показать, что прямая, соединяющая основанія перпендикуляровъ, перпендикулярна къ прямой на плоскости.

Отъ 13 до 21.

605. Общее основаніе двухъ пирамидъ есть  $BCD$ , вершины  $A$  и  $E$  пирамидъ лежать въ плоскости, проходящей чрезъ  $BC$ ;  $AB$  и  $AC$  перпендикулярны къ гранямъ  $BED$  и  $CED$ , показать, что углы при  $A$  вмѣстѣ съ углами при  $E$  составляютъ болѣе четырехъ прямыхъ угловъ.

606. Внутри даннаго треугольника вписанъ другой треугольникъ, показать, что сумма угловъ стягиваемыхъ сторонами внутренняго треугольника въ какой нибудь точкѣ, не лежащей въ плоскости треугольника, меньше суммы угловъ стягиваемыхъ, въ той же точкѣ, сторонами внѣшняго треугольника.

607. Чрезъ концы двухъ параллельныхъ прямыхъ (отрѣзковъ)  $AB$  и  $CD$ , проведены параллельныя линіи  $Aa$ ,  $Bb$ ,  $Cc$ ,  $Dd$ , пересѣкающія, какую нибудь плоскость въ точкахъ  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , показать, что  $AB : CD = ab : cd$ .

608. Показать, что перпендикуляръ опущенный изъ вершины правильнаго тетраэдра на противоположную грань равенъ трѣмъ взятому перпендикуляру, опущенному изъ основанія перваго перпендикуляра на одну изъ граней.

609. Основаніе треугольной пирамиды есть равносторонній треугольникъ, углы при вершинѣ суть прямые, показать, что сумма перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ какой нибудь точки основанія на остальные три грани есть величина постоянная.

610. Три прямыя линіи, не лежащія въ одной плоскости, пересѣкаются въ одной точкѣ, чрезъ эту послѣднюю точку проведена еще прямая, внутри треграннаго угла, образуемаго тремя первыми прямыми, показать, что сумма угловъ, образуемыхъ четвертою прямою съ тремя первыми меньше суммы и больше полусуммы угловъ, образуемыхъ тремя первыми между собою.

611. Три прямыя линіи, не лежащія въ одной плоскости, пересѣчены тремя плоскостями, въ одномъ и томъ же отношеніи, двѣ изъ плоскостей параллельны, показать, что и третья будетъ параллельна двумъ первымъ, если точки пересѣченія ея съ тремя прямыми не лежатъ на одной прямой линіи.



612. Провести двѣ параллельныя плоскости, одну чрезъ одну прямую, а другую чрезъ другую не пересѣкающуюся съ первой прямою?

613. Если двѣ не параллельныя плоскости, пересѣчены двумя параллельными плоскостями, то линіи пересѣченія первыхъ двухъ съ двумя послѣдними образуютъ равные углы.

614. Изъ точки  $A$ , находящейся на одной изъ двухъ плоскостей, проведены прямыя  $AB$  и  $AC$ , первая перпендикулярно къ первой плоскости, а вторая перпендикулярно ко второй, прямыя  $AB$  и  $AC$  встрѣчаютъ вторую плоскость въ точкахъ  $B$  и  $C$ , показать, что  $BC$  есть перпендикуляръ къ пересѣченію двухъ плоскостей.

615. Многоугольники, образованные пересѣченіемъ призмы параллельными плоскостями равны.

616. Многоугольники образованные пересѣченіемъ пирамиды параллельными плоскостями, подобны.

617. Прямая линія  $PBbr$  пересѣкаетъ двѣ параллельныя плоскости въ  $B$  и  $b$ , точки  $P$  и  $p$  равно отстоятъ отъ плоскостей;  $PAa$  и  $pcC$  суть другія двѣ прямыя, проведенныя чрезъ точки  $P$  и  $p$  до пересѣченія съ плоскостями, показать, что треугольники  $ABC$  и  $abc$  равны.

618. Изъ точекъ  $A$  и  $B$  надъ данною плоскостью опущены перпендикуляры  $AE$  и  $BF$  на нее; проведена еще плоскость чрезъ  $A$  перпендикулярно къ  $AB$ , показать, что пересѣченіе этой плоскости съ данною перпендикулярно къ прямой  $EF$ .

## Книга XII.

Отъ 1 до 18.

619. Что означаетъ выраженіе: квадратура круга невозможна? Показать приемъ съ помощью котораго Архимедъ первый нашелъ приближенное отношеніе окружности къ діаметру?

620. Построить кругъ, коего площадь была бы равна удвоенной площади другаго даннаго круга?

621. Данъ кругъ  $ABC$ , требуется построить кругъ  $abc$  концентрическій съ даннымъ, коего бы площадь была равна утроенной площади даннаго круга?

622. Данный кругъ раздѣлить, концентрическими кругами, на нѣсколько равныхъ частей?

623. Данный кругъ раздѣлить на нѣсколько равныхъ частей, коихъ бы периметры были равны окружности даннаго круга?

624. Два круга касаются внутренне, площадь луночки, отдѣленной отъ большаго круга меньшимъ, равна удвоенной площади меньшаго круга, найти отношеніе между діаметрами круговъ?

625. Діаметръ даннаго круга раздѣленъ на двѣ части, на каждой изъ нихъ построимъ, какъ на діаметрѣ кругъ, площадь заключающаяся между данною окружностью и окружностями, построенныхъ круговъ, равна суммѣ площадей построенныхъ круговъ, найти въ какомъ отношеніи раздѣленъ діаметръ даннаго круга?

626. Около правильнаго тетраедра описать шаръ и найти радіусъ шара, когда ребро тетраедра есть единица?

627. Дана неправильная часть шара, показать какъ практически построить радіусъ шара къ которому принадлежитъ данная часть поверхности шара?

628. Три шара положены на горизонтальной плоскости, такъ что всѣ касаются между



собою, построить треугольник, коего вершины находятся въ точкахъ прикосновенія шаровъ съ горизонтальною плоскостью?

629. Построить пять правильныхъ тѣлъ?

630. Въ тетраедръ вписать шаръ?

631. Найти объемъ пирамиды по данной высотѣ и основанію, какаѣ бы нибыла фигура этого послѣдняго?

632. Изъ десяти шаровъ сложена треугольная пирамида слѣдующимъ образомъ: на землѣ лежатъ шесть шаровъ, на этихъ послѣднихъ три шара, и на этихъ трехъ лежатъ одинъ, найти разстояніе этого послѣдняго шара отъ земли?

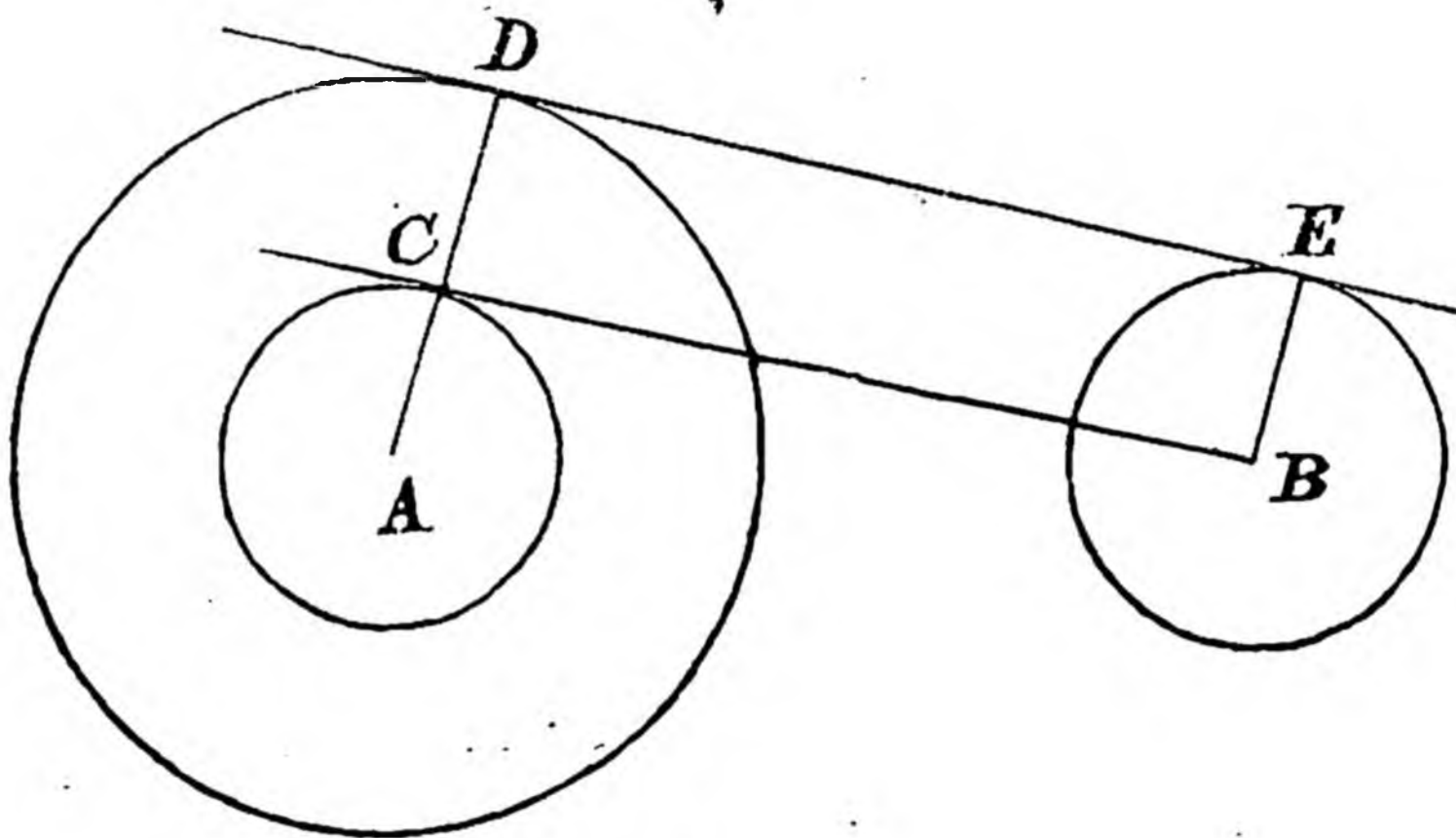
633. Найти отношеніе между угломъ въ сегментѣ круга и прямымъ угломъ, когда сегментъ круга равенъ одной четверти площади даннаго круга?

### Рѣшеніе нѣкоторыхъ, заслуживающихъ особеннаго вниманія, задачъ

634. Провести касательную къ двумъ даннымъ кругамъ?

*Рѣшеніе.* Пусть  $A$  будетъ центръ большаго круга, а  $B$  центръ меньшаго. Изъ центра  $A$  радіусомъ равнымъ разности радіусовъ данныхъ круговъ опишемъ кругъ, изъ центра  $B$  проведемъ касательную къ описанному кругу и пусть она касается круга въ точкѣ  $C$  (фиг. 572).

Фиг. 572.



Соединимъ  $A$  съ  $C$  и продолжимъ прямую  $AC$  до встрѣчи ея съ окружностью большаго круга въ точкѣ  $D$ . Проведемъ радіусъ  $BE \parallel AD$ , соединимъ  $D$  съ  $E$ , то  $DE$  и будетъ общая касательная.

Такъ какъ изъ точки  $B$  къ кругу, коего радіусъ есть  $AC$ , можно провести двѣ касательныя, то можно показать, что обѣ касательныя пересѣкутся въ точкѣ, лежащей на продолженіи прямой  $AB$ , соединяющей центры данныхъ круговъ. Это построеніе прилагается не только тогда, когда круги находятся одинъ внѣ другаго, но и тогда когда они касаются или пересѣкаются.

Если круги находятся одинъ внѣ другаго, то можно найти еще два рѣшенія. Изъ центра  $A$  опишемъ кругъ радіусомъ равнымъ суммѣ радіусовъ данныхъ круговъ и поступая какъ и прежде, только съ тѣмъ исключеніемъ, что  $BE$  и  $AD$  должны быть проведены въ противоположныхъ направленіяхъ, или же съ противоположныхъ сторонъ прямой  $AB$ . Можно и здѣсь показать, что двѣ, такимъ образомъ, проведенныя касательныя пересѣкутся въ точкѣ лежащей на  $AB$ .

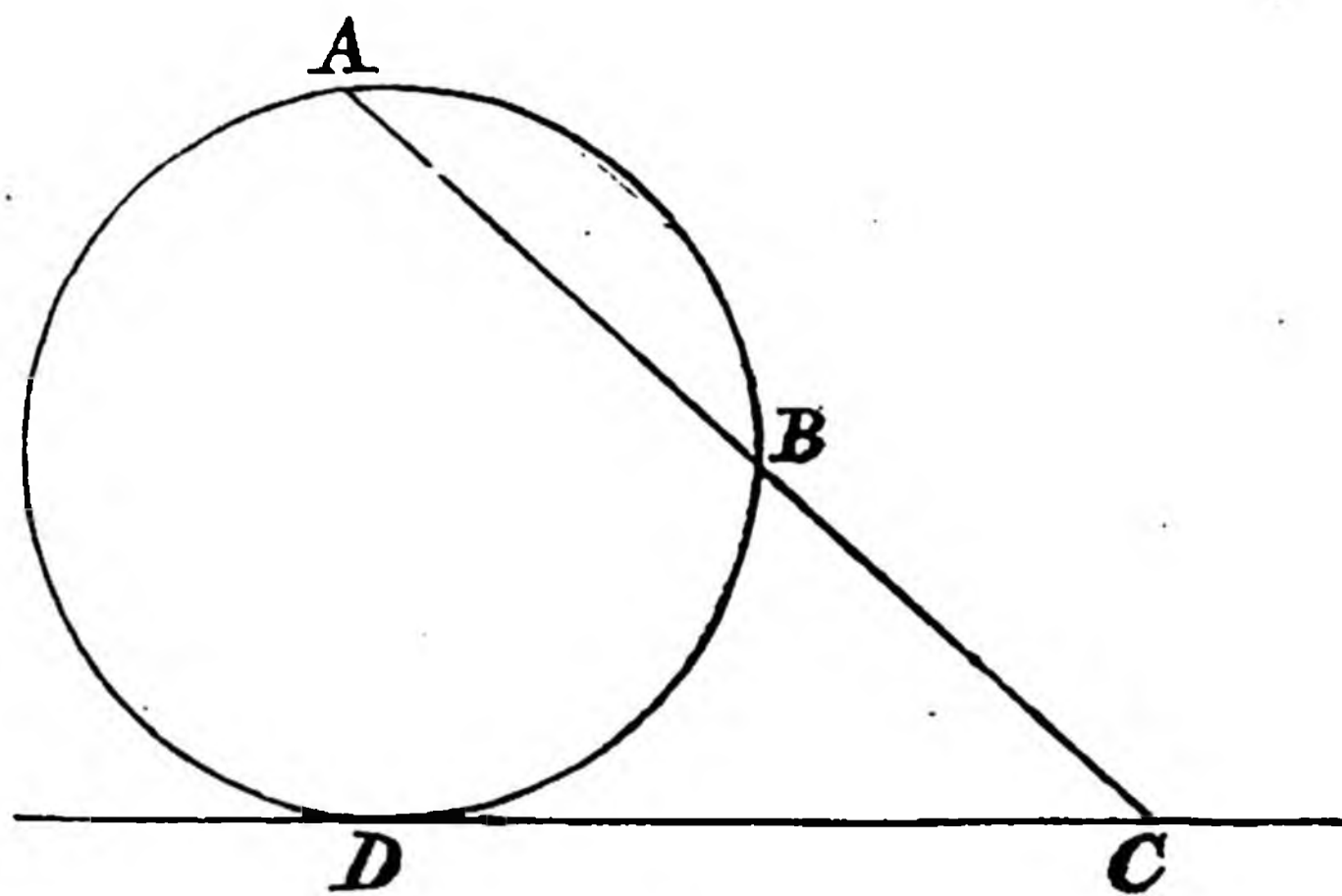
635. Описать кругъ, проходящій чрезъ три данныя точки, не лежащія на одной прямой линіи?

*Рѣшеніе.* Эта задача рѣшена въ 5 предл. 4 книги Евклида.

636. Описать кругъ, который бы проходилъ чрезъ двѣ данныя точки, лежащія по одну сторону данной прямой, и касался бы этой прямой?

*Рѣшеніе.* Пусть  $A$  и  $B$  будутъ данныя точки и  $EC$  данная прямая, соединимъ  $A$  и  $B$  прямою и продолжимъ ее до встрѣчи съ  $EC$  въ точкѣ  $C$  (фиг. 573).

Фиг. 573.



Построимъ квадратъ равный прямоугольнику  $AC \cdot BC$  и на данной прямой отъ точки  $C$  отложимъ отрезокъ  $CE$  равный сторонѣ построеннаго квадрата (кн. 2, пред. 14). Чрезъ точки  $A$ ,  $B$ ,  $E$  проведемъ кругъ (кн. 3, пред. 37), это и будетъ искомый кругъ.

Отрезокъ  $CE$  можетъ быть отложенъ отъ точки  $C$  и въ другую сторону, поэтому задача имѣетъ два рѣшенія.

Если прямая  $AB \parallel CE$ , то предыдущее построение не имѣетъ мѣста, а въ этомъ случаѣ поступаютъ слѣдующимъ образомъ: отрезокъ  $AB$  въ точкѣ  $D$  дѣлятъ пополамъ, изъ точки  $D$  возставляютъ перпендикуляръ къ  $AB$  и продолжаютъ его до встрѣчи съ данною прямою въ точкѣ  $C$ , и чрезъ три точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  проводятъ кругъ, который и есть требуемый.

637. Описать кругъ, который бы проходилъ чрезъ данную точку и касался бы двухъ данныхъ прямыхъ (фиг. 574)?

*Рѣшеніе.* Пусть  $A$  будетъ данная точка, продолжимъ данныя прямая до встрѣчи въ точкѣ  $B$  и соединимъ  $B$  съ  $A$ . Чрезъ точку  $B$  проведемъ  $BC$  равнодѣлящую уголъ между данными прямыми, въ которомъ лежитъ точка  $A$ , на этой равнодѣлящей возьмемъ, какую нибудь точку  $C$  и изъ нея опустимъ перпендикуляръ на одну изъ данныхъ прямыхъ, который встрѣчаетъ прямую въ точкѣ  $D$ , изъ точки  $C$ , какъ изъ центра, радиусомъ  $CD$  опишемъ кругъ, который встрѣчаетъ  $AB$  или ея продолженіе въ точкѣ  $E$ . Соединимъ  $C$  съ  $E$  и чрезъ  $A$  проведемъ  $AF \parallel CE$ , пусть  $AF$  встрѣчаетъ  $BC$  или ея продолженіе въ точкѣ  $F$ . Кругъ описанный изъ  $F$ , какъ изъ центра, радиусомъ  $FA$  будетъ касаться данныхъ прямыхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, опустимъ изъ  $F$  перпендикуляръ  $FG$  на  $BD$ , который встрѣчаетъ  $BD$  въ точкѣ  $G$ . Такъ какъ (кн. 6, пред. 4):

$$CE : FA = BC : BF$$

а

$$CD : FG = BC : BF$$

то:

$$CE : FA = CD : FG$$

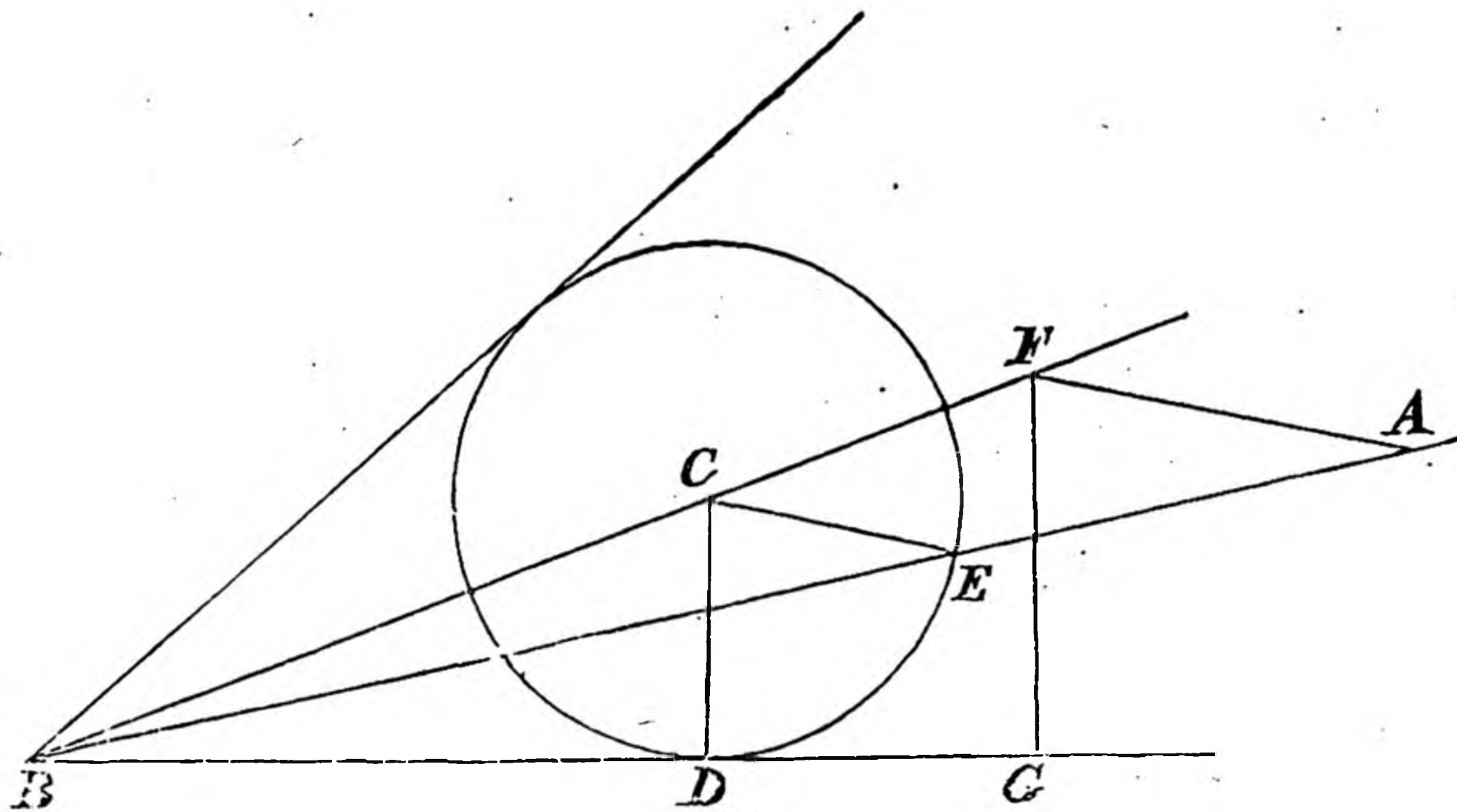
откуда:

$$CE : CD = FA : FG$$

но  $CE = CD$ , слѣдовательно и  $FA = FG$ .

Если точка  $A$  будетъ находится на прямой  $BC$ , то точка  $E$  опредѣляется какъ и выше, и затѣмъ  $D$  соединяють съ  $E$  и чрезъ точку  $A$  проводятъ  $AG \parallel DE$ . Эта прямая

Фиг. 574.



встрѣчаетъ  $BD$  или ея продолженіе въ точкѣ  $G$ , изъ точки  $G$  возсталяютъ перпендикуляръ, пересѣченіе котораго съ  $BC$  и будетъ центръ искомаго круга.

Такъ какъ кругъ, описанный изъ точки  $C$ , какъ изъ центра, радіусомъ  $CD$ , пересѣкаетъ  $AB$  въ двухъ точкахъ, то задача имѣеть два рѣшенія.

Если точка  $A$  находится на одной из данных прямых, то надобно из этой точки возставить перпендикуляръ къ этой прямой, пересѣченіе котораго съ одной изъ равнодѣлящихъ уголъ между данными прямыми и будетъ центръ искомаго круга.

Если двѣ данныя прямыя параллельны, то прямая  $BC$  проводится параллельно обѣимъ прямымъ въ равномъ отъ каждой изъ нихъ разстояніи.

638. Описать кругъ, который бы касался трехъ данныхъ прямыхъ, изъ коихъ не больше двухъ могли бы быть параллельны?

*Рѣшеніе.* Эта задача рѣшена въ кн. 4, пред. 4. Замѣтимъ только, что если три данныя прямыя образуютъ треугольникъ, то можно описать четыре круга удовлетворяющіе требованію задачи: одинъ кругъ касается всѣхъ сторонъ треугольника, а три остальные касаются одной стороны и двухъ продолженій сторонъ. Если изъ трехъ данныхъ прямыхъ двѣ параллельны, то можно описать только два круга одинъ съ одной, а другой съ другой стороны не параллельной прямой.

639. Описать кругъ, который бы касался даннаго круга и данной прямой въ данной на ней точкѣ (фиг. 575)?

*Рѣшеніе.* Пусть  $A$  будетъ данная точка на данной прямой, и  $C$  центръ даннаго круга. Чрезъ точку  $C$  проведемъ прямую  $BD$  перпендикулярно къ данной прямой, которая пересѣкаетъ окружность круга въ точкахъ  $B$  и  $D$ , изъ коихъ  $D$  есть точка, лежащая дальше отъ прямой. Соединимъ точку  $D$  съ  $A$ , прямая  $AD$  пусть пересѣкаетъ окружность въ точкѣ  $E$ . Изъ данной точки  $A$  возставимъ перпендикуляръ къ данной прямой, который пересѣчетъ прямую  $CE$ , соединяющую центръ круга съ точкою  $E$ , въ точкѣ  $F$ . Точка  $F$  и будетъ центръ искомаго круга, а  $AF$  радіусъ его.

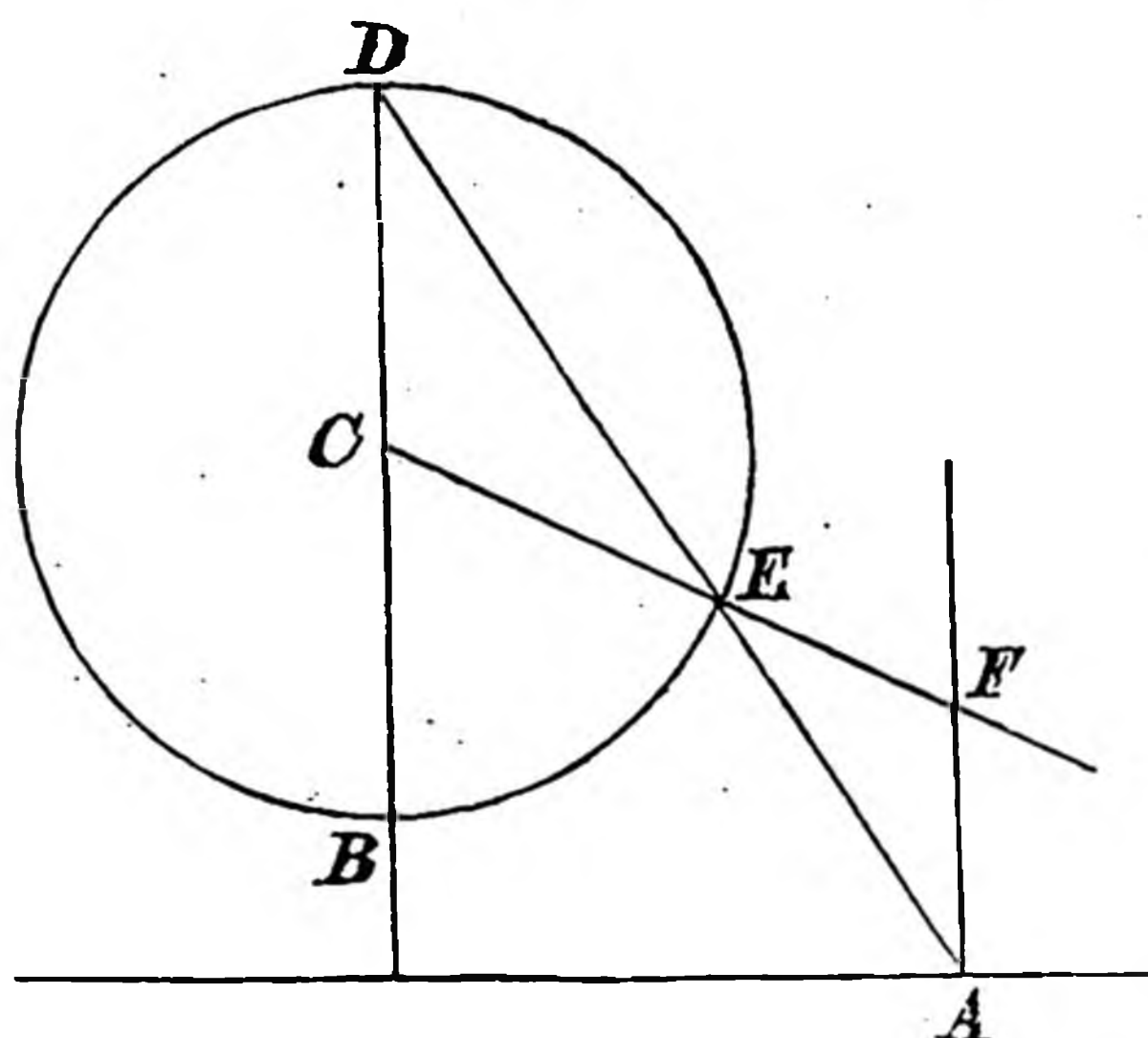
Въ самомъ дѣлѣ,  $\angle AEF = \angle CED$  (кн. 1, пред. 15) и  $\angle EAF = \angle CDE$  (кн. 1 пред. 29), слѣдовательно  $\angle AEF = \angle EAF$ , а потому  $AF = EF$  (кн. 1, пред. 6).

Второе рѣшеніе задачи получится соединяя точку  $A$  съ точкою  $B$ , лежащую на данной окружности ближе къ данной прямой.



Если данная прямая не пересекает данную окружность, то кругъ полученный въ первомъ рѣшеніи съ даннымъ кругомъ касается внѣшне, а кругъ полученный во второмъ рѣшеніи касается даннаго внутренне.

Фиг. 575.



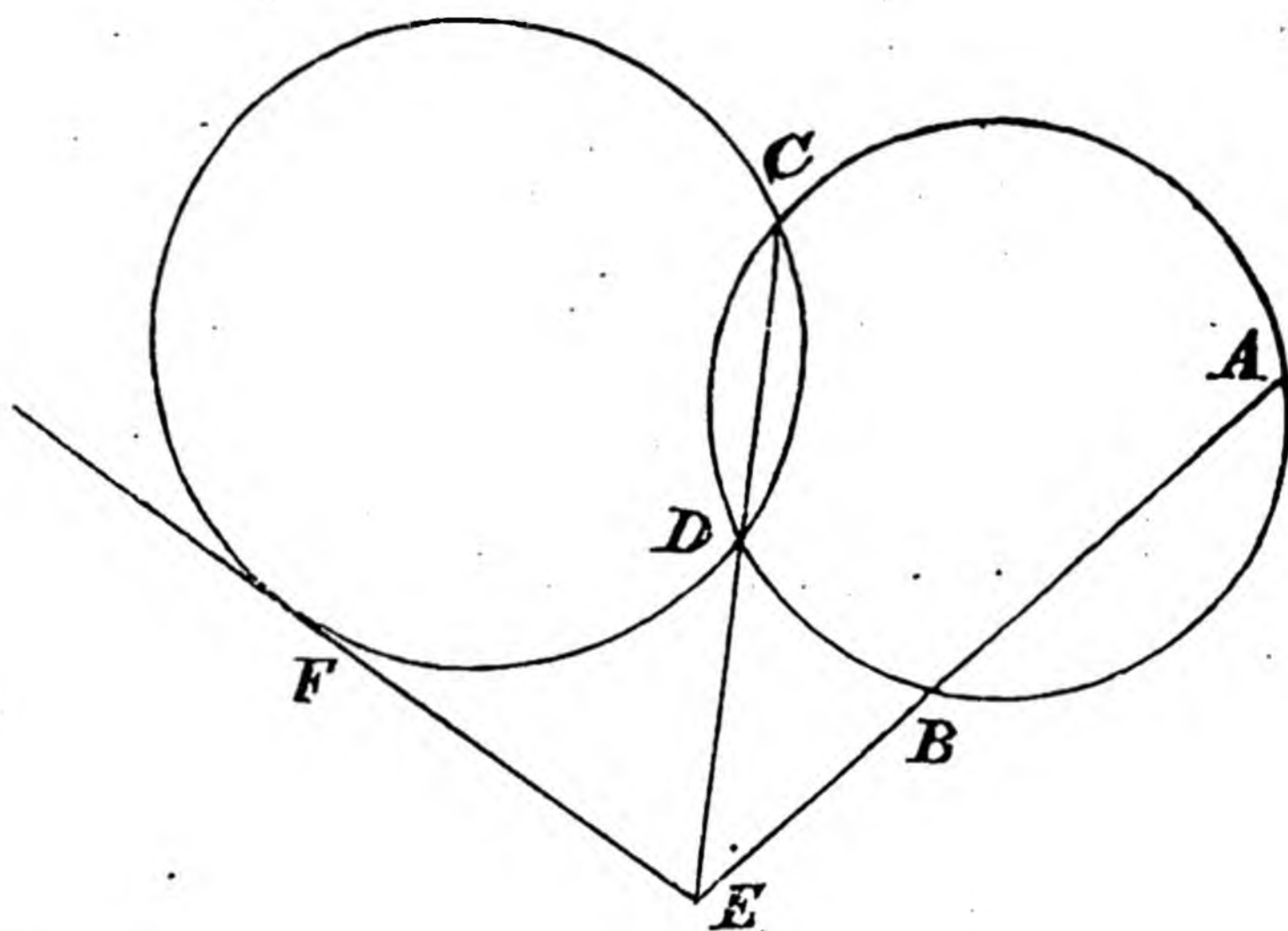
Если данная прямая пересекает данный кругъ, то оба рѣшенія дадутъ круги, касающіеся даннаго круга внѣшне.

640. Описать кругъ который бы проходилъ чрезъ двѣ данныя точки и касался бы даннаго круга (фиг. 576)?

*Рѣшеніе.* Пусть  $A$  и  $B$  будутъ данныя точки. На окружности даннаго круга возьмемъ, какую нибудь точку  $C$  и опишемъ кругъ, проходящій чрезъ три точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

Если этотъ кругъ касается даннаго, то онъ и есть требуемый, если же нѣтъ, то пусть точка  $D$  будетъ другая точка встрѣчи его съ даннымъ кругомъ.

Фиг. 576.



Продолжимъ прямыя  $AB$  и  $CD$  до встрѣчи ихъ въ точкѣ  $E$ , изъ точки  $E$  проведемъ касательную  $EF$  къ данному кругу, пусть точка  $F$  будетъ точка касанія. Кругъ описанный чрезъ точки  $A$ ,  $B$ ,  $F$  и будетъ требуемый (кн. 3, пред. 35, 37).

Задача эта имѣетъ два рѣшенія, такъ какъ изъ точки  $E$  къ данному кругу можно провести двѣ касательныя.

Если перпендикуляръ, возставленный изъ середины хорды  $AB$ , проходитъ чрезъ центръ даннаго круга, то въ этомъ случаѣ, точка  $E$  находится на безконечности, такъ какъ  $AB \parallel CD$  и точка  $F$  получится, проводя касательныя къ данному кругу параллельно хордѣ  $AB$ .

641. Описать кругъ, который бы касался двухъ данныхъ прямыхъ и даннаго круга?



*Рѣшеніе.* Проведемъ двѣ прямыя параллельно даннымъ прямымъ на разстояніи радиуса даннаго круга отъ каждой изъ данныхъ прямыхъ и съ противоположной ихъ стороны относительно даннаго круга. Опишемъ кругъ, касающійся проведенныхъ прямыхъ и проходящій чрезъ центръ даннаго круга. Кругъ, имѣющій центръ этого послѣдняго круга, а радиусомъ разность радиусовъ описаннаго и даннаго круговъ, будетъ требуемый.

Такъ какъ можно описать два круга касающихся проведенныхъ прямыхъ и проходящихъ чрезъ центръ даннаго круга, то задача имѣетъ два рѣшенія, въ одномъ изъ рѣшеній кругъ будетъ касаться даннаго круга внѣшне, а въ другомъ внутренне.

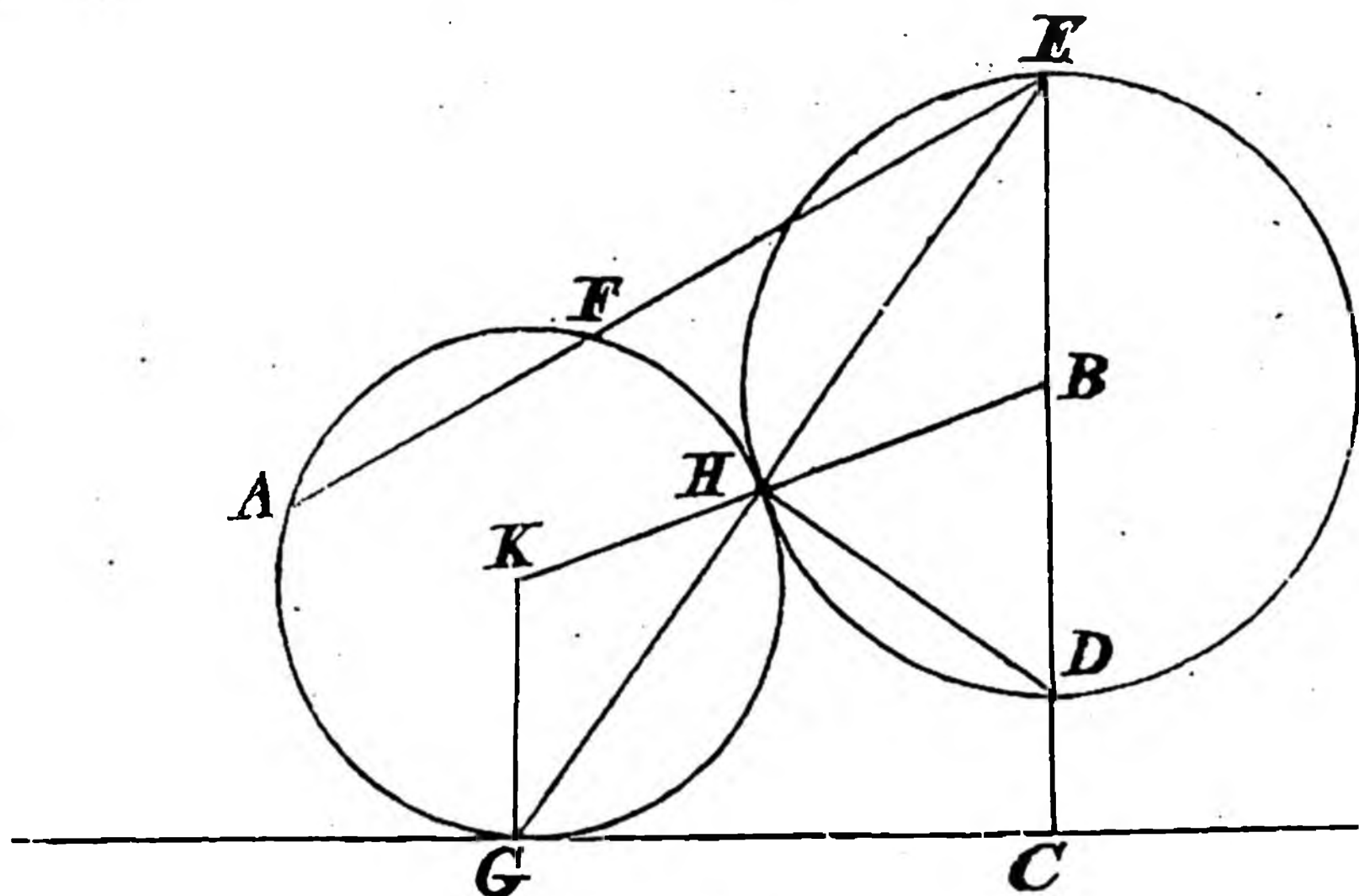
Если провести прямая параллельно даннымъ, съ той же стороны ихъ съ коихъ ле-  
жить центръ даннаго круга, то получится два рѣшенія въ которыхъ искомые круги ка-  
саются даннаго оба внутренне.

Слѣдовательно задача имѣетъ четыре рѣшенія.

642. Описать круг, который бы проходилъ чрезъ данную точку, касался бы данной прямой и даннаго круга (фиг. 577)?

*Рѣшеніе.* Пусть  $A$  будетъ данная точка,  $GC$  данная прямая и  $B$  центръ даннаго круга. Изъ центра  $B$  опустимъ перпендикуляръ на данную прямую, который встрѣтитъ ее въ точкѣ  $C$ , а окружность въ точкахъ  $E$  и  $D$ . Соединимъ  $A$  съ  $E$  и на прямой  $AE$  опредѣлимъ точку  $F$  такъ, чтобы  $EA \cdot EF = EC \cdot ED$ ; это можно сдѣлать проведя кругъ чрезъ точки  $A$ ,  $C$ ,  $D$ , который пересѣчетъ прямую  $EA$  въ искомой точкѣ  $F$  (кн. 3, пред. 36, слѣд.). Опишемъ кругъ, который бы проходилъ чрезъ точки  $A$  и  $F$  и касался бы данной прямой. Это и будетъ искомый кругъ.

**Фиг. 577.**



Въ самомъ дѣлѣ положимъ, что описанный такимъ образомъ кругъ касается данной прямой въ точкѣ  $G$ , соединимъ  $G$  съ  $E$ , прямая  $EG$  пересѣчетъ данный кругъ въ точкѣ  $H$ , проведемъ прямую  $DH$ . Такъ какъ треугольники  $END$  и  $ECG$  подобны, то  $EC \cdot ED = EG \cdot EH$  (кн. 3, пред. 31, кн. 6, пред. 4 и 16). Слѣдовательно  $EA \cdot EF = EH \cdot EG$ , а потому точка  $H$  находится на окружности описаннаго круга (кн. 3, пред. 36, слѣд.). Пусть  $K$  будетъ центръ круга, проходящаго чрезъ  $A$  и  $F$  и касающагося данной прямой въ точкѣ  $G$ . Проведемъ прямыя  $KG$ ,  $KH$  и  $NB$ .

Легко можно показать, что  $\angle KHG = \angle EHB$  (кн. 1, пред. 29, 5). Следовательно  $KHB$  есть прямая линия, а потому описанный круг касается данного круга.

Такъ какъ задача: провести кругъ чрезъ двѣ данныя точки и касающійся данной прямой имѣеть два рѣшенія, то и здѣсь получится два рѣшенія.

Для рѣшенія задачи мы соединили точку  $A$  съ  $E$ , но можно соединить  $A$  съ  $D$  и точно также получить еще два рѣшенія, слѣдовательно задача имѣетъ четыре рѣшенія.

643. Описать кругъ, который бы касался двухъ данныхъ круговъ и данной прямой?

*Рѣшеніе.* Пусть  $PQ$  будетъ данная прямая,  $A$  центръ меньшаго, а  $B$  центръ большаго круга,  $AD$  и  $BC$  ихъ радіусы.

Здѣсь могутъ быть слѣдующіе случаи: 1-й искомый кругъ можетъ касаться внѣшне обоихъ данныхъ круговъ, 2-й онъ можетъ касаться обоихъ внутренне и 3-й онъ можетъ касаться одного внѣшне, а другаго внутренне.

Положимъ центръ искомаго круга, касающагося внѣшне обоихъ данныхъ круговъ, есть  $O$ . Изъ точки  $O$  какъ изъ центра опишемъ кругъ проходящій чрезъ центръ  $A$  меньшаго круга, эта окружность касается круга описаннаго изъ точки  $B$ , какъ изъ центра, радіусомъ равнымъ разности радіусовъ данныхъ круговъ и касается прямой  $P_1Q_1$ , проведенной параллельно  $PQ$  на разстояніи отъ нея равномъ радіусу меньшаго изъ данныхъ круговъ, и съ противоположной стороны прямой  $PQ$  относительно центра  $B$ . Слѣдовательно рѣшеніе настоящей задачи сведено на рѣшеніе предыдущей (638).

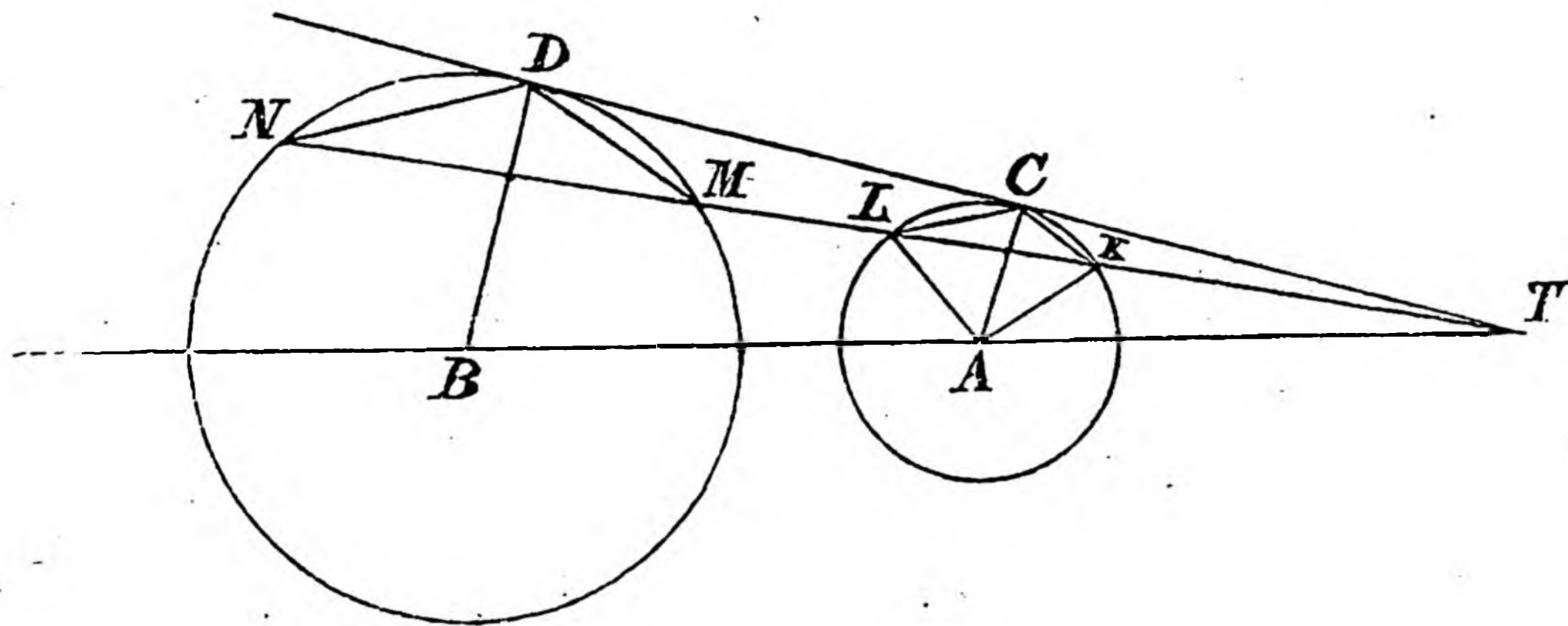
Эта послѣдняя задача (638) имѣетъ *четыре* рѣшенія, изъ коихъ только *два* даютъ рѣшеніе предложенной задачи: эти окружности, касаются внѣшне круга, описаннаго около  $B$ , радіусомъ  $BF=BC-AD$ . Въ самомъ дѣлѣ, если рассмотримъ окружность  $O'$ , проходящую чрезъ  $A$ , касающуюся прямой  $P_1Q_1$  и имѣющую внутренне касаніе съ кругомъ  $BF$ , то кругъ концентрическій съ кругомъ  $O'$  можетъ касаться круга  $AD$  и прямой  $PQ$ , но онъ не касается окружности  $BC$ .

Если прямую  $P_1Q_1$  замѣнимъ прямою  $P_2Q_2$  симметрично расположенной къ прямой  $P_1Q_1$  относительно  $PQ$  и рассмотримъ вспомогательную окружность  $BF$ , то найдемъ *два* другіе круга удовлетворяющіе задачѣ.

Наконецъ если прямая  $P_1Q_1$  и  $P_2Q_2$  будемъ послѣдовательно сочетать съ окружностью, описанной изъ точки  $B$ , какъ изъ центра радіусомъ равнымъ  $BC+AD$ , то получимъ еще *четыре* рѣшенія, слѣдовательно предложенная задача можемъ имѣть до *восьми* рѣшеній.

644. Пусть  $A$  будетъ центръ круга,  $B$  центръ другаго большаго, пусть  $CD$  будетъ прямая, касающаяся перваго круга въ точкѣ  $C$ , а втораго въ точкѣ  $D$  и пересѣкающая продолженіе прямой  $AB$  въ точкѣ  $T$ . Изъ точки  $T$  проведена, какая нибудь прямая, пересѣкающая кругъ  $A$  въ точкахъ  $K, L$ , а кругъ  $B$  въ точкахъ  $M, N$ , слѣдовательно точки пересѣченія такой прямой будутъ  $T, K, L, M, N$ . Я говорю, что прямая:  $AK, KC, CL, LA$  соотвѣтственно параллельны прямымъ  $BM, MD, DN, NB$ , и что  $TK.TN=TL.TM=TC.TD$  (фиг. 578).

Фиг. 578.



*Доказат.* Проведемъ прямая  $AC$  и  $BD$ . Треугольники  $TAC$  и  $TBD$  подобны, слѣдовательно (кн. 6, пред. 4 и кн. 5, пред. 16):

$$TA : TB = AC : BD = AK : BM$$

Откуда треугольники  $TAK$  и  $TBM$  подобны (кн. 6, пред. 7), слѣдовательно

$\angle TAK = \angle TBM$ , откуда  $AK \parallel BM$ . Точно также  $AL \parallel BN$ . Такъ какъ  $AK \parallel BM$  и  $AC \parallel BD$ , то  $\angle CAK = \angle DBM$ , а слѣдовательно  $\angle CLK = \angle DNM$  (кн. 3, пред. 20), откуда  $CL \parallel DN$ . Точно также  $CK \parallel DM$ .

Изъ кн. 3, пред. 37 и кн. 6, пред. 16, мы имѣемъ:

$$TM:TD=TD:TN$$

и (кн. 6, пред. 4):

$$TM:TD=TK:TC$$

слѣдовательно:

$$TK:TC=TD:TN$$

откуда прямоугольникъ  $TK.TN=TC.TD$ . Точно также  $TL.TM=TC.TD$ .

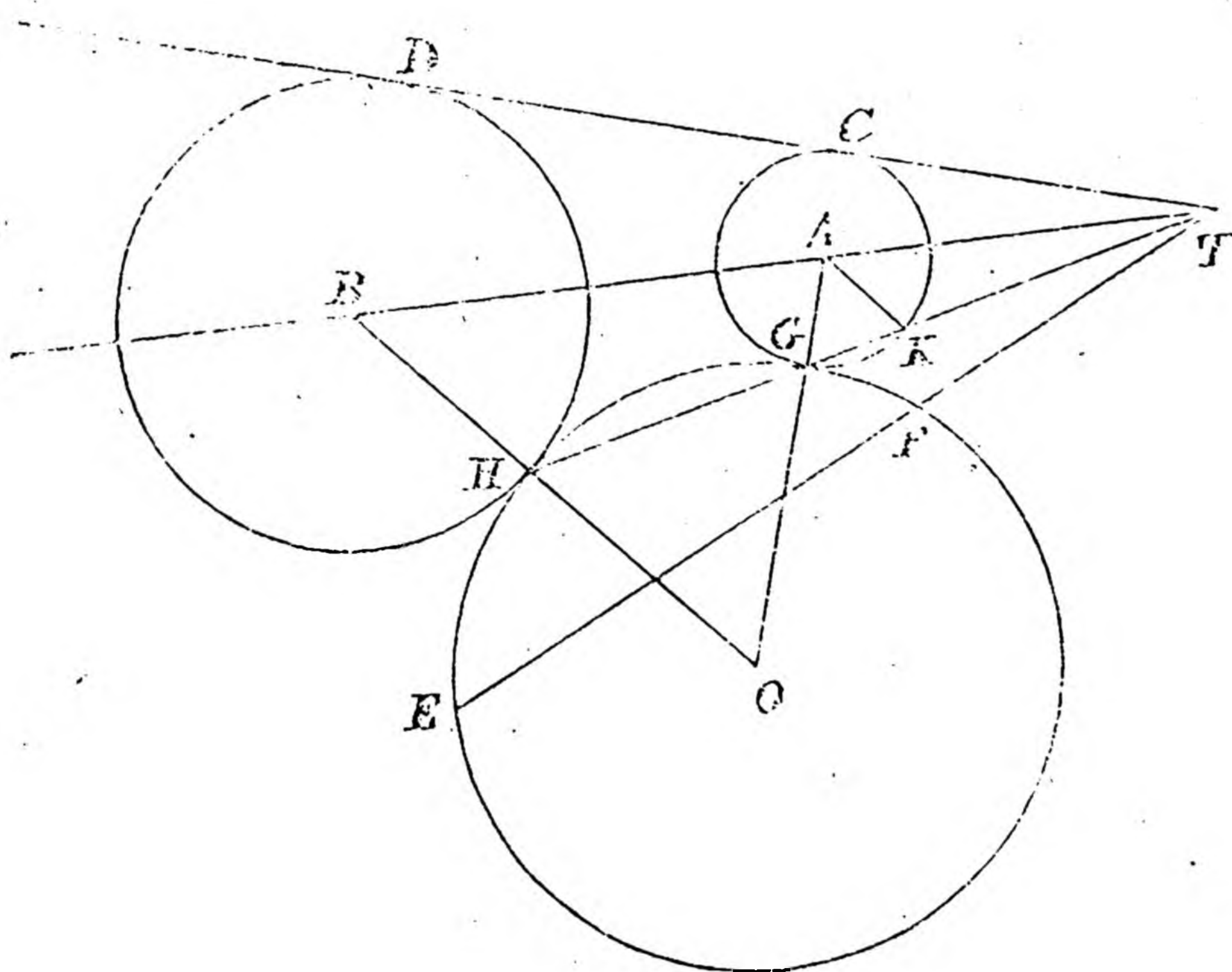
Если круги находятся одинъ внѣ другаго, то мы можемъ предположить, что касательная къ обоимъ кругамъ пересѣкаетъ прямую  $AB$  въ точкѣ  $T$ , лежащей между  $A$  и  $B$  и предъидущія свойства будутъ имѣть мѣсто лишь бы измѣнить буквы  $K$  на  $L$ , такъ что пять буквъ будутъ, въ этомъ случаѣ, въ слѣдующемъ порядкѣ:  $L, K, T, M, N$ .

Точка  $T$  называется *центромъ подобія* двухъ круговъ, слѣдовательно, если круги находятся одинъ внѣ другаго, то центровъ подобія есть два.

645. Описать кругъ, который бы проходилъ чрезъ данную точку и касался бы двухъ данныхъ круговъ (фиг. 579)?

*Рѣшеніе.* Пусть  $A$  будетъ центръ меньшаго круга, а  $B$  центръ большаго,  $E$  данная точка.

Фиг. 579.



Проведемъ касательную къ обоимъ даннымъ кругамъ, пусть она касается ихъ въ точкахъ  $C$  и  $D$  и встрѣчаетъ продолженіе прямой  $BA$  въ точкѣ  $T$ . Соединимъ данную точку  $E$  съ  $T$  и раздѣлимъ прямую  $TE$  въ точкѣ  $F$  такъ, чтобы  $TE.TF=TC.TD$ . Опишемъ кругъ, проходящій чрезъ точки  $E$  и  $F$  и касающійся одного изъ данныхъ круговъ. Положимъ, что описанный кругъ касается меньшаго круга и пусть точка касанія будетъ  $G$ . Слѣдовательно остается показать, что этотъ кругъ касается и большаго круга. Для этого проведемъ прямую  $TG$  и продолжимъ ее до встрѣчи съ большимъ кругомъ въ точкѣ  $H$ , то  $TG.TH=TC.TD$  (644), откуда  $TG.TH=TE.TF$ , слѣдовательно, описанный кругъ проходить чрезъ точку  $H$ .



Пусть  $O$  будетъ центръ этого круга, поэтому  $OGA$  есть прямая линия; остается показать что  $ONB$  есть прямая линия.

Пусть  $TG$  пересѣкаетъ меньшій кругъ еще въ точкѣ  $K$ , то  $AK \parallel BN$  (644), откуда уголь  $\angle AKT = \angle BHG$  и  $\angle AKG = \angle AGK = \angle OGH = \angle OHG$ . Слѣдовательно  $\angle BHG + \angle OHG = \angle AKT + \angle AKG = 2d$ , откуда видимъ, что  $ONB$  есть прямая линия.

Такъ какъ задача (643) имѣетъ два рѣшенія, то и настоящая задача имѣетъ также два рѣшенія, но если круги находятся одинъ внѣ другаго, то можно вмѣсто внѣшняго центра подобія круговъ  $T$  взять внутренній (644) и получить еще два рѣшенія задачи, слѣдовательно она имѣетъ четыре рѣшенія. Кругъ проходя чрезъ данную точку можетъ касаться: 1-е обоихъ круговъ внѣшне, 2-е обоихъ внутренне и 3-е одного внѣшне, а другаго внутренне.

646. Описать кругъ, который бы касался трехъ данныхъ круговъ?

*Рѣшеніе.* Пусть  $A$  будетъ центръ наименьшаго изъ трехъ данныхъ круговъ, или по крайней мѣрѣ не большаго изъ остальныхъ. Пусть  $B$  и  $C$  будутъ центры остальныхъ данныхъ круговъ. Изъ  $B$ , какъ изъ центра, радіусомъ равнымъ разности радіусовъ круговъ  $A$  и  $B$ , опишемъ кругъ. Точно также изъ центра  $C$  радіусомъ равнымъ разности радіусовъ круговъ  $A$  и  $C$ , опишемъ кругъ. Затѣмъ опишемъ кругъ который бы касался двухъ описанныхъ круговъ внѣшне и проходилъ чрезъ центръ  $A$  (645), то кругъ, имѣющій центромъ центръ этого послѣдняго круга, а радіусомъ разность радіусовъ его и круга, коего центръ есть  $A$ , и будетъ одинъ изъ искомыхъ круговъ. Этотъ кругъ будетъ касаться внѣшне.

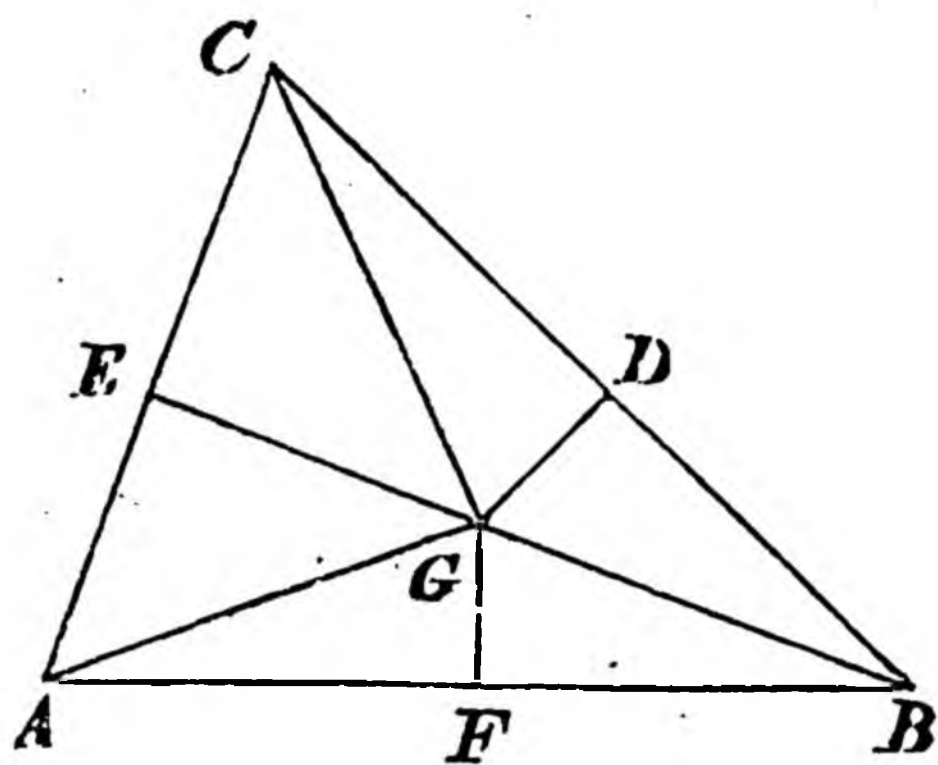
Точно также можно описать кругъ, касающійся внутренне трехъ данныхъ круговъ.

Можно описать кругъ такъ, что онъ будетъ касаться двухъ внѣшне и одного внутренне и двухъ внутренне и одного внѣшне, слѣдовательно задача имѣетъ восемь рѣшеній.

647. Если изъ срединъ сторонъ, какого нибудь треугольника возставимъ перпендикуляры, то всѣ три перпендикуляра пересѣкутся въ одной точкѣ (фиг. 580).

*Доказат.* Пусть  $ABC$  будетъ треугольникъ, раздѣлимъ стороны  $BC$  и  $AC$ , въ точкахъ  $D$  и  $E$ , пополамъ. Изъ точекъ  $D$  и  $E$  возставимъ перпендикуляры къ  $BC$  и  $AC$ , пусть эти перпендикуляры пересѣкутся въ точкѣ  $G$ , надобно показать, что перпендикуляръ возставленный изъ срединъ стороны  $AB$  пройдемъ чрезъ точку  $G$ .

Фиг. 580.



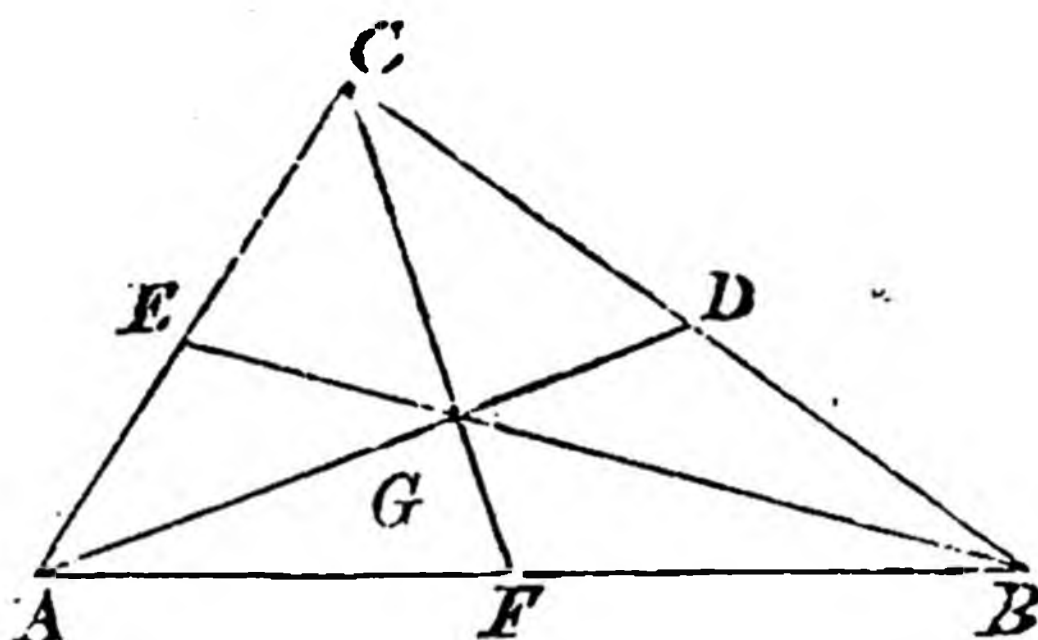
Изъ равенства треугольниковъ  $BDG$  и  $CDG$ , мы имѣемъ  $BG = CG$ , и изъ равенства треугольниковъ  $CEG$  и  $AEG$ , мы имѣемъ  $CG = AG$ ; слѣдовательно  $AG = BG$ . Если теперь соединимъ точку  $G$  съ серединою стороны  $AB$ , то легко показать, изъ равенства треугольниковъ  $AGF$  и  $BGF$ , что  $GF$  есть перпендикуляръ къ  $AB$ .



648. Если, въ какомъ нибудь треугольникѣ соединимъ прямыми линиями вершины угловъ съ серединами противоположныхъ сторонъ, то эти три прямыя пересѣкутся въ одной точкѣ (фиг. 581).

*Доказат.* Пусть  $ABC$  будетъ треугольникъ, пусть точки  $D, E, F$  будутъ середины сторонъ его, проведемъ  $BE$  и  $CF$ , пусть эти прямыя пересѣкаются въ точкѣ  $G$ , соединимъ  $A$  съ  $G$  и  $G$  съ  $D$ . Я говорю, что  $AGD$  есть прямая линия.

Фиг. 581.



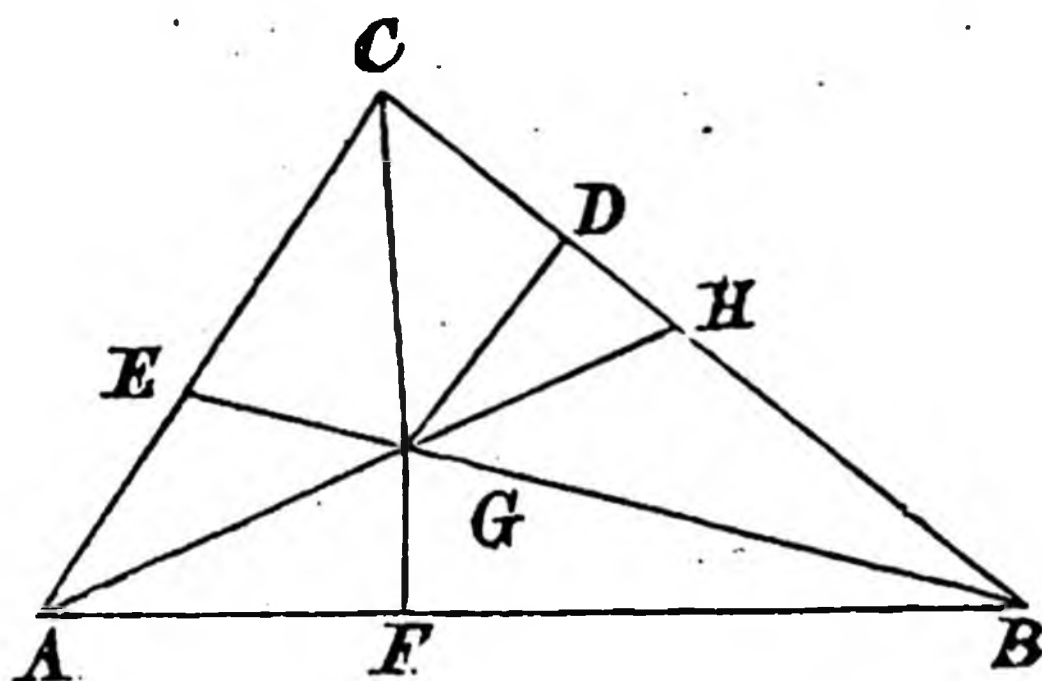
Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ  $\triangle BEA = \triangle BEC$  и  $\triangle GEA = \triangle GEC$  (кн. 1, пред. 38), слѣдовательно (кн. 1, акс. 3)  $\triangle BGA = \triangle BGC$ .

Точно также  $\triangle CGA = \triangle CGB$ , слѣдовательно  $\triangle BGA = \triangle CGA$  и  $\triangle BGD = \triangle CGD$  (кн. 1, пред. 38), слѣдовательно  $\triangle BGA + \triangle BGD = \triangle CGA + \triangle CGD$ . Следовательно сумма  $\triangle BGA + \triangle BGD = \frac{1}{2} \triangle ABC$ . Откуда видно, что точка  $G$  должна находится на прямой  $AD$ , т. е. отрезки  $AG$  и  $GD$  составляютъ одну прямую линию.

649. Прямыя равнодѣлящія углы, какого нибудь, треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ (фиг. 582).

*Доказат.* Пусть  $ABC$  будетъ какой нибудь треугольникъ, проведемъ равнодѣлящія углы  $B$  и  $C$ , пусть онѣ встрѣтятся въ точкѣ  $G$ , соединимъ  $A$  съ  $G$ . Я говорю, что  $AG$  будетъ равнодѣлящая уголъ  $A$ .

Фиг. 582.



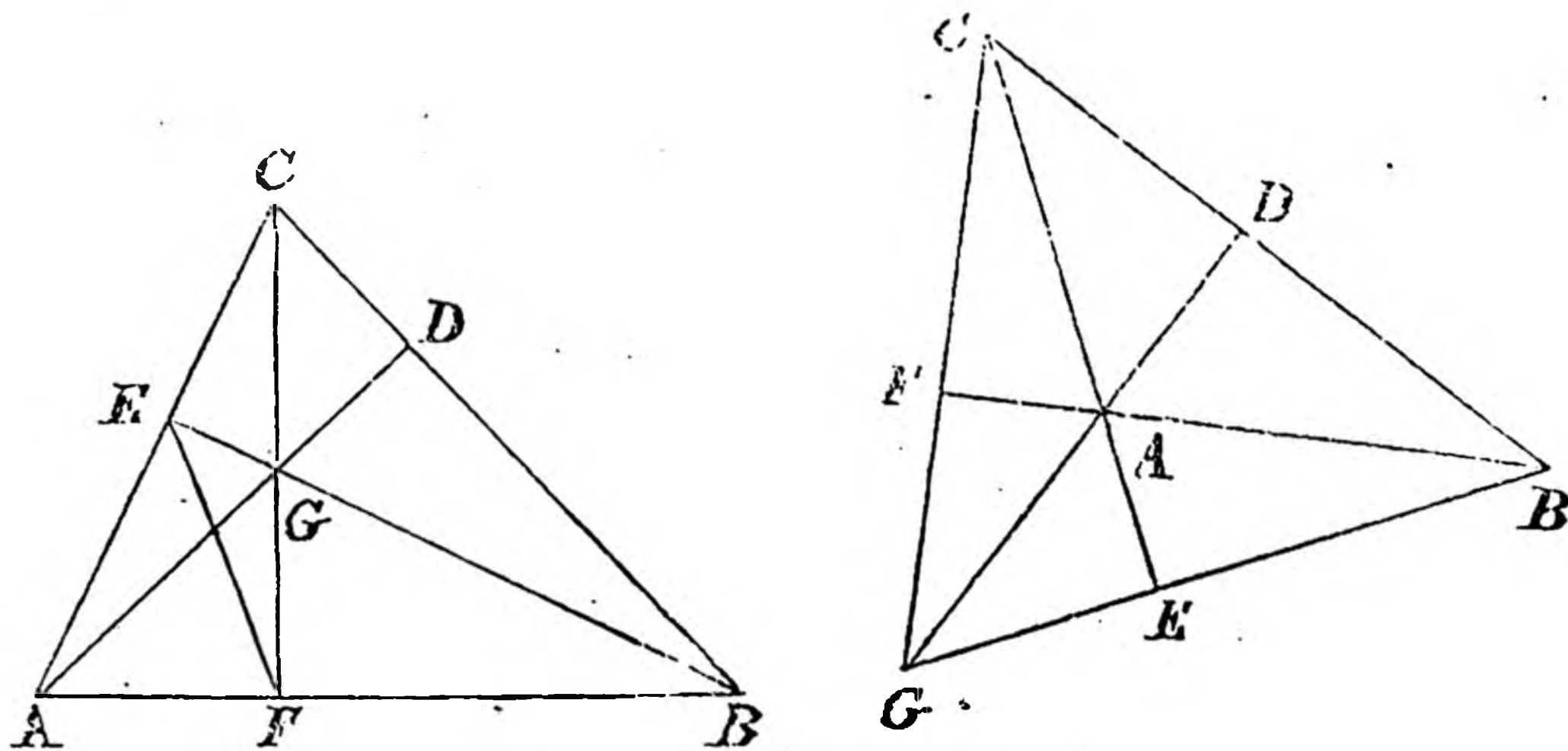
Опустимъ изъ точки  $G$  на сторону  $BC$  перпендикуляръ  $GD$ , на  $AC$  перпендикуляръ  $GE$  и на  $AB$  перпендикуляръ  $GF$ .

Изъ равенства треугольниковъ  $BGF$  и  $BGD$ , мы имѣемъ  $GF = GD$ , и изъ равенства треугольниковъ  $CGE$  и  $CGD$  мы имѣемъ  $GE = GD$ , слѣдовательно  $GF = GE$ . Теперь, легко доказать равенство треугольниковъ  $AFG$  и  $AEG$ , откуда будемъ имѣть, что  $\angle FAG = \angle GAE$ , т. е. что  $AG$  есть равнодѣлящая.

650. Если изъ вершинъ, какого нибудь треугольника опустимъ перпендикуляры на противоположныя стороны, то онѣ пересѣкутся всѣ три въ одной точкѣ (фиг. 583).

*Доказат.* Если чрезъ вершины треугольника  $ABC$  проведемъ прямыя параллельно противоположнымъ сторонамъ, то легко видѣть, что образуется треугольникъ коего стороны

Фиг. 583.

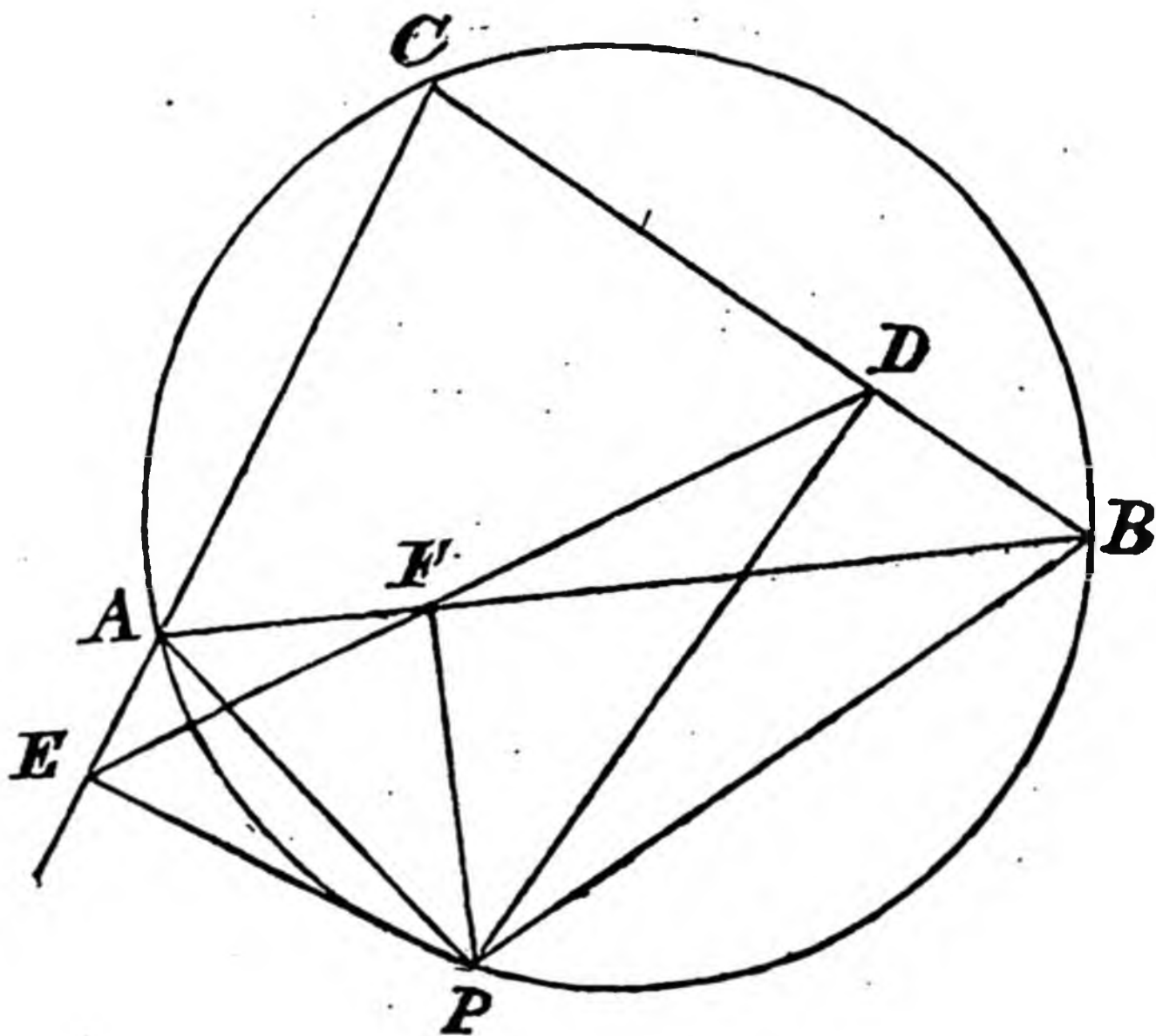


будутъ вдвое больше сторонъ даннаго, и перпендикуляры, опущенные изъ вершинъ даннаго на противоположныя его стороны, будутъ перпендикуляры возставленные изъ срединъ сторонъ построеннаго треугольника, слѣдовательно (647) пересѣкутся въ одной точкѣ.

651. Если изъ какой нибудь точки опустимъ перпендикуляры на стороны, вписаннаго въ кругъ треугольника, то три точки встрѣчи перпендикуляровъ со сторонами треугольника лежатъ на одной прямой линіи (фиг. 584).

*Доказат.* Пусть  $ABC$  будетъ треугольникъ, вписанный въ кругъ, и  $P$  какая нибудь точка на окружности круга. Изъ точки  $P$  опустимъ перпендикуляры  $PD$ ,  $PE$ ,  $PF$  на стороны  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ . Я говорю, что точки  $D$ ,  $E$ ,  $F$  лежатъ на одной прямой линіи.

Фиг. 584.



Такъ какъ около четырехугольника  $PEAF$  можетъ быть описанъ кругъ, то  $\angle PFE = \angle PAE$ . Но  $\angle PAE + \angle PAC = 2d$  и  $\angle PAC + \angle PBC = 2d$ , слѣдовательно  $\angle PAE = \angle PBC$  и  $\angle PFE = \angle PBC$ .

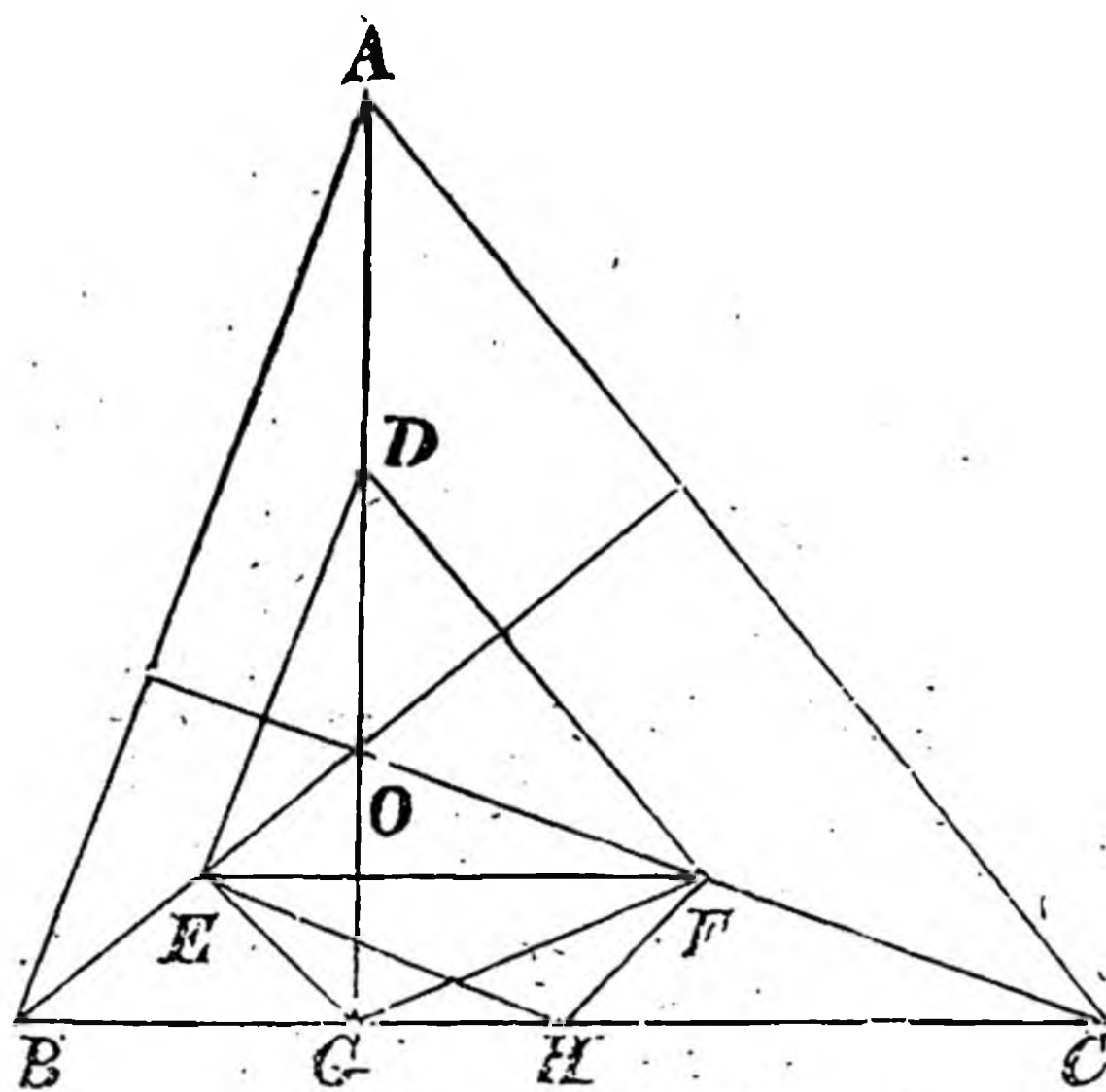
Около четырехугольника  $PFDB$  можно также описать кругъ, слѣдовательно  $\angle PFD + \angle PBD = 2d$ . Но мы видѣли, что  $\angle PBD = \angle PFE$ , слѣдовательно  $\angle PFD + \angle PFE = 2d$ , откуда видимъ, что  $EF$  и  $FD$  составляютъ одну прямую линію.

652. Пусть въ какомъ нибудь треугольникѣ  $ABC$ , точка  $O$  будетъ пересѣченіе перпендикуляровъ изъ точекъ  $A$ ,  $B$ ,  $C$  на противоположныя стороны треугольника. Я говорю, что кругъ проходящій чрезъ срединъ  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ , пройдетъ чрезъ основанія перпендику-

ляровъ и чрезъ середины сторонъ треугольника. Следовательно кругъ этотъ проходитъ чрезъ девять опредѣленныхъ точекъ въ треугольникѣ, а потому называется кругомъ *девяти точекъ* (фиг. 585).

*Доказат.* Пусть  $D, E, F$  будутъ середины отрезковъ  $OA, OB, OC$ , пусть  $H$  будетъ середина стороны  $BC$ , и  $G$  основаніе перпендикуляра опущеннаго изъ точки  $A$  на  $BC$ .

Фиг. 585.



Такъ какъ треугольникъ  $OBG$  прямоугольный, а  $E$  есть середина гипотенузы  $OB$ , то  $EG=EO$ , следовательно  $\angle EGO=\angle EOG$ . Точно также  $\angle FGO=\angle FOG$ , следовательно  $\angle FGE=\angle FOE$ . Но  $\angle FOE+\angle BAC=2d$ , следовательно  $\angle FGE+\angle BAC=2d$ . Такъ какъ  $ED\parallel AB, DF\parallel AC$  (кн. 6, пред. 2), то  $\angle BAC=\angle EDF$ , следовательно  $\angle FGE+\angle EDF=2d$ , откуда видимъ, что точка  $G$  находится на окружности круга, проходящаго чрезъ точки  $D, E, F$ .

Такъ какъ,  $FH\parallel OB, EH\parallel OC$ , то  $\angle EHF=\angle EGF$ . Следовательно точка  $H$  находится на окружности того же круга.

Точно тоже можно показать и относительно остальныхъ сторонъ треугольника  $ABC$ .

Кругъ *девяти точекъ* имѣетъ нѣсколько замѣчательныхъ свойствъ, изъ коихъ мы укажемъ на два слѣдующія:

1. *Радиусъ круга девяти точекъ равенъ половинѣ радиуса круга описаннаго около даннаго треугольника.*

Такъ какъ стороны треугольника  $DEF$  параллельны сторонамъ треугольника  $ABC$  и равны половинѣ каждой каждой, то треугольники  $ABC$  и  $DEF$  подобны. Откуда слѣдуетъ что радиусъ круга, описаннаго около треугольника  $DEF$  равенъ половинѣ радиуса круга описаннаго около треугольника  $ABC$ .

2. *Если  $S$  есть центръ круга описаннаго около треугольника  $ABC$ , то центръ круга девяти точекъ будетъ середина прямой  $OS$ .*

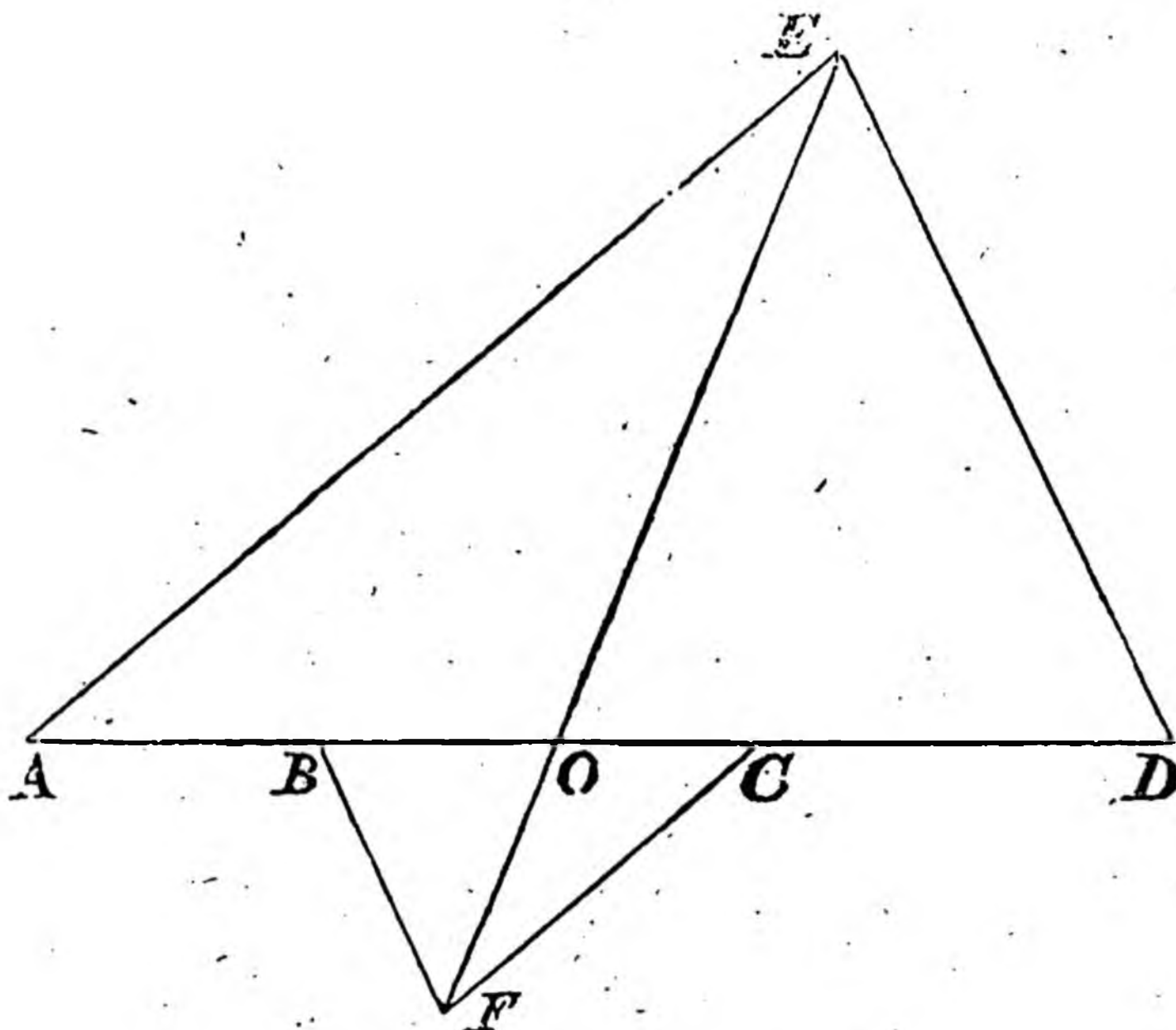
Въ самомъ дѣлѣ,  $HS\parallel GO$ , потому что обѣ эти прямыя перпендикулярны къ  $BC$ , следовательно перпендикуляръ возставленный изъ середины  $GH$  пройдетъ чрезъ середину  $OS$ . Но  $H$  и  $G$  находятся на окружности круга девяти точекъ, следовательно этотъ перпендикуляръ пройдетъ и чрезъ центръ круга. Дѣлая подобныя разсужденія относительно остальныхъ сторонъ даннаго треугольника  $ABC$  легко видѣть, что середина  $OS$  и есть центръ круга девяти точекъ. Можно также показать, что кругъ девяти точекъ, какого нибудь треугольника, касается вписаннаго внутри и вписаннаго внѣ въ данный треугольникъ, круговъ.



653. На данной прямой найти точку, которой расстояния от двух данных точек на прямой составляли бы прямоугольник равный прямоугольнику составленному из расстояний той же точки от двух других данных точек на той же прямой (фиг. 586)?

*Решение.* Пусть  $A, B, C, D$  будут четыре данные точки на одной прямой. Требуется найти на той же прямой такую точку  $O$ , чтобы  $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ .

Фиг. 586.



На  $AD$  построим, какой нибудь треугольник  $AED$ , а на  $BC$  построим треугольник  $CFB$  подобный треугольнику  $AED$  и при томъ такъ, чтобы  $CF \parallel AE$ ,  $BF \parallel ED$ ; соединимъ  $E$  съ  $F$  и пусть  $EF$  встрѣчаетъ данную прямую въ точкѣ  $O$ . Я говорю, что точка  $O$  и есть искомая.

Такъ какъ  $OE : OA = OF : OC$  (кн. 6, пред. 4), то  $OE : OF = OA : OC$  (кн. 5, пред. 16). Точно также  $OE : OF = OD : OB$ . Слѣдовательно  $OA : OC = OD : OB$  (кн. 5, пред. 11), откуда:

$$OA \cdot OB = OC \cdot OD$$

Съ измѣненіемъ положенія точекъ  $A, B, C, D$  измѣняется и положеніе точки  $O$ , но при извѣстномъ опредѣленномъ порядкѣ данныхъ точекъ одна только точка будетъ удовлетворять требуемому условию.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть  $P$  будетъ другая точка удовлетворяющая тому же условию, т. е. что  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ . Соединимъ  $P$  съ  $E$  и пусть  $PE$  пересѣкаетъ продолженіе  $FC$  въ точкѣ  $G$ , соединимъ  $B$  съ  $G$ .

Такъ какъ  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ , то:

$$PA : PC = PD : PB$$

но (кн. 6, пред. 2):

$$PA : PC = PE : PG$$

слѣдовательно (кн. 5, пред. 11):

$$PD : PB = PE : PG$$

и потому  $BG \parallel DE$ .

Но по построенію  $BF \parallel ED$ , слѣдовательно  $BG$  и  $BF$  сами параллельны (кн. 1, пред. 30), что невлѣно. Слѣдовательно точка  $P$  не есть требуемая.



654. Вписать въ данный кругъ  $O$  треугольникъ  $MNP$ , коего бы стороны были параллельны даннымъ прямымъ  $AB$ ,  $CD$ ,  $EF$ ?

*Рѣшеніе.* Черезъ какую нибудь точку на окружности круга проведемъ хорды, одну параллельно прямой  $AB$ , а другую параллельно  $CD$ , соединяя точки пересѣченія окружности съ проведенными хордами получимъ хорду известной длины. Теперь остается провести хорду параллельно третьей прямой  $EF$  и имѣющую длину равную выше упомянутой хордѣ, пусть эта хорда будетъ  $MN$ , чрезъ точку  $M$  проведемъ хорду  $MP \parallel AB$  и соединимъ  $P$  съ  $N$ , полученный треугольникъ будетъ искомымъ.

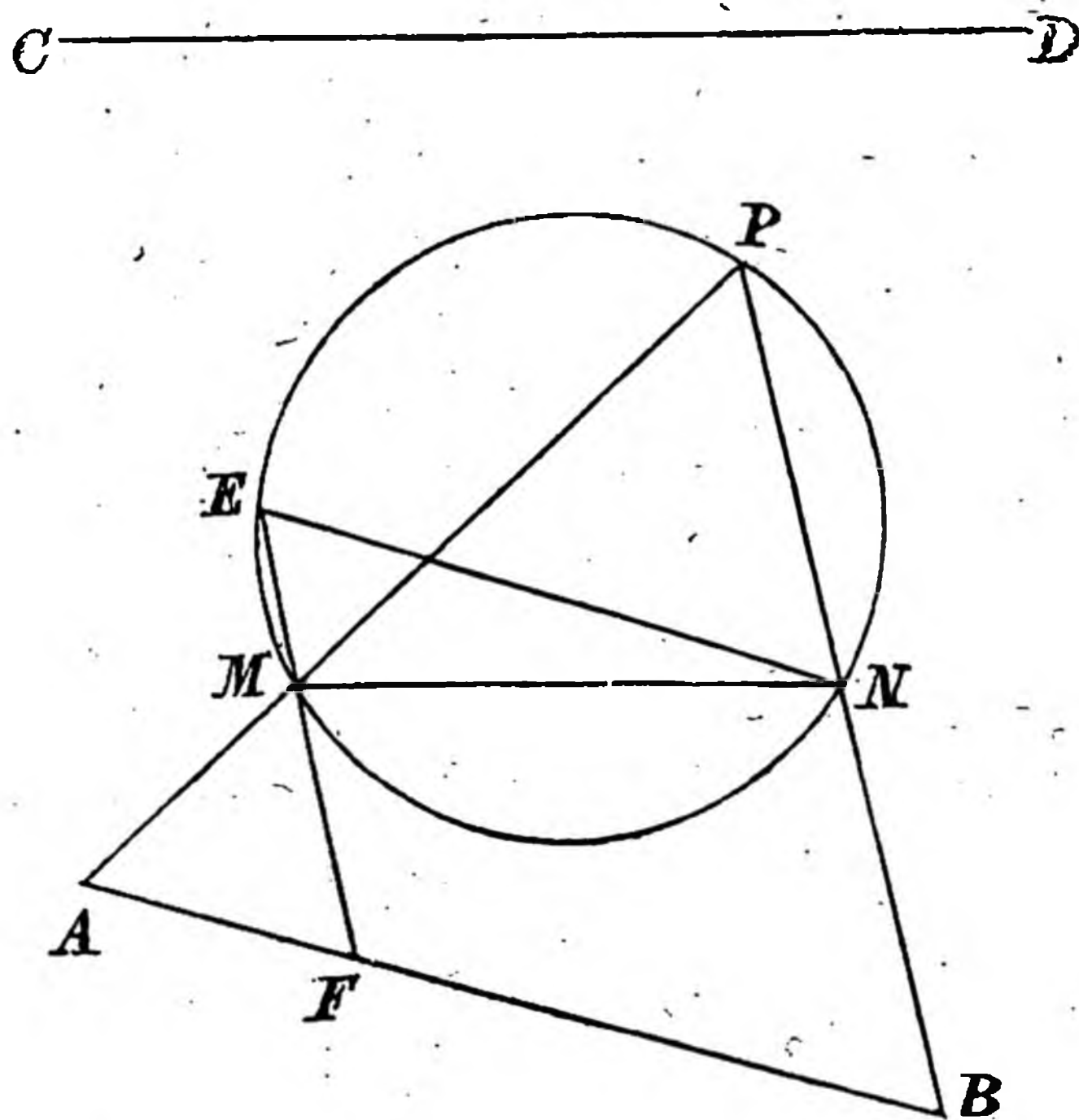
Такъ какъ въ кругѣ можно провести двѣ хорды данной величины параллельно данному направленію, то настоящая задача имѣетъ два рѣшенія, т. е. можно построить два треугольника, которые будутъ симметрично расположены относительно центра круга.

655. Въ данный кругъ  $O$  вписать треугольникъ  $MNP$ , коего бы двѣ стороны были параллельны двумъ даннымъ прямымъ  $AB$  и  $CD$ , и чтобы третья сторона проходила чрезъ данную точку  $L$ ?

*Рѣшеніе.* Черезъ какую нибудь точку на окружности данного круга проведемъ двѣ хорды параллельно одну прямой  $AB$ , а другую параллельно  $CD$ , соединяя точки пересѣченія, проведенныхъ хордъ съ окружностью получимъ хорду данной длины, остается рѣшить задачу: чрезъ данную точку  $L$  провести прямую такъ, чтобы она, пересѣкаясь съ окружностью образовала хорду данной длины. Пусть эта хорда будетъ  $MN$ , остается чрезъ точку  $M$  провести  $MP \parallel AB$  и точку  $P$  соединить съ точкою  $N$ .

656. Въ данный кругъ  $O$  вписать треугольникъ  $MNP$ , коего бы двѣ стороны проходили чрезъ данныя точки  $A$  и  $B$ , а третья была бы параллельна данной прямой  $CD$  (фиг. 587)?

Фиг. 587.



*Рѣшеніе.* Чрезъ неизвѣстную точку  $N$  проведемъ  $NE \parallel AB$  и проведемъ хорду  $EM$ . Пусть  $F$  будетъ точка въ которой эта хорда, продолженная если необходимо, встрѣчаетъ прямую  $AB$ . Если бы эта точка была известна, то задача была бы рѣшена. Въ самомъ дѣлѣ, уголъ  $ENM$  равенъ углу между прямыми  $AB$  и  $CD$ , слѣдовательно длина хорды  $EM$  можетъ быть опредѣлена, а потому можетъ быть опредѣлено и ея положеніе.

Чтобы найти положеніе точки  $F$ , замѣтимъ, что  $\angle AFM = \angle FEN = \angle APB$ , слѣдовательно треугольники  $PAB$  и  $MAF$  подобны, откуда:

$$AB : AM = AP : AF$$

или

$$AM \cdot AP = AB \cdot AF$$

Если проведемъ, какую нибудь сѣкущую  $AGH$ , то будемъ имѣть:

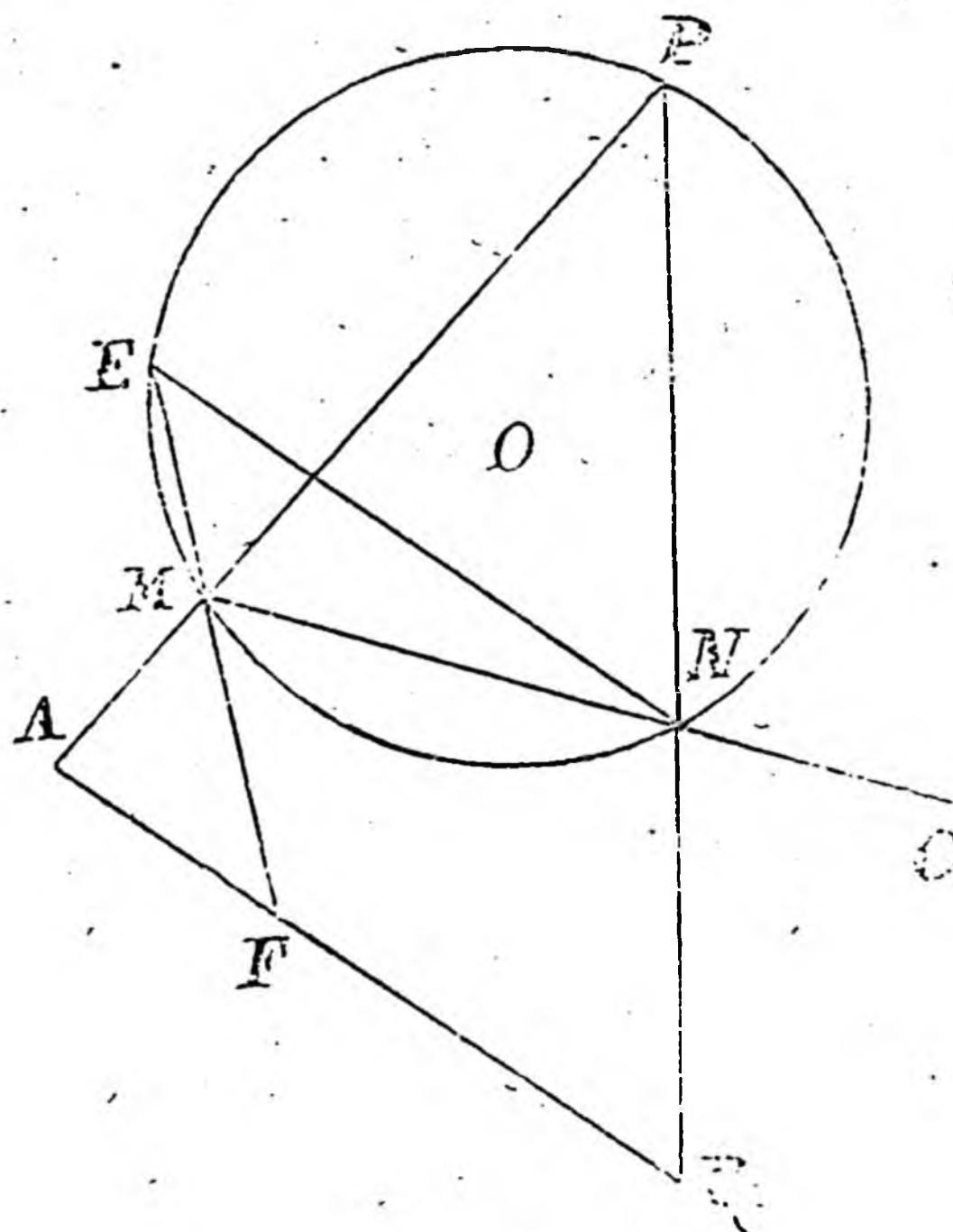
$$AG \cdot AH = AB \cdot AF$$

Въ этомъ уравненіи все извѣстно исключая  $AF$ . И какъ точки  $G, H, F, B$  находятся на одной окружности, то кругъ, проходящій чрезъ точки  $G, H, B$  пересѣчетъ прямую  $AB$  въ искомой точкѣ  $F$ .

657. Вписать въ данный кругъ треугольникъ, котораго бы стороны проходили чрезъ три данныя точки (фиг. 588)?

*Рѣшеніе.* Пусть  $A, B, C$  будутъ данныя точки и  $O$  данный кругъ. Положимъ, что  $PMN$  есть искомый треугольникъ.

Фиг. 588.



Проведемъ  $NE \parallel AB$  и опредѣлимъ точку  $F$  какъ въ предыдущей задачѣ. Построивши точку  $F$  остается только вписать въ данный кругъ треугольникъ, котораго бы двѣ стороны проходили чрезъ точки  $C$  и  $F$ , а третья была бы параллельна прямой  $AB$ , т. е. задача сведена на предыдущую.

## ПРИБАВЛЕНІЯ.

---

### Х. О величинахъ наибольшихъ (*maximum*) и наименьшихъ (*minimum*).

1. Если геометрическая величина, какого бы то ни было рода, измѣняясь непрерывно по извѣстному закону, переходитъ въ извѣстный моментъ ея измѣненія чрезъ величину большую непосредственно ей предшествовавшихъ и послѣдующихъ величинъ, то говорятъ что она *наибольшая* (*maximum*), хотя бы она въ другой какой нибудь моментъ измѣненія и имѣла абсолютно большую величину. Если величина переходитъ чрезъ величину меньшую непосредственно ей предъидущихъ и послѣдующихъ, то говорятъ что она *наименьшая* (*minimum*), хотя бы она въ какой нибудь другой моментъ ея измѣненія и имѣла величину абсолютно меньшую. Слѣдовательно выраженія *maximum* и *minimum* употребляемыя въ геометріи суть относительныя, а не абсолютныя.

2. Въ геометрическихъ фигурахъ высшихъ порядковъ различныя измѣняющіяся величины, связанныя съ ними, могутъ въ продолженіе ихъ измѣненія переходить чрезъ нѣсколько *наибольшихъ* и нѣсколько *наименьшихъ* величинъ, разумѣется наибольшая слѣдуетъ за наименьшею и т. д., одна слѣдуетъ за другою. Но въ элементарной геометріи гдѣ разсматривается точка, прямая линія и кругъ, перемѣнная величина, связанная съ ними, рѣдко, въ продолженіе своего измѣненія, переходитъ больше какъ чрезъ одно простое *maximum* и одно простое *minimum*. Напримѣръ разстояніе точки, движущейся по кругу, отъ данной точки или отъ данной прямой, какое бы ни было ея положеніе относительно круга, будетъ *maximum* только для разстоянія, проходящаго чрезъ центръ и *minimum* для разстоянія, которое, будучи продолжено, пройдетъ чрезъ центръ круга. Во всѣхъ такихъ случаяхъ *maximum* и *minimum* суть величины не только относительныя, но абсолютно наибольшія и наименьшія, которыя перемѣнная величина можетъ получить въ продолженіи своего измѣненія.

3. *Взаимными* геометрическими величинами называются такія которыхъ произведеніе равно единицѣ. Напримѣръ, если площадь прямоуголь-



ника равна единицѣ, то основаніе и высота прямоугольника суть величины *взаимныя*. Изъ этого легко видѣть, что если какая нибудь величина получаетъ *максимум* или *минимум*, то взаимная получитъ *минимум* или *максимум*.

4. Приведемъ нѣсколько примѣровъ простыхъ, но основательныхъ, къ которымъ приводится большая часть вопросовъ относительно *максимум* и *минимум*.

*Примѣръ 1.* Если дана величина двухъ сторонъ треугольника, то наибольшая площадь треугольника будетъ тогда, когда данныя стороны будутъ составлять прямой уголъ.

*Доказат.* Какое бы нибыло наклоненіе данныхъ сторонъ треугольника, площадь его равна всегда половинѣ произведенія одной изъ данныхъ сторонъ на перпендикуляръ, опущенный изъ конца другой на первую. Но такъ какъ этотъ перпендикуляръ будетъ наибольшій (равенъ второй сторонѣ) когда уголъ между сторонами прямой, то слѣдовательно и т. д.

*Примѣръ 2.* Если на данномъ отрѣзкѣ прямой взята точка, то произведеніе ея разстояній отъ концевъ отрѣзковъ будетъ *наибольшее*, когда точка дѣлитъ отрѣзокъ пополамъ, а сумма квадратовъ этихъ разстояній будетъ *наименьшая*.

*Доказат.* На данномъ отрѣзкѣ, какъ на діаметрѣ, опишемъ полукругъ и изъ какой нибудь точки отрѣзка возставимъ къ нему перпендикуляръ, то квадратъ построенный на этомъ перпендикулярѣ равенъ прямоугольнику построенному на отрѣзкахъ. Но сторона квадрата, а слѣдовательно и его площадь будетъ *наибольшая*, когда взятая точка будетъ середина даннаго отрѣзка, слѣд. и т. д.

Такъ какъ квадратъ построенный на данномъ отрѣзкѣ равенъ суммѣ квадратовъ построенныхъ на отрѣзкахъ, на которые онъ раздѣленъ взятою точкою съ дважды взятымъ прямоугольникомъ построеннымъ на отрѣзкахъ (кн. 2, пред. 4), то, очевидно, что сумма квадратовъ построенныхъ на отрѣзкахъ будетъ *наименьшая*, когда взятая точка дѣлитъ данный отрѣзокъ пополамъ.

*Примѣръ 3.* Если въ какомъ нибудь треугольникѣ одну изъ сторонъ раздѣлимъ пополамъ и чрезъ точку дѣленія проведемъ параллельныя остальнымъ двумъ сторонамъ треугольника, то образуется вписанный параллелограмъ, коего площадь будетъ наибольшая.

*Доказат.* Пусть данный треугольникъ будетъ  $ABC$ , возьмемъ на сторонѣ  $AB$ , какую нибудь точку  $O$ , чрезъ эту точку проведемъ прямыя параллельно сторонамъ  $AC$  и  $BC$ , пусть точки встрѣчи этихъ параллельныхъ съ  $AC$  и  $BC$  будутъ  $F$  и  $E$ . Такимъ образомъ образовался парал-



ялелограмъ  $OFCE$ , я говорю что площадь его будетъ *наибольшая* когда точка  $O$  дѣлитъ  $AB$  пополамъ.

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AF}{OA} \quad \text{и} \quad \frac{BC}{AB} = \frac{EB}{OB}$$

откуда перемножая, найдемъ:

$$\frac{AC \cdot BC}{AB^2} = \frac{AF \cdot EB}{OA \cdot OB}$$

но

$$AF : FO = OE : EB$$

или

$$AF \cdot EB = OF \cdot OE$$

слѣдовательно:

$$\frac{AC \cdot BC}{AB^2} = \frac{OF \cdot OE}{OA \cdot OB}$$

Изъ этого уравненія видимъ, что отношеніе  $OF \cdot OE : OA \cdot OB$  есть величина постоянная, слѣдовательно произведеніе  $OF \cdot OE$  измѣняется, съ перемѣщеніемъ точки  $O$  на  $AB$ , пропорціонально произведенію  $OA \cdot OB$ , но это послѣднее произведеніе будетъ *наибольшее*, когда точка  $O$  находится на срединѣ  $AB$ . Слѣдовательно и произведеніе  $OF \cdot OE$  будетъ *наибольшее*, но оно пропорціонально площади параллелограмма  $OFEB$ , которая слѣдовательно будетъ *наибольшая*.

Точно также можно показать, что когда точка  $O$  находится на срединѣ  $AB$ , то произведеніе перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ  $O$  на стороны  $AC$  и  $BC$  или вообще произведеніе двухъ прямыхъ, проведенныхъ параллельно двумъ даннымъ направленіямъ, до встрѣчи съ  $AC$  и  $BC$ , будетъ *наибольшее*.

*Примѣръ 4.* Если равнодѣлящую точку, какой нибудь дуги круга, соединимъ съ ея концами прямыми линіями, то сумма квадратовъ изъ разстояній равнодѣлящей точки отъ концевъ дуги будетъ *максимумъ* или *минимумъ* для внутренней равнодѣлящей точки и *минимумъ* или *максимумъ* для внѣшней равнодѣлящей, смотря потому будетъ-ли дуга больше или меньше полуокружности.

*Доказат.* Пусть  $AB$  будетъ дуга,  $C$  середина хорды этой дуги,  $M$  и  $N$  равнодѣлящія дугу точки, первая внутренне, а вторая внѣшне,  $P$  какая нибудь точка на дугѣ,  $PQ$  перпендикуляръ изъ точки  $P$  на хорду  $AB$  (фиг. 589).

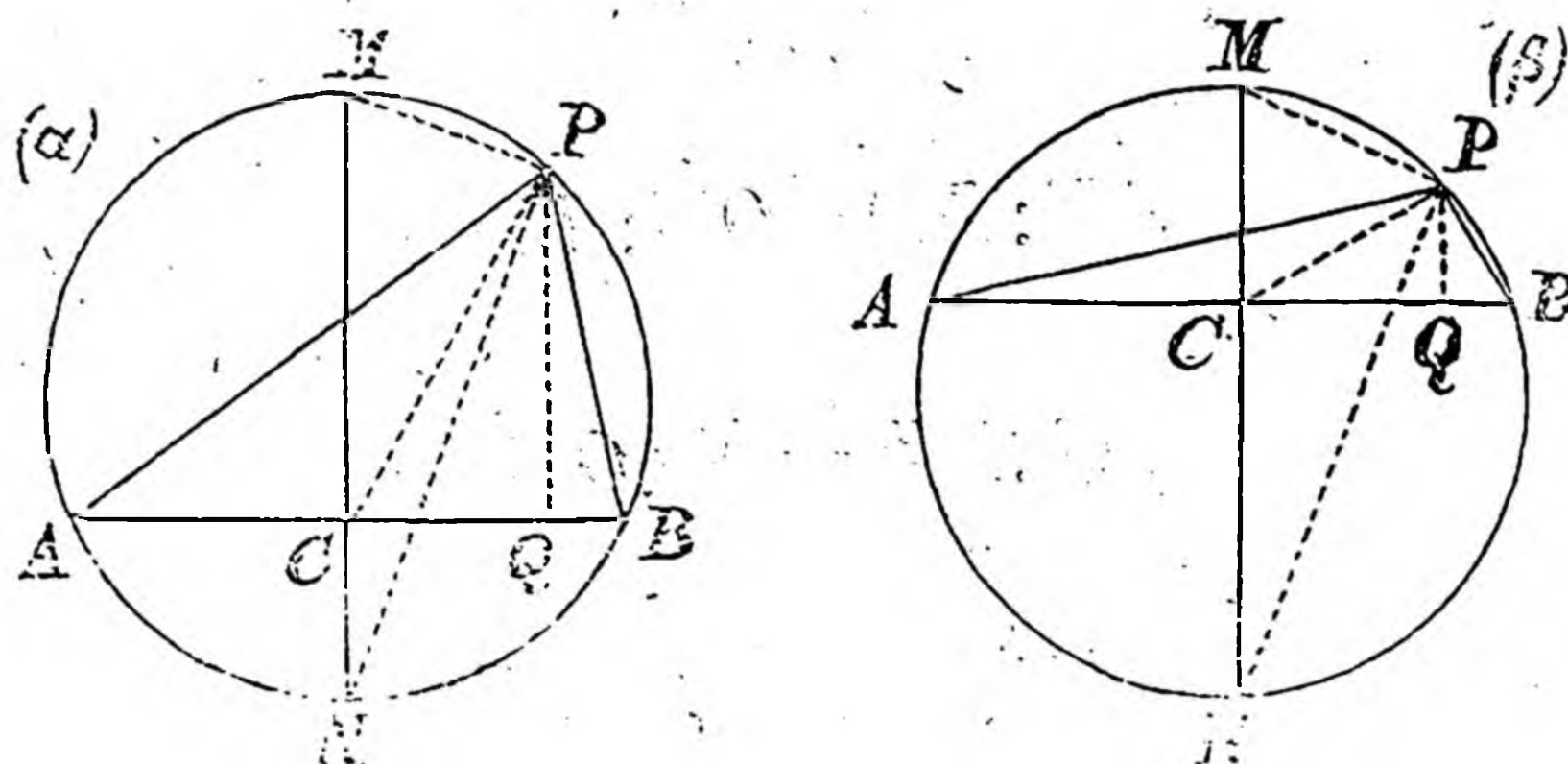
Какое бы ни было положеніе точки  $P$ , мы всегда имѣемъ (кн. 2, пред. 12, 13):

$$PA^2 = PC^2 + CA^2 \pm 2CA.CQ, \quad PB^2 = PC^2 + CB^2 \pm CB.CQ$$

откуда, складывая, получимъ:

$$PA^2 + PB^2 = CA^2 + CB^2 + 2CP^2$$

Фиг. 589.



Вторая часть этого выраженія, а слѣдовательно и первая, будетъ *максимум* или *минимум*, если  $CP$  будетъ *максимум* или *минимум*, т. е. когда точка  $P$  будетъ въ точкѣ  $M$  или  $N$ , въ первомъ случаѣ, и въ  $N$  или  $M$ , во второмъ (кн. 3, пред. 7).

*Примѣръ 5.* Для внутренней или внѣшней равнодѣлящей точки, какой-нибудь дуги круга, сумма и произведеніе разстояній отъ концовъ дуги и площадь треугольника, образованнаго этими разстояніями и хордою дуги суть *максимум*.

*Доказат.* Какое бы ни было положеніе точки  $P$  на дугѣ (фиг. 588) мы всегда имѣемъ  $PA.PB = MN.PQ$  (кн. 6, пред. 16), а  $\triangle APB = \frac{1}{2} AB.PQ$ . Изъ этихъ выраженій легко видѣть что произведеніе  $PA.PB$  и площадь  $\triangle APB$  будетъ *максимум*, когда точка  $P$  находится въ  $M$ . Остается только показать, что въ этомъ случаѣ и сумма  $AP + PB$  будетъ *максимум*. Въ самомъ дѣлѣ, для всякаго положенія точки  $P$  съ той же стороны хорды  $AB$  съ какой лежитъ и точка  $M$ , мы имѣемъ (кн. 6, пред. 16, слѣд.) по теоремѣ Птолемея:

$$PA.NB + PB.NA = PN.AB$$

и такъ какъ  $NA = NB$ , то:

$$\frac{PA + PB}{PN} = \frac{AB}{NA}$$

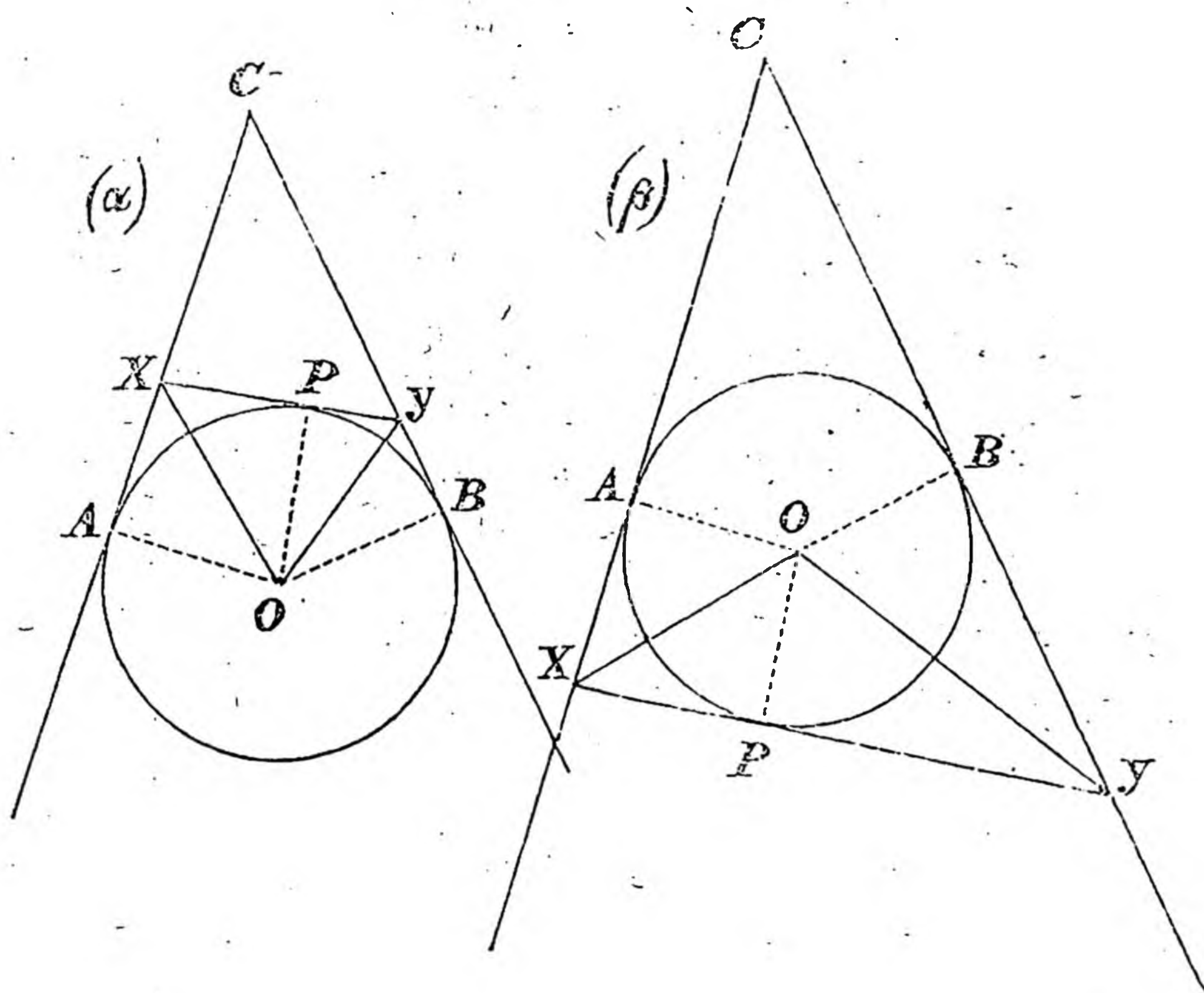
слѣдовательно отношеніе  $(PA + PB) : PN$  есть величина постоянная, и по-этому  $PA + PB$  будетъ *максимум* вмѣстѣ съ  $PN$ , т. е. когда точка  $P$  бу-

детъ въ  $M$ . Точно также можно показать (замѣщая точку  $M$  точкою  $N$ ), что для всякаго положенія точки  $P$ , съ той же стороны хорды  $AB$  съ какою находится и точка  $N$ , сумма  $PA + PB$  будетъ *maxim*, когда точка  $P$  находится въ  $N$ .

*Примѣръ 6.* Для точки равнодѣлящей, внутренне или внѣшне, какуюнибудь дугу круга, отрѣзокъ касательной, заключенный между двумя касательными проведенными въ концахъ дуги и площадь треугольника, коего основаніе есть этотъ отрѣзокъ, а вершина въ центрѣ круга, будутъ оба *minim*.

*Доказат.* Пусть  $AB$  будетъ дуга,  $AC$  и  $BC$  касательныя къ кругу въ концахъ дуги  $AB$ ,  $XU$  отрѣзокъ касательной въ какойнибудь точкѣ  $P$  на дугѣ  $AB$ ,  $O$  центръ даннаго круга (фиг. 590).

Фиг. 590.



Какое бы ни было положеніе точки  $P$ , прямыя  $OX$  и  $OY$  дѣлятъ углы  $AOP$  и  $BOP$  пополамъ (кн. 3, пред. 17), слѣдовательно  $\angle XOY = \frac{1}{2} \angle AOB$ , соотвѣтствующаго, данной дугѣ  $AB$ . Слѣдовательно въ треугольникѣ  $XOY$  высота  $OP$  и уголъ  $XOY$  суть величины постоянныя. Изъ сказаннаго выше видно, что если противолежащій основанію уголъ въ треугольникѣ есть величина постоянная, то высота и площадь треугольника, при данномъ основаніи, будутъ вмѣстѣ *maxim*, а основаніе и площадь, при данной высотѣ, будутъ вмѣстѣ *minim*, когда треугольникъ будетъ равнобедренный, слѣдовательно для треугольника  $XOY$ , когда точка  $P$  будетъ равнодѣлящая внутренне или внѣшне дугу  $AB$ .

*Примѣръ 7.* Для точки равнодѣлящей, внутренне, какуюнибудь



дугу круга, площадь треугольника, образованная касательными къ кругу въ точкахъ: равнодѣлящей, и въ концахъ дуги, будетъ *maxim* или *minim*, а для равнодѣлящей внѣшне, *minim* или *maxim*, смотря потому будетъ-ли данная дуга круга меньше или больше полуокружности.

*Доказат.* Такъ какъ въ обоихъ случаяхъ (фиг. 590) пятиугольная площадь  $ХАОВУ$  равная двойной площади  $\triangle ХОУ$  есть, по предъидущему, *minim* для каждой изъ равнодѣлящихъ точекъ дугу  $AB$ , и четырехугольная площадь  $АОВС$  постоянна какое бы нибыло положеніе отръзка  $ХУ$ , то, такъ какъ:

$$\triangle ХСУ = АОВС - ХАОВУ$$

въ первомъ случаѣ (фиг.  $\alpha$ ), и во второмъ (фиг.  $\beta$ ):

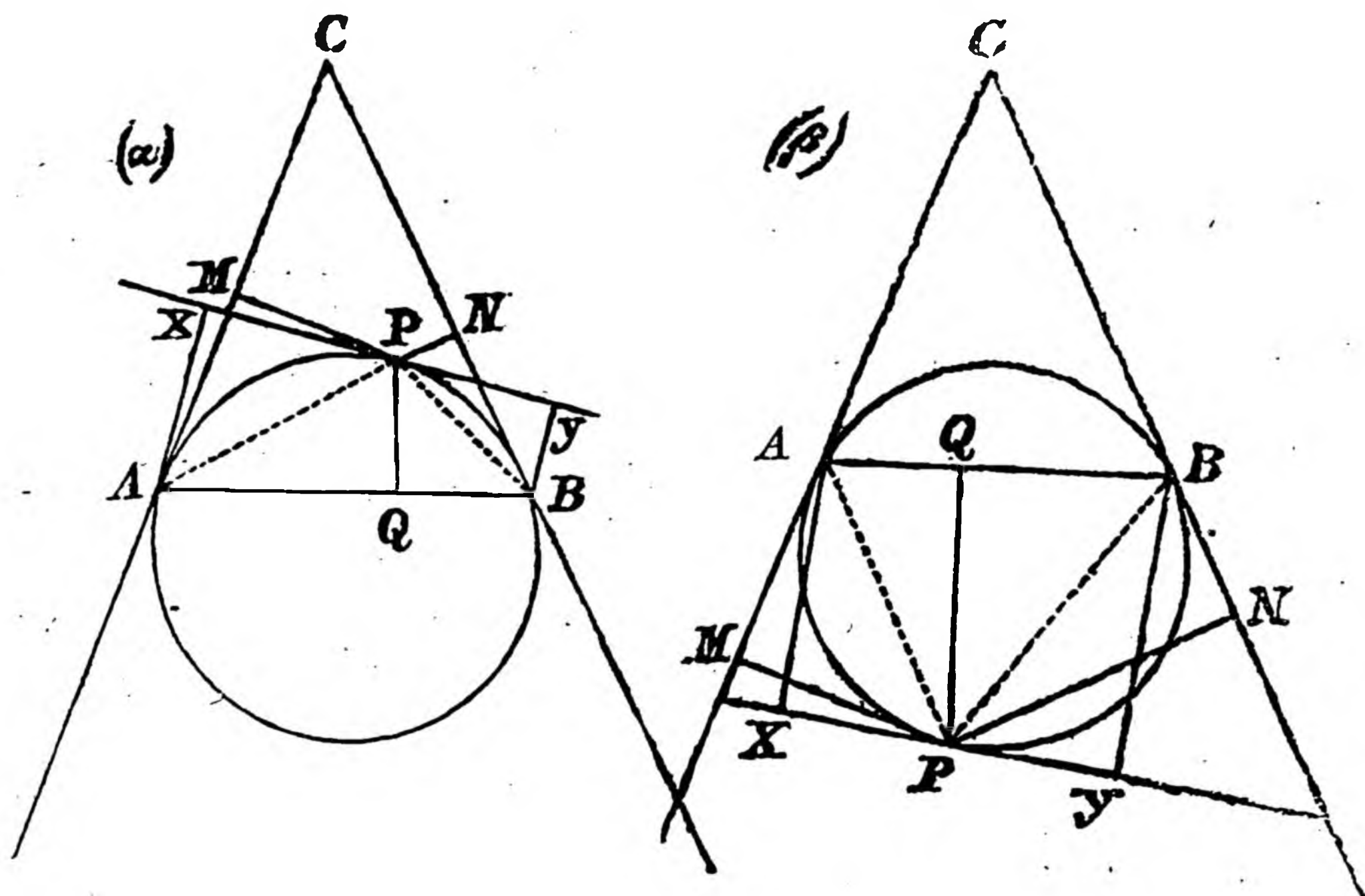
$$\triangle ХСУ = АОВС + ХАОВУ$$

то треугольникъ  $ХСУ$  будетъ *maxim* въ первомъ случаѣ и *minim* во второмъ.

*Примѣръ 8.* Для каждой изъ равнодѣлящихъ точекъ, внутренней или внѣшней какой нибудъ дуги круга, произведение перпендикуляровъ опущенныхъ изъ этихъ точекъ на касательныя въ концахъ дуги и произведение перпендикуляровъ опущенныхъ изъ концовъ дуги на касательную въ равнодѣлящей точкѣ, будутъ оба *minim* (фиг. 591).

*Доказат.* Пусть  $AB$  будетъ данная дуга, а  $P$ , какая нибудъ, на ней точка внутренняя или внѣшняя,  $PM$  и  $PN$  перпендикуляры изъ точки  $P$  на касательныя  $AC$  и  $CB$ ,  $AX$  и  $BY$  перпендикуляры изъ точекъ  $A$  и  $B$  на касательную  $ХУ$  въ точкѣ  $P$ , наконецъ, пусть  $PQ$  будетъ перпендикуляръ изъ  $P$  на  $AB$ .

Фиг. 591.



Соединимъ точку  $P$  съ  $A$  и  $B$ , то изъ равенства двухъ паръ треугольниковъ  $APM$  и  $PAH$ ,  $BRN$  и  $PBY$  мы имѣемъ  $PM=AX$  и  $PN=BY$ ,



слѣдовательно  $PM \cdot PN = AX \cdot BY$  а также изъ двухъ паръ подобныхъ треугольниковъ  $APM$  (или  $PAH$ ) и  $BRQ$ ,  $BRN$  (или  $PBY$ ) и  $APQ$  (кн. 3, пред. 32), мы имѣемъ:

$$AX : PQ = PQ : BY$$

откуда:

$$PM : PQ = PQ : PN$$

слѣдовательно:

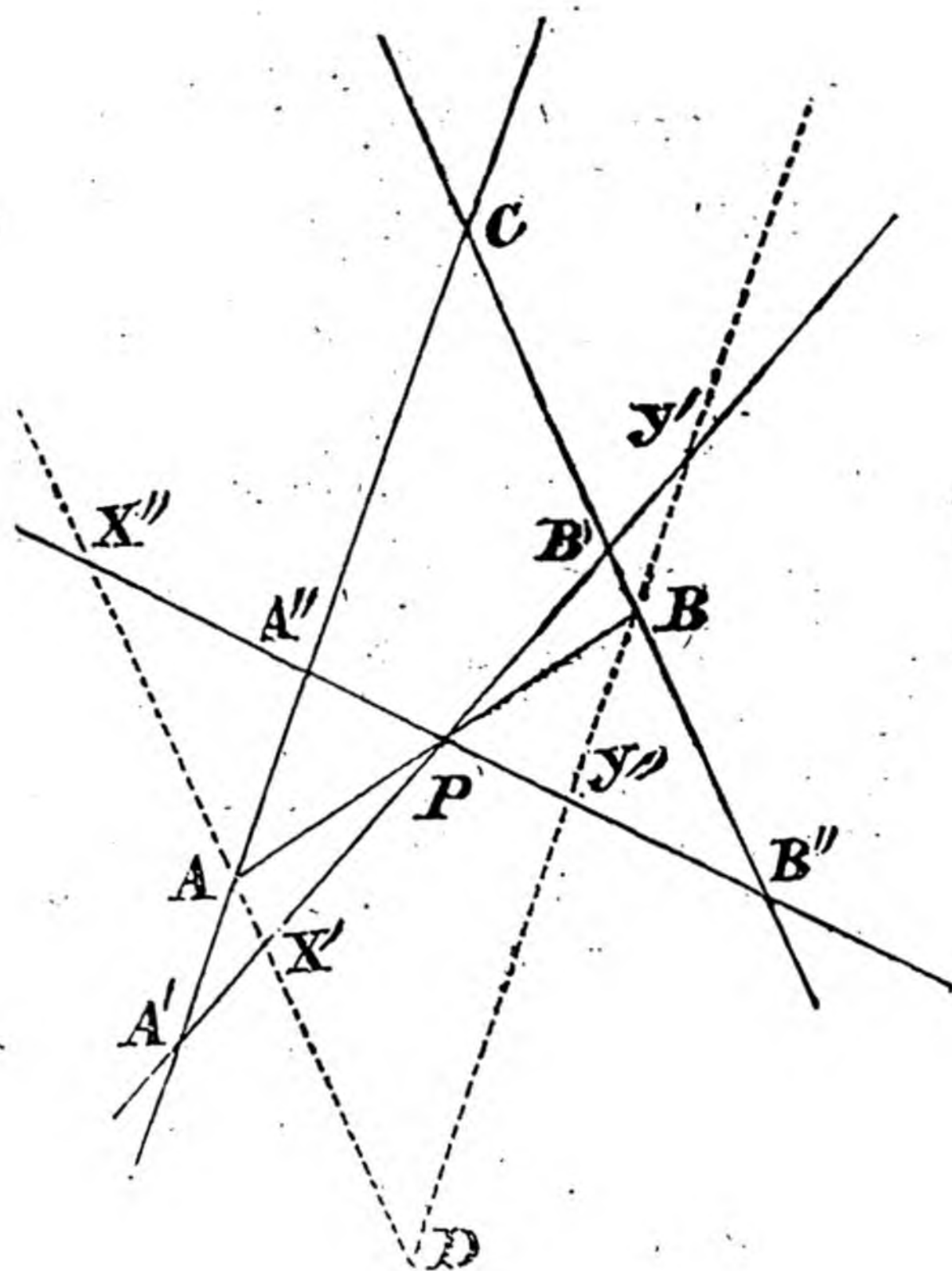
$$PM \cdot PN = PQ^2 = AX \cdot BY = PA \cdot PB$$

откуда и вытекаетъ предложенная теорема.

*Примѣръ 9.* Изъ всѣхъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ данную точку и образующихъ съ двумя данными прямыми треугольники *наименьшую* площадь будетъ имѣть тотъ изъ нихъ, который образованъ прямою, дѣлящеюся въ данной точкѣ пополамъ (фиг. 592).

*Доказат.* Пусть  $P$  будетъ данная точка, а  $AC$  и  $BC$  данныя прямая. Пусть  $AB$  будетъ отрезокъ, дѣлящійся въ точкѣ  $P$  пополамъ, а  $A'B'$  или  $A''B''$ , какіе нибудь другіе отрезки. Чрезъ точки  $A$  и  $B$  проведемъ  $AD \parallel BC$ ,  $BD \parallel AC$ , пусть онѣ пересѣкаютъ  $A'B'$  въ  $X'$  и  $Y'$  и  $A''B''$  въ  $X''$  и  $Y''$ .

Фиг. 592.



Такъ какъ, очевидно (кн. 1, пред. 4), что  $\triangle APX' = \triangle BPY'$  и  $\triangle BPY'' = \triangle APX''$ , то треугольникъ  $ABC$  меньше треугольниковъ  $A'CB'$ , или  $A''CB''$  и т. д., слѣдовательно....

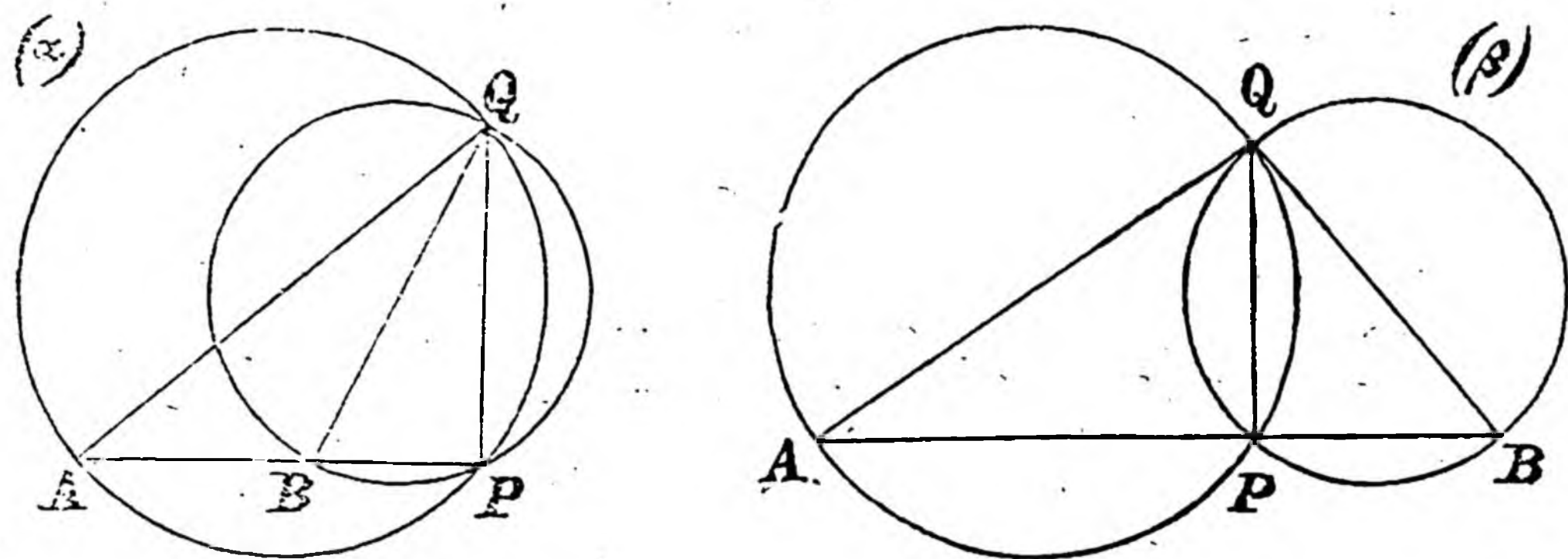
Задача провести прямую чрезъ данную точку такъ, чтобы она въ этой точкѣ, двумя данными прямыми дѣлилась пополамъ есть только частный случай дѣленія прямой въ данномъ отношеніи, рѣшеніе этой послѣдней задачи вытекаетъ изъ предъидущаго построенія и есть слѣдующее: чрезъ точку  $P$  проведемъ, какія нибудь прямая  $PA'$  или  $PA''$  до

встрѣчи съ  $AC$  въ  $A'$  и  $A''$ , продолжимъ эти прямыя въ противоположныя стороны до точекъ  $Y'$  и  $Y''$  такъ, чтобы отношенія  $PA':PY'$  или  $PA'':PY''$  были оба равны данному отношенію. Чрезъ точки  $Y$  или  $Y''$  проведемъ прямыя  $Y'B$  или  $Y''B$  параллельно  $AC$ , которыя пересѣкутъ другую данную прямую  $BC$  въ искомой точкѣ  $B$ .

*Примѣръ 10.* Изъ всѣхъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ одну изъ точекъ пересѣченія двухъ круговъ, *наибольшій* отрѣзокъ, заключенный между данными кругами, будетъ той прямой, которая перпендикулярна къ общей хордѣ круговъ, а *наибольшая* площадь будетъ въ томъ треугольникѣ, котораго основаніемъ будетъ наибольшій отрѣзокъ, а вершина въ другой точкѣ пересѣченія круговъ (фиг. 593).

*Доказат.* Пусть  $RQA$  и  $RQB$  будутъ два круга,  $R$  и  $Q$  точки ихъ пересѣченія,  $AB$  какая нибудь прямая, проходящая чрезъ точку  $R$  и пересѣкающая круги въ точкахъ  $A$  и  $B$ , соединимъ точки  $A$  и  $B$  съ другою точкою пересѣченія  $Q$ .

Фиг. 593.



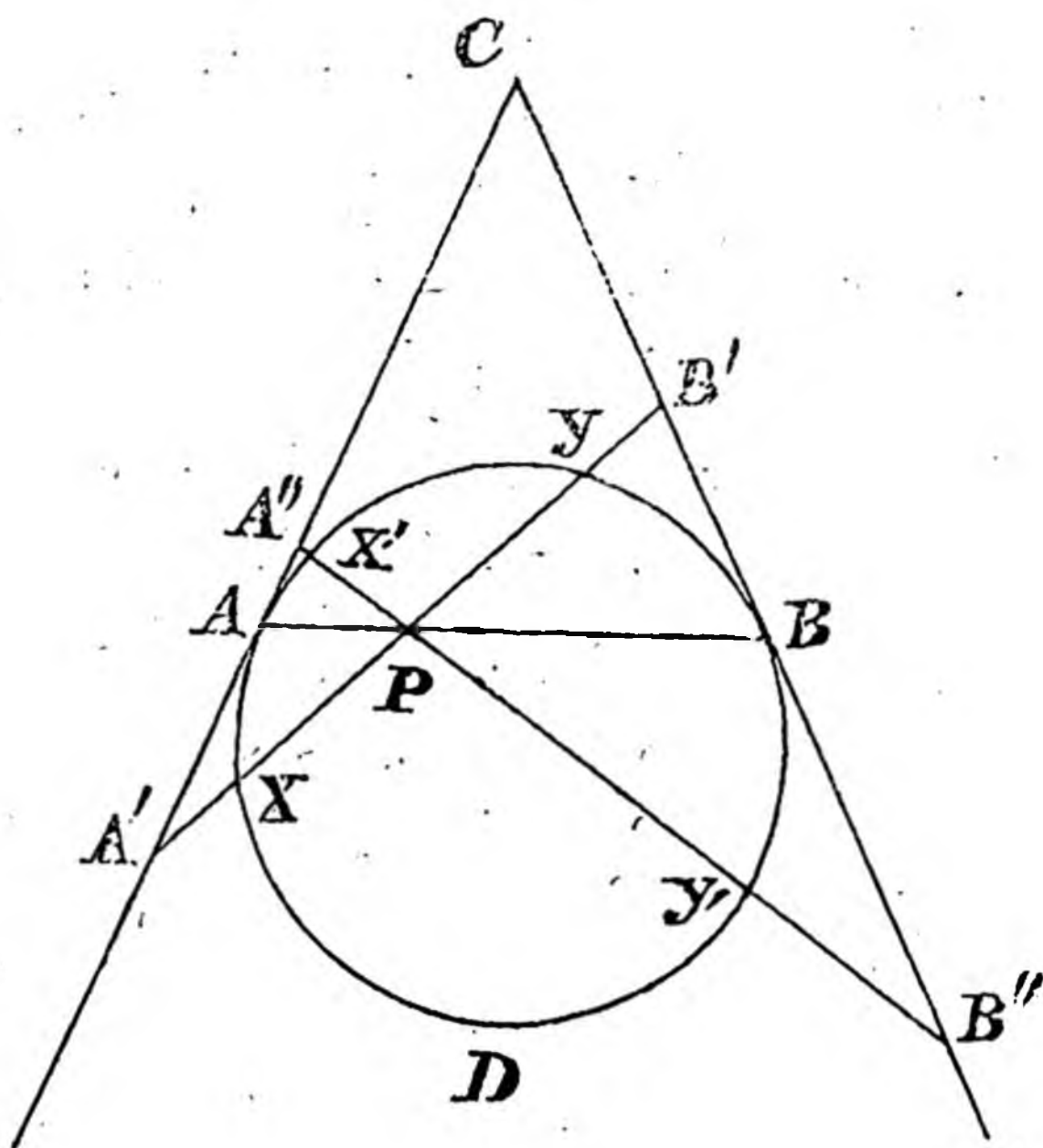
Какое бы ни было положеніе прямой  $AB$  треугольники  $AQB$  будутъ подобны, такъ какъ углы  $RAQ$  и  $RBQ$  будутъ постоянны (кн. 3, пред. 21), слѣдовательно основаніе  $AB$ , площадь  $AQB$  и стороны  $QA$  и  $QB$  будутъ всѣ вмѣстѣ *максимумъ*, но стороны  $QA$  и  $QB$  будутъ тогда *максимумъ*, когда онѣ проходятъ чрезъ центры круговъ, т. е. когда  $AB$  перпендикулярна къ  $RQ$  (кн. 3, пред. 31).

*Примѣръ 11.* Изъ всѣхъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ данную точку, наибольшая площадь прямоугольника, построеннаго на отрѣзкахъ, продолженныхъ въ противоположныя стороны отъ данной точки до встрѣчи съ двумя данными прямыми, будетъ той прямой, которая съ данными прямыми составляетъ равные углы (фиг. 594).

*Доказат.* Пусть  $R$  будетъ данная точка,  $AC$  и  $BC$  данныя прямыя,  $AB$  прямая, составляющая съ  $AC$  и  $BC$  равные углы,  $A'B'$  и  $A''B''$  другія, какія нибудь прямыя, проходящія чрезъ точку  $R$ . Если чрезъ точки  $A$  и  $B$  проведемъ кругъ  $ADB$ , который бы въ этихъ точкахъ касался прямыхъ  $AC$  и  $CB$ , то, если  $X'$  и  $Y'$  или  $X''$  и  $Y''$  будутъ точки пересѣченія прямыхъ  $A'B'$  и  $A''B''$  съ кругомъ, мы будемъ имѣть (кн. 3, пред. 35)

$AP \cdot PB = PX' \cdot PY' = PX'' \cdot PY'' < PA' \cdot PB', PA'' \cdot PB''$ , такъ какъ точки  $A', B', A'', B''$  лежатъ внѣ круга, слѣдовательно и т. д.

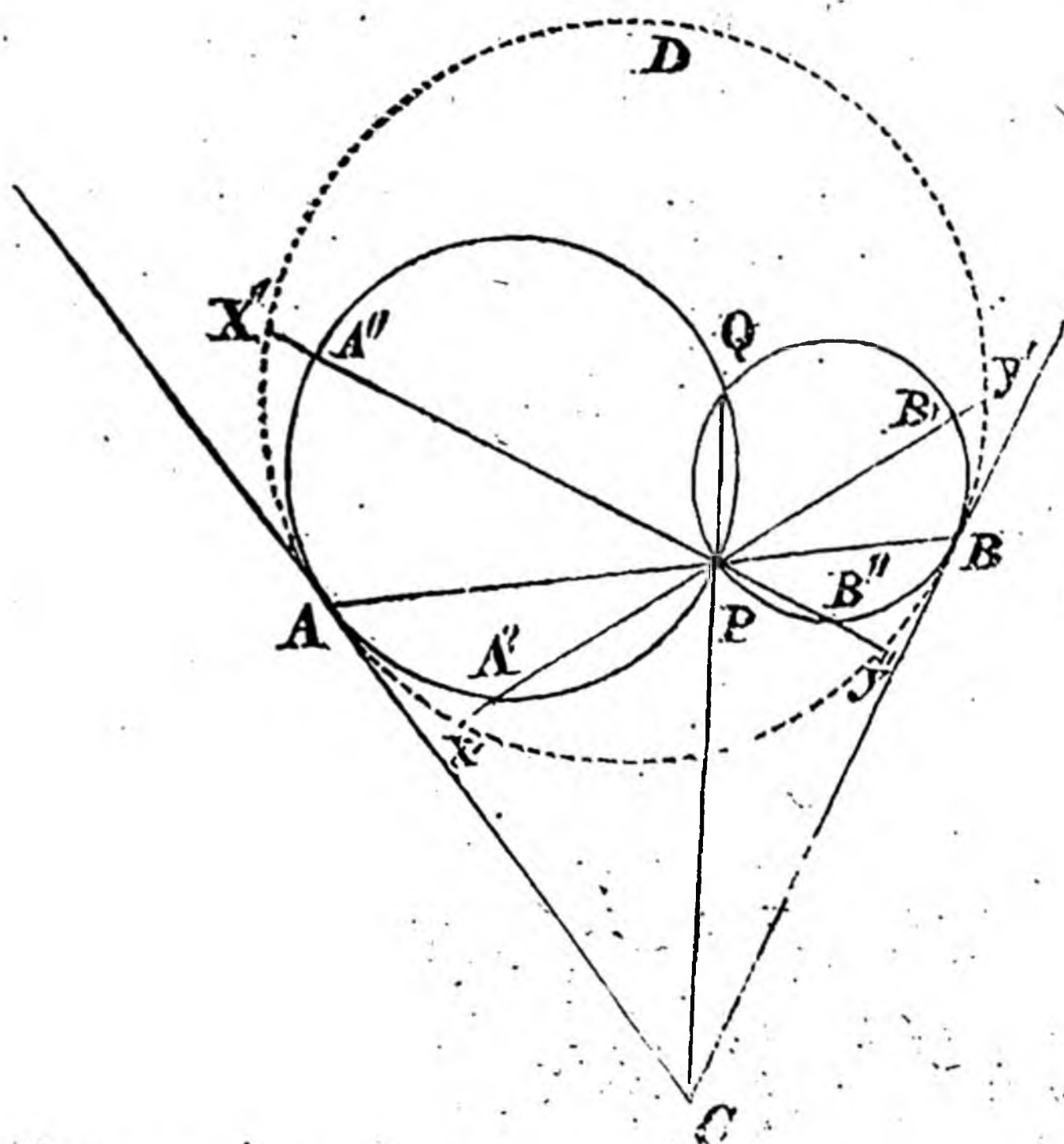
Фиг. 594.



*Примѣръ 12.* Такое же предложеніе какъ и предыдущее, только двѣ данныя прямыя замѣщаются двумя данными кругами, а данная точка замѣщается одною изъ точекъ пересѣченія круговъ (фиг. 595).

*Доказат.* Пусть  $PAQ$  и  $PBQ$  будутъ данные круги,  $P$  и  $Q$  точки ихъ пересѣченія,  $AB$  прямая, проходящая чрезъ точку  $P$  и составляющая съ кругами равные углы, т. е. съ касательными  $AC$  и  $BC$  въ концахъ  $A$  и  $B$  прямой  $AB$ , наконецъ пусть  $A'B'$  или  $A''B''$  будутъ другія, какія нибудь, прямыя проходящія чрезъ точку  $P$ . Если представимъ, что чрезъ точки  $A$  и  $B$  проведенъ кругъ  $ADB$  касающійся  $AC$  и  $BC$  и пересѣкающій прямыя  $A'B'$  и  $A''B''$  въ точкахъ  $X', Y', X'', Y''$ , то мы будемъ имѣть  $AP \cdot BP = PX' \cdot PY' = PX'' \cdot PY'' < PA' \cdot PB'$  или  $PA'' \cdot PB''$ , такъ какъ два данные круга находятся внутри построеннаго круга, слѣдовательно и т. д.

Фиг. 595.



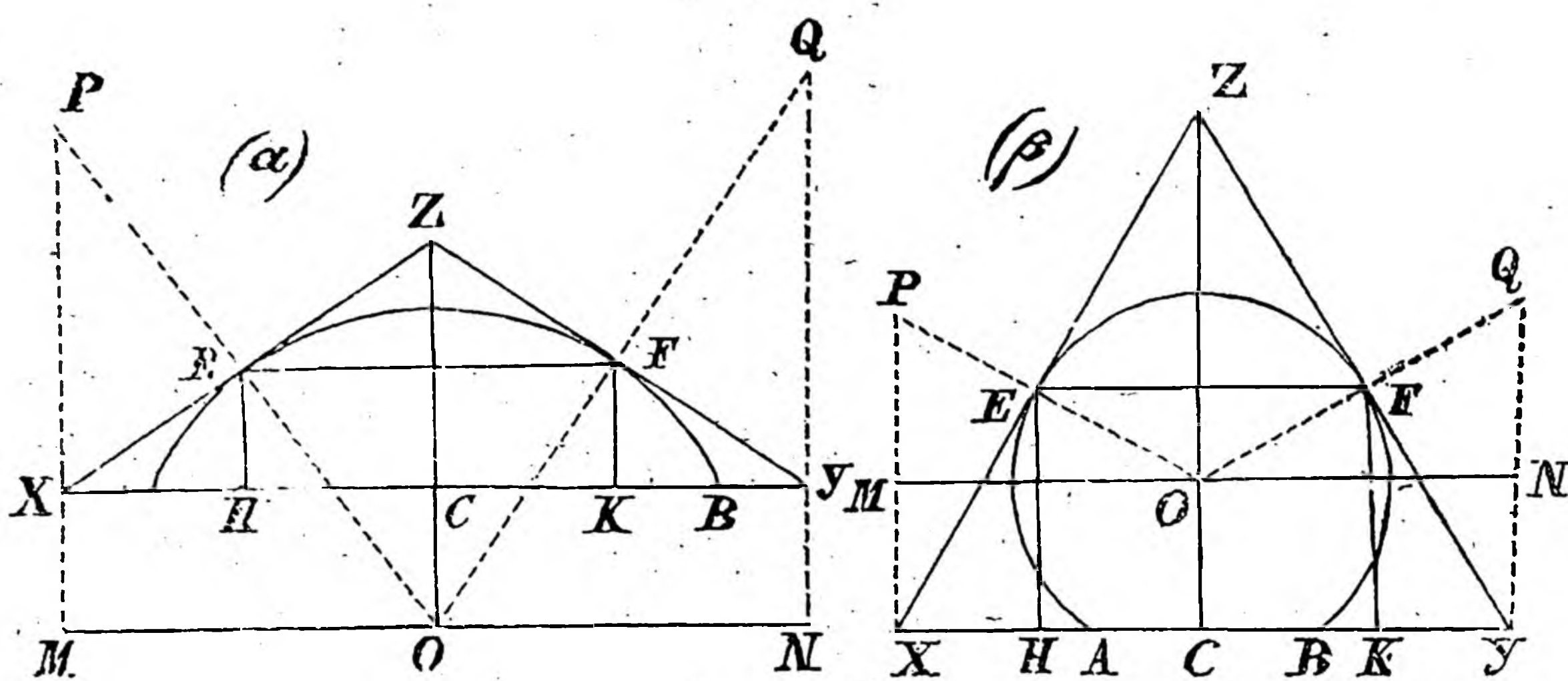
*Примѣръ 13.* Наибольшая площадь прямоугольника, вписаннаго въ



какойнибудь сегментъ круга, будетъ въ томъ прямоугольникѣ, въ которомъ сторона параллельная основанію, дѣлитъ пополамъ стороны треугольника, образованнаго касательными къ окружности, въ точкахъ пересѣченія стороны съ окружностью, и основаніемъ сегмента (фиг. 596).

*Доказат.* Пусть  $AEFB$  будетъ сегментъ,  $EF$  хорда параллельная основанію  $AB$ , которая дѣлитъ касательныя  $XZ$  и  $YZ$ , образующія съ основаніемъ  $XU$  треугольникъ  $XYZ$ , пополамъ въ точкахъ  $E$  и  $F$ .

Фиг. 596.



Такъ какъ прямоугольникъ  $EFKN$  вписанъ въ треугольникъ  $XZY$  имѣетъ наибольшую площадь (см. пр. 3), то онъ имѣетъ наибольшую площадь и относительно сегмента  $AEFB$ , который находится внутри треугольника.

Остается рѣшить задачу: провести  $EF$  такъ, чтобы касательныя  $ZX$  и  $ZY$  въ точкахъ  $E$  и  $F$  дѣлились пополамъ. Эта задача есть частный случай болѣе общей провести  $EF$  такъ, чтобы касательныя  $ZX$  и  $ZY$  въ точкахъ  $E$  и  $F$  дѣлились въ данномъ отношеніи. Эта послѣдняя задача рѣшается слѣдующимъ образомъ: чрезъ центръ  $O$  проведемъ  $OC$  перпендикулярно, а  $MN$  параллельно  $AB$ ,  $OC$  очевидно пройдетъ чрезъ  $Z$ . Полагая, что точки  $X$  и  $Y$  найдены, проведемъ  $XM$  и  $YN$  параллельныя  $OC$ , которыя пересѣкутъ радіусы  $OE$  и  $OF$ , полагая ихъ извѣстными, въ точкахъ  $P$  и  $Q$ . Изъ двухъ паръ подобныхъ треугольниковъ  $PEX$  и  $OEZ$ ,  $QFY$  и  $OFZ$  будемъ имѣть:

$$\frac{PE}{EO} = \frac{QF}{FO} = \text{данн. отнош.}$$

Но  $EO=FO$ , слѣдовательно  $PE=QF$ , а также  $PO=QO$ , откуда  $PE \cdot PO = QF \cdot QO$ . Но радіусъ круга есть величина извѣстная, слѣдовательно и величины,  $PE$ ,  $QF$ ,  $PO$ ,  $QO$ ,  $PE \cdot PO$ ,  $QF \cdot QO$  будутъ также извѣстны.



Изъ двухъ паръ подобныхъ треугольниковъ  $PEX$  и  $PMO$ ,  $QFY$  и  $QNO$ , мы имѣемъ:

$$PM.PX=PE.PO, \quad QN.QY=QF.QO$$

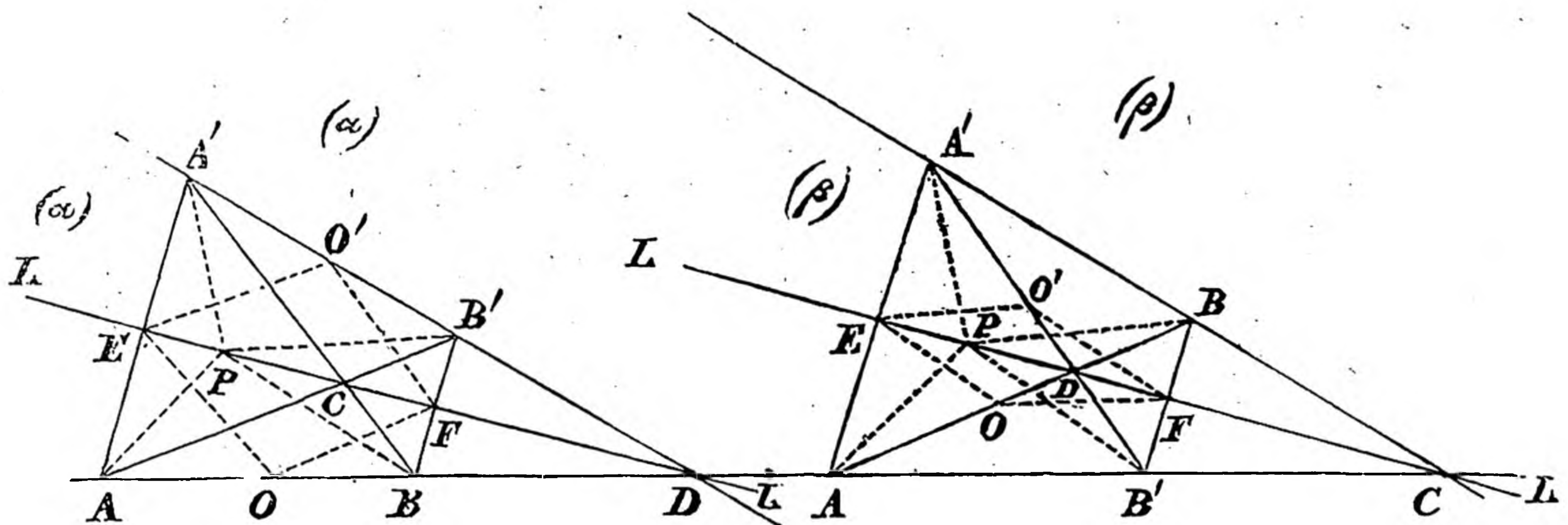
слѣдовательно прямоугольники  $MP.PX$ , и  $QN.QY$  равны и извѣстны, но  $MX=NY$  извѣстны потому что оба равны  $OC$ , слѣдовательно (кн. 2, пред. 6)  $PM=QN$ ,  $PX=QY$  и  $\angle POM=\angle QON$ , и какъ всѣ эти величины извѣстны, то извѣстны и точки  $E$  и  $F$ .

*Примѣръ 14.* Прямая, соединяющая перемѣнную точку на данной прямой съ двумя данными точками, лежащими по одну сторону прямой, будутъ имѣть *наибольшую* разность, когда ихъ направленія совпадаютъ и *наименьшую* сумму, когда данная прямая дѣлитъ *внѣшнѣй* уголъ между ними пополамъ (фиг. 597).

Если данныя точки лежатъ съ противоположныхъ сторонъ данной прямой, то вышеупомянутая прямая имѣютъ *наименьшую* сумму, когда ихъ направленія совпадаютъ и *наибольшую* разность, когда данная прямая дѣлитъ *внутреннѣй* уголъ между ними пополамъ.

*Доказат.*  $LL$  будетъ данная прямая (фиг.  $\alpha$  и фиг.  $\beta$ ), а  $A$  и  $B$  данныя двѣ точки,  $AE$  и  $BF$  перпендикуляры изъ нихъ на  $LL$ ,  $A'$  и  $B'$  двѣ точки на этихъ перпендикулярахъ такъ взяты, что  $AE=EA'$ ,  $BF=FB'$ , слѣдовательно разстоянія, какой нибудь точки  $P$  на  $LL$  отъ  $A$  и  $A'$ , отъ  $B$  и  $B'$  будутъ равны (кн. 1, пред. 4).

Фиг. 597.



Если  $D$  будетъ точка на  $LL$  въ которой  $AB$  или  $A'B'$  пересѣкаютъ  $LL$ , т. е. точки для которой направленія  $PA$  и  $PB$  совпадаютъ, и если  $C$  есть точка на  $LL$  въ которой прямая  $AB'$  или  $A'B$  пересѣкаютъ  $LL$ , т. е. точки для которой уголъ  $APB$  дѣлится пополамъ прямою  $LL$  (внѣшне фиг.  $\alpha$  или внутренне фиг.  $\beta$ ), то легко видѣть, что въ (фиг.  $\alpha$ ):

$$DA - DB > PA - PB \quad \text{и} \quad CA + CB < PA + PB \quad (1)$$

и въ (фиг.  $\beta$ ):

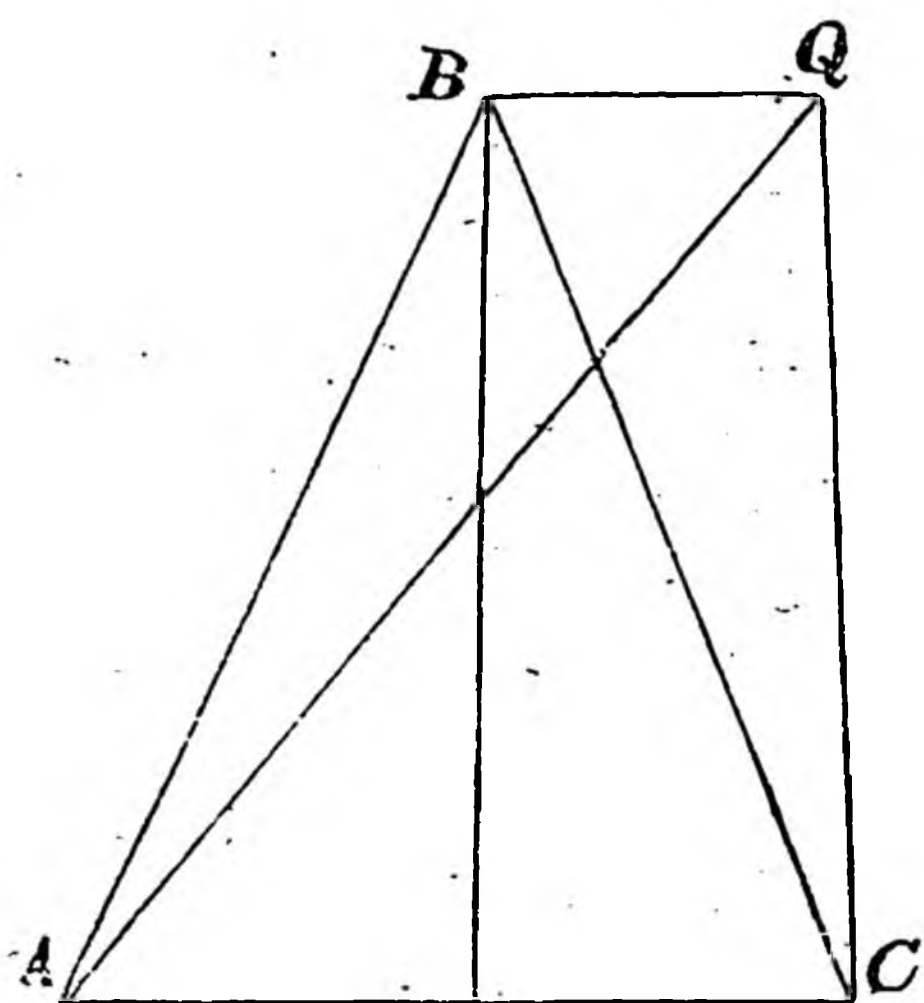
$$DA+DB < PA+PB \text{ и } CA-CB > PA-PB \quad (2)$$

первое неравенство видно изъ треугольника  $APB$  или  $A'PB'$ , а второе изъ треугольника  $APB'$  или  $A'PB$  (кн. 1, пред. 20).

*Примѣръ 15.* Изъ всѣхъ треугольниковъ построенныхъ на одномъ основаніи и имѣющихъ равныя площади *наименьшій* периметръ будетъ у равнобедреннаго треугольника (фиг. 598).

*Доказат.* Пусть  $ABC$  будетъ равнобедренный треугольникъ,  $AQC$  какой нибудь другой равной площади съ  $ABC$  и построенный на одномъ съ нимъ основаніи  $AC$ .

Фиг. 598.

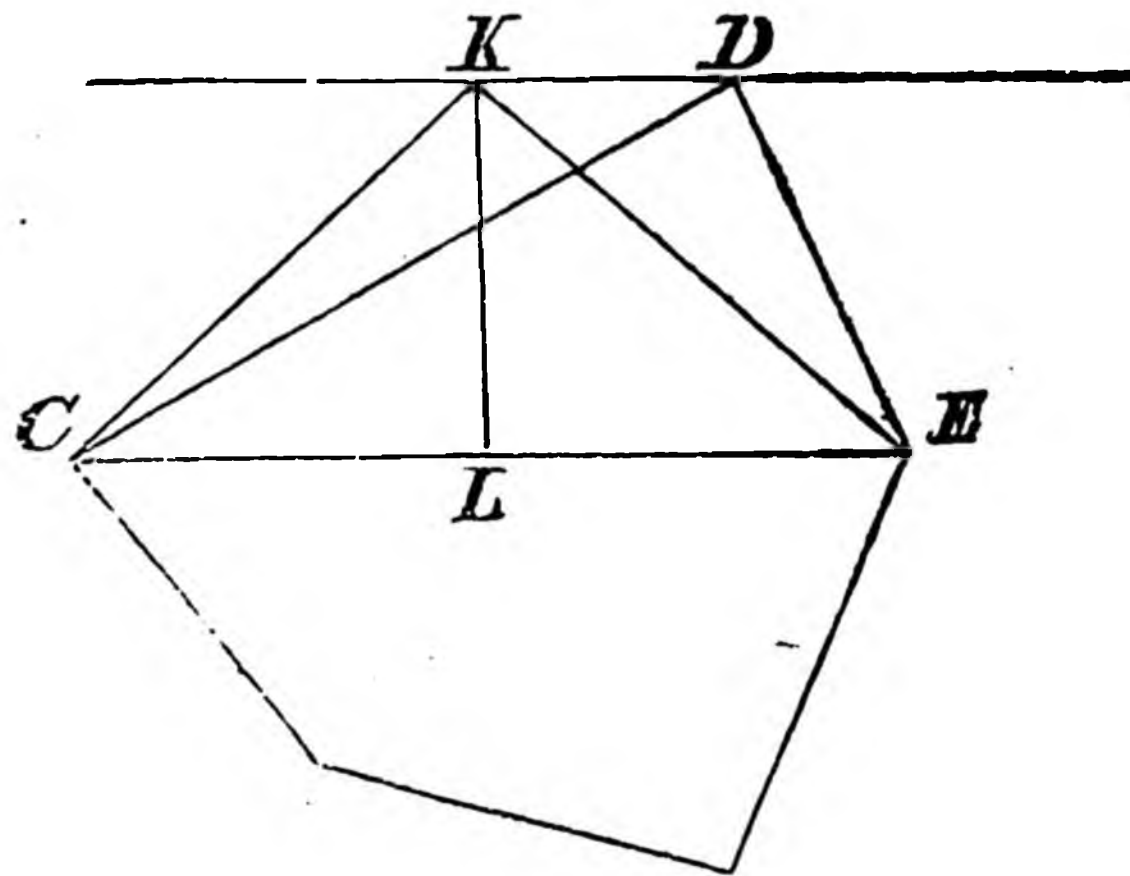


Соединимъ  $B$  съ  $Q$ , то  $BQ \parallel AC$  (кн. 1, пред. 39). Изъ предъидущаго предложенія слѣдуетъ, что  $AQ+QC > AB+BC$ .

*Примѣръ 16.* Если данъ разносторонній многоугольникъ, то можно найти другой многоугольникъ съ тѣмъ же числомъ сторонъ, имѣющій равную данному площадь, но коего периметръ будетъ меньше периметра даннаго (фиг. 599).

*Доказат.* Пусть  $CD$  и  $DE$  будутъ двѣ смежныя не равныя стороны многоугольника.

Фиг. 599.



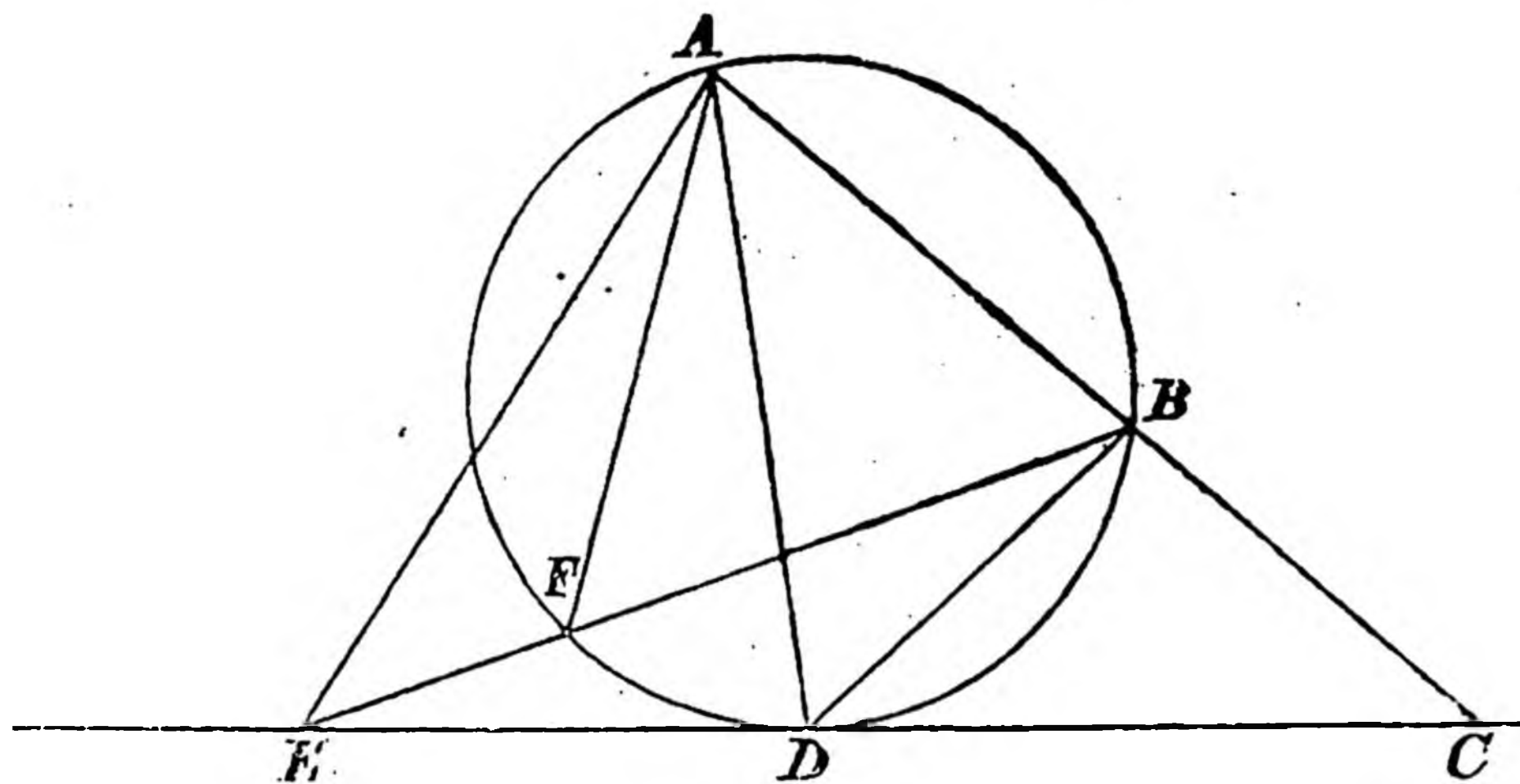
Соединимъ  $C$  съ  $E$ , чрезъ  $D$  проведемъ  $KD \parallel CE$ . Раздѣлимъ  $CE$  въ точкѣ  $L$  пополамъ, изъ точки  $L$  возставимъ къ  $CE$  перпендикуляръ до встрѣчи съ  $KD$  въ точкѣ  $K$ . Треугольникъ  $CDE$  можно замѣстить

треугольникомъ  $СКЕ$ , такъ какъ ихъ площади равны (кн. 1, пред. 37), но по предъидущему предложеңію периметръ треугольника  $СКЕ$  меньше периметра треугольника  $СДЕ$ , слѣдовательно и т. д.

*Примѣръ 17.* Дана прямая  $СЕ$  и двѣ точки  $A$  и  $B$  съ одной ея стороны, найти на прямой  $СЕ$  такую точку  $D$ , чтобы уголъ  $ADB$  былъ *наибольшій* (фиг. 600)?

*Рѣшеніе.* Опишемъ кругъ, который бы проходилъ чрезъ точки  $A$  и  $B$  и касался прямой  $СЕ$ . Пусть точка касанія построеннаго круга будетъ  $D$ .

Фиг. 600.



Я говорю что уголъ  $ADB$  будетъ *наибольшій*. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ какую нибудь точку  $E$  на прямой  $СЕ$  и соединимъ ее съ  $A$  и  $B$ , пусть  $EB$  пересѣкаетъ окружность въ точкѣ  $F$ , соединимъ  $F$  съ  $A$ , то мы имѣемъ  $\angle AEB < \angle AFB = \angle ADB$ , слѣдовательно и т. д.

*Примѣръ 18.* Даны двѣ точки  $A$  и  $B$  внѣ даннаго круга: найти такую точку  $D$  на кругѣ, чтобы уголъ  $ADB$  былъ *наибольшій*?

*Рѣшеніе.* Опишемъ кругъ, который бы проходилъ чрезъ точки  $A$  и  $B$  и касался даннаго круга, пусть точка касанія будетъ  $D$ , я говорю что уголъ  $ADB$  будетъ *наибольшій*, что легко показать, какъ въ предъидущей задачѣ.

*Примѣръ 19.* Рѣшимъ еще слѣдующій вопросъ:

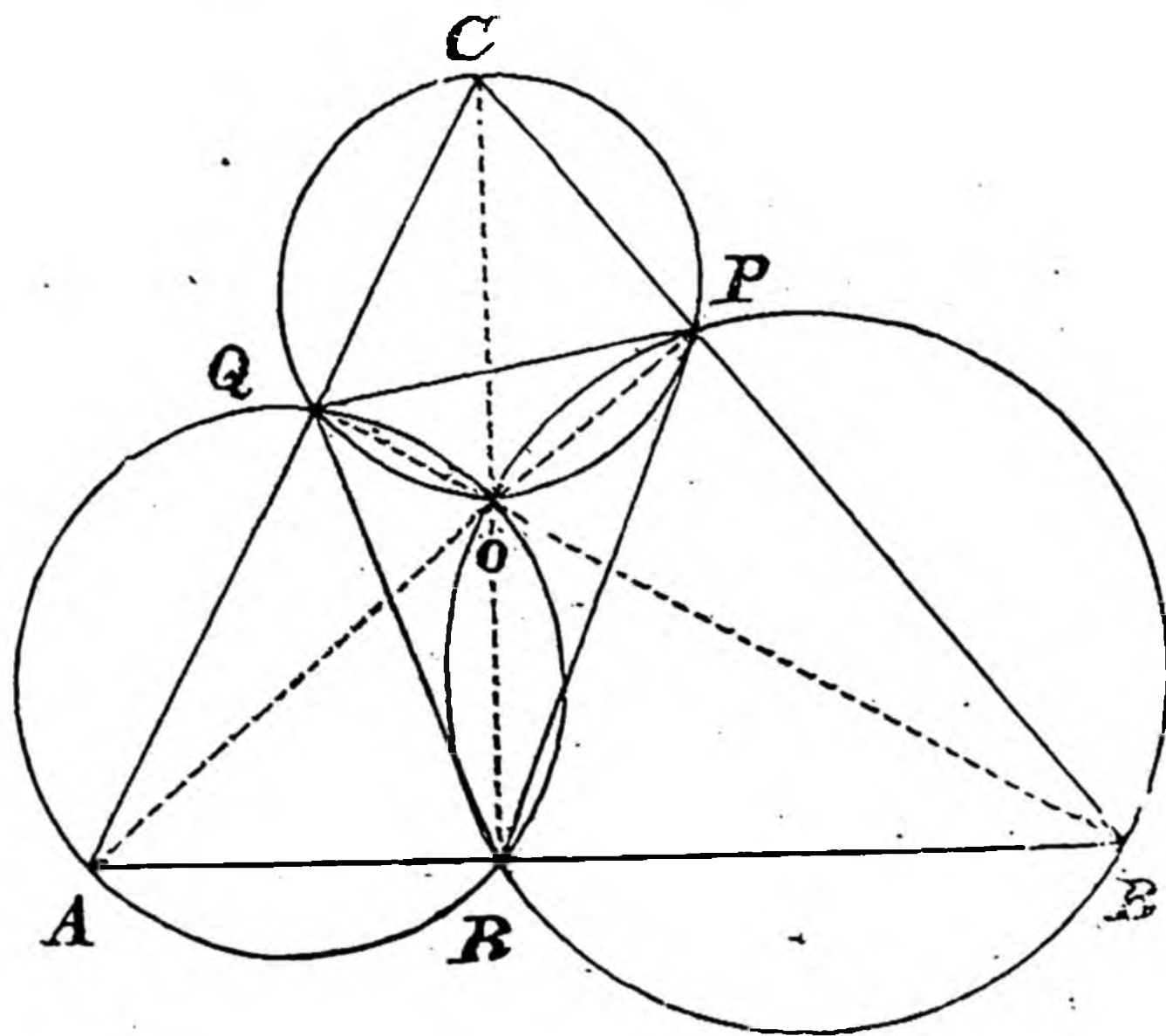
Изъ всѣхъ подобныхъ треугольниковъ, коихъ стороны проходятъ чрезъ три данныя точки, наибольшій будетъ тотъ, въ которомъ перпендикуляры, возставленные къ сторонамъ треугольника въ данныхъ точкахъ, пересѣкаются въ одной точкѣ (фиг. 601).

*Рѣшеніе.* Пусть данныя точки будутъ  $P, Q, R$ , а  $ABC$  треугольникъ, коего стороны проходятъ чрезъ точки  $P, Q, R$ . Построимъ три круга  $QAB, RBP, PCQ$ , очевидно, что это три круга пересѣкаются въ одной точкѣ  $O$  (кн. 3, пред. 21, 22). Углы  $QOR, ROP, POQ$  равны или суть дополнительные угламъ  $BAC, CBA, ABC$ , а углы  $BOC, COA, AOB$  равны суммѣ или разности угловъ  $BAC$  и  $PQR, CBA$  и  $RQP, ACB$  и



$PRQ$ , смотря по положенію точекъ  $P$ ,  $Q$  и  $R$ . Если данъ родъ подобія треугольниковъ  $ABC$ , т. е. если даны углы  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , то около точки  $O$  углы  $BOC$ ,  $COA$ ,  $AOB$  будутъ величины постоянныя, слѣдовательно треуголь-

Фиг. 601.



ники  $BOC$ ,  $COA$ ,  $AOB$  будутъ наибольшіе, когда стороны  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  будутъ наибольшіе, а эти послѣдніе будутъ наибольшіе тогда, когда  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  будутъ діаметрами, и слѣдовательно  $OP$ ,  $OQ$ ,  $OR$  будутъ перпендикуляры къ  $AC$ , къ  $AB$  и къ  $BC$ .

Въ теоріи *наибольшихъ* и *наименьшихъ* величинъ случается весьма часто, что переменная величина, въ извѣстномъ положеніи относительно элементовъ фигуры, съ которыми она связана, имѣетъ *наибольшую* или *наименьшую* величины, а въ другомъ положеніи относительно тѣхъ же элементовъ фигуры имѣетъ двѣ *наибольшихъ* или двѣ *наименьшихъ* величины, переходя всякій разъ, при двухъ *наибольшихъ*, чрезъ *наименьшую* 0, и при двухъ *наименьшихъ* чрезъ *наибольшую*  $\infty$ . Напримѣръ, разстояніе данной прямой отъ даннаго круга, если прямая не пересѣкаетъ кругъ, будетъ имѣть *наименьшую* и *наибольшую* величину: именно, разстоянія концевъ діаметра перпендикулярнаго къ данной прямой. Разстояніе это будетъ имѣть два *наибольшихъ* значенія, когда прямая пересѣкаетъ кругъ; отъ одного наибольшаго значенія къ другому переменная величина (т. е. разстояніе) переходитъ всякій разъ чрезъ *наименьшую* 0, въ точкахъ пересѣченія прямой съ окружностью.

*Наибольшая* изъ *наибольшихъ* и *наименьшая* изъ *наименьшихъ* переменной величины, очевидно даютъ, во всѣхъ случаяхъ, предѣлы возможности и невозможности задачъ, въ которыя входятъ такія переменныя величины.

Очевидно, невозможно построить величину, какого бы рода она ни была, больше *наибольшей* изъ *наибольшихъ* и меньше *наименьшей* изъ *наим-*



*меньших* величинъ, которыя эта переменная величина можетъ получить, въ зависимости съ другими.

*Наибольшую* изъ *наибольшихъ* и *наименьшую* изъ *наименьшихъ* мы будемъ называть *предѣльными* величинами.

Часто случается, что предѣльныя величины переменной въ известномъ положеніи *равны*, въ этомъ случаѣ и всѣ среднія величины *равны*, а слѣдовательно переменная величина будетъ *постоянна*. Въ каждомъ такомъ случаѣ, задача для построения возможна только для этой постоянной величины, для всякой же другой построение невозможно. Въ случаѣ возможности задача имѣетъ *безчисленное множество* рѣшеній или, какъ говорятъ, задача *неопредѣленная*.

Въ общемъ случаѣ, когда предѣльныя величины *наибольшихъ* и *наименьшихъ* не равны, а требуется построить величину промежуточную, то задача для построения допускаетъ всегда не менѣе *двухъ* опредѣленныхъ рѣшеній, раздѣленныхъ между собою известнымъ промежуткомъ. Этотъ промежутокъ дѣлается все меньше и меньше по мѣрѣ того, какъ данная величина для построения приближается къ предѣльнымъ, т. е. къ предѣламъ возможности или невозможности построения. Когда наконецъ величина, данная для построения, совпадетъ съ одною изъ предѣльныхъ, то *два* рѣшенія совпадутъ, т. е. получится *одно* рѣшеніе, за тѣмъ когда данная величина, для построения, выйдетъ за предѣльныя величины, то задача дѣлается невозможною. Пояснимъ это примѣромъ: всѣ задачи, которыя рѣшаются съ помощью круга имѣютъ не менѣе *двухъ* различныхъ рѣшеній, которыя для предѣльныхъ величинъ совпадаютъ и переходятъ отъ возможныхъ къ невозможнымъ и обратно, пусть на примѣръ требуется:

Найти на окружности даннаго круга точку, которая бы находилась въ данномъ разстояніи отъ данной точки?

Если данная точка будетъ центръ даннаго круга, то, очевидно, задача возможна только въ томъ случаѣ, когда данное разстояніе будетъ равно радіусу даннаго круга, для какого нибудь другаго разстоянія, очевидно, задача невозможна.

Для точки данной внѣ центра задачи имѣетъ *два* и только *два* опредѣленныхъ рѣшенія: оба различныхъ, совпадающія или оба невозможныя, смотря потому будетъ-ли данное разстояніе лежать между предѣльными величинами, равно одной изъ предѣльныхъ или лежитъ внѣ ихъ.

Замѣтимъ наконецъ, что если задача допускаетъ *одно* только рѣшеніе, то она всегда возможна, если же задача допускаетъ *два* рѣшенія, то оба эти рѣшенія дѣлаются невозможными вмѣстѣ и притомъ всегда при переходѣ отъ возможности къ невозможности дѣлаются равными. Замѣтимъ еще, что нѣтъ задачи въ геометріи, которая бы, при известныхъ условіяхъ, не сдѣлалась неопредѣленною.

Разберемъ еще одну, весьма простую, задачу:

На данной прямой найти точку въ данномъ разстояніи отъ данной точки?

Изъ данной точки, какъ изъ центра, радіусомъ равнымъ данному разстоянію опишемъ кругъ, этотъ кругъ пересѣчетъ прямую въ двухъ точкахъ. Построенныя, такимъ образомъ, точки и будутъ искомыя. Самое большее разстояніе точекъ на прямой есть  $\infty$ , а самое меньшее есть длина перпендикуляра, опущеннаго изъ данной точки на данную прямую, слѣдовательно предѣльныя величины для разстоянія суть  $\infty$  и длина выше упомянутого перпендикуляра. Если данное разстояніе лежитъ между этими двумя предѣлами, то задача имѣетъ всегда *два различныя* рѣшенія, если данная длина равна упомянутому перпендикуляру, то оба рѣшенія *совпадаютъ*, т. е. дѣлаются равными, если данная длина меньше перпендикуляра, то *оба* рѣшенія дѣлаются *невозможными*.

---

## XI. Отрицательныя количества въ геометріи.

Отличительный характер *новой геометріи* передъ древнею состоитъ, въ ясности и отчетливости языка и доказательствъ. Общія предложенія съ одной стороны и общія доказательства съ другой, заключаютъ, въ новой геометріи, всѣ различныя случаи разнообразныхъ свойствъ, которыя происходятъ отъ измѣненія въ числѣ, положеніи и величинѣ элементовъ входящихъ въ фигуру. Эти разнообразныя измѣненія въ одной и той же фигурѣ, въ *древней геометріи*, рассматривались какъ различныя предложенія, требующія, каждое, отдѣльное доказательство. Всѣ такія предложенія и доказательства, въ новой геометріи, не загромождены случайными частностями, излишними подробностями, и въ слѣдствіе ихъ общности скорѣе понимаются и легко помнятся. Это важное преимущество новой геометріи передъ древнею обязано употребленіемъ алгебраическихъ знаковъ  $+$  и  $-$ , означающихъ въ какомъ направленіи должно отсчитывать рассматриваемыя величины. Вотъ общее для этого правило:

*Если, какія нибудь, геометрическія величины могутъ отсчитываться въ противоположныхъ направленіяхъ, то величинамъ, отсчитываемымъ въ одномъ направленіи даютъ знакъ  $+$ , а отсчитываемымъ въ противоположномъ направленіи даютъ знакъ  $-$ .*

Въ какомъ направленіи отсчитываются величины сопровождаемыя знакомъ  $+$ , и въ какомъ знакомъ  $-$ , это предоставляется выбору изслѣдователя.

Отрѣзки откладываемыя на одной прямой линіи, дуги—на одномъ кругѣ, углы—около одной вершины, треугольники или параллелограммы, построенные на одномъ основаніи, перпендикуляры возставленные къ одной и той же прямой или прямыя одинаково наклоненныя къ ней, всѣ эти геометрическія величины, разныхъ родовъ, представляютъ примѣры, въ которыхъ, такія величины, могутъ быть откладываемы въ противоположныхъ направленіяхъ, а слѣдовательно, по принятому условію, должны однѣ изъ нихъ сопровождаться знакомъ  $+$ , а другія знакомъ  $-$ .



Мы уже выше замѣтили, что выборъ какому изъ двухъ противоположныхъ направленій дать знакъ  $+$ , а слѣдовательно другому знакъ  $-$ , остается совершенно произвольнымъ, но разъ выборъ сдѣланъ, это правило должно строго соблюдаться до конца изслѣдованія.

Если въ изслѣдованіи сравниваются геометрическія величины не одного направленія или непротивоположныя, какъ напримѣръ отрѣзки, откладываемыя на различныхъ прямыхъ, треугольники или параллелограммы, построенные на различныхъ основаніяхъ, перпендикуляры возставленные къ различнымъ прямымъ или прямыя не одинаково наклоненныя къ прямой, то для каждаго изъ такихъ случаевъ выбираются произвольно направленія, которымъ даютъ знакъ  $+$ , а противоположнымъ даютъ знакъ  $-$ , какъ только такой выборъ сдѣланъ, то его надобно строго соблюдать въ продолженіи всего изслѣдованія.

Геометрическія величины, сопровождаемыя знакомъ  $+$ , какъ и въ алгебрѣ, называются *положительными*, а сопровождаемыя знакомъ  $-$ , называются *отрицательными*.

Этотъ принципъ отличаетъ новую геометрію отъ древней. Онъ даетъ способъ видѣть въ геометрическихъ величинахъ не только абсолютное числовое значеніе, но и направленіе, дѣлаетъ языкъ, предложенія и доказательства независимыми отъ случайнаго расположенія элементовъ изслѣдуемой фигуры.

Согласно этому началу, выраженія: *сумма* и *разность* въ геометріи, получаютъ такія же значенія какъ и въ алгебрѣ.

Слово *сумма* въ ариѳметикѣ употребляется, какъ результатъ сложенія нѣсколькихъ величинъ безъ всякаго вниманія на знаки и есть всегда количество положительное. Въ алгебрѣ и въ геометріи слово *сумма* есть результатъ сложенія нѣсколькихъ величинъ обращая вниманіе и на знаки, такъ что алгебраическая или геометрическая сумма есть ариѳметическая сумма всѣхъ положительныхъ величинъ безъ ариѳметической суммы всѣхъ отрицательныхъ величинъ.

Изъ этого видно, что алгебраическая или геометрическая сумма будетъ величина *положительная*, *отрицательная* или *нуль*, смотря потому будетъ ли сумма *положительныхъ* величинъ больше, меньше или равна суммѣ *отрицательныхъ* величинъ.

Тоже относится и къ слову *разность*. Въ ариѳметикѣ оно означаетъ отнятіе одного количества отъ другаго, обращая вниманіе только на абсолютное ихъ числовое значеніе, а въ алгебрѣ и геометріи, разность получается, обращая вниманіе и на знакъ, поэтому часто въ алгебрѣ или въ геометріи разность можетъ быть ариѳметической суммой и обратно.

Подобныя замѣчанія относятся и къ словамъ *произведеніе* и *частное*

или *отношеніе*. Въ новой геометріи онѣ употребляются обращая вниманіе и на знаки множителей или дѣлимаго и дѣлителя, и подобно какъ въ алгебрѣ, произведеніе двухъ геометрическихъ величинъ съ одинаковыми знаками даетъ произведеніе *положительное*, а съ разными знаками *отрицательное*, тоже относится и къ частному двухъ геометрическихъ величинъ. И вообще произведеніе нѣсколькихъ геометрическихъ величинъ будетъ положительное или отрицательное, смотря потому будетъ-ли число отрицательныхъ величинъ четное или нечетное. Такъ на примѣръ, площадь прямоугольника или отношеніе двухъ величинъ будетъ положительное или отрицательное, смотря потому будутъ-ли линіи имѣть одинаковые знаки или разные знаки!

Легко видѣть, что означаютъ въ новой геометріи слова: *средне-арифметическое* и *средне-геометрическое* число или величина.

Остается показать условіе относительно знаковъ въ геометріи и приложеніи его, для поясненія, къ нѣкоторымъ предложеніямъ.

Извѣстно, что *отрѣзокъ* на прямой читается двумя буквами поставленными на конечныхъ его точкахъ  $A$  и  $B$ , говорятъ отрѣзокъ  $AB$ . При этомъ условились принимать, что отрѣзокъ  $AB$ , откладывается или отсчитывается на прямой отъ точки  $A$  до точки  $B$ , обозначеніе же  $BA$  будетъ обозначать откладываніе того же отрѣзка только въ противоположномъ направленіи отъ  $B$  къ  $A$ . Слѣдовательно, относительно принятаго знака для отрѣзка  $AB$ , мы будемъ всегда имѣть  $AB = -BA$  или что тоже  $AB + BA = 0$ , какія бы ни были точки  $A$  и  $B$  и какое бы ни было разстояніе между ними.

То что мы сказали относительно отрѣзковъ прямой относится точно также и къ отрѣзкамъ дугъ на кругѣ, къ угламъ и т. д.

*Примѣръ 1.* Если  $A$  и  $B$  суть двѣ, какія нибудь точки на прямой линіи, и  $P$  какая нибудь третья точка на той же прямой, между точками  $A$  и  $B$  или внѣ ихъ, то мы всегда будемъ имѣть:

$$AP + PB + BA = 0$$

если будемъ принимать во вниманіе условіе знаковъ.

Въ самомъ дѣлѣ:

1-е. Если точка  $P$  лежитъ между  $A$  и  $B$ , то очевидно мы имѣемъ:

$$AP + PB = AB$$

но по условію  $AB = -BA$ , слѣдовательно:

$$AP + PB + BA = 0$$



2-е. Если точка  $P$  лежитъ внѣ точекъ  $A$  и  $B$  со стороны  $B$ , то по предыдущему мы имѣемъ:

$$AB + BP + PA = 0$$

но  $PA = -AP$ ,  $BP = -PB$ ,  $AB = -BA$ , слѣдовательно:

$$AP + PB + BA = 0$$

3-е. Если точка  $P$  лежитъ внѣ  $A$  и  $B$  со стороны  $A$ , то также легко показать, что:

$$AP + PB + BA = 0$$

Если на одной прямой лежатъ нѣсколько точекъ  $A, B, C, D, E$ , то легко видѣть, что мы будемъ всегда имѣть:

$$AB + BC + CD + DE + EA = 0$$

*Примѣръ 2.* Если отрезокъ  $AB$  раздѣленъ точкою  $P$  на два отрезка, внутренне или внѣшне, то легко видѣть, что:

$$AP^2 + BP^2 = AB^2 + 2AP \cdot BP$$

какое бы ни было положеніе точки  $P$  относительно точекъ  $A$  и  $B$ .

*Примѣръ 3.* Если изъ какой нибудь точки  $P$ , внѣ отрезка  $AB$ , опущенъ на него перпендикуляръ  $PQ$ , то какое бы ни было положеніе точки  $P$ , относительно отрезка  $AB$ , мы всегда имѣемъ:

$$AP^2 - BP^2 = AB^2 + 2AB \cdot BQ$$

*Примѣръ 4.* Даны величина и знакъ отношенія  $m:n$  отрезковъ  $AP$  и  $BP$ , на которые данная прямая  $AB$  раздѣлена точкою  $P$ , опредѣлить величину и знакъ отрезковъ?

*Рѣшеніе.* Такъ какъ по положенію:

$$AP : BP = m : n$$

то:

$$AP : AP - BP = m : m - n$$

и

$$BP : BP - AP = n : n - m$$



и какъ мы имѣемъ всегда:

$$AP - BP = AB, \quad BP - AP = BA$$

то:

$$AP = \frac{m}{m-n} \cdot AB = \frac{m}{n-m} \cdot BA$$

$$BP = \frac{n}{m-n} \cdot AB = \frac{n}{n-m} \cdot BA$$

Это и суть общія формулы, по которымъ вычисляется длина иско-  
мыхъ отрѣзковъ.

## ХІІ. Удвоеніе куба и трисекція угла.

Въ предисловіи я упомянулъ о задачахъ, которыми много занимались древніе геометры и которыя были причиной многихъ важныхъ открытій въ геометріи. Задачи эти были: *удвоеніе куба* или *делійская задача* и *трисекція угла*.

### Удвоеніе куба.

Эратосеенъ, геометръ жившій не задолго послѣ Евклида, рассказываетъ слѣдующее: Критскій царь Миносъ желалъ воздвигнуть надгробный памятникъ своему сыну Главку въ видѣ куба, когда архитекторъ сказалъ, что сторона такого куба будетъ 100 футовъ, то Миносъ отвѣтилъ, что онъ желаетъ чтобы памятникъ, сохранивъ фигуру куба, былъ въ двое больше.

Если перевести эту задачу на нашъ алгебраическій языкъ, то, означая вообще сторону первоначальнаго куба чрезъ  $a$ , и сторону искомаго чрезъ  $x$ , мы будемъ имѣть  $x^3 = 2a^3$ , откуда  $x = a\sqrt[3]{2}$ .

Хотя безъ сомнѣнія, какъ нѣкоторые историки замѣчаютъ, извлеченіе кубическаго корня изъ чиселъ было уже давно извѣстно, но здѣсь требовалось рѣшеніе не ариѳметическое, т. е. извлеченіе кубическаго корня изъ двухъ, а геометрическое построеніе съ помощью линейки и циркуля, т. е. прямой и круга.

Первый изъ геометровъ, который преобразовалъ эту задачу былъ Гиппократъ Хіоскій, онъ показалъ, что если мы будемъ имѣть:

$$a : x = x : y, \quad x : y = y : 2a$$

то отсюда слѣдуетъ  $x^3 = 2a^3$ . Слѣдовательно онъ делійскую задачу свелъ на розысканіе двухъ средне-геометрическихъ между двумя данными величинами. Но преобразованная задача представляетъ такія же трудности какъ и данная.

Много было придумано рѣшеній этихъ двухъ задачъ, но всѣ онѣ не были элементарныя, было придумано нѣсколько кривыхъ линій, которыя служили для рѣшенія этихъ задачъ. Самое простое рѣшеніе было то, въ которомъ употребляется кругъ и одно изъ коническихъ сѣченій. Всѣ остальные рѣшенія принадлежатъ высшему разряду.

Названіе дельійской задачи она получила потому, что во время моровой язвы Дельеійскій оракуль сказалъ, что умилоствитъ боговъ можно удвоивъ алтарь Аполлона, который былъ кубической формы весь изъ золота.

#### Трисекція угла.

Вторая, не менѣе знаменитая, задача въ древности есть трисекція угла, т. е. данный уголъ раздѣлить на три равныя части?

Пусть треть даннаго угла будетъ  $\varphi$ , то данный уголъ будетъ  $3\varphi$ . Изъ тригонометріи извѣстно, что:

$$\cos 3\varphi = \cos (\varphi + 2\varphi) = \cos \varphi \cdot \cos 2\varphi - \sin \varphi \cdot \sin 2\varphi$$

Но:

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = 2\cos^2 \varphi - 1, \quad \sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$$

откуда, подставляя, найдемъ:

$$\cos 3\varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi$$

Полагая  $\cos 3\varphi = a$ ,  $\cos \varphi = x$ , мы будемъ имѣть слѣдующее уравненіе:

$$a = 4x^3 - 3x$$

или

$$x^3 - \frac{3}{4}x = \frac{1}{4}a$$

Это уравненіе, которое очевидно древнимъ не было извѣстно и даетъ рѣшеніе предложенной задачи. Если бы корни этого уравненія можно было построить съ помощью прямой и круга, чего добивались и древніе, то задача была-бы рѣшена элементарно, но такое построеніе невозможно, корни уравненія 3-й степени могутъ быть построены только съ помощью коническихъ сѣченій и простѣйшимъ рѣшеніемъ считается то, въ которое входитъ только одно коническое сѣченіе и кругъ. Были придуманы и другія кривыя высшихъ порядковъ для рѣшенія этой задачи, изъ коихъ одна извѣстна подъ именемъ *квадратриксы* и была придумана Диностратомъ. Эта кривая повела-бы къ отысканію квадратуры круга, если бы было возможно опредѣлить мѣсто *нѣкоторой точки* на ней, но такое опредѣленіе ведетъ къ такимъ же трудностямъ, какъ и квадратура круга—это есть круговая зависимость.

Многіе и въ настоящее время занимаются удвоеніемъ куба и трисекціей угла, не зная что Ванцель (Wantzel) доказалъ, что съ помощью прямой и круга эти задачи рѣшены быть не могутъ\*).

---

\*) L. Wantzel. Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas.

Journal de Mathématiques pures et appliquées. T. II. 1837.



## Прибавленіе къ страницѣ 50-й.

Извѣстно, что:

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

Если возьмемъ функціи:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{и} \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

и означимъ первую изъ нихъ чрезъ  $\sinh x$ , а вторую  $\cosh x$ , то такія функціи будутъ аналогичны тригонометрическимъ и называются *гиперболическими*.

Въ выраженіяхъ:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

буква h послѣ sin и cos означаетъ гиперболическіе синусъ и косинусъ. Легко изъ выраженія этихъ функцій найти слѣдующія формулы сходныя съ тригонометрическими:

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh xi = \cos x, \quad \cosh x = \cos xi$$

$$\sinh xi = i \sin x, \quad \sinh x = \frac{i}{i} \sin xi$$

и наконецъ:

$$e^x = \cosh x + \sinh x$$

откуда:

$$(\cosh x + \sinh x)^m = \cosh mx + \sinh mx$$

Легко видѣть также, что эти функціи имѣютъ мнимый періодъ  $2\pi i$ :

$$\sinh(x \pm 2n\pi i) = \sinh x, \quad \cosh(x \pm 2n\pi i) = \cosh x$$

## СПИСОКЪ „НАЧАЛЪ ЕВКЛИДА“ ВЫШЕДШИХЪ СЪ 1482 ПО 1880 ГОДЪ.

1482. Preclarissimus Liber Elementorum Euclidis, perspicacissimi in artem geometrie incipit quam felicissime. Venetiis. Erhardus Ratdolt, in—fol.
1491. Euclidis Megarensis Elementorum Geometriae Lib. XV e graeco in latinum translatus, cum Commentationibus Ant. Campani. Vicentiae, per Leonardum de Basilea, in—fol.
1502. Eucl. Meg. Geometr. elementorum. LL. XV. Campani Galli ect. Venetiis, in—fol.
1505. Euclidis Elementa. Lat. per Campanus et Zambertum. Ven. in—fol.
1506. Element. Libri VI priores, lat. c. c. Campani. Ed. Amb. Lacher de Merspurgh. Franc.
1509. Euclidis Megarensis, philosophi acutissimi, mathematicorum omnium sine controversia principis Opera. Venetiis. Издано Lucas Paciolus, in—fol.
1509. Начала Евклида напечатаны въ Сборникѣ, содержащемъ кромѣ Началъ еще комментарий Теона и соч. Гипсикла. Переводъ Замберти. Venetiis, in aedibus Joannis Tacuini, in—fol.
1510. Eucl. Elementa. Veneg. in—fol.
1511. Eucl. Elem. Librorum IV priores. Paris.
1513. Eucl. Meg. Phil. Plat. mathem. discipl. Janitoris: habent ect. Barth. Zamberto Venet. interprete. Venetiis in aedibus Joan. Tacuini.
1516. Les seis libros primoros de la geometrica de Eucl. trad. por Rodr. Zamorano. Sevilla, in—4.
1516. Eucl. Elem. Libri IV priores. Paris.
- 1516\*. Eucl. Meg. Geometr. element. LL. XV. Paris, in—fol.
1517. Elementa geometria ex traditione Theonis Barthol. Zamberto. Ven. interprete, ect. Venetiis. Joan. Tacuini, in—fol.
1521. Eucl. Meg. Geometr. element. LL. XV. Paris, in—fol.
1527. Eucl. Elem. Lat. Baetio Interp. Paris, in—fol.
1533. ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ στοιχειων βιβλ. ιε. εκ των Θεωνος συνουσιων. Εἰς του αὐτου το πρωτον, ἐξηγηματων Προκλου βιβλ. δ. in—fol.
1533. Euclidis Elementa. Graece c. schol. Theonis et Procli, Grynaeus. Basil, in—fol.
1536. Orontii Finei Delphinatis, regii mathem. profess., in sex priores libros Geometricorum Elementorum Euclidis Meg. ect. Parisiis, in—fol.
1537. Euclidis Megarensis Geometricorum elementorum libri. Parisiis in officina Henrici Stephani, in—4.
1537. Eucl. Elementa ect. Basil, in—fol.

1539. Eucl. Opera omnia, graece cum scholiis graecis. Basil, in—fol.
1541. Euclidis Elementorum libri. XV. Romae, in—8. Греческий текстъ.
1543. Euclide Meg. Philos.: solo introduttore delle Scienze Matematiche diligentemente reassetato et alla integrità ridotto per ect. Nic. Tartalea ect. et per commune comodo et utilità di latino in volgar tradotto. Vinegia, in—fol.
1544. Orontii Finei Delphinatis, regii mathem. profess., in sex priores libros Geometricorum Elementorum Euclidis Meg. ect. Parisiis, in—4.
1544. Euclide Meg. Philos. solo introduttore delle scientia matematiche ect. Vinegia, in—fol.
1544. Eucl. Meg. ect. Nic. Tartalea. Venezia, in—fol.
1545. Euclide Meg. Philos.: solo introduttore delle Scienze Matematiche ect. Nic. Tartalea ect. Vinegia, in—fol.
1545. Eucl. elementorum LL. XV. Graece ed. Aug. Caianus. Roma, in—8. Итальянский переводъ предыдущаго.
1545. Eucl. elementorum L. XV. Venegia, in—fol.
1546. Elementorum geometricorum libri XV, cum exposit. Theonis in priores XIII a Barto-Veneto latin. donata ect. Basileae, in—fol.
1549. Eucl. Elem. geometr. LL. VI, conversi in lat. serm. a Joach. Camerario. Edebat Lipsiae Geo. Joach. Rhetici, in—8.
1550. Eucl. Meg. Phil. et Math. excell. LL. VI priores de geometricis principiis gr. et lat. ect. Auth. Joach. Scheubelio. Bas. in—fol.
1551. Orontii Finei Delphinatis, regii mathem. profes., in sex priores libros ect. Parisiis, in—4.
1551. Elementorum liber X. Petro Montaureo interprete. Lutetiae, in—4.
1555. Das siebend, acht und neunt Buch des hochberühmten Math. Euclid Meg. ect.; durch Joh. Scheybl. Augsb. in—4.
1557. Eucl. Elem. LL. XV. Gr. et Lat. c. praef. Steph. Gracilis. Lut. ap. Gu. Cavellat, in—8.
1557. Eucl. Meg. math. claris. Elem. Geom. LL. XV. Basiliae ap. Joah. Hervag, in—fol.
1557. Eucl. Meg. ect. Jacobus Peletarius et Franciscus Flussates. Lugd., in—fol.
1557. Eucl. Meg. ect. Conradus Dasypodius. Argent.
1558. Eucl. Meg. math. claris. Element. Geom. LL. XV. Basil. ap. Joa. Hervag., in—fol.
1562. Die Sechs ersten Bücher des Eucl. vom anfang ect. Durch Wilh. Holzmann. Basel, in—fol.
1564. Les neuf livres des elemens d'Euclide, trad. par Forcadel. Paris, in—4.
1564. Quindecim Elementorum Geometriae primum: ex Theonis Comment. gr. et lat. Conr. Dasypodio. Argent. exc. Chr. Mylius.  
Eucl. Elem. L. XV. Secundu. ect. ect.
1564. Eucl. Elem. L. XV. Gr. et Lat., quibus cum ad omnem Mathematicae scientiae partem, tum ad quamlibet Geometriae tractationem facilis comparatur aditus. Coloniae ap. Maternum Cholinum, in—8.
1564. Propositiones reliquorum ect. in—8.
- 1564\*. Euclidis elementorum libri XV. Graece et Latine. Coloniae, in—8.
1565. Euclidi diligentam. reassetato et in volgar trad. per Nic. Tartalea. Vinegia, in—fol.
1565. Eucl. Meg. Philos. solo introduttore delle Scienze ect. Curtio Trojano. Venegia, in—4.



1566. Les six premiers livres des elemens d'Euclide. Paris, in—8.
1566. Eucl. Meg. Philos. solo ect. Curtio Trojano. Venegia, in—4.
1566. Analysis Geometricae sex librorum Euclidis ect. Conrado Dasipodio, in—4.
- 1566\* Euclidis Megarensis mathematici clarissimi elementa geometrica. libris XV. Authore Francisco Flussate Candalla. Parisiis, in—fol.
1566. Analyseos geometricae ect. Herlino et Dasypodio, in—fol.
1569. Eucl. Meg. Phil.: solo introduttore ect. Giov. Bariletto. Venegia, in—4.
1569. Euclidis opere, trad. per Nic. Tartalea. Venetiis, in—4.
1569. Les six premiers livres des Elements d'Euclide traduits et commentés par P. Forcadel. Paris, in—4.
1570. The Elements of Geometrie of the most auncient Philosopher Euclide of Megara. Lond. in—fol.
1570. Euclidis elementor. lib. I. Heronis Alexandrini vocabula geometrica ect. Per Conr. Dasypodium. Argen.
1571. Eucl. Elem. liber primus, ect. Gr. et Lat. M. C. Dasypodium. Argent, in—8.
1571. Eucl. omnium libr. prop. ect. gr. et lat. M. C. Dasypodium. Arg. in—8.
- 1572\* Euclidis elementorum libri XV. A Federico Commandino Urbinate. Pisauri, in—fol.
1573. Elementorum libri XV, graece et latine. Parisiis. Sthephanus Gracilis, in—16.
1573. Eucl. Element. LL. XV. Gr. et Lat. Lut., in—8.
1574. Eucl. Element. LL. XV ect. auc. Chph. Clavio. Romae. 2 vol. in—8.  
Первое издание знаменитаго перевода Clavius'a
1575. De gli elementi d'Euclide libri XV, trad. da Cammandino da Urbino. Frisolino, in—fol.
1576. Eucl. Elem. Et traduzidos en lengua Espanola por el S-r Rod. Zamorano. Sevilla, in—8.
- 1577\* Euclidis elementorum geometricorum libri sex conversi in latinum sermonem a Joach. Camerario. Mauritio Steinmetz Gersb. Lipsiae, in—12. Съ греческимъ текстомъ.
1578. Eucl. Meg. math. clarissi. Elementa LL. XV. D. Fr. Flussate Candalla. Lugd. in—fol.
1578. Eucl. Meg. ect. Stephanus Gracilis. Paris, in—8.
1580. Eucl. Elem. Libri XV. Colón.
1585. Euclide Meg. Philos.: solo introduttore delle Scienze Matematiche diligentemente ect., per Nic. Tartalea ect. Vinegia, in—4.
1586. Eucl. elem. tradotto nella lingua ital. par Nic. Tartalea ect. Venet. in—4.
1587. Euclidis Elementorum libri XV. Coloniae, in—8.
1588. Нач. Евк. на араб. яз. напечатаны въ Константинополѣ, in—fol.
- 1589\* Euclidis posteriores lib. IX. Auctore Christophoro Clavio Bambergensi è Societate Jesu. Romae, in—16.
- 1589\* Elementorum libri XV, accessit XVI de solidorum, auctore C. Clavio. Romae, 2 vol. in—8.
1591. Element. libri XV ect., auct. C. Clavio. Col. 2 vol. in—fol.
1592. Eucl. Elem. Libri XV. Colon. in—8.
1594. Eucl. Elementorum L. XIII. studio Nassireddini Tusini pr. arab. impressi. Romae, in—fol.
1597. Euclidis elementorum libri XV. Coloniae, in—8.
1598. Les six premiers livres des elemens d'Euclide par Errard. Paris, in—8.

1598. Eucl. Elem. LL. XV. Gr. et. Lat. Lat. in—8.
1598. Eucl. Elem. ect. Stephanus Gracilis. Paris, in—8.
1598. Напечатанъ перев. Началь Евк. на арабск. яз. во Флоренции.
1600. Euclidis elementorum libri XV, cum libro XVI. Coloniae, in—8.
1603. Eucl. Element. LL. XV, auct. C. Clavio. Romae, 2—vol. in—8.
1605. In arithmet. ration. Euclidis VII, VIII, IX et X elementor. libris compreh. demons. Arnhemii.
- 1607\* Euclidis posteriores libri IX. Auctore Christophoro Clavio. Francofurti.
1607. Euclidis elementorum libri XV, access. liber XVI de solidorum regularium ect. edidit Christ. Clavius. Francofurti.
1608. Начала Евклида переведены на Китайскій языкъ Matteo Ricci.
1609. Eucl. Elem. Ambr. Rhodii, in—8.
1610. Jacoli Peletarii cenom. in Euclidis elementa geometrica demonstrationum libri sex. Apud Joannis Tornaesius. Lugdun. in—4. Съ греческ. текстомъ.
1610. Die ersten sechs Bücher ect. M. Guntzenhusanum. Onoltbach, in—fol.
1612. Eucl. Element. LL. XV. Gr. et Lat. Coloniae, in—8.
1612. Eucl. Element. eadem cum comment. Flor. Puteani Vataní. Paris, in—fol.
1612. Elem. lib. XV. Christ. Clavio. Franc. in—8. 2 vol.
1613. Les elements d'Euclide par. Donnot-de-Bar-le Duc. Paris, in—4.
1613. I primi sei Libri, tradotti in lingua Italiana da Pietr. Antonio Cataldi. Bologna, in—fol.
1615. Die sechs ersten Bücher ect, Peterson Dou ect. Amst. in—4.
1617. Euclidis elementorum libri XV, cum libro XVI. Coloniae, in—8.
1617. Eucl. Elem. Geometr. libri sex. Ed. Joan. Lanz. Ingolst.
1618. Die sechs ersten Bücher ect, übers. Seb. Curtio. Amst. in—8.
- 1619\* Euclidis elementorum libri XV. Una cum scholiis antiquis a Federico Commandino Urbinate in latinum conversi. Pisauri, in—fol.
1619. De gli Elementi d'Euclide Libri XV con gli Scholii antichi. Fed. Commandino. Pesaro, in—fol.
1620. Eucl. Elem. LL. VI priores gr. et lat. ect., ex vers. lat. Commandini ect. Lond., in—fol.
1620. Aurum probatur igne et ingenium Mathematicis. I primi sei libri de gli elementi di Euclide ridotti alla Pratica da P. Ant. Cataldi. Bologna, in—fol.
1621. Tolle numerum in rebus omnibus et omnia pereunt. I tre Libri Settimo, Ottavo et Nono degli Elementi. Bologna, in—fol.
1621. Eucl. Elem. XV, l. p. Herigone. Paris.
1623. Les quinze livres des elements d'Euclide ect. Tr. par Henrion. Paris, in—8.
1625. Ad Dominum cum tribularem clamavi et exaudivit me, Decimo libro degli Elementi ect. per Nic. Tebaldini, in—fol.
1625. Eucl. Data ect. Parisiis, in—4.
1625. Eucl. Elem. pratic. Nürnberg.
1626. De ses eerste boecken Eucl. vem de beginselen ende fundamenten der geometrie. Dor Jan Pieterszoon Dou. Vannieus. Amster. in—8.
1626. Eucl. Elem. libri XVI. Vol. I—II. Paris, in—24.
1627. Eucl. Element. LL. XV, auc. C. Clavio, 2 vol. Franc. in—8.
1630. Les six premiers livres des elements d'Euclide. Paris, in—8.

- 1632\* Les quinze livres des elements geometriques d'Euclide Megarien. Traduits de Grec en Français par P. Le-Mardelé. Paris, in—8.
- 1632\* Les quinze livres des elements geometriques d'Euclide. Traduits en Français par D. Henrion. Paris, in—8.
1634. Die sechs ersten Bücher ect., übers. v. Seb. Curtio. Amst. in—8.
1634. Element. Libri XIII, demonstr. Amb. Rhodii. Wittenb.
- 1636\* Euclidis sex primi elementorum geometricorum libri cum parte undecimi. Per Christophorum Grienbergerum. Widmanstadii, in—12.
1637. Elementos geometricos de Eucl. trad. por Carduchi. Madrid, in—4.
1638. Zes eerste boekken, ect. Verrooten. Hamb. in—4.
1644. Les six premiers livres des Éléments d'Euclide démontrés par Notes d'une Méthode très-briève et intelligible. Par Pr. Herigone. Paris, in—8.
1644. Cursus mathemat. Tomus primus continens Eucl. Elementorum LL. XV. Parisiis, in—8. Латинск. и французск. текстъ.
1644. Universae Geometriae ect. F. M. Mersenni. Paris, in—4.
1645. Eucl. Element. LL. XIII, ect. Cl. Richardus. Antv. in—fol.
1646. Elements d'Euclide, trad. par P. le Mardelé. Lyon, in—8.
1647. De ses eerste boecken Euclidis ect. door Dou. Utrecht, in—8.
1649. Les quinze livres des elements d'Euclide ect. Par Henrion 5 ed. Rouen, in—8.
1651. E primi tradotti dal. Gio. Ricci Carmelati ect. Bologna, in—8.
1653. Henr. Hofmanns, prof. math. ect., teutscher Euclides ect. Jehna, in—4.
1654. Eucl. Elem. LL. XV, auct. C. Clavio, 2 vol. Franc. in—8.
1654. Eucl. Elem. per P. Georg Fournier. Lond. in—12.
1654. Les quinze livres des elements d'Euclide, tr. par Henrion. Lyon, in—24.
1655. Eucl. Element. LL. XV, ect. Op. Th. Barrow. Cantabr. in—8.
1655. Euclidis libri sex priores, cum parte Undecimi, ex majoribus. Clavii Comment. ect. Romae, in—12.
1657. Eucl. Elementorum LL. XIII. Studio Nassireddini Tusini pr. arab. impressi. London, in—fol. На арабск. и латинск. яз.
1659. Eucl. Elem. LL. XV, ect. R. Daniell. Lond. in—8.
1659. Eucl. Elem. LL. XV, demonstr. oper. Barrow. Lond. in—8.
1660. Euclid's Elements; the whole fifteen Books compendiously demonstrated. Lond. in—8.
1660. De ses eerste boecken Euclidis ect. door Dou. Utrecht, in—4.
1660. Euclides ses eerste boekken, van de beginselen der Wiskousten. In Neerduyts vertaald d. I. Willimsz Verrooten van Harlem. Amst. in—4.
1661. Euclid's Elements of Geometry, with a Supplement of divers Propositions and Corollaries. Lond. in—fol.
1663. Euclides XV Boecken, vergroot met het 16 boeck van Chr. Clavio. Amst. in—12.
- 1669\* Elementa geometriae planae. Authore Aegidio Francisco de Gottignies. Bruxellensi Soc. Jesu. Romae, in—12.
1671. I primi sei Libri d'Euclide tratti in volgare (da Piero Paolo Caravagi). Milano, in—12.
1671. Euclidis adauctus et method. auct. G. Guarino. Taurini.



1672. Les elements d'Euclide ect. Milliet de Chales. Paris, in—12.
1672. Georg Mohr, Euclides Danicus bestaende in twee deelen ect. Amst. in—4.
- 1673\* Euclidis elementorum sex priores libri ect. Lugd. Batav. et Amst.
1674. Quinto Libro degli Elementi d'Eucl. ect. per Vinc. Viviani. Firenze, in—4.
1674. Elementi Piani e Solidi d'Eucl. publ. Vinc. Viviani Firenze, in—4.
1675. Eucl. Elemen. Barrow. Cambr.
1675. Elementorum libri octo ad faciliorem captum accommodati a Claudio Fr. Mil. Dechales. Lugd. in—24.
1676. Les quinze livres des elements d'Euclide, traduits par Henrion. Rouen, in—8.
1676. Eucl. Element. LL. XV, ect. Osnabr. in—8.
1677. Les elements d'Euclide ect., tr. par Milliet de Chales. Paris, in—12.
1678. Euclidis elementa, ect., auct. Christ. Clavio. Londini.
1678. Euclidis elementa geometrica novo ordine ac methodo fere, demonstr. una cum. N. Mercatoris ect. Lond.
1679. Eucl. Elem. LL. XV, ect. Lond. in—12.
1680. Euclide restituito avero gli antichi Elementi geometrici ristaurati e facilitate da Vitale Giordano da Bitonto. Roma, in—fol.
1683. Les elements d'Euclide ect., tr. par Milliet de Chales. Lausanne, in—12.
1683. Les elements d'Euclide ect. tr. par Milliet de Chales. Paris, in—12.
1685. Eucl. Elem. Angl. translated from the French of C. F. M. de Chales. Lond. in—8.
1689. Elementos geometr. de Euclides, los seis primeros libros de los Planos; los onzeno y dozeno de los Solidos. Bruchsellas, in—4.
1690. Elementi Piani e Solidi d'Eucl. Firenze, in—4.
- 1690 Tract. de progressu math. et de illustribus mathematicis. Eucl. LL. XIV. Lugd. in—fol.
1690. Les elements d'Euclide ect; tr. par Milliet de Chales. Paris, in—12.
1692. Euclidis Elementorum libri sex priores, op. et stud. Coetsii. Lugd. in—8.
1694. Teutsch Redender Euclides ect. Pirkenstein. Wiena, in—4.
1695. Eucl. Data ect. Gr. et Lat. Parisiis, in—4.
1697. In teutscher sprache vorgestellter Euklides ect. Kiel, in—4.
1699. Teutsch Redender Euclides ect. Pirkenstein. Lübeck. in—4.
1700. Eucl. Elem. LL. VI, et XI et XII, ex vers. lat. Fed. Commandini. Oxon. in—8.
1700. Les elements d'Euclide; tr. par Milliet de Chales. Amst. in—8.
1701. Andr. Tacq. S. J. Elementa ect. Amst. in—8.
1702. De ses eerstes boecken Eucl. van de beginselen ende fundamenten der geometrie. Dor Jan Pieterszoon Dou. Vannieus. Amst. in—8.
- 1703\* ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΤΑ ΣΩΖΟΜΕΝΑ. Euclidis quae supersunt omnia. Ex Recensione Davidis Gregorii. Oxoniae, in—fol. Съ латинскимъ и греческимъ текстомъ.
1703. Andr. Tacquet S. J. Elementa ect. Cantabr. in—8.
1704. De zes eerste, elfde en twaalfde boeken Euclides ect. Pieter Warius. Amst. in—8.
- 1705\* Euclidis elementorum sex libri priores. Henrici Coetsii. Amstelodami, in—12.
1707. Eucl. Elemen. Hunt. Oxf.
1708. Eucl. Elements cont. the ect. By J. Keill. Lond. in—8.
1709. Les elements d'Euclide ect; tr. par Dechasles et Ozanam. Paris, in—12.

1709. Les elements d'Euclide, tr. par Milliet. Paris, in—12.
1711. Euclidis element. sex priores libro, opera Chris. Melder. Lugd. in—12.
1714. The Elements of Euclid with select theorems out of Archimedes by the learned And. Tacquet. Lond. in—8.
1714. Eucl. Elem. ect. Schessler. Dresden.
1715. De zes eerste boeken der beginselen van Euklides. Henr. Coets. Leyden, in—8.
1715. Elementorum lib. VI priores, item XI et XII, ex vers. lat. Fed. Commandini. Oxonii, in—8.
1718. Quinto libro degli elementi d'Euclide ovvero scienza universale delle proporzioni spiegata colla dottrina. Del Gallileo ect. Firenze.
1720. Les elements d'Euclide ect. tr. par Deschalles et Ozanam. Paris, in—12.
1720. Les éléments d'Euclide, tr. par Milliet. Paris in—12.
1720. Les éléments d'Euclide, tr. par Milliet. Paris, in—4.
1721. Euclides 15 Bücher Teutsch durch Christ. Schessler. Leipz. in—8.
1722. Euclid's Elements ect. By Barrow. London, in—8.
1723. Geometria especulativa y practica de los planos y solidos por Jos. Deu y Abella. Zaragoza, in—4.
- 1723\* Euclidis XV Büch. teutsch ect. Leipzig, in—8.
1723. Euclid's Elements cont. the first six, XI and XII books from. Latin Transl. of Commandine by J. Keill. Lond. in—8.
1723. Eucl. element. libro priores VI, item XI et XII; ex. vers. lat. Fed. Commandini. Oxoniae, in—8.
1723. Euklidis XV Bücher teutsch. ect. Dresden, in—8.
1724. Eucl. Elem. Geom. LL. VI Gr. et Lat. Joach. Camerario. Helmst. in—4.
1724. Eucl. Elem. gr. et lat. Camerer et Hauber. Berol. 1724—1726, 2 vol. in—8.
1725. Andr. Tacq. S. J. Elementa ect. Amst. in—8.
726. Euclidis the six first elements, together with the 11 a 12 books. Demonst. after a new method by H. Hill. Lond. in—4.
1728. Elementos geom. amplificados de nuevas demonstraciones por Seb. Fern. de Medrano. Amberes, in—8.
1729. Eucl. XV Bücher teutsch ect. Dresden, in—8.
1730. Elementi geom. piani e solidi di E. posti brevemente in volgare dal D. G. Grandi. Firenze, in—8.
1731. Elementi Geometrici piano e solidi di Euclide ect. per G. Grandi. Firenze, in—8.
1732. De zes eerste boeken ect. H. Coets. Leyden, in—8.
1732. Euclide's Elements the whole fifteen books compendiously, demonstrated ect. By Barrow. London, in—8.
1733. Euclid's Elements of geometry from the latin translation of Commandine, ect. vol. I—II. London, in—8.
1733. Element. Libri VI priores, XI et XII. Ang. by Keil. London.
1734. Quinto Libro degli Elementi d' Eucl. ect. Firenze, 2 vol. in—12. Это издание заключаетъ первыя шесть книгъ Началь и 11 и 12.
1734. De zes eerste boeken. H. Coets. Leyden, in—8.
- 1737\* Elementa Euclideae geometriae planae ac solidae. Gulielmus Whiston. Venetiis, in—4.
- 1737\* Elementa geometriae planae seu elementorum Euclidis priores sex libri opera, ac studio Nicolai de Martino. Neapoli, in—12.

1738. Les éléments d'Euclide, expliqués d'une manière très facile, par de-Chales, nouv. ed., revue par Ozanam. Paris, in—12.
1738. Euclidis Elementorum Libri VI Priores Planorum, ac XI et XII Solidorum, cum Explicationibus et Demonstrationibus. Chris. Clavii. Amst. in—8.
1739. Евклидовы элементы геометрии, перев. съ латин. Ив. Астарова. СПб., in—4.
1740. Elementi geometrici piani e solidi, posti brevemente in volgare dal Padre D. Guido Grandi. Firenze, in—8.
1741. Les elements d'Euclide ect.; tr. par Dechalles et Ozanam. Paris, in—12.
1742. Elementi geom. piani e solidi di E. ect. Ven. in—8.
- 1743\* Element. Eucl. LL. XV, ad. graeci contextus ect. Lips. in—8.
1743. Elem. Libr. VI priores, XI et XII. Lat. Ups.
1744. Teutsch Redender Euclides ect. Pirkenstein. Wien. in—4.
1744. Elem. Libri VI priores, XI et XII. Lat. Upsal.
1744. Element. LL. XV, ad graeci contextus. Bärman. Lpz.
1745. Euclidis Elements of geometry, with additions by J. Keil. Lond. in—8.
1745. Elementa Euclideae geometria planae ac solidae et ect. Tacquet. Romae. T. I—II, in—8.
1746. Les éléments d'Eucl. par Ozanam. Paris, in—12.
1747. Elementorum. lib. VI, priores, item XI et XII, ex vers. lat. Fed. Commandini. Oxonii, in—8.
1749. Euclid's Elements of Geometry in XV Books with the Data. From the Latin Translation of Commandine and. Dr. Gregory. Lond. 2 vol. in—8.
1749. Element. Eucl. LL. XV ad. graeci contextus ect. Lips. in—8.
1749. Gli Elementi d'Euclide spiegati d'una maniera nuova, facile ect. del V. Dechales. Tradotti dal Francese. Bergamo, in—8.
1749. Les elements d'Euclide ect.; trad. par Dechalles et Ozanam; tr. en italien par Jac. Calisto. Bergamo, in—12.
1751. Elementi della geom. piana ect. J. Pi. Martino. Napoli, in—8.
1752. Euclid's Elements of Geometry in XV Books. Lond. in—8.
1753. Gli Elementi di Euclide a migliore e più chiara maniera ridotti, arricchiti per la maggior parte di nuove dimostr. con tav. in Rame. dal P. Fr. G. Accetta. Torino, in—8.
1753. De sex första jämte Ellofte och tolete böckerna af Euclidis elementa eller grundeliga inledning til geometrien til riksens ungdoms tjenst pa. Svenska Spraket utg. af M. Stromer. Upsala, in—8.
1753. Les Elements d'Euclide du R. P. Dechalles et de M. Ozanam. Démontrés par M. Audierne. Paris, Jombert.
- 1756\* Euclidis elementorum libri priores sex, item undecimus et duodecimus, ex versione latina Federici Commandini; A. Roberto Simson. Glasguae, in—4.
1756. The Elements of Euclid. The first six books, together with the eleventh and twelfth. By R. Simson. Glasgow. in—4.
1758. Elements de Géométrie, contenant les VI premiers livres d'Euclide, ect. Par Koenig, revus par Kuypers. La Haye. in—4.
- 1762\* The Elements of Euclid. Notes critical and Geometrical. By R. Simson. Glasgow, in—8.
- 1762\* Elemens de geometrie, contenant les six premiers livres d'Euclide. Par le profes Koenig. Augmentés de l'Onzieme et Douzieme livre par J. J. Blassiere. A La-Haye, in—4.



1763. Euclid's Elements of Geometry in XV Books. Dr. Gregori. Lond. in—8.
1765. Euclid's Elements of Geometry in XV Books. Lond. in—8.
1767. Éléments de Géométrie ou les six premiers livres d'Euclide, avec le onzième et douzième p. J. de Castillon. Berlin, in—8.
1767. Euclid's Elements. By R. Simson. Edinb. in—8.
1769. Elemente Geometr. planae libri XV. Baermann. Lip. in—8.
1769. Евклидовы элементы геометрии, перев. съ франц. Ник. Кургановъ, СПб., in—8.
1769. Element. Eucl. LL. XV, ad graeci contextus ect. Lips. in—8.
1771. Euklids Elemente. Aus dem Griechischen übersetzt von Lorenz. Halle.
1773. Eukl. Elemente. Segner. Halle.
1773. Die 6 ersten Bücher, v. griech. über. v. Lorenz. Halle.
1774. Los seis primeros libros y el undecimo y duodecimo de los elementos, trad. sobre la version. ital. de Fed. Commandino. Madrid, in—4.
1774. Elem. Libr. VI priorer, XI et XII. Lat. Ups.
1775. Éléments de Géométrie ou les six premiers livres d'Euclide, avec le onzième et douzième p. J. Castillon. Berlin, in—8.
1775. Elements of Euclid. R. Simson. Edinbourg, in—8.
1776. The Elements of Euclid; in which the propositions ect. By Douglas. Edinb. in—8.
1777. Les elements d'Eucl. par Himburg, in—8.
1778. Les elements d'Euclide du R. P. Dechalles et de M. Ozanam. Paris, in—8.
1780. Eucl. Data verb. u., verm. v. R. Simson, ubersetzt von Ch. Schwal. Stutg. in—8.
1781. Euklids Elemente fünfzehn Bücher, aus dem Griechischen übersetzt von J. F. Lorenz. Halle.
- 1781\* The elements of Euclid. By R. Simson. Glasgow. Notes critical and geometrical. in—8.
1781. The Elements of Euclids with Diss. by J. Williamson. Oxford. 1781—90. 2 -vol. in—4.
1781. Euklid Elemente. Segner. Halle.
1781. Euclides Elemente 11 u. 12 Bücher, v. Lorenz. Halle, in—8.
1782. Elementi geom. piani e solidi di E. ect. Firenze, in—8.
1782. Expositio et dilucidatio libri V element. Euclidis. Seyffer et Mouchart.
1784. De sex första jamte Ellofte och tolete boikerna af Euclidis elementa eller grundeliga inbedning til geometrien til riksens uneddoms tjenst pa Svenska Spraket utg. af. M. Stromer. Ups. in—8.
1785. Elementi di geometria ect. P. Dechales. Bergamo, in—8.
1788. The philosophical and mathematical Commentaries of Proclus, furnamed Plato's Successor, on the I Book of Euclids Elements and his life by Marinus ect. London.
1789. Die 6 erste B. d. Geometrie. Ebend. in—8.
1789. Elements of Geometry. Cont. the principal Propos. in the first six and the XI and XII Books of Euclid. Lond. in—8.
1789. Евклидовы Стихия, перев. съ греч. Пр. Суворова и Вас. Никитина. СПб. in—8.
1791. Eucl. Elemente. Michelsen. Berlin, in—8.
1792. Elementos de Euclides, com as annotacoes de R. Simson, trad. em Portuguez. Coimbra, in—8.
1793. Elem. Libri VI priores, XI et XII. By R. Simson. Edinb.
1796. Elements of Geometry; cont. the first VI Books of E. with two Books of the Geometry of Solids. By P. Playfair. Lond. in—8.
1797. Elements of Geometry ect. By Playfair London, in—8.

1797. Eucl. Elem. Hauff, Marburg.
1797. Scholia in librum II, Elementorum Euclidis, praef. F. Pfeiderer proposita a Candidatis Magisterii Philos. Tübingen.
- 1798\* Euclids Elemente fünfzehn Bücher, aus dem Griechischen übersetzt von J. F. Lorenz. Halle. Zweite Ausgabe, in—8.
1798. Euclids Elemente 8 Bücher, nebst dem eilften und zwölften; aus dem Griechischen übersetzt von Lorenz. Halle, in—8.
1799. The Elements of Euclid, viz. the first six Books of the Geom. with the XI and XII. Edinb. in—8.
- 1799\* Elemente des Euclides. And. Matthias. Magdeburg, in—4.
1800. Scholia in lib. VI element. Euclidis, 4 partes, 1800—1806.
1800. Elemente ect. griech. und deutsch. Hoffmann. Weimar, in—8.
1801. Kitab Euclides.... (Комментарій, на араб. яз., Магомета, сына Магомета, на переводъ Nassireddin'a Началъ Евклида). Scutari 1216 in—4.
1802. Euclidis elementor. lib. priores XII ex. Commandini et Gregorii verss. latinis. Edid., aux. et emend. Samuel Horsley. Oxonii, in—8.
1803. Euclides Elementes I—VI Bog, overs. for de laerde Skoler ved H. C. Linderup. Kjobh. in—8.
1803. Euklids Elemente. Reder. Köln.
1803. Euclidis datorum liber, cum additamento aliisque ad geometriam pertinentibus; edidit S. Horsley. Oxonii. in—8.
- 1804\* Les éléments de géométrie d'Euclide. Traduits littéralement par F. Peyrard. Paris, in—8.
1804. Elements of Geometry containing the first six Books of Euclid, ect. By J. Playfair. Edinb. in—8.
1805. Euklidis Elemente, das erste bis vierte Buch von Fr. Hauf. Wien, in—8.
1806. Eukl. Elemente ect. Reder. Paderborn. 2 vol. in—8.
- 1807\* Euclides'a Początków Geometrii Xiąg ośmioro to iest Sześć pieruszych ect, przez Jos. Czecha w Wilnie, in—8.
1807. Euclid's elemente, 1—6 и 11—12 Bucher. Uebers. v. Hauff. Marb.
1809. Euklids Elemente, übers. von Lorenz. 3 auf. Halle.
1809. Eucl. Elemente. Weimar.
1814. Eucl. Element. J. Playfair. Edinb. in—8.
1814. Eucl. Element. Rob. Simson. Edinb. in—8.
1814. Oeuvres d'Euclide, en grec, en latin et en français, d'après un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours, par F. Peyrard. Paris. T. I—II—III. 1814—1818, in—4.
1815. Eukl. Elemente ect. Reder. Paderborn. 2 vol. in—8.
1815. Eucl. Elementer ny Öfversättning, utg. af C. L. Lithhand. Stockh. in—8.
1816. Eucl. Elements. Rob. Simson. Edinb. in—8.
- 1817\* Euclidesa Początków Geometrii Xiąg ośmioro to iest Sześć pierwszych ect., przez Jos. Czecha. w Wilnie. in—8.
1818. Eucl. Elemente 8 Bücher, a. d. gr. v. Lorenz. Halle, in—8.
1818. Euklid's Elemente 15 Bücher, übers. von. Lorenz. 4 auf. Halle, in—8.
- 1819\* Эвклидовыя Началъ восемь книгъ, а именно: первыя шесть, одинадцатая и двѣнадцатая, содержащія въ себѣ основанія геометріи. Переводъ съ греческаго Θ. Петрушевскаго. СПб.

1819. Elemente XV Bücher, aus dem griech. über. v. Lorenz. Halle, in—8.
1819. Eucl. Elemente. Mainz.
1820. Euclidis. The elements of plane geometry by T. Keith. 2 ed. London.
- 1820\* ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΑ. ΕΚΤΕΘΕΝΤΑ ΠΑΡΑ BENIAMIN ΛΕΣΒΙΟΥ. EN BIENNHI THE ΑΟΥΣΤΡΙΑΕ.
1820. Chrestomathia geometrica, continens Euclidis ect. Hauber. Tübingen.
1821. Eucl. Elem. Geom. gr. et lat. Camerer et Hauber. Berol. 2 vol. 1824—1826, in—8.
1824. Euclids Elemente übers. v. J. F. Lorenz, in—8.
1824. Начала Евклида на араб. яз. Calcutta, in—8.
1825. Euklids Elemente fünfzehn Bücher, aus dem Griechischen übersetzt von J. F. Lorenz. Halle.
1825. Eucl. Elem. LL. VI priores cum undecimo et duodecimo. Textum e Peyrardi rec. ect. Halis Sax. in—8.
1825. Eucl. Data n. d. Griech., herausg. v. J. F. Wurm. Berlin, in—8.
1826. Eucl. Elementa ex optimis libris in usum tiranum, gr. ed. ab. E. F. August. Berol. 2 vol. 1826—29, in—8.
1826. Euclid. Elemente lib. VI. Camerer et Hauber. Berol. 2 vol. in—8.
1827. Euclid Elem. by Walker. Lond. in—8.
1828. Die Geometrischen Bücher der Elemente ect. Hoffmann Mainz. in—8.
1829. Die Geometrischen Bücher der Elemente ect. Hoffmann. Mainz. in—8.
1831. Elements of geometry cont. the first six books of Euclid, ect. Eighth edit with addit by W. Wallace. Edinburgh. in—8.
1832. Die Planim. und Stereom. ect. Hoffman. Mainz. in—8.
1833. The first six Books of the Elements of Euclid, with Notes. Dublin. in—8.
1833. Geometry without Axiomy, or the first book of elements. 4 ed. London.
1833. Die Geometrie des Euklid. ect. Erfurt. in—8.
- 1835\* Ευκλειδovýchъ Началь три книги, а именно: седьмая, осьмая и девятая, содержащая общую теорию чиселъ древнихъ геометровъ. Пероводъ съ греческаго. Θ. Петрушевскаго. СПб.
1837. Euclid's Elements. London.
1838. Euclid's Elements. Edwards. Lond.
1838. Euklid's Elemente erläutert. v. Unger.
1839. Euklid's Elemente, vom griech. über. v. Lorenz. Halle in—8.
1839. Euclid's Elements. Lond. Day.
1839. Euclid's Elements. Lond. Cooley.
1839. Euclid's Elements. Lond. Cooley.
1840. Euclid's Elements by Creswell. Lond. in—8.
1840. Euclid's Elements. Lond. Walker.
1841. Euclides Elementa i Geometrien eller Grundelig Inledning till Geometrien. Uppl. VII. Oerebro. in—8.
1841. Euclid's Elements. Lond. Creswell.
1845. Euclid's Elements of Geometry, chiefly from text of Dr. Simson, with explanatory notes ect. by Robert Potts. London. in—8.
1845. Euclid's Elements. Lond. Thomson.
1845. Euclid's Elements. Lond. Kent.
1846. Euclid's Elements. Lond. Trotter.



1846. Euclid's Elements. Ingram. London.
1847. Euclid's Elements. Lond. Vey.
1847. The first six Books of the Elements of Euclid, with Notes by Bp. Elrington, 10 ed. Lond. in—12.
1847. Euclid's Elements. Lond. Colenso.
1847. Euclid's Elements. Lond. Trollope.
1847. Euclid's Elements. Lond. Mason.
1847. Euclid's. Elements. Lond. Rutherford.
1848. Euclid's Elements. Lond. Lardner.
1848. Euclid in Syllogisms with diagrams and symbols in colours. By O. Byrne. Lond. in—4.
1849. Euclid's Elements. Lond. Tate.
1850. Euclid's Elements. Lond. Potts.
1850. Euclid's Elements. Lond. Potts.
1850. Euclid's Elements. Lond. Whittaker.
1851. Euclid's Elements of Geometrie, by R. Potts. School edition. London.
1851. Euclid's Elements. Lond. Davidson.
1852. The first six and 11 and 12 books of Euclid's elements. Thomson. Belfast.
1852. Euclid's Elements. Lond. Pocock.
1852. Euclid's Elements. Lond. Wallace.
1853. Euclid's Elements. Lond. Hose.
1853. Euclid's Elements. Lond. Good.
1853. Euclid's Elements. London. Elrington.
1854. Euclid's Elements. London. Mason.
1855. Euclid's Elements. Lond. Woodmass.
1855. Euclid's Elements. Lond. Law.
1855. The first six Books of Euclid's Elements with Commentary. By Lardner. 11 ed. Lond. in—8.
1855. VI—X. böckerna öfvers och bearbetn. af Rundbäck. Lund.
1856. Euclid's Elements. London. Wedgwood.
1856. Euclid's Elements. London. Galbraith.
1857. Переводъ Нач. Евкл. на китайск. яз. Translation of Euclid's Elements, Book VII to Book XV, into chinese by Wylie. Shanghae 3—vol. in—8.
1858. Euclid's Elements. Lond. Green.
1858. Euclid's Elements. Lond. Williams.
1859. Euclid's Elements. London. Maynard.
1859. Euclid's Elements. London. Ingram.
- 1860\*. Euklids acht geometrische Bücher aus dem Griechischen übersetzt von J. F. Lorenz. in—4. Aufs neue herausgegeben mit einem Anhang von Dr. E. W. Hartwig. Halle.
1860. Euclid's elements, the first 6 books and the 11—12 book, from the text of Simson edited by R. Blacklock. Lond.
1860. Euclid's Elements. London. Chambers.
1860. Euclid's Elements. London. Chambers.
1860. Euclid's Elements. London. Simson.
1861. Euclid's Elements. London. Green.
1861. Euclid's Elements. London. Playfair.

- 1862\* The elements of Euclid. By Todhunter.
1862. Euclid's Elements. London. Brasse.
1862. Euclid's Elements. London. Isbister.
1863. Euclid's Elements. Lond. Isbister.
- 1864\* The elements of Euclid for the use of schools and colleges. By J. Todhunter. New edition. London.
1864. Euclid's Elements. Simson. London.
1865. Euclid's Elements. London.
1866. Euclid's Elements. London.
1867. Elements of geometry, from the Latin Translation of Commandine by S. Cunn. 10 ed. London, in—8.
- 1868\* Gli elementi d'Euclide con note. Per cura dei professori E. Betti e F. Brioschi. Libro I—II—III—IV—V—VI, XI—XII. Firenze.
- 1868\* Elements of geometry by R. Potts. London, in—8.
1869. Euclid's Elements. London.
1870. Euclid's Elements. London. Green.
1870. Euclid's Elements. London. Joung.
1870. Euclid's Elements. London. Smith.
- 1871\* Il primo libro, o Introduzione alla geometria, per L. Grandi. Bergamo, in—16.
1871. Euclid's Elements. London. Joung.
1872. Euclid's Elements. London. Mason.
1872. Euclid's Elements. London. Isbister.
1873. Euclid's Elements. London. Green.
1874. Euclid's Elements. London. Law.
1874. Euclid's Elements. Lond. Martin.
1874. Euclid's Elements. Lond. Hawtrey.
1874. Euclid's Elements. London. Dodgson.
1874. Elements of Geometry. Books I—VI, XI—XII of Euclid. By J. Smith. London.
1874. Elements of Euclid. By J. Bryce. London.
1874. Elements of Euclid. By Collenso. London.
1874. Euclidean Geometry. By Cuthbertson. London.
1875. Elements of Geometry. Books I—VI, XI—XII of Euclid. By H. Smith. London.
1875. Euclid modernised. Elements of plane Geometry. By R. Wright. London.
1875. Elements of Euclid. By Bryce. London.
1875. First Book of Euclid. By Browne. Belfast.
1875. The Elements of Euclid. London.
1875. The first six Books of Euclid. By Davis. London.
1875. Elements of Euclid. By J. Bryce. London.
1875. Elements of Euclid. Books I—VI, XI—XII. By Dr. Simson. London.
1876. Elements of Geometry based on Euclid. By Atkins. Lond.
1876. Euclid simplified. By Morell. London.
1876. Elements of Geometry based on Euclid. Book. I—III. Collin's School Series. London.
1876. Elements of Geometry. By Smith. Book. I—VI, XI—XII—of Euclid. London.
1876. Euclid Elements. Books I—VI, XI—XII. Edited by Seeley. London.
1876. The Elements of Euclid the first six books and the eleventh and twelfth from the text of Simson. Edited by Blakelock.

1877. Euclid for Colleges and Schools. New edition. By Todhunter. London.
1877. Primer of Geometry. An easy Introduction to the Propositions of Euclid. By Cuthbertson. London.
1877. Syllabus of plane Geometry. Corresponding to Euclid Books I—VI. Prepared by the Association for the Improvement of Geometrical Teaching. London.
1877. Euclid modernised. Elements of plane Geometry. By Wright. London.
1877. Euclid. Books I—IV. By Hundson. London.
1878. The School Euclid. Books I—IV. By Isbister. London.
1878. Euclid's Elements. Books I—III. By Tatk. Lond.
1878. Syllabus of plane geometry. Corresponding to Euclid. Books I—VI. London.
1879. Colenso's Elements of Euclid. London. New edition.
1879. The Elements of Euclid (the parts usually studied in the Universities). From the Text of Dr. Simson. New edition. London.
1879. Il V libro di Euclide. Torino. Bertini.

---

Книги обозначенныя \* находились въ распоряженіи автора настоящаго сочиненія.



# УКАЗАТЕЛЬ СОЧИНЕНИЙ ПО „НЕЕВЛИДОВСКОЙ ГЕОМЕТРИИ“ ВЫШЕДШИХЪ ПО 1880 ГОДЪ.

- 
- Agolini, G. Il quinto postulato Euclideo. Firenze. 1868.
- Baltzer, R. Ueber die Hypothesen der Parallelen-theorie.  
Berichte der K. S. G. zu Leipzig. T. XX, 1868.
- \*Baltzer, R. Die elemente der Mathematik. T. I—II. 4 ed., 5 ed. 1874—75.
- \*Baltzer, R. Ueber die Hypothesen der Parallelen-theorie.  
Cr. Journal Bd. 83. 1876.
- \*Battaglini, G. Sulla Geometria Immaginaria di Lobatchewsky.  
Giornale di Mat., vol. V, 1867.  
Nouv. Ann. Math. T. VII. 1868.  
Napoli, Rendiconto. T. VI. 1867.
- \*Battaglini, G. Sulla scienza dello spazio assolutamente vera, ed indipendente dalla verita  
dalla falsita dell' assioma XI di Euclide: per. Giovanni Bolyai.  
Giornale di Mat., vol. VI, 1868.
- \*Battaglini, G. Sur la géométrie imaginaire de Lobatchewsky.  
Nouv. Ann. Math. T. XXVII, 1869.
- \*Battaglini, G. Nota sui circoli nella geometria non-Euclidea.  
Giornale di Matematiche. Vol. XII. 1874.
- \*Battaglini, G. Nota sul rapporto anarmonico sezionale e tangenziale delle coniche.  
Giornal. di Matem. Vol. XII. 1874.
- \*Battaglini, G. Nota sul rapporto anarmonico sezionale e tangenziale delle quadriche.  
Giornal. di Matem. Vol. XII, 1874.
- \*Battaglini, G. Sull' Affinita circolare non-Euclidea.  
Rendiconto della Reale Accademia delle Scienze fisiche e Matematiche. № 11.  
1876.
- Becker, J. Abhandlungen aus dem Gränzgebiete der Mathematik und Philosophie. Zürich.  
1870.
- \*Becker, J. Ueber die neuesten Untersuchungen in Betreff unserer Anschauungen vom  
Raume.  
Schlömilch Zeitschrift, T. XVII, 1872.
- \*Becker, J. Die Grundlagen der Geometrie.  
Zeit. f. Mat. und. Physik. T. XX. 1875.

- Becker, J.** Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage. Berlin. 1877.
- \***Beez, R.** Ueber conforme Abbildung von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung. Zeitsch. für Math. T. XX. 1874.
- \***Beez, R.** Ueber Krümmungsmasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung. Math. Ann. T. VII. 1875.
- \***Beez, R.** Zur Theorie des Krümmungsmasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung. Zeits. für Math. T. XXI. 1876.
- \***Beez, R.** Ueber das Riemann'sche Krümmungsmass höherer Mannigfaltigkeiten. Zeits. für Mathem. und Physik. T. XXIV. Leip. 1879.
- \***Beltrami, E.** Risoluzione del problema di riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette. Annali di Mat., T. VII. 1866.
- \***Beltrami, E.** Saggio di Interpretazione della Geometria non-Euclidea. Napoli. Giornale di Matematiche. Vol. VI. 1868.
- \***Beltrami, E.** Teoria fondamentale degli Spazii di Curvatura costante. Annali di Mat., ser. II., T. II. Milano. 1868.
- \***Beltrami, E.** Theorie fondamentale des espaces de courbature constante. Trad. de l'italien par J. Höüel. Annales scient. de l'École Normale Super. T. VI. 1869, in—4.
- \***Beltrami, E.** Essai d'interprétation de la géométrie non-Euclidienne. Trad. de l'italien par J. Höüel. Annales scient. de l'École Normale Supérieure. T. VI. 1869, in—4.
- \***Beltrami, E.** Teorema di geometria pseudosferica. Giornale di Mat. Vol. X. 1872.
- \***Beltrami, E.** Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche. Giornale di Math. Vol. X. 1872.
- \***Betti, E.** Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni. Annali di Mat., 2 série. T. IV. 1871.
- Bolyai, Wolfgang.** Tentamen Juventutem studiosam in elementa Matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducenti. Cum Appendice triplici. Auctore Professore Matheseos et Physices Chemiaeque publico ordinario. Tomus Primus, 1832, Secundus 1833. Maros-Vásárhelyini, in—8.
- Bolyai, Johanne.** Appendix, scientiam spatii *absolute veram* exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjuncta, ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica. Auctore Johanne Bolyai de Bolya, Geometrarum in Exercitu Caesareo Regio Austriaco Castrensi Capitano. Maros-Vásárhelyini. 1832.
- Bolyai, Wolfgang.** Kurzer Grundriss eines Versuches: I. die Arithmetik, durch zweckmässig construirte Begriffe, von eingebildeten und unendlich-kleinen Grössen gereinigt, anschaulich und logisch-streng darzustellen. II. In der Geometrie, die Begriffe der geraden Linie, der Ebene, des Winkels allgemein, der winkellosen Formen, und der Krümmen, der verschiedenen Arten der Gleichheit u. dgl. nicht nur scharf zu bestimmen, sondern auch ihr Sein im Raume zu beweisen: und da di Frage, ob zwei von der dritten geschnittene Geraden, wenn die Summa der inneren Winkel nicht  $=2R$ , sich schneiden oder nicht? niemand auf der Erde ohne ein Axiom (wie Euclid das XI) aufzustellen,

beantworten wird; die davon unabhängige Geometrie abzusondern; und eine auf die Ja Antwort, andere auf das Nein so zu bauen, das die Formeln der letzten auf ein Wink auch in der ersten gültig seien. Nach einem lateinischen Werke von 1829, M. Vaszorhely, und eben daselbst gedruckten ungrischen. Maros-Vásárhely. 1851, in—8.

- \*Bolyai, Jean. La Science Absolue de l'Espace indépendante de la vérité ou de la fausseté de l'Axiôme XI d'Euclide (que l'on ne pourra jamais établir *a priori*); suivie de la quadrature géométrique du cercle, dans le cas de la fausseté de l'axiôme XI; précédé d'une Notice sur la Vie et les Travaux de W. et J. Bolyai, par M. Fr. Schmidt. Paris. 1868, in—8.

Bounel, F. Sur les définitions géométriques. Paris. 1871.

- \*Bouniakoffsky, V. Considérations sur quelques singularités qui se présentent dans les constructions de la géométrie non-euclidienne.

Mém. de l'Acad. de Péterb., serie VII., T. XVIII. 1872.

- \*Cantor, G. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.

Borchardt's Jour. Bd. 84, Dec. 1877.

Cassani, P. Sul concetto degli spazi ad  $N$  dimensioni.

Atti dell' Ateneo Veneto. Vol. VI. 1869.

Cassani, P. Sulla geometria baricentrica. Atti dell' Ateneo Veneto. Vol. VII. 1870.

Cassani, P. Geometria rigorosa. Venezia. 1872.

- \*Cassani, P. Intorno alle ipotesi fondamentali della geometria.

Giornale di Matematiche Vol. XI. 1873.

- \*Cassani. Nuove proposte intorno ai fondamenti della geometria.

Giorn. di Matem. Vol. XV. 1877.

Catalan, E. Sur l'étendue à  $n$  dimensions.

Nouv. corresp. Math. T. III. 1877.

- \*Cayley, A. Chapters in the Analytical Geometry of  $(n)$  Dimensions.

Cambr. Math. Journ. T. IV. 1845.

- \*Cayley, A. Sixth Memoir upon Quantics.

Phil. Trans., vol. CXLIX. 1859.

Cayley, A. Note on Lobatchewsky's Imaginary Geometry.

Phil. Mag. XXIX. 1865.

Cayley, A. On Abstract Geometry.

Proceeding of the Royal Society of London. T. III. 1869.

Cayley, A. On the rational transformation between two spaces.

Math. Soc. Proc. T. III. 1869—71. Lond.

- \*Cayley, A. A Memoir on Abstract Geometry.

Phil. Trans., vol. CLX. 1870.

- \*Cayley, A. On the Non-Euclidean Geometry.

Mathemat. Annalen. Bd. V, 1872.

- \*Cayley, A. On the Superlines of a Quadric Surface in Five Dimensional Space.

Quarterly Journ., vol. XII, 1872.

Clifford, W. On the free motion under no forces of a rigid system in an  $n$ -fold homaloid.

Proc. Lond. Math. Soc. T. VII.

Clifford, W. Lecture on „the Postulates of the Science of Space“.

Macmillan's Magazine, Octob. 1872.

Clifford, W. On Probability. Educational Times.



- Clifford, W. Preliminary sketch of Biquaternions.  
Proceedings of L. Math. Soc., Vol. IV. 1873.
- \*Clifford, W. Applications of Grassmann's Extensive Algebra.  
Amer. Journ. of Mathem. Vol. I. 1878.
- Christoffel, E. Allgem. Theorie d. geodät. Dreiecke. Berlin. 1868.  
Math. Abhandl. d. königl. Akad. zu Berlin.
- \*Christoffel, E. Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke 2-ten Grades.  
Borchardt's Journal. T. LXX. 1870.
- \*Christoffel, E. Ueber ein betreffendes Theorem.  
Borchardt's Journal T. LXX. 1870.
- Cipolla. Intorno al quinto Postulato di Euclide e alle basi della geometria. Verona. 1872.
- \*Darboux, G. Sur une nouvelle serie de systemes ortogonaux algebriques.  
Comptes Rendus de l'Acad. T. 69. 1869.
- \*Darboux, G. Sur les equations aux dérivées partielles du second ordre.  
Comptes Rendus T. LXX. 1870.  
Annal. de l'École Normale Sup. T. VII. 1870.
- Delboeuf, J. Les prolégomènes philosophiques de la Géométrie et solutions des postulats.  
Liège. 1860.
- Engel, G. Der Idee des Raumes und der Räume. Berlin. 1868.
- \*Erdmann, Benno. Die Axiome der Geometrie. Untersuchung der Riemann—Helmholtz Raumtheorie. Leipzig 1877.
- Erdmann, Benno. Review by J. H. Witte. Philos. Monatshefte. T. XIII. Leipzig. 1877.
- Erdmann, Benno. Mind, vol. II, 1877; vol. III, 1878.
- Erdmann, Benno. Recension von A. Harnack. Vierterjah. für wiss. Philosophie. T. II. 1 Heft.  
Leipzig. 1878.
- \*Escherich. Die Geometrie auf den Flächen constanter negativer Krümmung.  
Sitzungsberichte der Math.-naturw. Kais. Akad. Bd. LXIX. Wien. 1875.
- Fleury, H. La Géométrie affranchie du postulat d'Euclide. Paris. 1869.
- Flye-St.-Marie. Sur le postulat d'Euclide.  
Bulletin de la Société Philomatique. T. VII. 1870.
- \*Flye-St.-Marie. Études analytiques sur la théorie des parallèles. Paris. 1871, in—8.
- Frahm, W. Habilitationsschrift. Tübingen. 1873.
- \*Frahm, W. Ueber die Erzeugung der Curven dritter Classe und vierter Ordnung.  
Zeits. Math. Phys. T. XVIII. 1873.
- Frank, A. Der Körperinhalt des senkrechten Cylinders und Kegels in der absoluten Geometrie.  
Grunert Archiv. Vol. 60. 1876.
- Frankland, W. On the simplest continuous manifoldness of two dimensions and of finite extent.  
Nature, vol XV, № 389, April 12, 1877.
- Frankland, W. First published in Proc. Lond. Math. Soc. vol. VIII.
- \*Fratini. Un caso particolare del teorema dei nove punti di Feuerbach sua generalizzazione nella geometria non-Euclidea.  
Giornale di Matematiche. Vol. XVI. 1878.
- Freye, G. Ueber ein geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene.  
Jena. 1873.
- \*Frischauf, J. Absolute Geometrie, nach J. Bolyai. Leipzig. 1872, in—8.

- \*Frischauf, J. Elemente der Absoluten Geometrie. Leipzig. 1876.
- Frischauf, J. Erwiderung auf Herrn F. Pietzker Anzeige meiner „Elemente der absoluten Geometrie“ in der Jenaer Literaturzeitung, mit Rücksicht auf die Bemerkungen in dieser Zeitschrift.  
Hofmann's. Zeits. T. VII. 1879.
- Fromm. Ueber d. Krümmungsverhältn. e. Kurve im  $n$ -fach ausgedehnten homog. Raume. Cöln. 1879.
- Funcke. Grundlagen der Raumwissenschaft. Hannover. 1875.
- \*Gauss, C. F. Werke. Bd. IV. pp. 215. 1827.  
Disquisitiones generales circa superficies curvas.
- \*Gauss, C. F. Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher.  
*Письма отъ 17 мая и 12 июля 1831 г.* Bd. II. pp. 268—271. 1865.
- Grassmann, H. Die lineale Ausdehnungslehre. Leipzig. 1844.
- Grassmann, H. Geometrische Analyse. Gekrönte Preisschrift. Leipzig. 1847.
- \*Grassmann, H. Die Ausdehnungslehre. Berlin. 1862.
- \*Grassmann, H. Die neuere Algebra und die Ausdehnungslehre.  
Mathem. Ann. Bd. VII. 1874.
- \*Grassmann, H. Die lineale Ausdehnungslehre. Leipzig. 2 ed. 1878.
- \*Grassmann, H. Ueber das Verhältniss der nichteuclidischen Geometrie zur Ausdehnungslehre. 1878.
- Geiser. Sopra una questione geometrica di massimo e sua estensione ad uno spazio di  $n$  dimensione.  
Rendiconti del Reale istituto Lombardo. Vol. I, Fasc. XVI. 1868.
- Geiser. Sopra una quistione geometrica di massimo e suo estensione ad uno spazio di  $n$  dimensioni.  
Milano, Inst. Lomb. Rendic. T. I. 1868.
- \*Genocchi, A. Dei primi principii della meccanica et della geometria in relazione al postulato d'Euclide. Firenze. 1869.  
Accademia dei XL in Modena, serie III, T. II, parte I.
- Genocchi, A. Sunto d'una memoria di A. Genocchi intorno ai principii della geometria.  
Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino. Vol. XII. 1877.
- Genocchi, A. Sur un mémoire de David de Foncenex et sur les géométries non-Euclidiennes.  
Mémoires de l'Académie Royale de Turin. T. XXIX. 1877.
- \*Günther, S. Ziele und Resultate der neuern Math. Histor. Forschung. Erlangen. 1876.  
Grünert's Archiv P. 60.
- \*Günther, S. Sulla possibilità di dimostrare l'assioma delle parallele mediante considerazioni stereometriche complemento alla geometria assoluta di Bolyai. Traduz. di Sparagna.  
Giornale di Matematiche. Vol. XIV. 1876.
- Günther, S. Zwei neuere Werke über die Principien der Raum und Naturlehre.  
Kosmos. T. I, 12 Heft. März. 1878.
- \*Halphen, G. Recherches de géométrie à  $n$  dimensions.  
Bull. Soc. Math. T. II. 1873.
- \*Halsted, G. B. Bibliography of Hyper-Space and Non—Euclidean Geometry.  
American Journal of Mathematics pure and applied.—Baltimore. Vol. I, № 3, № 4, 1873. Vol. II, № 1, 1879. in-4.

- \*Helmholtz, H. Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie.  
Heidelberg. Verhandl. Nat. Med. T. IV. 1868, T. V. 1871.
- \*Helmholtz, H. Ueber die Thatsachen die der Geometrie zum Grunde liegen.  
Nachrichten, Göttingen. 1868.
- \*Helmholtz, H. Sur les faits qui servent de base à la Geometrie.  
Memoires de la Socie. des Sciences de Bordeaux. T. V. 1868.
- \*Helmholtz, H. Les axiomes de la géométrie, leur origine et leur signification.  
Revue scientifique de la France et de l'Etranger. № 51. Paris. 1877. in-4.
- \*Helmholtz, H. Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome.  
Populäre wissenschaftliche Vorträge. 3-s Heft. Brauns. 1876. in-8.
- \*Helmholtz, H. The Origin and meaning of Geometrical Axioms.  
Part. I, Mind., № III. 1876; Academy Feb. 12, 1870, vol. I; Nature, vol. IV;  
Nature, vol. V; Academy, vol. III; Part II, Mind, April 1878.
- \*Гельмгольцъ. О происхождении и значении геометрическихъ аксіомъ. Знание № VIII. 1876.  
Спб. in-8.
- Hoffmann, J. Das elfte Axiom der Elemente des Euclides. Halle. 1859.
- Hoffmann, J. Resultate der Nicht-Euklidischen oder Pangeometrie.  
Zeits. für Math. Unterricht. T. IV. 1873.
- \*Hoüel, J. Essai d'une Exposition rationnelle des principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire.  
Grünert's Archiv. 1863.
- \*Hoüel, J. Essai critique sur les Principes fondamentaux de la Geometrie. Paris. 1867,  
in - 8.
- \*Hoüel, J. Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe  
de la theorie des paralleles dit Postulatum d'Euclide.  
Nouvelles annales de Mathématiques. T. IX. 1870.  
Giornale di Mat., T. VIII. 1870.
- \*Hoüel, J. Du rôle de l'experience dans les sciences exactes. Prague. 1875.
- \*Hoüel, J. Переведено на нѣмецкій яз. Müller.  
Grünert's Archiv, Vol. 59. 1876.
- \*Hoüel, J. Théorie élémentaire des Quantités complexes. 4-e Partie. 1876.
- \*Гуланъ. Опытъ геометріи о четырехъ измѣреніяхъ. Геометрія синтетическая. Тифлисъ.  
1877. in-8.
- Ingleby, C. M. Profes. Clifford on Curved Space. Nature, vol. VII. 1873.
- \*Jacobi, C. G. J. De binis quibuslibet functionibus homogeneis, ect.  
Crelle Journ. Bd. XII, 1834.
- \*Jordan, C. Essai sur la Geometrie à  $n$  dimensions.  
Comptes Rendus T. LXXV. 1872.  
Bulletin de la Soc. Math., T. III., T. IV.
- \*Jordan, C. Généralisation du théorème d'Euler sur la courbure des surfaces dans l'espace  
à  $m+k$  dimensions.  
Comptes Rendus., T. LXXIX, 1874.
- \*Jordan, C. Sur la theorie des courbes dans l'espace à  $n$  dimensions.  
Comptes Rendus. T. LXXIX 1874.
- \*Killing, W. Ueber zwei Raumformen mit constanter positiver Krümmung.  
Borchard's Journal. Bd. 86. 1878.



- \*Killing, W. Ueber einige Bedenken gegen die Nicht-Euklidische Geometrie.  
Hoffm. Zeits. T. VII. 1879.
- \*Klein, F. Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.  
Göttingen, Nachrichten. Aug. 1871.
- \*Klein, F. Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.  
Mathemat. Annal. T. IV. № 4, 1871.
- \*Klein, F. Sur la géométrie dite non-euclidienne. Bulletin des Sciences Mathématiques  
et Astronomiques. T. II. 1871.
- \*Klein, F. Ueber neuere geometrische Forschungen. Erlangen. 1872.
- \*Klein, F. Ueber gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen.  
Mat. Ann. T. V. 1872.
- \*Klein, F. Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie.  
Mat. Ann. T. V. 1872.
- \*Klein, F. Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.  
Mathem. Ann. T. VI. 1873.
- \*Klein, F. Nachtrag zu dem „zweiten Aufsätze über Nicht-Eukl. Geometrie“.  
Math. Annal. T. VII. 1874.
- \*Klein, F. Ueber eine neue Art der Riemannschen Flächen.  
Math. Annal. T. VII. 1874.
- Klein, F. Jahrbuch über die Fortschritte der Math.  
Jahrgang 1873. Heft. 2. Berlin. 1875.
- \*Klein, F. Ueber die Sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.  
Math. Ann. T. VII. 1874.
- Kober, J. Ueber die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe.  
Zeits. für Mathem. und Naturwis. Unter. T. I. 1870.
- \*Kober, J. On infinity and the new geometry.  
Zeits. für Math. Unterricht. 1872.
- \*König, J. Ueber eine reale Abbildung der Nicht-Euklidischen Geometrie.  
Göttingen, Nachrichten. März. 1872.
- \*Krause, A. Kant und Helmholtz über den Ursprung und die Bedeutung der Rauman-  
schauung und der geometrischen Axiome. Schauenburg. 1878.
- \*Kronecker, L. Ueber Systeme von Functionen mehrer Variabeln.  
Monatsbericht der Kgl. Akademie zu Berlin. P. I, März, 1869. P. II, August,  
1869.
- Hugo, M. L. Note sur la géométrie panimaginaire de  $\frac{m}{n}$  dimensions.  
Bulletin de la Société Mathématique de France. T. IV. pag. 92.
- Lamarle, E. Sur la géométrie sans postulat et sur la théorie des parallèles.  
Bulletins de l'Académie Royale des Sciences de Belgique. T. XXXI. 1871.
- \*Land, J. P. N. Kant's Space and Modern Mathematics. Mind. II, № 5, Jan., 1877.
- \*Land, J. P. N. Critical Notice of Erdmann's „Die Axiome der Geometrie“.  
Mind. III, 1878.
- \*Lewes, G. Imaginary Geometry and the truth of Axioms. Problems of Life and Mind,  
1 ser., vol. II. London. 1875.
- Lewis. Applications of geometry of four dimensions to determine momenty of inertia  
of bodies without integration.  
Quarterly Journal of pure et applied Mathematics. 1879. № 62.

- \*Liard, L. Des Définitions géométriques et des définitions empiriques. Paris. 1872. in-8.
- \*Lie, S. Zur Theorie eines Raumes von  $n$  Dimensionen.  
Göttingen, Nachrichten. Nov. 1871.
- \*Lie, S. Ueber diejenige Theorie eines Raumes mit beliebig vielen Dimensionen, die der Krümmungs-Theorie des gewöhnlichen Raumes entspricht.  
Göttingen, Nachrichten, Mai, 1871.
- \*Liebmann, O. Zur Analysis der Wirklichkeit. Strassburg. 1876.
- \*Lindemann, F. Ueber unendlich kleine Bewegungen starrer Körper bei allgemeiner projectivischer Massbestimmung. Erlang., Berl. 1873.  
Mathemat. Ann. T. VII. 1874.
- Lionnet. Sur le postulat d'Euclide.  
Comptes Rendus. T. 70. № 1. 1870.
- Lipschitz, R. Mémoires de l'Académie de Berlin. Jan. 1869.
- \*Lipschitz, R. Untersuchungen in Betreff die ganzen homogenen Functionen von  $n$  Differentialen.  
Borchardt's Journal, Bd. LXX, Bd. LXXII. 1869 и 1870.
- \*Lipschitz, R. Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung.  
Borchardt's Journal, Bd. LXXIV. 1872.  
Bulletin des Sciences Mathématiques, T. IV. 1873.
- \*Lipschitz, R. Extension of the Planet-problem to a space of  $n$  dimensions and of constant integral curvature.  
Quarterly Jour. Math. T. XII. 1871.
- \*Lipschitz, R. Entwicklung einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von  $n$  Differentialen.  
Borchardt's Journal, T. LXXI. 1871.  
Bulletin des Sciences Math. T. IV, T. V. Paris. 1873.
- \*Лобачевскій, Н. И. О началахъ геометріи.  
Казанскій Вѣстникъ 1829 и 1830 гг. Казань.
- \*Лобачевскій, Н. И. Воображаемая геометрія.  
Ученныя записки Импер. Казанскаго универ. кн. I. 1835 г.
- \*Лобачевскій, Н. И. Новыя начала Геометріи съ полной теоріей параллельныхъ.  
Ученныя записки Импер. Казанскаго универ. 1835 г.—кн. III, 1836 г.—кн. II и кн. III, 1837 г.—кн. I, 1838 г.—кн. I и кн. II.
- \*Лобачевскій, Н. И. Примѣненіе воображаемой геометріи къ нѣкоторымъ интеграламъ.  
Ученныя записки Казанскаго универ. 1836.
- \*Lobatschewsky. Géométrie imaginaire.  
Crelle's Journal Bd. XVII. 1837.
- \*Lobatschewsky. Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin. 1840.
- \*Лобачевскій, Н. И. Пангеометрія.  
Ученныя записки Импер. Казанскаго универ. 1855 г.—кн. I.
- \*Lobatschewsky. Pangéométrie, ou précis de géométrie fondée sur une theorie générale et rigoureuse des parallèles. Kazan. 1855.
- \*Lobatschewsky. Etudes géométriques sur la théorie des parallèles; suivi d'un extrait de la correspondance de Gauss et de Schumacher. Traduit de l'allemand par J. Hoüel. Paris. 1866.

- \*Lobatschewsky.** Pangeometria o sunto di geometria fondata sopra una theoria generale e rigorosa delle parallele.  
Versione dal Francese, sull' Edizione di Kazan del 1855. Seconda edizione. Napoli. 1874.  
Giornale di Matematiche, vol. V.
- \*Lüroth, J.** Ueber Bertrand's Beweis des Parallelenaxioms.  
Schlömilch. Zeitschrift. T. XXI. 1876.
- Massimino.** Sugli elementi di geometria di Euclide e gli studi geometrici sulla teoria delle parallele di N. I. Lobatschewsky ed il saggio critico sui principii fondamentali della geometria elementare di J. Hoüel. Firenze. 1870.
- \*Mehler.** Ueber die Benutzung einer Vierfachen Mannigfaltigkeit zur Ableitung orthogonaler Flächensysteme.  
Borchardt's Journ. Bd. 84. Dec. 1877.
- Michelis.** Ist die Annahme eines Raumes von mehr als drei Dimensionen wissenschaftlich berechtigt? Freiburg. 1879.
- \*Munro, C.** Nature, vol. XV, № 391 April 26, 1877. p. 547.
- \*Munro, C.** Flexure of Spaces.  
Lond. Math. Soc. Vol. IX.
- \*Munro, C.** „Inside Out.“  
Nature. Vol. XVIII. № 448, May 30, 1878.
- \*Netto.** Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.  
Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 86. 1878.
- \*Newcomb, S.** Elementary theorems relating to the geometry of a space of three dimensions and of uniform positive curvature in the fourth dimension.  
Borchardt's Jour., Bd. 83. 1877.
- \*Newcomb, S.** Note on a class of Transformations which Surfaces may undergo in Space of more than three dimensions.  
American Jour. of Math., T. I. 1878.
- Newcomb, S.** Astronomy, p. 513.
- \*Nöther, M.** Zur Theorie der algebraischen Functionen mehrerer complexer Variabeln.  
Göttingen Nachrichten. 1869.
- \*Ovidio (d'), E.** Studio sulla geometria proiettiva.  
Annali di Matematiche. T. VI. 1874.
- \*Ovidio (d'), E.** Sopra alcuni luoghi ed involoppi di 1° e 2° Grado in Geometria Proiettiva.  
Rendic. della Real. Accad. della Sc. Mat. di Napoli. 1875.
- \*Ovidio (d'), E.** Le serie triple e quadruple di complessi lineari nella Geometria Metrico-Proiettiva.  
Atti della Real. Accad. dei Lincei. Serie II, T. III. 1876.
- \*Ovidio (d'), E.** Nota sui Determinanti di Determinanti.  
Atti della Real. Accad. della Scienze di Torino. Vol. XI. 1876.
- \*Ovidio (d'), E.** Sulle Reti di Complessi lineari nella Geometria Metrico-Proiettiva.  
Atti della Real. Accad. dei Lincei. Serie II, T. III. 1876. Roma.
- \*Ovidio (d'), E.** Alcune Proprietà Metriche dei Complessi e delle Congruenze lineari in Geometria Proiettiva.  
Atti della R. Acad. dei Lincei. Serie II, T. III. 1876. Roma.
- \*Ovidio (d'), E.** Le proiezioni ortogonali nella Geometria Metrico-Proiettiva.  
Atti della R. Accad. della Scienze di Torino. Vol. XI. 1876.



- \*Ovidio (d'), E. Le Funzioni metriche fondamentali negli Spazi di quante si vogliano Dimensioni e di curvatura costante.  
Atti della R. Accademia dei Lincei. Serie III, Vol. I. 1877. Roma.
- \*Ovidio (d'), E. Les fonctions métriques fondamentales dans un espace de plusieurs dimensions et de courbature constante.  
Mathem. Annalen. Bd. XII. 1877.
- \*Ovidio (d'), E. Ricerche sui Sistemi indeterminati di Equazioni lineari.  
Atti d. R. Accad. della Sc. di Torino. Vol. XII. 1877.
- \*Ovidio (d'), E. Addizione alla Nota sui Determinanti di Determinanti.  
Atti d. R. Accad. d. Sc. di Torino. Vol. XII. 1877.
- \*Ovidio (d'), E. I Complessi e le Congruenze lineari nella Geometria Proiettiva.  
Ann. di Matem., Serie II, T. VII.
- Pagni. Nuove considerazioni sui poligoni e sui poliedri di specie superiore. Firenze. 1872.
- Pietzker. Replik gegen die Bemerkungen des Dr. Killing und Prof. Frischauf.  
Hofm. Zeits. T. VIII. 1879.
- \*Potocki, S. Notice historique sur la vie et les travaux de N. I. Lobatchewsky.  
Bulletino di Bibliographia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche du Prince B. Boncompagni T. II. 1869.  
Переводъ рѣчи, произнесенной на торжественномъ собраніи Императорскаго Казанскаго университета 5 ноября 1868 года, профессоромъ Е. Янишевскимъ.
- \*Réthy. Die Fundamental Gleichungen der nicht-Euklidischen Trigonometrie auf elementarem Wege abgeleitet.  
Grunert's Archiv. T. 58. 1876.
- \*Riemann, B. Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen.  
Habilitationsschrift von 10 Juni 1854. Abhand. der König. Gesellsch. zu Göttingen. Bd. XIII.
- \*Riemann, B. Sur les hypothèses qui servent de fondement à la Géométrie. Trad. par Hoüel.  
Annali di Matematica, Serie II, T. III. 1870.
- \*Riemann, B. Translated into English by Prof. Clifford.  
Nature, Vol. VIII. 1873.
- \*Riemann, B. Riemann's Werke, Leipzig. 1876.
- \*Rodwell, G. On Space of Four Dimensions.  
Nature, Vol. VIII. 1873.
- \*Rosanes, J. Ueber die neuesten Untersuchungen in Betreff unser Anschauung vom Raume.  
Breslau. 1871. in-8.
- \*Saleta, F. Exposé sommaire de l'idée d'espace au point de vue positif. Paris. 1872.
- \*Salmon, G. On the degree of the surface reciprocal to a given one.  
Irish. Acad. Trans. T. XXIII. 1859.
- \*Salmon, G. Lessons on Modern Higher Algebra. 1866. p. 212 ect.
- \*Salmon, G. Extension of Chasles' Theory of Characteristics to Surfaces.
- \*Sartorius von Waltershausen, W. Gauss. Zum Gedächtniss. Leipzig. 1856. in-4.
- \*Schlaefli, L. Nota alla memoria del Sig. Beltrami sugli spazie de la curvatura costante.  
Annali di Mat. Serie II, T. V. 1870.

- \*Schlaefli, L. Beltrami. Osservazione sulla precedente Memoria del Sig. Prof. Schläfli. Annali di Matematiche. Vol. V. 1873.
- \*Schering, E. Linien, Flächen und höhere Gebilde im mehrfach ausgedehnten Gauss'schen und Riemann'schen Raume. Göttingen, Nachrichten. 1873.
- Schlegel, V. System der Raumlehre nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre und als Einleitung in dieselbe. Leipzig. 1875.
- \*Schlegel, V. Ueber neuere geometrische Methoden und ihre Verwandtschaft mit der Grassmann'schen Ausdehnungslehre Zeits. für Math. u. Phys. T. XXIV. Leipzig. 1879.
- \*Schmitz-Dumond. Zeit und Raum in ihren denknöthwendigen Bestimmungen abgeleitet aus dem Satze des Widerspruchs. I. Leip. 1875.
- \*Schmitz-Dumond. Die Bedeutung der Pangeometrie. Leipzig. 1877.
- \*Schmitz-Dumond. Deduction des dreidimensionalen Raum. Vierteljahrsschrift für wissenschaft. Philosophie.
- Schweikart, F. K. Die Theorie der Parallellinien nebst Vorschlag zu ihrer Verbannung aus der Geometrie. Leip. 1808.
- Суворовъ. О характеристикахъ системъ трехъ измѣреній. Извѣстiя и Записки Казанскаго университета. Вып. I, 1871. Казань.
- \*Spitz, C. Die ersten Sätze vom Dreiecke und den Parallelen. Nach Bolyai's Grundsätze. Leipzig.
- \*Spitz, C. Grünert's Archiv, T. LVII; Lit. Ber. CCXXVI, 10.
- \*Spottiswoode, W. Nouveaux exemples de la representation, par des figures de géométrie des conceptions analytiques de géométrie à  $n$  dimensions. Comptes Rendus. T. LXXXI. 1875.
- \*Spottiswoode, W. Sur la representation des figures de géométrie à  $n$  dimensions par les figures corrélatives de géométrie ordinaire. Comptes Rendus. T. LXXI. 1876.
- \*Spottiswoode, W. Address to the British Association at Dublin. August 14, 1878.
- \*Stahl, H. Ueber die Massfunctionen der analytischen Geometrie. Berlin. 1873.
- \*Stumpf, C. Phil. Monatshefte, B. XIV, pag. 13—30.
- \*Sylvester, J. J. On certain general Properties of Homogeneous Functions. Camb. and Dub. M. Journ., Feb. 1851.
- \*Sylvester, J. J. Partitions of Numbers. Lectures. London. 1859.
- \*Sylvester, J. J. Inaugural Address to Math. Section, British Association at Exeter. Nature, vol. I, August, 1869. Republished with Notes in: „Laws of Verse“. Longmans. 1870.
- \*Sylvester, J. J. Barycentric Projections. Phil. Mag., or Br. Assoc'n.
- \*Tait, P. G. Mentions Hyper-Space in his Address as Pres. of Math. Sect. of Brit. Assoc. at Edinburgh. Brit. Assoc. Rep. 1871.
- \*Tait, P. G. Recend Advances in Physical Science. Introduc. Second edit. London. 1876.
- \*Tait, P. G. Review of Zöllner. Nature, March 28, 1878.
- \*Tannery, P. La Géométrie Imaginaire et la Notion d'Espace. Revue philosophique. Nov. 1876; Juin, 1877.

- \*Tognoli.** Sulla corrispondenza multipla fra due Spazi a tre dimensioni.  
Giornale di Matematiche. Vol. X. 1872.
- \*Torelli.** Il teorema di Viviani sulla pseudosfera.  
Giornale di Matematiche. Vol. X. 1872.
- \*Tilly (de), M.** Études de mécanique abstraite.  
Mémoires couronnés de l'Académie Royale de Belgique. T. XXI. 1868.
- \*Tilly (de), M.** Lettre de M. A. Genocchi à M. A. Quetelet sur diverses questions mathématiques.  
Bul. de l'Acad. Royale de Belgique. T. XXXVI. 1873.
- Trançon.** De l'infini ou Métaphysique et Géométrie à l'occasion d'une Pseudo-géométrie.  
Evreux. 1871.
- Ващенко-Захарченко, М. Е.** Введение къ Началамъ Евклида. Кіевъ. 1880 г. in-8.
- \*Weissenborn, H.** Ueber die neueren Ansichten vom Raum und von den geometrischen Axiomen.  
Vierteljahrschrift für Wissenschaftliche Philosophie, II, zweites Heft, Erstes Artikel. pp. 222—239. 1878.
- \*Witte, H.** Parallelentheorie. Wolfenbüttel. 1867.
- \*Young, G. P.** The relation which can be proved to subsist between the Area of a Plane Triangle and the Sum of the Angles on the Hypothesis that Euclid's twelfth Axiom is False. Read before the Canadian Institute, 25 Feb., 1860.  
Canadian Journal of Industry, Science and Art. New Series, vol. V, 1860.
- \*Zöllner.** On Space of Four Dimensions.  
Quarterly Journal of Science. Vol. VIII. 1878.  
Giornale di Matematiche. Vol. XV. 1877.
- \*Zöllner, J.** Zur Metaphysik des Raumes. Wissenschaftliche Abhandlungen. T. II, 2 Theil. Leipzig. 1878.
- \*Zöllner, J.** Principien einer Elektrodynamischen Theorie der Materie. Leipzig. 1876.
- \*Zolt.** Saggio di Pangeometria.
- \*** О теоріи параллельныхъ линій Н. И. Лобачевского.  
Математич. Сборникъ. Т. III. 1868.



## СПИСОКЪ СОЧИНЕНІЙ, КОТОРЫМИ АВТОРЪ ПОЛЬЗОВАЛСЯ ПРИ СОСТАВЛЕНІИ НАСТОЯЩАГО СОЧИНЕНІЯ.

---

- Ampère, A. M.** Essai sur la philosophie des sciences. T. I—II. Paris. 1833—43.
- Archimedes.** Admirandi Archimedis Syracusani monumenta omnia mathematica ect. ex traditione doctissimi viri D. Francissi Maurolici. Panormi. 1685. in-fol.
- Archimedes.** Archimedis Syracusani philosophi ac geometrae excellentissimi opera, quae extant omnia, latinitate iam olim donata, nunc primum in lucem edita. Basileae. 1544. in-4.
- Archimedes.** Archimedis Opera quae extant novis demonstrationibus commentariisque illustrata. Per Davidem Rivalentum a Flurantia Coenomanam, ect. Parisiis. Apud Claudium Morellum.
- Argant.** Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques. 2 ed. précédée d'une préface par J. Houël. Paris. 1874. in-8.
- Apollonius.** Apollonii Pergaei conicorum libri octo, et sereni antissensis de sectione cylindri et conii libri duo. Oxoniae. 1710. in-fol.
- Abreu (d').** Supplément à la traduction de la géométrie d'Euclide de M-r Peyrard, publiée en 1804, et à la géométrie de M. Legendre suivi d'un essai sur la vraie théorie des parallèles. Agen. 1809. in-8.
- Adhémar.** Traité de géométrie. Paris. 1843. in-8.
- Bretschneider.** Die Geometrie und die Geometer vor Euklides. Leipzig. 1870. in-8.
- Barrow.** Archimedis Opera. Apollonii Pergaei conicorum libri IV. Londoni. 1675. in-4.
- Буняковский.** Параллельныя линіи. Ученныя Записки Императорской Академіи наукъ. Т. II, выпускъ 3. Спб. 1853. in-8.
- Bossut.** Histoire générales des mathématiques, depuis leur origine jusqu'à l'année 1808. T. I—II. Paris. 1810.
- Bonnet.** Mémoire sur la théorie générale des surfaces. Journal de l'Ecole Polytechnique, 32 Cahier. T. XIX. Paris. 1848.
- Bertrand, L.** Éléments de Géométrie. Genève. 1812. in-4.
- Bertrand, L.** Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques, prise dans toute son étendue. T. I—II. 1778. Genève. in-4.

- Bertrand, J.** Traité de calcul différentiel et de calcul intégral. T. I—II. 1864—70. Paris. in-4.
- Bertrand, J.** Programme des leçons de géométrie rationnelle et appliquée, professées en la mairie de Gien. Gien. 1853. in-8.
- Comte, Aug.** Cours de philosophie positive. T. I—II. 1830—35. Paris.
- Comberousse et Rouché.** Traité de géométrie élémentaire. Paris. 1866. in-8.
- Catalan.** Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire. 5 ed., revue. Paris. 1872. in-8.
- Cauchy.** Recherches sur les polyèdres. 1-e mémoire. Journal de l'Ecole Polytechnique, 16 Cahier. T. IX. Paris. 1813. in-4.
- Cauchy.** Recherches sur les polygones et les polyèdres. 2-e mémoire. Journal de l'Ecole Polytechnique, 16 Cahier. T. IX. 1813. Paris. in-4.
- Chasles.** Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie. 2-e ed. Paris. 1875. in-4.
- Chasles.** Traité de géométrie supérieure. Paris. 1852. in-8.
- Cantor.** Euclid und sein Jahrhundert. Zeitschrift für Mathematik und Physik. XII Jahrgang. Supplement. Leipzig. 1867. in-8.
- Cirrodde.** Leçons de géométrie théorique et pratique. Dijon. 1836. in-8.
- Clairaut.** Éléments de géométrie. Paris. 1765. in-8.
- Caille (La).** Leçons élémentaires de mathématique ou elements d'algebre et de géométrie. Paris. 1764. in-8.
- Cunha (Da).** Principes de mathématiques. Traduit du portugais par d'Abreu. Paris. in-8. 1816.
- Duhamel.** Éléments de calcul infinitésimal. T. I—II. Paris. 1856. Paris.
- Duhamel.** Des méthodes dans les sciences de raisonnement. T. I—II—III—IV—V. 1865, 66, 68, 70, 73. Paris. in-8.
- Dienger.** Abbildung krummer oberflächen auf einander und anwendung derselben auf höhere Geodäsie. Braunschweig. 1858. in-8.
- Deidier.** La science des géomètres, ou la théorie et la pratique de la géométrie. Paris. 1739. in-4.
- Escoubès.** Compositions mathématiques, ou problèmes géométriques et trigonométriques. Paris. 1854. in-8.
- Eutocius.** Eutocii Ascalonitae in Archimedis libros de sphaera et cylindro, atque quosdam, Commentaria, nunc primum et Graece et Latine in lucem edita. Basileae. Joannes Hernagius excudi fecit. 1544.
- Frischauf.** Elemente der Geometrie. Leipzig. 1877.
- Fuss.** Leçons de géométrie à l'usage du corps imperial des cadets nobles de terre. St. Petersburg. 1798. in-8.
- Gauss.** Recherches générales sur les surfaces courbes. Paris. 1852. in-8.
- Garnier.** Éléments de géométrie. Paris. 1812. in-8.
- Garnier.** Les réciproques de la géométrie. Paris. 1807. in-8.
- Gartz.** De interpretibus et explanatoribus Euclidis arabicis Schediasma historicum. Halle. 1823. in-4.
- Gottignies.** (Aegidio Francisco). Elementa geometriae planae. Romae. 1669. in-12.
- Günther.** Développement historique de la theorie des polygones étoilés. Bulletino di Bibliographia e storia delle scienze matematiche. T. VI. 1873. Roma. in-4.

- Günther.** Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften. Leipzig. 1876. in-8.
- Hankel.** Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter. Leipzig. 1874. in-8.
- Harnisch.** Die Raumlehre oder die Messkunst, gewöhnlich Geometrie genant. Breslau. 1837. in-8.
- Hesse.** Die vier Species. Leipzig. 1872. in-8.
- Hofer.** Histoire de l'astronomie. Paris. 1873. Hachette. in-18.
- Hofer.** Histoire des mathématiques. Paris. 1874. Hachette. in-18.
- Humboldt.** Cosmos, essai d'une description physique du monde. T. I—IV. Paris. 1855—59. in-8.
- Klügel.** Mathematisches Wörterbuch. T. I—V. Leipzig. 1803—1836. in-8. T. VI—VII. Supplement. Grünert.
- Knorr.** Versuch einer Darstellung der Elemente der Geometrie bis zum 29-sten Satze des 1-sten Buches der Elemente Euclids. Kiew. 1849. in-16.
- Лавровъ.** Очерки истории физико-математическихъ наукъ. Спб. 1865. in-8.
- Legendre.** Elements de géométrie, avec notes. 15 edit. Paris. 1862. in-8.
- Lambert.** Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques. Histoire de l'Académie Royale des Sciences et belles lettres, année MDCCLXI. Berlin. 1768. in-4.
- Libri.** Histoire des sciences mathématique en Italie, depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du XVII siècle. T. I—IV. Paris. 1833—40—41. in-8.
- Lacroix.** Essai sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier. Paris. 1816. in-8.
- Lacroix.** Éléments de géométrie. 10 ed. Paris. 1814. in-8.
- Minding.** Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen aufeinander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichen Krümmungsmaasse. Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. XIX. 1839. Berlin. in-4.
- Mansion.** Sur la simplification de l'enseignement de la géométrie, par l'emploi de la méthode des limites. Gand. 1872. in-8.
- Mansion.** Sur le premier livre de la géométrie de Legendre à propos de quelques traités récents. Gand. 1871. in-8.
- Montucla.** Histoire des mathématiques. T. I—IV. 1758—1802. Paris. in-fol.
- Montucla.** Histoire des recherches sur la quadrature du cercle. Paris. 1831. in-8.
- Matthiessen, L.** Grundzüge der Antiken und Modernen Algebra der Litteralen Gleichungen. Leip. 1878. in-8.
- Mauduit.** Leçons de géométrie théorique et pratique. T. I—II. Paris. 1809. in-8.
- Nesselmann.** Die Algebra der Griechen. Berlin. 1842. in-8.
- Остроградскій.** Руководство начальной геометрии. Т. I—II. 1855—57—60. Спб. in-8.
- Ozanam.** Récréations mathématiques et physiques. T. I—IV. Paris. 1749—1750. in-8.
- Ozanam.** La géométrie pratique ect. Paris. 1693. in-12.
- Poinsot.** Sur la théorie des polyèdres. Paris. 1858. in-4.
- Peyrard.** Oeuvres d'Archimède, traduites littéralement, avec un commentaire. T. I—II. Paris. 1803. in-8.
- Potts.** Sammlung geometrischer Aufgaben und Lehrsätze für den Schulgebrauch und zum Selbstunterricht. Hannover. 1860.



- Pascal.** Réflexions sur la géométrie en général. Pensées de Pascal. Paris. 1842. in-12.
- Procli Diadochi** in primum Euclidis elementorum librum commentarii ex recognitione Godofredi Friedlein. Lipsiae. 1873. in-12.
- Ramsauer.** Die Formen, Maass-und Körperlehre, oder die Elemente der Geometrie. Stuttgart. 1826. in-8.
- Rudel.** Von den Elementen und Grundgebilden der synthetischen Geometrie. Versuch einer Erweiterung der Lehre von den Formen unserer Rauman-schauung. Bamberg. 1877. in-8.
- Simplicius.** Simplicii commentarii in quatuor aristotelis libros de coelo, cum textu euisdem. Venetiis. 1526. in-fol.
- Sédillot, L. Am.** Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux. T. I—II. 1845—49. Paris. in-8.
- Спенсеръ, В. Г.** Геометрія путемъ изобрѣтенія. Переводъ съ англ. Ф. Резенера. Спб. 1878. in-8.
- Spottiswoode, W.** Die Mathematik in ihren Beziehungen zu den anderen Wissenschaften. Leipzig. 1879. in-8.
- Suter.** Geschichte der mathematischen Wissenschaften. T. I—II. Zürich. 1873—75. in-8.
- Schmitz-Dumant.** Die mathematischen Elemente der Erkenntnistheorie. Berlin. 1878. in-8.
- Scheffler.** Der Situationskalkul. Versuch einer arithmetischen Darstellung der niederen und höheren Geometrie auf Grund einer abstrakten auffassung der räumlichen Grössen, Formen und Bewegungen. Braunschweig. 1851. in-8.
- Tannery.** La theorie de la connaissance mathématique. Revue philosophique de la France et de l'Étranger. № 2. Fev. 1879. Paris. in-8.
- Todhunter.** The conflict of Studies and other essays on subjects connected with educa-tion. London. 1873. in-8.
- Wiegand.** Lehrbuch der Stereometrie und sphärischen Trigonometrie. Halle. 1877. in-8.
- Wantzel.** Recherches sur les moyens de reconnaitre si un problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas. Journal de Mathématiques pures et appliquées. Tome II. Année 1837. Paris. 1837. in-4.
- Wilson.** Euclide come testo di geometrie elementare. Giornale di Matematiche. Vol. VI. 1868. in-4.
- Цвѣтковъ.** О поверхностяхъ могущихъ быть преобразованными однѣ въ другія безъ разрыва и безъ сгиба своихъ частей. Спб. 1864. in-8.

Добавленіе къ списку „Началъ Евклида“, вышедшихъ съ 1482 по 1880 годъ.

1557. In Euclidis elementa geometrica demonstrationum libri VI. Lyon. in-fol.
  1685. Euclides teutsch redender, oder 8 Bücher v. d. Messkunst ect. von A. Pirckenstein. Wien. in-4.
  1693. Euclidis. Planorum ac Solidorum Elementa, ed. H. Rondelli. Bonon. in-8.
  1730. Les elements d' Euclide, expliq. par Dechalles. Nouv. ed. Paris.
  1748. The Elements of Euclid. By C. F. Milliet de Chales. Done out of French by R. Williams. Fifth ed. London. in-12.
  1766. Euclide, Elementi, tradotti. Verona. in-8.
  1809. The elements of Euclid, viz. the first six books, with the eleventh and twelfth, by R. Simson. London. in-8.
  1818. I primi sei libri e l'undecimo e duodecimo degli Elementi di Euclide. Emend. ecc. da V. Flauti. Napoli. in-4.
  1847. Neljä ensimmäistä Kirjaa ynnä viidennen määritykset Euklideen Alkeista Mittaus-tieteesä W. Kilpinen suomentaja. Helsingissä. in-8.
  1860. Euclid's Elements of Geometry ect. by R. Potts. London. in-8.
-

## Опечатки.

---

Страница.	Строка.	Напечатано:	Слѣдуетъ читать:
4	16 снизу	непримѣнимъ	непримѣнимъ
5	3 —	положеній	предложеній
10	11 —	треугольнка	треугольника
60	4 —	периметръ	площадь
71	3 —	0.003	0.0003
186	9 —	<i>A</i>	<i>B</i>
431	10 —	<i>SOTMPL</i>	<i>SQTMPL</i>
477	8 —	Дюгимель	Дюгамель
624	14 сверху	цилиндра	цилиндра
731	1 —	Неевклидовской	Неевклидовской

---